理学硕士学位论文

广义 Orlicz 空间的 H 性质

丛滢伊

哈尔滨理工大学

2012 年 3 月

国内图书分类号：O177.2

理学硕士学位论文

广义 Orlicz 空间的 H 性质

硕 士 研究生： 丛滢伊

导 师： 崔云安

申请学位级别： 理学硕士

学科、专业： 基础数学

所 在 单 位： 应用科学学院

答 辩 日 期： 2012 年 3 月

授予学位单位： 哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.2

Dissertation for the Master Degree in Science

H-property of generalized Orlicz spaces

Candidate: Cong Yingyi

Supervisor: Cui Yun'an

Academic Degree Applied for: Master of Science

Specialty: Fundamental Mathematics

Date of Oral Examination: March, 2012

University: Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《广义Orlicz空间的H性质》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：丛滢伊　　　日期：2012年 3月28日

哈尔滨理工大学硕士学位论文使用授权书

《广义 Orlicz 空间的H性质》系本人在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保密 □， 在　　年解密后适用授权书。

不保密 ☑。

(请在以上相应方框内打 √)

作者签名：丛滢伊　　　日期：2012年 3月 28日

导师签名：　　　日期：2012年 3月 28日

广义 Orlicz 空间的 H 性质

摘　　要

广义 Orlicz 空间是 Orlicz 空间的推广，是一类具体的 Banach 空间．研究广义 Orlicz 空间的各种性质及其判定条件为一般的 Banach 空间储备了丰富的模型，便于更深层次的研究．本文研究的广义 Orlicz 空间是赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间，在这个空间中我们讨论了 H 点与端点的关系，赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件．本文分为如下三个部分：

首先，本文介绍了 Orlicz 空间这八十年来的发展过程、理论推广及国内外的研究进展．

其次，本文讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的单位球上的 H 点与 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件之间的关系，并且讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点与端点的关系．

最后，本文讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件．即讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质与 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件、M 是非严格凸之间的关系．在证明这个定理的过程中我们还讨论了在 Orlicz 函数 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件的情况下依范数收敛和依测度收敛的关系，以及在赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中弱收敛和序列有界之间的关系．

关键词 Orlicz 空间；广义 Orlicz 范数； H 点； H 性质

H -property of Generlized Orlicz Space

Abstract

Generalized Orlicz space is a extension of Orlicz space and it is a class of specific Banach spaces. The research of the properties and criteria of properties of generalizd Orlicz space offers us many kinds of models of Banach space and it makes easy for further research. In this paper, we research the Orlicz space equipped with the generalized Orlicz norm, the relationship between the H-point and the extreme point and the criterion of the H-property of Orlicz space equipped with the generalizd Orlicz norm. There are three parts in this paper. The important consequece of this paper are summarized as following:

First, this paper reviewed that research background, developing course and significance of Orlicz space theory and generalized Orlicz space during more than 80 years in the domestic and foreign.

Second, we discuss the relationship between H-point and extreme point in the Orlicz which space equipped with the generalizd orlicz norm and we also consider the relationship between the Orlicz function M which satisfies Δ_2—condition and H-point on the Orlicz space surface which equipped with the generalized Orlicz norm.We obtain one lemma and two theorems.

At last, we discuss the sufficient and necessary criteria of the H-property of Orlicz space equipped with the generalized orlicz norm. We discuss the relationship between the Orlicz space equipped with the generalized Orlicz norm has H-property, the Orlicz function satisfies Δ_2—condition and the condition of strict convexity. During the process of proof, we also research the relationship between the boundary of sequence and weak convergence, and the relationship between norm convergence and convergence in measure by Orlicz function satisfies Δ_2—condition.

Keywords Orlicz space, generalized Orlicz norm, H-point, H-property

目 录

摘 要……………………………………………………………………..I
Abstract………………………………………………………………….. II

第 1 章 绪论…………………………………………………………………1
1.1 Orlicz 空间理论的国内外发展概况…………………………………1
1.2 广义 Orlicz 空间……………………………………………………2
1.3 课题来源………………………………………………………………3
1.4 本文主要的研究内容…………………………………………………3
第 2 章 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点……………………..4
2.1 引言…………………………………………………………………4
2.2 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点………………………..5
2.3 本章小结……………………………………………………………8
第 3 章 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质……………………..9
3.1 引言…………………………………………………………………9
3.2 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质……………………..9
3.3 本章小结…………………………………………………………..20
结论……………………………………………………………………..21
参考文献………………………………………………………...............22
攻读学位期间发表的学术论文…………………………………………..26
致谢……………………………………………………………………..27

第1章 绪论

1.1 Orlicz 空间理论的创立及其发展

20 世纪 30 年代初[1]，著名波兰数学家 W. Orlicz 为了解决傅里叶级数中的某些问题首先引入了 $L_p(1\le p\le\infty)$ 空间的推广形式 Orlicz 空间．Orlicz 空间的引入形成了 Banach 空间研究的一个新的理论分支，这使得 Banach 空间有了具体的参考实例．Orlicz 空间为一般的 Banach 空间提供了大量的直观材料 20 世纪 30 年代中期[2,3]，Orlicz 给出了 Orlicz 范数的定义和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的具体形式．

20 世纪 50 年代，数学工作者 Nakano 在日本首先引进了模范数的定义并在 1950-1951 年间发表了许多关于模范数的文章，这些文章都被收录在《模半序线性空间》和《拓扑线性空间》中[4,5]．A. C. Zaanen 在 Orlicz 空间的发展过程中也做出过贡献[6]．20 世纪 20 年代中期，博士研究生 W. A. J. Luxemburg 在博士论文中首先引入了与 Orlicz 范数等价的 Luxemburg 范数[7]，并发表了许多与 Luxemburg 范数相关的文章．20 世纪 50 年代后期，在解决非线性分析的某些问题时 M. A. Krasnselskii 和 Ya. B. Rutickii 对于由 Orlicz 函数生成的并且不满足 Δ_2 条件的 Orlicz 空间进行了深入的研究，撰写并发表了许多文章，这些文章都是对 Orlicz 空间在积分方程上的应用的讨论．它们都被收录在 1958 年出版的《CONVEX FUNCTIONS AND ORLICZ SPACES》一书中[8]．这本书是第一本系统阐述 Orlicz 空间理论的书．哈尔滨工业大学教授吴从炘在第一时间把这本书翻译成中文，这为 Orlicz 空间理论在中国的发展做出了贡献．

20 世纪 60 年代初期，Orlicz 空间上有界线性泛函的表达式被 T. Ando 和 M. M. Rao 分别给出[9,10]．Sobolev 嵌入定理则被 N. S. Trudinger 和丁夏畦则从不同方面给予推广[11]，使得 Orlicz 空间理论成功的被应用在偏微分方程中．Urysohn 算子的全连续性的充分必要条件被郭大钧给出[12]．20 世纪 60 年代中期， Orlicz 空间列紧集的充分必要条件是被王廷辅证明的[13]．Orlicz 空间中有无条件基的充分必要条件是空间是自反的，这个结论是被 V. F. Gaposki 证明的[14]．20 世纪 70 年代， Orlicz 序列空间的基和它的同构问题是被以色列 Jerusalem 学派用空间引入常数的方法进行了讨论，并得到了大量好的结论．以色列 Jerusalem 学派是以 J. Lindenstrauss 和 L.

Tzafriri 为代表的[15,16]．同时在我们国内，吴从炘教授和赵善中教授等给出了 Orlicz 范数的计算公式[17]．

20 世纪 80 年代，国内关于 Orlicz 空间几何学的研究也得到了长足的发展．吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文编写的《Orlicz 空间几何理论》一书中收录了大量有关 Orlicz 空间几何学的研究成果及其详细的证明过程[18]．因为吴从炘、王廷辅的《Orlicz 空间及其应用》和陈述涛的《Geometry of Orlicz Spaces》等专著的相继出版[19,20]，所以在很大程度上丰富并完善了 Orlicz 空间理论．因为哈尔滨数学工作者们的不懈努力，使得中国的哈尔滨成为了世界上 Orlicz 空间几何理论的研究中心之一．

同时，在 20 世纪 50 年代中后期，Julian Musielak 首先引入了广义 Orlicz 空间，他详细研究了这个空间并得到了很多相关结论，这些结论中就包含五十年代末发表的定义在测度空间 $(G,\sum,\mu)$ 上的广义 Orlicz 空间，也就是我们现在所谓的 Musielak-Orlicz 空间[21]．正是由于对经典 Orlicz 空间理论研究的逐渐深入，所以后来很多数学工作者都在研究这个空间的几何性质，并得到了很多结论[22−31]．从此对广义 Orlicz 空间的研究蓬勃兴起．

Banach 空间的 H 性质在逼近论和概率论等方面有众多应用[32−34]．一个重要的结果是 $L_p(p>1)$ 空间具有 H 性质．1987 年，陈述涛、王玉文发表文章《Orlicz 空间的 H 性质》将上述结果推广到 Orlicz 空间[35]．1998 年，王廷辅、崔云安发表文章《关于 Orlicz 空间 H 性质的注记》将陈述涛、王玉文的结论推广到一般测度空间上[36]．

1.2 广义的 Orlicz 空间

新世纪以来，因为不同理论和应用的需求，人们给出了许多种 Orlicz 空间的推广形式．赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间就是 Orlicz 空间的一种具体的推广形式．广义 Orlicz 范数是被崔云安、Henryk. Hudzik、段丽芬于 2006 年引入的[37]，是 Orlicz 范数的推广形式，并且段丽芬、崔云安教授对赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的几何性质进行了一系列的研究[38−45]．证明了广义 Orlicz 范数是与 Orlicz 范数等价的，并且对赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的凸性、端点、强端点等进行了讨论．我们对赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的研究为其它形式的 Banach 空间研究提供了参考模型、研究方法和论证技巧．广义 Orlicz 范数的引入使得 Orlicz 空间有了新的研究方向．

1.3 课题来源

本课题来源于导师崔云安教授的哈尔滨理工大学优秀学科带头人项目.

1.4 本文的主要内容

本文重点讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点与 H 性质，主要分为以下两个部分：

1. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点.

本章讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的单位球面上的 H 点与 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件之间的关系，并且讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点与端点的关系，得到了两个定理.

2. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质.

本章讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件，得到了如果 Orlicz 函数 M 不满足 Δ_2 条件或 M 是非严格凸的，则赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间不具有 H 性质的结论，并证明了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件就是 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件且是严格凸的.

第2章 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点

2.1 引言

众所周知，Orlicz 空间中的 H 点是 H 性质的基础，Orlicz 空间中的 H 点及其性质已经被研究过，其结果收录在《Geometry of Orlicz Space》中[20]. 本章我们将 H 点及其性质推广到赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中.

我们给出一些基本概念：

本文用 X 表示 Banach 空间，X^* 表示 X 的对偶空间，$B(X)$ 表示 X 的单位球，$S(X)$ 表示 X 的单位球面, $p(t)$ 表示 M 的右导数，$N(v)$ 表示 $M(u)$ 的余函数，即 $N(v)=\sup\{u|v|-M(u):u\ge 0\}$，$T$ 表示定义在无原子的有限测度空间 $(G,\sum,\mu)$ 上的可测函数的全体.

定义 2.1[20]7 称 $M:R\to R$ 是一个 N 函数，如果 M 满足如下性质：

① M 是偶的、连续的、凸函数，且 $M(0)=0$

② $M(u)>0$，对所有的 $u\ne 0$ 成立

③ $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{M(u)}{u}=0$， $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{M(u)}{u}=\infty$

定义 2.2[20]7 令 $p(t)$ 满足：

① $p(t)$ 是右连续的且是单调非减的

② $p(t)>0$， $t>0$

③ $p(0)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$

那么我们称

$$q(s)=\sup\{t:p(t)\le s\}=\inf\{t:p(t)>s\}$$

为 $p(t)$ 的右反函数.

定义 2.3[20]7 令 M 是一个 Orlicz 函数，$p(t)$ 是 M 的右导数，$q(s)$ 是 $p(t)$ 的右反函数，那么我们称 $N(v)=\int_0^{|v|}q(s)ds$ 是 M 的余函数.

由定义 2.2 我们可以知道 $q(s)$ 同样满足① $\to$ ③.

定义 2.4[20]9 我们称 Orlicz 空间满足 Δ_2 条件是指：存在 $k>2$，$u_0\ge 0$，当 $u\ge u_0$ 时，满足 $M(2u)\le kM(u)$，记为 $M\in\Delta_2$.

我们用 $(G,\sum,\mu)$ 表示 Lebesgue 测度空间，M、N 是一对互余的 Orlicz 函数，用 $\rho_M(u)=\int_G M(u(t))dt$ 表示模.

$$L_M = \{u : \rho_M(\lambda u) < \infty, \exists \lambda > 0\}$$
$$E_M = \{u : \rho_M(\lambda u) < \infty, \forall \lambda > 0\}$$

定义 2.5[20]14 Orlicz 范数的定义：

$$\|u\|^o = \sup\left\{\int_G u(t)v(t)dt : \rho_N(v) \le 1\right\}$$
$$= \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1+\rho_M(ku)]$$

Luxemburg 范数的定义：

$$\|u\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_M(\frac{u}{\lambda}) \le 1\right\}$$

$(L_M, \|\cdot\|^o)$、$(E_M, \|\cdot\|^o)$、$(L_M, \|\cdot\|)$、$(E_M, \|\cdot\|)$ 都是 Banach 空间，分别用 L_M^o、E_M^o、L_M 和 E_M 表示.

定义 2.6[32] 广义 Orlicz 范数的定义：

$$\|u\|_p^o = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_M^p(ku)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (p>1)$$

$(L_M, \|\cdot\|_P^o)$、$(E_M, \|\cdot\|_P^o)$ 都是 Banach 空间，分别用 $L_{M,P}^o$ 和 $E_{M,P}^o$ 表示.

$$k^* = k^*(u) = \inf\left\{k > 0 : \rho_N(p(k|u|)) \ge 1\right\}$$
$$k^{**} = k^{**}(u) = \sup\left\{k > 0 : \rho_N(p(k|u|)) \le 1\right\}$$

显然有 $k^* \le k^{**}$， $K(u) = K_M(u) = \left[k^*, k^{**}\right] \ne \phi$.

定义 2.7[20]119 设 X 是一个 Banach 空间， $x \in S(X)$， 如果 $x_n \in X$， $x_n \xrightarrow{w} x$ 且 $\|x_n\| = \|x\| = 1$ 蕴涵 x_n 依范数收敛于 x， 那么我们称 x 是 $B(X)$ 的一个 H 点.

定义 2.8[20]51 令 M 是一个 Orlicz 函数，称区间 $[a,b]$ 为 M 的一个结构仿射区间，如果 M 在 $[a,b]$ 区间上是仿射的并且 M 在 $[a-\varepsilon,b]$ 和 $[a,b+\varepsilon]$ 上都不是仿射的（ε 是任意的）. 记为 $SAI[a,b]$.

定义 2.9[20]51 设 A 是 Banach 空间 X 的一个凸子集， $x \in A$ 称为是 A 的一个端点如果 $2x = y+z$， y， $z \in A$ 蕴涵 $y = z$.

2.2 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点

定理 2.1 设 $X = L_{M,P}^o$， 如果 $M \notin \Delta_2$， 那么 $S(X)$ 没有 H 点.

证 设 $x \in S(L_{M,P}^o)$， $k \in K(x)$. 选择一个非空集合 $E \in \Sigma$， $t \in E$ 满足

$$|x(t)| \le c$$

如果 $M\notin\Delta_2$，那么存在 $u_n\uparrow$ 和 E 的子集 E_n 满足

$$M((1+\frac{1}{n})u_n)>2^n M(u_n)，\quad M(u_n)\mu E_n=\frac{1}{2^n}，\quad (n\in N)$$

定义

$$x_n=x|_{G\setminus E_n}+\frac{1}{k}u_n\chi_{E_n}$$

下面我们来证明 $x_n\xrightarrow{w}x$. 事实上，令

$$f=v+\varphi\in L_{M,P}^*，\quad v\in L_{N,P} \text{ 且 } \varphi\in F$$

因为 $x_n-x=\frac{1}{k}u_n\chi_{E_n}-x|_{E_n}\in E_M$，我们得到

$$\langle f,x_n-x\rangle=\int_{E_n}\frac{1}{k}u_n v(t)dt-\int_{E_n}x(t)v(t)dt$$

选择 $\varepsilon>0$ 满足

$$\rho_N(\varepsilon v)<\infty$$

那么由 Young 不等式知

$$\begin{aligned}|\langle f,x_n-x\rangle|&\le\frac{1}{\varepsilon k}\left[M(u_n)\mu E_n+\rho_N(\varepsilon v|_{E_n})\right]+\frac{1}{\varepsilon}\left[M(c)\mu E_n+\rho_N(\varepsilon v|_{E_n})\right]\\&\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

这就说明了 $x_n\xrightarrow{w}x$.

那么由下半连续性可知

$$\liminf_n\|x_n\|_p^o\ge\|x\|_p^o$$

另一方面，由

$$\begin{aligned}\|x_n\|_p^o&\le\frac{1}{k}\left[1+\rho_M^p(kx_n)\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{k}\left\{1+\left[\rho_M(kx|_{G\setminus E_n})+M(u_n)\mu E_n\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{k}\left\{1+\left[\rho_M(kx|_{G\setminus E_n})+\frac{1}{2^n}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\to\|x\|_p^o\end{aligned}$$

所以我们得到

$$\|x_n\|_p^o=\|x\|_p^o=1$$

但明显地，

$$\lim_n k\left\|x_n - x\right\|_p^o = \lim_n \left\|u_n \chi_{E_n}\right\|_p^o = \lim_n \left\|u_n \chi_{E_n}\right\| = 1$$

所以 x 不是 $B(L_{M,P}^o)$ 的 H 点.

引理 2.2[20]119 令 $E \in \Sigma$ 是一个有界闭集，那么 E 能够分解为两个互不相交的子集 E_n， F_n 满足 $E_n \cup F_n = E$， $\mu E_n = \mu F_n = \frac{1}{2}\mu E \ (n \in N)$，对 E 上的任意可积函数 $v(t)$ 有 $\lim_n \int_E v(t)\left[\chi_{E_n}(t) - \chi_{F_n}(t)\right]dt = 0$.

定理 2.3 令 $X = L_{M,P}^0$，如果 $x \in S(X)$ 是 $B(X)$ 的 H 点，那么 x 也是端点.

证 设 $x \in S(L_{M,P}^o)$，如果 x 不是 $B(L_{M,P}^o)$ 的端点，那么存在 $k \in K(x)$ 满足

$$\mu\left\{t \in G : kx(t) \in R \setminus S_M\right\} > 0$$

因此，我们可以找到 M 的 $SAI\left[a,b\right]$ 和 $\delta > 0$ 满足

$$E = \left\{t \in G : kx(t) \in \left[a+\delta, b-\delta\right]\right\}$$

是非空集合.

不失一般性，我们可以假设 E 是一个闭集合，令 E_n， F_n 是引理 2.2 中的 E_n， F_n． 定义

$$x_n = x + \frac{\delta}{k}\chi_{E_n} - \frac{\delta}{k}\chi_{F_n}$$

那么由 M 在 $\left[a,b\right]$ 上的仿射性可知，

$$\begin{aligned}\left\|x_n\right\|_p^o &\le \frac{1}{k}\left[1+\rho_M^p(kx_n)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{k}\left[1+\rho_M^p(kx)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|x\right\|_p^o \\ &= 1\end{aligned}$$

下面我们证明 $x_n \xrightarrow{w} x$． 事实上，对任意的

$$f = v + \varphi \in L_{M,P}^*, \quad v \in L_{N,P} \ \varphi \in F$$

因为

$$x_n - x = \frac{\delta}{k}\chi_{E_n} - \frac{\delta}{k}\chi_{F_n}$$

所以

$$\left\langle f, x_n - x\right\rangle = \frac{\delta}{k}\int_E v(t)\left[\chi_{E_n} - \chi_{F_n}\right]dt \to 0$$

这就说明了 $x_n \xrightarrow{w} x$． 所以由下半连续性可知，

$$\liminf_{n} \|x_n\|_p^o \geq \|x\|_p^o$$

所以我们得到

$$\|x_n\|_p^o = \|x\|_p^o = 1$$

又由于

$$\|x_n - x\|_p^o = \frac{\delta}{k}\|\chi_E\|_p^o > 0$$

这证明了 x 不是 $B(L_{M,P}^o)$ 的 H 点，与已知矛盾，从而证明了 x 也是端点．□

2.3 本章小结

在本章中我们讨论了 H 点与端点的关系及赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间单位球上有 H 点与 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件的关系．对 H 点的研究有助于我们研究 H 性质．

第3章 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质

3.1 引言

有关 Orlicz 空间中 H 性质已有很多讨论[46−48]，陈述涛和王玉文在 1987 年《数学年刊》上发表了文章《Orlicz 空间的 H 性质》[35]，此文证明了 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件，即 $M\in\Delta_2$ 且 $M(u)$ 是严格凸的．1998 年，王廷辅和崔云安在《数学物理学报》上发表文章《关于 Orlicz 空间的 H 性质的注记》[36]，此文将陈述涛、王玉文的证明过程推广到一般测度空间上．本文将 Orlicz 空间的 H 性质推广到赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的情况．

定义 3.1[36]1 X 是一个 Orlicz 空间，我们称 $x\in X$ 具有绝对连续范数是指：$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x\chi_{G_n}\right\|_p^o=0$，其中 $G_n=\left\{t\in G:\left|x(t)\right|\geq n\right\}$，记，

$$X_0=\{\,x\in X\,,\;\; x\text{具有绝对连续范数}\}.$$

定义 3.2[20]119 我们称 Orlicz 空间 X 具有 H 性质是指：对于任意的 $x,x_n\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n\right\|_p^o=\left\|x\right\|_p^o=1$ 和 $x_n\xrightarrow{w}x$ 蕴涵 $\left\|x_n-x\right\|_p^o\to 0$.

定义 3.3[36]1 我们称 Köthe 空间 X 具有 Fatou 性质是指：如果 $x_n,x_0\in X$，$\left|x_n(t)\right|\uparrow\left|x_0(t)\right|$ $(t\in G,a.e.)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n\right\|_p^o=\left\|x_0\right\|_p^o$ 成立.

定义 3.4[20]51 我们称 Orlicz 函数 M 是严格凸的是指：如果对于任意的 $u,v\in R$ 且 $u\neq v$ 有

$$M(\frac{u+v}{2})<\frac{1}{2}(M(u)+M(v)).$$

3.2 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质

定理 3.1 若 $M\notin\Delta_2$，则 $L_{M,P}^o$ 无 H 性质.

证 由已知条件，可以选取序列$\left\{u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$及 G 的互不相交子集$\left\{G_k\right\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$M\left[(1+\frac{1}{k})u_k\right]>2^kM(u_k)\,,\quad 2^kM(u_k)\mu G_k=1\ (*)$$

定义

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G_n}(t)$$

$$x_n(t)=\sum_{k\neq n}u_k\chi_{G_n}(t)-u_n\chi_{G_n}(t)$$

$\chi_{G_n}(t)$ 表示 G_n 的特征函数，那么显然有

$$\|x\|=\|x_n\|，\ \|x\|_p^o=\|x_n\|_p^o$$

对任意的

$$f\in(L_{M,P}^o)^*$$

由[19]，Ch.2 定理 5.6 知，存在

$$v(t)\in L_{N,P}^o$$

使得

$$f(u)=\int_G u(t)v(t)dt，\ (u\in E_{M,P})$$

$N(v)$ 是 $M(u)$ 的余函数．因为对每个 $t\in G$，

$$x(t)-x_n(t)=2u_n\chi_{G_n}(t)\xrightarrow{\mu}0，\ (n\to\infty)$$

由 $v(t)\in L_{N,P}^o$，存在 $r>0$ 使得

$$\int_G N(rv(t))dt<\infty$$

所以由 Young 不等式我们有

$$\begin{aligned}|f(x-x_n)|&=\left|\int_G 2u_n\chi_{G_n}(t)v(t)dt\right|\\&=\frac{2}{r}\left|\int_{G_n}u_n\chi_{G_n}(t)rv(t)dt\right|\\&\le\frac{2}{r}\int_{G_n}[M(u_n)+N(rv(t))]dt\\&=\frac{2}{r}M(u_n)\mu G_n+\frac{2}{r}\int_{G_n}N(rv(t))dt\end{aligned}$$

又由于 $2^kM(u_k)\mu G_k=1$，我们有

$$\frac{2}{r}M(u_n)\mu G_n\to0,n\to\infty$$

由 $\int_G N(rv(t))dt<\infty$ 和积分的绝对连续性，有

$$\frac{2}{r}\int_{G_n}N(rv(t))dt\to0,n\to\infty$$

因此 $x_n \xrightarrow{w} x$.

另一方面，对任意正整数 n，由 $(*)$ 式可知：

$$
\begin{aligned}
1 &\ge \int_G M(\frac{\chi_{G_n}(t)}{\|\chi_{G_n}\|})dt \\
&= M(\frac{1}{\|\chi_{G_n}\|})\frac{1}{2^n M(u_n)} \\
&> M(\frac{1}{\|\chi_{G_n}\|})\frac{1}{M\left[(1+\frac{1}{n})u_n\right]}
\end{aligned}
$$

故 $\|\chi_{G_n}\| > \dfrac{1}{\left[(1+\frac{1}{n})u_n\right]}$.

从而

$$
\begin{aligned}
\|x-x_n\|_p^o &\ge \|x-x_n\| \\
&= 2u_n\|\chi_{G_n}\| \\
&> \frac{2}{(1+\frac{1}{n})}
\end{aligned}
$$

这说明 $L_{M,P}^o$ 不具有 H 性质.

引理 3.2[35]2 对 G 的任意可测子集 E，存在 E 的不相交子集 $E_n^{'}$， $E_n^{''}$ 使得 $E = E_n^{'} \cup E_n^{''}$， $\mu E_n^{'} = \mu E_n^{''}$， $(n=1,2\cdots)$，且对 G 上任何可积函数 $v(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_G v(t)\left[\chi_{E_n^{'}}(t)-\chi_{E_n^{''}}(t)\right]dt = 0 .$$

定理 3.3 若 $M(u)$ 是非严格凸的，则 $L_{M,P}^o$ 不具有 H 性质.

证 因为 $M(u)$ 是非严格凸的，所以存在 a， b， $\varepsilon>0$， $a<b$ 使得 $M(u)$ 在区间 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上是线性的，即，

$$M(u) = Au + B，\quad u\in[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$$

选取正数 k_0 和 $G\setminus E$ 的子集 F 满足

$$N(A)\mu E + N\left[p(k_0)\right]\mu F = 1 \qquad (*)$$

其中 $p(u)$ 为 $M(u)$ 的右导数.

定义

$$x(t) = \frac{1}{2k_0}(a+b)\chi_E(t) + \chi_F(t)$$

$$x_n(t)=\frac{a}{k_0}\chi_{E_n^{'}}(t)+\frac{b}{k_0}\chi_{E_n^{''}}(t)+\chi_F(t)\text{，}\quad n=1,2\cdots$$

因为在 $[a,b]$ 上 $p(u)\equiv A$， 由 (*) 式知， $\rho_N(p(k_0x))=\rho_N(p(k_0x_n))=1$. 所以

$$\|x\|_p^o=\|x_n\|_p^o\text{，}\quad (n=1,2\cdots)$$

又因为对任给的 $f\in(L_{M,P}^o)^*$，选取 $v(t)$ 满足

$$f(x)=\int_G x(t)v(t)dt\text{，}\quad (x\in E_M)$$

$x(t)$， $x_n(t)\in E_M$， 由引理 3.2 知，

$$f(x-x_n)=\frac{b-a}{2}\int_G v(t)\left[\chi_{E_n^{'}}(t)-\chi_{E_n^{''}}(t)\right]dt\to 0$$

即 $x_n\xrightarrow{w}x$.

再由 $\|x_n-x\|_p^o>0$ 可知 $L_{M,P}^o$ 不具有 H 性质.

定理 3.4 如果 $\{x_n\}\subset L_{M,P}^o$ 满足 $\|x_n\|\le C$ 对某个 $C>0$ 成立，则 $\{x_n\}$ 是弱序列紧集.

因为 Orlicz 范数与广义 Orlicz 范数是等价的，所以他们的对偶空间是相同的，又由于在赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中有此定理成立，所以在赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中此定理亦成立.

引理 3.5[35]4 如果 u_k， $u\in L_{M,P}^o$， $u_k\xrightarrow{w}u\ne\theta$， 那么存在正常数 α， ε 使得当 k 充分大时，有 $\mu G(|u_k(t)|\ge\alpha)>\varepsilon$.

定理 3.6 如果 $u_n,u\in L_{M,P}^o$， $u_n\xrightarrow{w}u\ne\theta$， $\|u\|_p^o=\inf\limits_{k_n>0}\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}$ $(n=1,2\cdots)$，那么集合 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的.

证 （反证法）因为 $u_n\xrightarrow{w}u$，所以集合 $\left\{\|u_n\|_p^o\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的。如果定理 3.6 不成立，那么 $\{k_n\}$ 有子列 $\{k_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 趋于无穷。选取 α， ε 满足

$$\mu G(|u_k(t)|\ge\alpha)>\varepsilon$$

那么，

$$\begin{aligned}\|u_{n_i}\|_p^o&=\inf_{k_{n_i}}\frac{1}{k_{n_i}}\left[1+\rho_M^p(k_{n_i}u_{n_i})\right]^{\frac{1}{p}}\\&\ge\inf_{k_{n_i}>0}\frac{1}{k_{n_i}}\rho_M(k_{n_i}u_{n_i})\end{aligned}$$

$$\geq \inf_{k_{n_i}>0} \frac{1}{k_{n_i}} \int_{G(|u_{n_i}(t)|\geq\alpha)} M(k_{n_i}u_{n_i}(t))dt$$

$$\geq \inf_{k_{n_i}>0} \frac{1}{k_{n_i}} \int_{G(|u_{n_i}(t)|\geq\alpha)} M(k_{n_i}\alpha)dt$$

$$\geq \inf_{k_{n_i}>0} \frac{1}{k_{n_i}} M(k_{n_i}\alpha)\cdot\varepsilon$$

$$= \inf_{k_{n_i}>0} \frac{\varepsilon}{k_{n_i}} M(k_{n_i}\alpha)$$

$$\to\infty$$

这就与$\|u_{n_i}\|_p^o$有界矛盾。所以定理 3.6 成立.

引理 3.7 [35]3 如果$M\in\Delta_2$，则对任何$L>0$和$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得$\rho_M(u)\leq L$，$\rho_M(v)\leq\delta$，那么$|\rho_M(u+v)-\rho_M(u)|<\varepsilon$.

定理 3.8 如果$M\in\Delta_2$，$\rho_M(x_n)\to\rho_M(x)$且$x_n(t)\xrightarrow{\mu}x(t)$，那么$\|x_n-x\|_p^o\to 0$.

证 我们假设L为$\{\rho_M(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$的上确界，对任给的$\varepsilon>0$，由引理 3.7 可知，存在$\delta'>0$使得当$\rho_M(u)\leq L$，$\rho_M(v)\leq\delta'$时，有

$$|\rho_M(u+v)-\rho_M(u)|<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (3-1)$$

再取正整数δ使得$G_0\subset G$，$\mu G_0<\delta$，那么有

$$\int_{G_0} M(x(t))dt\leq\min(\delta',\frac{\varepsilon}{4})$$

因为$x_n\xrightarrow{\mu}x$，所以存在常数N'和$E_n\subset G$使得

$$\mu E_n<\delta，\quad \int_{G\backslash E_n} M[x_n(t)-x(t)]dt<\min(\delta',\frac{\varepsilon}{4})，\quad (n>N') \qquad (3-2)$$

另外，

$$\int_{E_n} M[x(t)]dt<\min(\delta',\frac{\varepsilon}{4})$$

则有

$$\int_{G\backslash E_n} M[x(t)]dt=\rho_M(x)\quad -\int_{E_n} M[x(t)]dt>\rho_M(x)-\frac{\varepsilon}{4} \qquad (3-3)$$

考虑$(3-1)$，$(3-2)$，$(3-3)$得，当$n>N'$时，有

$$\begin{aligned}\int_{E_n} M[x(t)]dt &= \rho_M(x_n) - \int_{G\setminus E_n} M[x(t)+(x_n(t)-x(t))]dt \\ &< \rho_M(x_n) - \int_{G\setminus E_n} M[x(t)]dt + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \rho_M(x_n) - \rho_M(x) + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

又因为$\rho_M(x_n) \to \rho_M(x)$，所以存在$N > N'$使得当$n > N$时，有

$$\int_{E_n} M[x_n(t)]dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

考虑到$\int_{E_n} M[x(t)]dt < \delta'$，那么由$(3-1)$，$(3-2)$可知，当$n > N$时，

$$\begin{aligned}\int_G M[x_n(t)-x(t)]dt &< \int_{G\setminus E_n} M[x_n(t)-x(t)]dt + \int_{E_n} M[x(t)]dt + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

又由于$M \in \Delta_2$，所以$\|x_n - x\|^o = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1+\rho_M(k(x_n-x))] \to 0$.

故

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|_p^o &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_M^p(k(x_n-x))\right]^{\frac{1}{p}} \\ &< \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1+\rho_M(k(x_n-x))] \\ &\to 0\end{aligned}$$

引理 3.9[35]5 如果$M(u)$是严格凸的，对任何$[a,b] \subset (0,1)$和L，$\sigma > 0$存在$\delta > 0$使得$\alpha \in [a,b]$，$|u| \le L$，$|v| \le L$且$|u-v| \ge \sigma$，那么

$$M[\alpha u + (1-\alpha)v] \le (1-\delta)[\alpha M(u) + (1-\alpha)M(v)].$$

定理 3.10 如果$M(u)$是严格凸的，$1 = \|u_n\|_p^o = \inf_{k_n>0} \frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_n u_n)\right]^{\frac{1}{p}}$，$(n = 0,1,2\cdots)$，$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$是有界的，且$\|u_n + u_0\|_p^o \to 2$，那么

$$k_n u_n(t) \xrightarrow{\mu} k_0 u_0(t).$$

证 （反证法）假设存在$\sigma_0 > 0$，$\varepsilon_0 > 0$使得对一切$n \ge 1$有

$$\mu G(|k_n u_n(t) - k_0 u_0(t)| \ge \sigma_0) \ge \varepsilon_0$$

设d为$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$的上确界．记

$$L = M^{-1}\left(\frac{3d}{\varepsilon_0}\right)$$

则由

$$1=\|u_n\|_p^o=\inf_{k_n>0}\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}$$

知，

$$\begin{aligned}d&\geq\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}\\&\geq\rho_M(k_nu_n)\\&\geq\int_{G(|k_nu_n(t)|>L)}M(k_nu_n(t))dt\\&\geq\frac{3d}{\varepsilon_0}\mu G(|k_nu_n(t)|>L)\end{aligned}$$

从而

$$\mu G(|k_nu_n(t)|>L)\leq\frac{\varepsilon_0}{3}，\quad(n=0,1,2\cdots)$$

记

$$G_n=G(|k_nu_n(t)|\leq L,|k_0u_0(t)|\leq L,|k_nu_n(t)-k_0u_0(t)|\geq\sigma_0)$$

则由

$$\mu G(|k_nu_n(t)-k_0u_0(t)|\geq\sigma_0)\geq\varepsilon_0\text{和}\ \mu G(|k_nu_n(t)|>L)<\frac{\varepsilon_0}{3}$$

可以得到

$$\mu G_n>\frac{\varepsilon_0}{3}$$

并且由

$$1=\|u_n\|_p^o=\inf_{k_n>0}\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}$$

有

$$1\leq k_n=\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}\leq 1+d$$

因而

$$0<\frac{k_0}{k_0+d+1}\leq\frac{k_0}{k_0+k_n}<\frac{k_0}{k_0+1}<1$$

$$0<\frac{1}{k_0+1}<\frac{k_n}{k_0+k_n}\leq\frac{d+1}{k_0+d+1}<1，\quad(n=0,1,2\cdots)$$

记

$$a=\min\left(\frac{k_0}{k_0+d+1},\frac{1}{k_0+1}\right)$$

$$b=\max(\frac{k_0}{k_0+1},\frac{d+1}{k_0+d+1})$$

则$\left[a,b\right]\subset(0,1)$. 根据引理 3.9，存在$\delta>0$使得

$$M\left[\alpha u+(1-\alpha)v\right]\le(1-\delta)\left[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)\right]$$

对一切$\alpha\in\left[a,b\right]$，$\left|u\right|\le L$，$\left|v\right|\le L$，$\left|u-v\right|\ge\sigma_0$成立.

$$\left\|u_n(t)+u_0(t)\right\|_p^o$$

$$=\inf_{\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}>0}\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left[1+\rho_M^p(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_0(t)+u_n(t))\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\rho_M^p\left[\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_n(t)+u_0(t))\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\rho_M^p\left[\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_0(t)+u_n(t))\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\left[\int_G M(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_0(t)+u_n(t)))dt\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\left[\int_{G_n} M(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_0(t)+u_n(t)))dt+\int_{G\backslash G_n} M(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_0(t)+u_n(t)))dt\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\left[\int_{G_n}(1-\delta)\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}M(k_0u_0)+\frac{k_0}{k_n+k_0}M(k_nu_n)\right]dt+\int_{G\backslash G_n}M(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_n+u_0))dt\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}[1+[\int_{G_n}\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}M(k_0u_0)+\frac{k_0}{k_n+k_0}M(k_nu_n)\right]dt-\delta\int_{G_n}\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}M(k_0u_0)+\frac{k_0}{k_n+k_0}M(k_nu_n)\right]dt$$

$$+\int_{G\backslash G_n}M\left[\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_n+u_0)\right]]^p]^{\frac{1}{p}}$$

又由于

$$\delta\int_{G_n}\left[\frac{k_n}{k_0+k_n}M(k_0u_0)+\frac{k_0}{k_0+k_n}M(k_nu_n)\right]dt$$

$$>\delta\int_{G_n}M(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(u_n+u_0))dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta \int_{G_n} M\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}(k_0u_0)+\frac{k_0}{k_n+k_0}(k_nu_n)\right]dt \\
&> \delta \int_{G_n} M\left[a(k_nu_n(t)-k_0u_0(t))\right]dt \\
&> \frac{\delta\varepsilon_0 M(a\sigma_0)}{3}
\end{aligned}
$$

令

$$
\beta=\frac{\delta\varepsilon_0 M(a\sigma_0)}{3}
$$

那么上式

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}\int_G M(k_0u_0(t))dt+\frac{k_0}{k_n+k_0}\int_G M(k_nu_n(t))dt-\beta\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left\{1+\left[\frac{k_n}{k_n+k_0}(\int_G M(k_0u_0)dt-\beta)+\frac{k_0}{k_n+k_0}(\int_G M(k_nu_n)dt-\beta)\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{1}{k_0}\left[1+(\int_G M(k_0u_0(t))dt-\beta)^p\right]^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k_n}\left[1+(\int_G M(k_nu_n(t))dt-\beta)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{1}{k_0}\left[1+(\int_G M(k_0u_0(t))dt)^p\right]^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k_n}\left[1+(\int_G M(k_nu_n(t))dt)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{k_0}\left[1+\rho_M^p(k_0u_0(t))\right]^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_nu_n(t))\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u_n\|_p^o+\|u_0\|_p^o \\
&\to 2
\end{aligned}
$$

矛盾，所以定理 3.10 成立.

定理 3.11 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 $L_{M,P}^o$ 具有 H 性质的充要条件是:

① $M \in \Delta_2$.

② M 是严格凸的.

证 （必要性） 因为 Orlicz 空间具有 Fatou 性质，所以 Orlicz 空间 X 中的每一个 $x \in X$ 都具有绝对连续范数. 又因为 Orlicz 空间的每一个元素具有绝对连续范数的充分必要条件是 $M \in \Delta_2$，故条件①成立.

下面证明条件②亦成立.

如果②不成立，那么存在一个区间$[a,b]$使得 Orlicz 函数M在这个区间上是一个线性函数．取G的一个正测度子集E满足

$$N(p(a))\mu(E)\le 1$$

再取$C\ge 0$和$F\subseteq G\setminus E$满足

$$N(p(a))\mu E+N(p(c))\mu F=1$$

取E的两个子集E_1^1和E_2^1满足

$$\mu E_1^1=\mu E_2^1,\quad E_1^1\bigcap E_2^1=\phi\quad,\quad E_1^1\bigcup E_2^1=E$$

再取E_1^1的两个子集E_1^2和E_2^2满足

$$\mu E_1^2=\mu E_2^2,\quad E_1^2\bigcap E_2^2=\phi,\quad E_1^2\bigcup E_2^2=E_1^1$$

再取E_2^1的两个子集E_3^2和E_4^2满足

$$\mu E_3^2=\mu E_4^2,\quad E_3^2\bigcap E_4^2=\phi,\quad E_3^2\bigcup E_4^2=E_2^1$$

一般地，取E_k^{n-1}的两个子集E_{2k-1}^n和E_{2k}^n满足

$$\mu E_{2k-1}^n=\mu E_{2k}^n\quad E_{2k-1}^n\bigcap E_{2k}^n=\phi\quad E_{2k-1}^n\bigcup E_{2k}^n=E_k^{n-1},\quad (n=1,2\cdots,k=1,2\cdots 2^{n-1})$$

设

$$W_n(t)=a\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{2^n-1}E_{2k-1}^n}+b\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{2^n-1}E_{2k}^n}+c\chi_F,\quad (n=1,2\cdots)$$

显然有$\|w_n\|_p^o=k$，$(n=1,2\cdots)$．

令

$$x_n(t)=\frac{W_n(t)}{k}$$

则$\|x_n\|_p^o=1$，$(n=1,2\cdots)$，由定理 3.4，我们可以认为$x_n\xrightarrow{w}x$．

令

$$y(t)=p(a)\chi_E+p(c)\chi_F$$

则$y\in E_M(G)$且$\|y\|_p=1$，$(n=1,2\cdots)$．

从而，

$$\begin{aligned}1&\ge\langle x_n,y\rangle\\&=\frac{1}{k}\langle W_n,y\rangle\\&=\frac{1}{k}\left[I_M(W_n)+I_N(y)\right]\\&=\frac{1}{k}\left[1+I_M(kx_n)\right]\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{k}\left[1+I_M^p(kx_n)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\geq \|x_n\|_p^o$$
$$=1$$

于是得 $x\in S(L_{M,P}^o)$．因为对任意的 $m\neq n$，有 $\|x_n-x_m\|_p^o>0$ 成立，所以 x_n 不依范数收敛于 x，这与 H 性质相矛盾.

（充分性）假设 $u_n \xrightarrow{w} u_0$，$\|u_n\|_p^o \to \|u_0\|_p^o=1$，我们要证明 $\|u_n-u_0\|_p^o\to 0$．不失一般性，我们可以假设 $\|u_n\|_p^o=1\ \ (n=0,1,2\cdots)$，即

$$1=\|u_n\|_p^o\ \ =\inf_{k_n>0}\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M^p(k_nu_n)\right]^{\frac{1}{p}}$$

由定理 3.6 可知 $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界.

又因为

$$\|u_n\|_p^o=\|u_0\|_p^o=1，\ u_n\xrightarrow{w}u_0$$

那么

$$\|u_n+u_0\|_p^o\to 2$$

所以由定理 3.10 知

$$k_nu_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0u_0(t)$$

如果我们能够证明 $k_n\to k_0$，那么能够推出

$$\rho_M(k_nu_n)\to\rho_M(k_0u_0)$$

从而由定理 3.8 就可以证明 $\|k_nu_n-k_0u_0\|_p^o\to 0$，故定理的充分性证明完毕.

下面证明 $k_n\to k_0$．对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $v\in E_N$ 使得

$$\rho_N(v)\leq 1，\ \int_G u_0(t)v(t)dt>1-\varepsilon \tag{3-4}$$

因为 $u_n\xrightarrow{w}u_0$，所以当 n 充分大时，

$$\int_G u_n(t)v(t)dt>1-\varepsilon$$

又因为 $v\in E_N$，所以 v 具有绝对连续范数，可选择到 $\delta>0$ 使得

$$E\subset G，\ \mu E<\delta \text{ 且有} \int_E |u_0(t)v(t)|dt\leq\|v\chi_E\|<\varepsilon \tag{3-5}$$

因为 $k_nu_n\xrightarrow{\mu}k_0u_0$，所以有 $E_n\subset G$ 且 $\mu E_n<\delta$ 使得当 n 充分大时有

$$|k_nu_n(t)-k_0u_0(t)|<\frac{\varepsilon}{\|\chi_G\|_p^o}，\ (t\in G\setminus E_n)$$

因此，当n充分大时，

$$\begin{aligned}1-\varepsilon &< \int_G u_n(t)v(t)dt \\ &< \int_{G\setminus E_n} \frac{k_0}{k_n}u_0(t)v(t)dt + \|u_n\|_p^o \|v\chi_E\| \\ &\le \frac{k_0}{k_n}\|u_0\|_p^o + \varepsilon \\ &= \frac{k_0}{k_n} + \varepsilon\end{aligned}$$

故$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{k_0}{k_n} \ge 1$.

另一方面，由(3−4)，(3−5)，当n充分大时，

$$\begin{aligned}1 &\ge \int_G |u_n(t)v(t)|dt \\ &\ge \int_{G\setminus E_n} \frac{k_0}{k_n}(u_0(t)v(t))dt - \varepsilon \\ &\ge \frac{k_0}{k_n}(1-2\varepsilon) - \varepsilon\end{aligned}$$

故$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{k_0}{k_n} \le 1$，从而说明$k_n \to k_0$.

3.3 本章小结

本章讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有H性质的充要条件，得到了如果 Orlicz 函数M不满足Δ_2条件或M是非严格凸的，则赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间不具有H性质的结论，并证明了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有H性质的充要条件就是 Orlicz 函数M满足Δ_2条件且是严格凸的.

结　论

Orlicz 空间是泛函分析中的一个重要分支部分，它是一个具体的 Banach 空间. Orlicz 空间的发展至今已有八十余年. 在这八十多年中，Orlicz 空间被引入过多种范数，它们的形式各不相同．本文研究的是赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间．广义 Orlicz 范数是 2006 年由段丽芬、崔云安教授引入的，崔云安教授的学生们已经研究过赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的很多性质，例如：端点、强端点、凸性、一致凸性等．本文研究的是赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点和 H 性质.

H 点是 H 性质的基础，Orlicz 空间中的 H 点和 H 性质已经由陈述涛、王玉文研究过，其结果收录在 1987 年的《数学年刊》上．1998 年，崔云安、王廷辅在《数学物理报》上发表文章将陈述涛和王玉文的结果推广到了一般测度空间.

本文在崔云安教授的指导下讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点和 H 性质，主要分为两部分．第一部分我们研究了 H 点．讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的单位球面上的 H 点与 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件之间的关系，并且讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 点与端点的关系，得到了两个定理．第二部分我们研究了 H 性质．讨论了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件，得到了如果 Orlicz 函数 M 不满足 Δ_2 条件或 M 是非严格凸的，则赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间不具有 H 性质的结论，并证明了赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质的充要条件就是 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 条件且是严格凸的.

参考文献

[1] BIRBAUM Z, ORLICZ W. Über Eine Verallgemeinerung des Begriffes der Zueinander Kanjugierten Poteuzen[J]. Studia Math., 1931, 3:12-14.

[2] ORLICZ W. Uber Eine Gewisse Klasses von Raumen von Typus [J]. B. Bulletion Acad. Polonaise, Sci., 1932, A: 207-220.

[3] ORLICZ W. Uber Raumen(L^M)[J]. B. Bull. Acad. Polonaise Sci., 1936, A: 93-107.

[4] NAKANO H. Modulared Semi-ordered Linear Spaces[M]. Tokyo: Tokyo Mathematical Book Series, 1950: 10-27.

[5] NAKANO H. Topology and Topological Linear Spaces[M]. Tokyo: Tokyo Mathematical Book Series, 1951: 48-60.

[6] ZAANEN A C. Linear Analysis[M]. Amsterdam-Groningen, 1960: 201-403.

[7] LUXEMBUR W A. Banach Function Space[J]. PhD Thesis. Delfl, 1955, (8): 31-206.

[8] KASNOSELSKII M A, RUTICKII Y B. Convex Function and Orlicz Spaces[M]. Polon. Math. Phy. Literature Publishing Company, 1958:11-17.

[9] ANDO T. Linear Functionals on Orlicz Space[J]. Nieuw Arch.Wisk.,1960, 8(3): 1-16.

[10] RAO M M. Linear Functionals on Orlicz Space[J]. Nieuw Arch. Wisk., 1964, (12): 77-98.

[11] 丁夏畦. 一类函数空间的性质和应用[J]. 数学学报,1960, 10: 316-360.

[12] 郭大钧. Urysohn 算子的全连续性[J]. 中国科学, 1962, 11: 437-452.

[13] 王廷辅. $B(s)$ 与 $L^M(G)$ 的列紧性[J]. 数学进展, 1966, 9(3): 287-290.

[14] GAPOSKIN V F. The Existence of Unconditional Base in Orlicz Spaces[J]. Funct Anal. Appl, 1967, 4(1): 278-284.

[15] LINDENSTRAUSS J, TZAFRIRI L. Classical Banach Spaces I [J]. Ergeb. Math. Grenzgeb, Berlin: Springer Verlag, 1977, 26(10): 102-198.

[16] LINDENSTRAUSS J, TZAFRIRI L. Classical Banach Spaces II[J]. Ergeb. Math. Grenzgeb, Berlin: Springer Verlag, 1979, 18(10): 157-208.

[17] 吴从炘, 赵善中, 陈俊澳. 关于 Orlicz 空间范数的计算公式与严格赋范的条件[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1978, 10（2）: 1-12.

[18] 吴从炘，王廷辅，陈述涛等. Orlicz 空间几何理论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社, 1986: 1-200.

[19] 吴从炘，王廷辅. Orlicz 空间及其应用[M]. 哈尔滨：黑龙江科技出版社, 1983: 1-201.

[20] CHEN SHUTAO. Geometry of Orlicz Space[M]. Warzawa: Dissertation Math., 1996: 1-191.

[21] MUSIELAK J, ORLICZ W. On Modular Spaces[J]. New York/ Berlin, Studia Math., 1959, 18(8): 12-26.

[22] 孙丽环，崔云安. 赋 Orlicz 范数 Musielak-Orlicz 函数空间的端点[J]. 哈尔滨师范大学学报, 2006, 1: 22-25.

[23] WANG TINGFU, BIAN SHURONG. Smooth Point and Strong(very) Smooth Point of Musielak-Orlicz Space with Orlicz Norm[J]. ACTA Analysis Fuctiinalls Applicata, 1999, 1(1): 61-68.

[24] LIU XINBO, CUI YUN'AN, FORALEWSKI P. Local Uniform Rotundity and Weak Local Uniform Rotundity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Endowed with the Orlicz Norm [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1559-1569.

[25] 赵亮，吴从炘. 赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的强暴露点[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(2): 184-187.

[26] WANG JUNMING, LIU XINBO, CUI YUN'AN. Local Uniform Rotundity in Musielak-Orlicz Sequence Space Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Annales Societatis Mathematicae Polonae, 2006, 1(1): 131-139.

[27] CHEN LILI, CUI YUN'AN. Complex Midpoint Locally Uniform Rotundity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Int.J.Contemp.Math. Sci.,2007, 17(2): 803—812.

[28] 唐献秀，林尤武，伍一平，杨祥钊. 赋 Luxemburg 范数的 Musielak—Orlicz 函数空间的暴露点[J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2008, 25(3): 20-25.

[29] 唐献秀，魏文展，林尤武. Musielak—Orlicz 序列空间的强暴露点[J]. 广西科学, 2009, 16(2): 136-138,146.

[30] 仲唯娜. Musielak—Orlicz 空间若干点态性质[D]. 哈尔滨：哈尔滨理工大学硕士学位论文, 2010: 9-12.

[31] HUDZIK H, ZBASZYNIAK Z. Smoothness in Musielak-Orlicz Space

Equipped with the Orlicz Norm[J]. Coolect Math., 1997, 48(4): 543-561.
[32] DIESTEL J. Geometry of Functional Analysis-Selected Topics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975: 132-133.
[33] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII YA B. Convex Functions and Orlicz Space[M]. Groningen: P Noordhoof, Ltd, 1961: 14-16.
[34] RAO M M, REN Z D. Theory of Orlicz Space[M]. New York, Besel, Hong Kong, 1991: 87-93.
[35] 陈述涛，王玉文. Orlicz 空间的 H 性质[J]. 数学年刊, 1987, 8A(1): 1-3.
[36] 王廷辅，崔云安. 关于 Orlicz 空间的 H 性质的注记[J]. 数学物理学报, 1998, 18(2): 217-220.
[37] 段丽芬，崔云安. 广义 Orlicz 范数和广义 Luxemburg 范数[J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(2): 131-134.
[38] 段丽芬，崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的端点[J]. 浙江大学学报（理学版）, 2007, 3: 252-256.
[39] 段丽芬，崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的强端点[J]. 浙江大学学报, 2009, 1: 6-11.
[40] 段丽芬，崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的端点和强端点[J]. 华东师范大学学报, 2009, 1: 53-60.
[41] CUI YUN'AN, DUAN LIFEN, HUDZIK H. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces($1\le p\le\infty$): Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Equipped with These Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1796-1816.
[42] 李晶婧. 广义 Orlicz 空间的若干性质[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学硕士学位论文. 2009: 7-11.
[43] 许晶，崔云安，庄彩彩. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中 k_x 的两个特征[J]. 通化师范学院学报, 2010, 31(12): 14-15.
[44] 段丽芬，许晶，崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 函数空间的一致凸性[J]. 吉林大学学报（理学版）, 2011, 5: 809-813.
[45] 段丽芬，杨德清，许晶. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中点到 EM 距离的刻划[J]. 通化师范学院学报, 2011, 2: 121-125.
[46] WU CONGXIN, CHEN SHUTAO, WANG YUWEN. H-property of Sequence Orlicz Spaces [J]. Harbin Inst. Tech. Math. Issue, 1985, 8: 6-11.
[47] PLUCIENNIK R, WANG TINGFU. H-points and Denting Point in Orlicz

Spaces[J]. Comment Math, 1993, 33: 135-151.

[48] CUI YUN'AN, WANG TINGFU. Nearly Uniformly Convex in Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Chinese Quart.J.Math., 2000, 15(1): 1-8.

攻读学位期间发表的学术论文

[1] 丛滢伊, 崔云安. 《Orlicz 空间有关 Δ' —条件的注记》［J］. 哈尔滨理工大学数学, 物理, 电子学与技术学科第三届研究生论坛(已录用) .

致　谢

硕士生活即将结束，这两年多以来我受到了老师、同学及家人的帮助和关爱，值此论文完成之际，表达一下我内心的感谢.

首先，我要感谢我的恩师崔云安教授，两年多以来老师高度的敬业精神、严谨的治学态度和积极乐观的生活哲学深深的影响了我，在我考博期间老师给予了我很多帮助，鼓励我再接再厉不要放弃，并且在我论文课题的选择和研究过程中付出了大量的心血.

其次，我要感谢我的父母，是他们的爱伴随我成长，在我遇到挫折时给予我无限的理解和鼓励.

最后，衷心地感谢审阅本文的专家教授.