Johannes Czermak, Salzburg

Über eine formale „dialektische“ Logik[1])

Die Haltung mancher Vertreter der dialektischen Logik zum Widerspruchsprinzip erscheint mitunter widerspruchsvoll. So ist für F. Kumpf die dialektische Negation $\overline{p}$ „eben nicht nur die logische Negation von p“ (aber doch auch?), während das formallogische Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch immer gilt (vgl. [7], S. 257 f.). P. V. Kopnin gibt in [5], S. 143, die Church'sche Kalküldefinition aus [1.], S. 48 f., schreibt aber dann auf S. 165: „Von einigen Wissenschaftlern wird angenommen, daß die Dialektik ihre eigene Logik der Ableitung von Folgerungen aus Prämissen schafft, d. h. ihren eigenen logischen Kalkül, der nicht auf den formallogischen Gesetzen (Identität, ausgeschlossener Widerspruch), sondern auf den Gesetzen der Dialektik aufbaut. Wir können hier die Formen solcher Kalküle nicht analysieren, weil es noch niemandem gelang, sie aufzubauen . . . Sie beweist nochmals, daß man keinen logischen Kalkül aufbauen kann, wenn man gleichzeitig das formallogische Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch verwirft. Der logische Kalkül ist ein Apparat, um nach angegebenen Regeln mit Zeichen zu operieren. Einige dieser Regeln sind für einen jeden Kalkül unerläßlich, die anderen nur für bestimmte Formen. Von den ersten ist das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch das formallogische Minimum . . .“ Nun wird man nach Lektüre des III. Kapitels von [5] Kopnin nicht gerade als Autorität auf dem Gebiet der formalen Logik zitieren. Wir nehmen das obige Zitat vielmehr nur zum Anlaß, Kalküle der formalen Logik zu untersuchen, in denen der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch nicht ableitbar ist. Solche Kalküle seien im folgenden „Kalküle einer dialektischen Logik“ genannt, ohne daß damit der Anspruch verbunden wäre, daß sie als eine adäquate Formulierung einer dialektischen Logik aufgefaßt werden können. Es ist natürlich überhaupt nicht einzusehen, warum es solche Kalküle nicht geben soll. Schon Popper hat in [9], S. 321, auf einen solchen Kalkül hingewiesen, und Segerbergs Kalkül JQ in [12], S. 41, enthält den Widerspruch sogar als Axiom. Wir konstruieren zunächst (in anderer Weise als Popper) einen „dualintuitionistischen“ Kalkül und gehen zu diesem Zweck von Gentzens Sequenzenkalkül (vgl. [3]) aus.

Der klassische Sequenzenkalkül

Die Sprache der im folgenden zu betrachtenden Systeme enthält an logischen Zeichen N (Negation), K (Konjunktion), A (Disjunktion), ( ) (Allquantor), (E) (Existenzquantor), $\rightarrow$ (Sequenzenzeichen), in einigen Fällen auch C (Implikation), L (Notwendigkeit) und M (Möglichkeit), weiters je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Objektvariable (mitgeteilt durch a, b bzw. u, x, y, z, mit und ohne Indizes) und für jede natürliche Zahl n höchstens abzählbar unendlich viele n-stellige Prädikatszeichen (mitgeteilt durch P, Q, R). Primformeln sind Ausdrücke der Gestalt $P(a_1, \ldots, a_n)$, wobei P ein n-stelliges Prädikatzeichen ist. Formeln werden nach Lukasiewicz in klammerfreier Schreibweise induktiv definiert. Endliche (evtl. leere) Folgen von (durch Kommas getrennte) Formeln werden durch große, Formeln durch kleine griechische

Buchstaben bezeichnet (π vorzugsweise für Primformeln). Sequenzen sind Ausdrücke der Gestalt $\Gamma \rightarrow \Delta$. Die Formeln links vom Squenzenzeichen heißen „Antecedensformeln“, die Formeln rechts davon „Succedensformeln“.

Axiome sind alle Sequenzen der Gestalt $\alpha \rightarrow \alpha$

Regeln:

(V1) $\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \rightarrow \Theta}$ (W1) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}$ (Kü1) $\dfrac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}$

(V2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha, \beta, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \beta, \alpha, \Theta}$ (W2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}$ (Kü2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}$

Die bisher genannten Regeln heißen „Strukturschlußregeln“. Von den Vertauschungsregeln (V1), (V2) machen wir im folgenden oft stillschweigend Gebrauch.

(N1) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{N\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}$ (N2) $\dfrac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, N\alpha}$

(A1) $\dfrac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \rightarrow \Delta}{A\alpha\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}$ (A2a) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, A\alpha\beta}$ (A2b) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A\alpha\beta}$

(K1a) $\dfrac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{K\alpha\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}$ (K1b) $\dfrac{\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}{K\alpha\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}$ (K2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Delta, K\alpha\beta}$

Mit den bisher genannten Regeln erhalten wir die klassische Aussagenlogik (ohne Implikation). Wir bezeichnen dieses System mit C.

(E1) $\dfrac{\alpha(a), \Gamma \rightarrow \Delta}{(Ex)\alpha(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$ (E2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha(a)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (Ex)\alpha(x)}$

(G1) $\dfrac{\alpha(a), \Gamma \rightarrow \Delta}{(x)\alpha(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$ (G2) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha(a)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (x)\alpha(x)}$

Die Regeln (E1) und (G2) sind der folgenden „Variablenbedingung“ unterworfen: die freie Objektvariable a darf in der Konklusion nicht auftreten.

Mit allen angegebenen Regeln erhalten wir die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Dieses System sei mit QC bezeichnet. Eine Formel α heißt in einem Sequenzenkalkül herleitbar, wenn in ihm die Sequenz $\rightarrow \alpha$ herleitbar ist.

Der dualintuitionistische Kalkül

Der intuitionistische (implikationslose) Sequenzenkalkül J bzw. QJ geht aus dem klassischen Sequenzenkalkül C bzw. QC hervor, wenn man festsetzt, daß in jeder Sequenz höchstens eine Succedensformel auftreten darf. Wir nennen den Kalkül, der aus C bzw. QC entsteht, wenn man sich auf Sequenzen mit höchstens einer Antecedensformel beschränkt, den „dualintuitionistischen Kalkül“ DJ bzw. DQJ. Wir untersuchen das Verhältnis von DQJ zu QJ und definieren induktiv über den Formelaufbau eine bijektive involutorische Abbildung der Menge der Formeln auf sich:

π^* sei π für Primformeln
$(N\alpha)^*$ sei $N\alpha^*$
$((x)\alpha(x))^*$ sei $(Ex)(\alpha(x))^*$
$(A\alpha\beta)^*$ sei $K\alpha^*\beta^*$
$(K\alpha\beta)^*$ sei $A\alpha^*\beta^*$
$((Ex)\alpha(x))^*$ sei $(x)(\alpha(x))^*$

Γ^* geht aus Γ hervor, indem man jede Formel α aus Γ durch α^* ersetzt.

Satz 1 a) $\Gamma \to \Delta$ ist genau dann in DQJ (bzw. DJ) herleitbar, wenn $\Delta^* \to \Gamma^*$ in QJ (bzw. J) herleitbar ist.

b) $\Gamma \to \Delta$ ist genau dann in QJ (bzw. J) herleitbar, wenn $\Delta^* \to \Gamma^*$ in DQJ (bzw. DJ) herleitbar ist.

(Beweis durch Herleitungsinduktion).

Der Kalkül DQJ kann daher dual zum intuitionistischen Kalkül entwickelt werden. Mit Hilfe des Satzes 1 und entsprechender Eigenschaften der intuitionistischen Logik beweist man leicht die Zulässigkeit der Schnittregel

$$\text{(SCHN)}\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Psi \to \Theta}{\Gamma, \Psi \to \Delta, \Theta}$$

(wobei in unserem Fall natürlich Ψ leer und Γ höchstens einelementig ist) und die Vollständigkeit bezüglich der klassischen N-A-Logik (jede klassisch allgemeingültige N-A-Formel ist in DQJ herleitbar; wir beweisen unten ein stärkeres Ergebnis), die Zulässigkeit des Modus ponens in der Form

$$\frac{\to \alpha \quad \to \mathrm{AN}\alpha\beta}{\to \beta}$$

u. a. m. Weiters sieht man sofort, daß die Formeln bzw. Sequenzen

(1) $\mathrm{AN}\alpha\alpha$
(2) $\mathrm{NN}\alpha \to \alpha$
(3) $\mathrm{N}\alpha \to \mathrm{NNN}\alpha$
(4) $\mathrm{NA}\alpha\beta \to \mathrm{KN}\alpha\mathrm{N}\beta$
(5) $\mathrm{NK}\alpha\beta \to \mathrm{AN}\alpha\mathrm{N}\beta$
(6) $\mathrm{AN}\alpha\mathrm{N}\beta \to \mathrm{NK}\alpha\beta$

in DJ herleitbar sind im Gegensatz zu den folgenden:

(7) $\alpha \to \mathrm{NN}\alpha$
(8) $\mathrm{KN}\alpha\alpha \to \beta$
(9) $\mathrm{KN}\alpha\mathrm{N}\beta \to \mathrm{NA}\alpha\beta$

Aus der Herleitbarkeit von (2) und der Unableitbarkeit von (7) folgt, daß in DJ die doppelt negierte Formel „stärker“ ist als die nicht negierte. Im Hinblick auf (8) könnte man auch die Unableitbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch

$$\text{(10)}\ \mathrm{NKN}\alpha\alpha$$

vermuten, zumal gilt: Ist $\to \mathrm{AN}\alpha\alpha$ in J herleitbar, so $\mathrm{KN}\alpha^*\alpha^* \to$ in DJ und damit $\to \mathrm{NKN}\alpha^*\alpha^*$ in DJ. Umgekehrt gilt aber nur: Ist $\to \mathrm{NKN}\alpha\alpha$ in DJ herleitbar, so $\mathrm{NAN}\alpha^*\alpha^* \to$ in DJ und somit $\to \mathrm{NNAN}\alpha^*\alpha^*$ in J, und das doppelt negierte Tertium non datur ist bekanntlich in J herleitbar. Nun kann (10) tatsächlich in DJ hergeleitet werden:

$$\begin{array}{ll}
\alpha \to \alpha & \\
\hline
\mathrm{K}\alpha\mathrm{N}\alpha \to \alpha & \text{(K1a)} \\
\hline
\to \alpha, \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha & \text{(N2)} \\
\hline
\mathrm{N}\alpha \to \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha & \text{(N1)} \\
\hline
\mathrm{K}\alpha\mathrm{N}\alpha \to \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha & \text{(K1b)} \\
\hline
\to \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha, \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha & \text{(N2)} \\
\hline
\to \mathrm{NK}\alpha\mathrm{N}\alpha & \text{(Kü2)}
\end{array}$$

Somit ist dieser „dualintuitionistische Kalkül“ nicht Kalkül einer dialektischen Logik (in dem in der Einleitung definierten Sinn), obwohl das „Ex falso quodlibet“ in der Form von (8) nicht herleitbar ist. Um die Herleitbarkeit von (10) zu verhindern, kann man eine der in der Herleitung von (10) verwendeten Regeln abzuschwächen versuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir weiter unten modallogische Interpretationen; vorher befassen wir uns noch kurz mit der Implikation.

Die Implikation

Um die Implikation in den bisher angegebenen Systemen einzuführen, fügen wir diesen die beiden Regeln

(C1) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \to \Theta}{C\alpha\beta, \Gamma \to \Delta, \Theta}$ (C2) $\dfrac{\Gamma, \alpha \to \beta, \Delta}{\Gamma \to C\alpha\beta, \Delta}$

hinzu. (Im Falle J bzw. QJ ist Δ leer und Θ höchstens einelementig; im Fall DJ bzw. DQJ ist Γ leer). Die Implikation stört etwas die in Satz 1 ausgedrückte Dualität; wir können die Abbildung * zwar fortsetzen: $(C\alpha\beta)^*$ sei $NC\beta^*\alpha^*$, doch ist sie dann nicht mehr involutorisch und das „genau dann, wenn" in Satz 1a, 1b muß zu einem „wenn, dann" abgeschwächt werden. Während sich der Kalkül DJ bezüglich der Herleitbarkeit implikationsloser Formeln als sehr stark erweist, ist das Gegenteil der Fall für Formeln, wenn sie mehrere Implikationszeichen enthalten. So ist z. B. eine Formel $C\alpha C\beta\alpha$ im allgemeinen in DJ nicht herleitbar. Eine gewisse Verstärkung des Systems erreicht man, wenn man (C2) durch

(C2)′ $\dfrac{\Gamma \to \beta, \Delta}{\Gamma(\alpha) \to C\alpha\beta, \Delta}$

ersetzt, wobei $\Gamma(\alpha)$ leer ist, wenn Γ aus der Formel α besteht, ansonsten aber mit Γ übereinstimmt. Es erscheint aber in unserem Fall natürlicher, sich auf Sequenzen von implikationslosen Formeln zu beschränken und das Sequenzenzeichen als „reine" Implikation (bestehend zwischen der Antecedensformel und der Disjunktion der Succedensformeln) zu interpretieren.

Modallogische Interpretationen

Fügen wir dem System C bzw. QC die beiden Regeln

(L1) $\dfrac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{L\alpha, \Gamma \to \Delta}$ (L2) $\dfrac{L\Gamma \to \alpha}{L\Gamma \to L\alpha}$

hinzu (die Formeln dürfen natürlich nun auch L's enthalten), so erhalten wir Sequenzenversionen des Lewis'schen Modalsystems S4, die wir mit LS4 (ohne Quantoren) und LQS4 (mit Quantoren) bezeichnen. Wählen wir aber statt L das Grundzeichen M und nehmen wir die beiden Regeln

(M1) $\dfrac{\alpha \to M\Delta}{M\alpha \to M\Delta}$ (M2) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, q}{\Gamma \to \Delta, M\alpha}$

zu C bzw. QC hinzu, so seien die so entstehenden Systeme mit MS4 bzw. MQS4 benannt. Die L- und M-Versionen von S4 entsprechen sich wie folgt: Definiert man in LS4 (LQS4) das Zeichen M als Abkürzung für NLN, so sind (M1) und (M2) zulässige Regeln, definiert man umgekehrt in MS4 (MQS4) L als Abkürzung für NMN, so sind (L1) und (L2) zulässig. Setzt man die Abbildung $\alpha \mapsto \alpha^*$ fort auf die Menge aller implikationslosen Formeln, die auch modale Zeichen enthalten dürfen, indem man der induktiven Definition noch

$(L\alpha)^*$ sei $M\alpha^*$ $(M\alpha)^*$ sei $L\alpha^*$

hinzufügt, so gilt der Satz: $\Gamma \rightarrow \Delta$ ist genau dann in LS4 (LQS4) herleitbar, wenn $\Delta^* \rightarrow \Gamma^*$ in MS4 (MQS4) herleitbar ist. Wir definieren für nicht-modale Formeln α „modallogische Interpretationen" α^L, α_L, α^M und α_M wie folgt (X stehe für L oder M):

π_X	sei π für jede Primformel π	α^X	sei $X\alpha_X$
$(N\alpha)_X$	sei $NX\alpha_X$	$(C\alpha\beta)_X$	sei $CX\alpha_X X\beta_X$
$(A\alpha\beta)_X$	sei $AX\alpha_X X\beta_X$	$(K\alpha\beta)_X$	sei $KX\alpha_X X\beta_X$
$((u)\alpha)_X$	sei $(u)X\alpha_X$	$((Eu)\,\alpha)_X$	sei $(Eu)X\alpha_X$

Γ^X bzw. Γ_X entstehe aus Γ, indem man jede Formel α aus Γ durch α^X bzw. α_X ersetzt. Dann gilt bekanntlich (vgl. z. B. [10], S. 219; [13], S. 208): Die Formel α ist genau dann in J (bzw. QJ) herleitbar, wenn α^L (und damit α_L) in LS4 (bzw. LQS4) herleitbar ist. Ist die Sequenz $\Gamma^L \mapsto \Delta^L$ in LS4 herleitbar, so ist $\Gamma \mapsto \delta$ in J herleitbar, wobei δ eine Formel aus Δ oder beliebig ist, falls Δ leer ist. Weiters gilt (vgl. [2]): Eine Formel α ist genau dann in C (bzw. QC) herleitbar, wenn α^M in MS4 (bzw. MQS4 + CLM(Eu)α(Eu)LMα) herleitbar ist. Die Formel α ist genau dann in C (bzw. QC) herleitbar, wenn α_M in S5 (bzw. QS5) herleitbar ist. Es gilt nun überraschenderweise

Satz 2. Jede klassische N-K-A-Tautologie ist in DJ herleitbar.

Beweis: Sei α eine klassische N-K-A-Tautologie. Dann ist in MS4 die Sequenz $\rightarrow \alpha^M$ herleitbar, in LS4 daher $(\alpha^M)^* \rightarrow$, d. h. $(\alpha^*)^L \rightarrow$. Hieraus folgt, daß $\alpha^* \rightarrow$ in J herleitbar ist; mit Satz 1 erhalten wir die Behauptung.

Satz 2 zeigt, daß die Einschränkung auf Sequenzen mit nur einer Antecedensformel sich auf die Herleitbarkeit von N-K-A-Formeln nicht auswirkt.

In S4 sind $(C\pi NN\pi)_M$ und $(NK\pi N\pi)_M$ nicht herleitbar. Dieser Sachverhalt legt es nahe, die nicht-modale Logik, deren Theoreme die Menge $D_M = \{\alpha : \alpha_M$ ist in S4 bzw. QS4 herleitbar$\}$ bilden, zu untersuchen, zumal sich L und M zueinander dual verhalten und die entsprechende Menge D_L mit der intuitionistischen Logik zusammenfällt. Es gilt aber nun:

Satz 3. Ist α eine klassische Tautologie und β eine beliebige Formel, so sind $K\alpha\alpha$, $A\alpha\beta$ und $C\beta\alpha$ in D_M.

Beweis: $(K\alpha\alpha)_M$ ist $KM\alpha_M M\alpha_M$; $(A\alpha\beta)$ ist $AM\alpha_M\beta_M$; $(C\beta\alpha)_M$ ist $CM\beta_M M\alpha_M$. Ist α eine klassische Tautologie, so ist $M\alpha_M$ in S4 herleitbar.

Insbesondere folgt hieraus, daß keine der folgenden Schlußregeln

$$\frac{\alpha \quad AN\alpha\beta}{\beta} \qquad \frac{\alpha \quad C\alpha\beta}{\beta} \qquad \frac{A\beta\beta}{\beta} \qquad \frac{K\beta\beta}{\beta}$$

in D_M zulässig ist. (Man setze $NK\pi N\pi$ für β und eine beliebige Formel aus D_M für α). Satz 3 erschwert eine sinnvolle Interpretation von D_M. Betrachten wir nun aber die Herleitung von $NK\pi N\pi$ in DJ: versuchen wir, die Herleitung der entsprechenden Formel $(NK\pi N\pi)_M$ in MS4 durchzuführen, so ist der nach einem (K1)- und vor einem (N2)-Schluß notwendige (M1)-Schluß nur dann durchführbar, wenn jede Succedensformel die Gestalt $M\alpha$ hat; dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Wir versuchen nun, einen Kalkül zu formulieren, der etwas schwächer ist als D_M, aber, so hoffen wir, einer sinnvollen Interpretation zugänglicher ist.

Der Sequenzenkalkül SDL

habe als Axiome alle Sequenzen der Gestalt $\alpha \to \alpha$ und als Regeln (V1), (V2), (W1), (W2), (Kü1), (Kü2), (N1), (K2), (A2a), (A2b), sowie

(N2°) $\dfrac{\alpha \to \Delta}{\to \Delta, N\alpha}$ (D1°) $\dfrac{\alpha \to \Theta \quad \beta \to \Theta}{A\alpha\beta \to \Theta}$

(K1a°) $\dfrac{\alpha \to \Delta}{K\alpha\beta \to \Delta}$ (K1b°) $\dfrac{\beta \to \Delta}{K\alpha\beta \to \Delta}$

mit der Einschränkung: in Δ darf keine Formel der Gestalt $N\delta$ vorkommen. Wir definieren zu jeder nicht-modalen Formel α eine Formel $\alpha_{\overline{M}}$, indem wir in der induktiven Definition von $\alpha_{\overline{M}}$ den ersten Punkt („π_M sei π für jede Primformel π") ersetzen durch „$\pi_{\overline{M}}$ sei $M\pi$ für jede Primformel π".

Satz 4. Ist $\Gamma \to \Delta$ in SDL herleitbar und enthält diese Sequenz an logischen Zeichen nur N und K, so ist $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ in MS4 herleitbar.

Beweis durch Herleitunginduktion.

a) Ist $\Gamma \to \Delta$ ein SDL-Axiom, so ist $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ ein MS4-Axiom.

b) Ist $\Gamma \to \Delta$ Konklusion eines Strukturschlusses mit Prämisse $\Psi \to \Theta$, so folgt $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ durch einen gleichen Strukturschluß aus der nach I.V. (Induktionsvoraussetzung) in MS4 herleitbaren Prämisse $\Psi_{\overline{M}} \to \Theta_{\overline{M}}$.

c) Ist $\Gamma \to \Delta$ von der Gestalt $N\alpha \to \Delta$ und Konklusion eines (N1)-Schlusses mit Prämisse $\to \Delta, \alpha$, so ist nach I.V. in MS4 die Sequenz $\to \Delta_{\overline{M}}, \alpha_{\overline{M}}$ herleitbar. Hieraus folgt mit einem (M2)- und (N1)-Schluß $NM\alpha_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$. Diese Sequenz stimmt aber mit $(N\alpha)_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ überein.

d) Ist $\Gamma \to \Delta$ von der Gestalt $\to \Delta', N\alpha$ und Konklusion eines ($N2^{o}$)-Schlusses mit Prämisse $\alpha \to \Delta'$, so ist nach I.V. in MS4 die Sequenz $\alpha_{\overline{M}} \to \Delta'_{\overline{M}}$ herleitbar. (M2)-Schlüsse und darauf ein (M1)-Schluß liefern $M\alpha_{\overline{M}} \to M\Delta_{\overline{M}}$. Mit (N2) folgt in MS4 (*) $\to M\Delta_{\overline{M}}, NM\alpha_{\overline{M}}$. Nun enthält Δ nur Formeln der Gestalt π oder $K\beta\gamma$. Da in MS4 die Formeln $EMM\pi M\pi$ und $EMKM\beta M\gamma KM\beta M\gamma$ herleitbar sind und das Ersetzungstheorem gilt, folgt aus der Herleitbarkeit von (*) jene von $\to \Delta_{\overline{M}}, (N\alpha)_{\overline{M}}$.

e) Ist $\Gamma \to \Delta$ von der Gestalt $K\alpha\beta \to \Delta$ und Konklusion eines ($K1^{o}$)-Schlusses mit Prämisse $\alpha \to \Delta$ bzw. $\beta \to \alpha$, so ist nach I.V. $\alpha_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ bzw. $\beta_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ in MS4 herleitbar. Ähnlich wie in Fall d) schließen wir auf $M\alpha_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ bzw. $M\beta_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$ und hieraus mit (K1) auf $(K\alpha\beta)_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}$.

f) Ist $\Gamma \to \Delta$ von der Gestalt $\Gamma \to \Delta', K\alpha\beta$ und Konklusion eines (K2)-Schlusses mit Prämissen $\Gamma \to \Delta', \alpha$ und $\Gamma \to \Delta', \beta$, so sind nach I.V. in MS4 die Sequenzen $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta'_{\overline{M}}, \alpha_M$ und $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta'_{\overline{M}}, \beta_{\overline{M}}$ herleitbar; mit (M2)- und (K2)-Schlüssen erhalten wir $\Gamma_{\overline{M}} \to \Delta_{\overline{M}}, (K\alpha\beta)_{\overline{M}}$.

Satz 5. Jede in SDL herleitbare N-K-Formel liegt in D_M.

Beweis: Ist α in SDL herleitbar, so ist nach Satz 4 $\alpha_{\overline{M}}$ in MS4 herleitbar. α ist keine Primformel; $\alpha_{\overline{M}}$ unterscheidet sich von α_M nur dadurch, daß $\alpha_{\overline{M}}$ vor jeder Primformel MM, α_M vor jeder Primformel jedoch nur M stehen hat. Wegen $EMM\pi M\pi$ in S4 sind α_M und $\alpha_{\overline{M}}$ in S4 äquivalent.

Insbesondere folgt nun: Die Formel $NK\pi N\pi$ ist in SDL nicht herleitbar. Weiters erkennt man die Unableitbarkeit der Sequenz $\pi \to NN\pi$ in SDL.

(Wir hätten natürlich die Sätze 4 und 5 auch ausdehnen können auf Formeln bzw.

Sequenzen, in denen das Disjunktionszeichen vorkommt, wenn wir die Regel ($D1^{o}$) in der Weise einschränken, daß in Θ keine Formel der Gestalt $N\delta$ vorkommen darf. Weiters könnten wir dem System SDL auch die Regeln für Implikation und Quantoren hinzufügen.)

Ersetzen wir im Kalkül SDL die Regeln (W1), (Kü1) und (N1) durch

$$(W1^{o}) \quad \frac{\rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \Delta} \qquad (Kü1^{o}) \quad \frac{N\alpha \rightarrow \Delta, \alpha}{N\alpha \rightarrow \Delta} \qquad (N1^{o}) \quad \frac{\rightarrow \Delta, \alpha}{N\alpha \rightarrow \Delta}$$

so erhalten wir einen Sequenzenkalkül SDL°, in dem in allen Herleitungen nur Sequenzen mit höchstens einer Antecedensformel auftreten (SDL° ist somit ein Teilsystem von DJ).

Es gilt nun

Satz 6. Eine Formel ist genau dann ist SDL herleitbar, wenn sie in SDL°herleitbar ist.

Semantische Überlegungen

Eine strikte Rechtfertigung würde der Kalkül SDL erst erfahren, wenn man eine Semantik im Stil Kripkes oder Montagues (vgl. [6], [11] und [8] konstruieren könnte, die ihrerseits eine „dialektische" Interpretation gestatten würde (ähnlich wie etwa Grzegorczyk's Interpretation der intuitionistischen Logik in [4]). Halten wir uns zunächst an die Modallogik, so könnten wir von einer Menge M von Gesichtspunkten (Hinsichten), einer die Menge M strukturierenden Relation R und einer Funktion φ, die jedem Gesichtspunkt und jeder Primformel einen Wahrheitswert zuordnet, ausgehen. Man könnte dann einen dialektischen „Widerspruch" auflösen z. B. in der Form „Es gibt einen Gesichtspunkt A, unter dem α wahr ist, und einen Gesichtspunkt B, der zu A in der Relation steht, so daß α unter B falsch ist." (Dies liefert natürlich eine andere Semantik als eine der üblichen modallogischen Kripkesemantiken für α^{M}.) Es erscheint uns jedoch vielversprechender, einer Anregung von F. Melms zu folgen, von einer Menge S von Situationen (Entwicklungsstadien), einer Funktion f, die jedem $s \in S$ eine Menge f(s) von Tendenzen (die man sich durch Mengen von Primformeln beschrieben denken kann) zuordnet, einer die Menge Sxf(S) strukturierenden Relation R (im Sinne der Abfolge der Situationen und der Dominanz gewisser Tendenzen) und einer dreistelligen Funktion φ von PxSxf(S) in $\{w,f\}$ (wobei P die Menge der Primformeln ist) auszugehen.

Anmerkungen

1. Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Proseminars über dialektische Logik an der Universität Salzburg. Der Verfasser dankt Herrn Friedrich Melms für Kritik und Anregungen. Der Vortrag konnte krankheitshalber nicht gehalten werden.

Literatur

[1] A. Church, Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press 1956.
[2] J. Czermak, Embeddings of Classical Logic in S4. Studia Logica 34 (1975), 87–100.
[3] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. Mathematische Zeitschrift 39 (1934), 176–210, 405–431.
[4] A. Grzegorczyk, A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic. Indag. Math. 26 (1964), 596–602.
[5] P. V. Kopnin, Dialektik – Logik – Erkenntnistheorie. Akademie-Verlag Berlin 1970.
[6] S. Kripke, Semantical analysis of intuitionistic logic I. In: Crossley/Dummett, Formal Systems and Recursive Functions. Amsterdam 1965, 92–129.
[7] F. Kumpf, Zur Gegenstandsbestimmung der dialektischen Logik. In: Sandkühler, Marxistische Erkenntnistheorie. Frommann-Holzboog 1973, 235–271.
[8] R. Montague, Pragmatics and Intensional Logic. Synthese 22 (1970), 68–94.
[9] K. Popper, What is Dialectic? In: Conjectures and Refutations. London, Routledge and Kegan Paul, 3. Auflage 1969, 312–335.
[10] Prawitz/Malmnäs, A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. In: H. A. Schmidt et al., Contributions to Mathematical Logic. Amsterdam 1968, 215–229.
[11] K. Schütte, Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1968.
[12] K. Segerberg, Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's. Theoria.
[13] J. Zeman, Modal Logic. The Lewis-Modal Systems. Oxford, Clarendon Press 1973.