赋 s 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

董佳琪

哈尔滨理工大学

2022 年 3 月

国内图书分类号：O177.3

理学硕学位论文

赋 s 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

硕 士 研究生： 董佳琪

导　　　　师： 崔云安

申请学位级别： 理学硕士

学 科、专 业： 数学

所　在 单 位： 理学院

答　辩 日 期： 2022 年 3 月

授予学位单位： 哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.3

Dissertation for the Master Degree in Science

Some Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with s-norms

Candidate: Dong Jiaqi

Supervisor: Cui Yun-an

Academic Degree Applied for: Master of Science

Speciality: Mathematics

Date of Oral Examination: March, 2022

University: Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《赋 s 范数 Orlicz 空间的若干几何性质》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：　董佳琪　　　　　日期：　　2022 年　3 月　30 日

哈尔滨理工大学硕士学位论文使用授权书

《赋 s 范数 Orlicz 空间的若干几何性质》系本人在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保　密 □，在　年解密后适用授权书。

不保密 √。

(请在以上相应方框内打√)

作者签名：　董佳琪　　　　　日期：　　2022 年　3 月　30 日

导师签名：　崔云安　　　　　日期：　　2022 年　3 月　30 日

赋 s 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

摘 要

Orlicz 空间作为 Banach 空间理论的重要研究内容被广泛应用到的各类学科中。在国内外数学工作者近一个世纪的努力下，Orlicz 空间理论日益完善，赋 s 范数 Orlicz 空间是 Orlicz 空间的一种推广形式，它包含了经典的 Orlicz 空间及各类广义 Orlicz 空间，其理论及应用更具一般性，对这类空间的探索不但可以丰富 Orlicz 空间理论，更可以为 Banach 空间提供直观资料，本文分别对赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 Kadec-Klee 性质和 β 性质和赋 s 范数的 Orlicz 函数空间的 Kadec-Klee 性质进行讨论，主要工作内容总结如下：

首先，简述了本文课题来源和研究 Orlicz 空间的目的及意义，介绍了 Orlicz 空间的发展历程和 Orlicz 空间理论的重要成果，并展示了本文各部分研究内容及结论。

其次，研究赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 Kadec-Klee 性质。Kadec-Klee 性质是 Banach 空间几何性质中的较为重要的性质，其与不动点理论密切相关。许多数学工作者对赋 Luxemburg 范数，Orlicz 范数和 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的 Kadec-Klee 性质进行了深入研究，得到了很多优秀的结果。本文给出赋 s 范数的 Orlicz 序列空间具有 Kadec-Klee 性质的三个等价命题。

再次，研究赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 β 性质。具有 β 性质的 Banach 空间具有 Kadec-Klee 性质，具有 β 性质的 Banach 空间具有正规结构，进而具有不动点性质，本文给出了一个 s 范数的计算公式，并利用该公式给出赋 s 范数的 Orlicz 序列空间具有 β 性质的刻画。

最后，研究赋 s 范数 Orlicz 函数空间的 Kadec-Klee 性质。由于赋 s 范数的 Orlicz 函数空间的复杂性，在对偶空间不清晰的条件下，增加了解决赋 s 范数 Orlicz 函数空间具有 Kadec-Klee 性质的难度。本文寻找到了一个新的手段即利用赋 s 范数 Orlicz 函数空间的端点的刻画，解决赋 s 范数 Orlicz 函数空间具有 Kadec-Klee 性质的刻画。

关键词 Orlicz 空间；s 范数；Kadec-Klee 性质；β 性质

Some Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with s-norms

Abstract

As an important research content of Banach spaces, Orlicz spaces are widely used in various disciplines. With the efforts of mathematics workers for nearly a century, theory of Orlicz spaces is becoming more and more perfect. Orlicz spaces equipped with s-norms is a generalization of Orlicz spaces. It includes classical Orlicz space and all kinds of generalized Orlicz space. Its theory and application are more general. The exploration of this kind of space can not only enrich Orlicz space theory, but also provide intuitive data for Banach space. In this paper, the necessary and sufficient condition for Kadec-Klee property of Orlicz sequnce space and Orlicz function space equipped with s-norms and β property of Orlicz sequence space equipped with s-norms are discussed. The main work is summarized as follows:

Firstly, the purpose and significance of studying Orlicz space was introduced briefly in this chapter, introduced the development process of Orlicz spaces and the outstanding achievements of Orlicz space theory, and showed the research contents and conclusions of each part of this text.

Secondly, the Kadec-Klee property of Orlicz sequence spaces equipped with s-norms was studied. As we all know, Kadec-Klee property is an important property in the geometric properties of Banach space, which is closely related to the fixed point theory. Many mathematicians have deeply studied the Kadec-Klee property of Orlicz space equipped with Orlicz norm, Luxemburg norm and p-Amemiya norm, and obtained many excellent results. In this chapter, we gave three equivalent propositions that Orlicz sequence spaces equipped with s-norms have Kadec-Klee property.

Thirdly, the β property of Orlicz sequence space equipped with s-norms was discussed, Banach spaces with β property have Kadec-Klee property and normal structure and then it have the fixed point property. In this chapter, we gave a calculation formula of s-norms, and used this formula to characterize the equivalent proposition that Orlicz sequence space equipped with s-norms has β property.

Finally, the Kadec-Klee property of Orlicz function space equipped with s-norms was discussed. Due to the complexity of Orlicz function space equipped with s-norms, it is more difficult to solve the problem that Orlicz function space equipped with s-norms has Kadec-Klee property under the condition of unclear dual space. In this chapter, a new method is found, that is, using the characterization of the extreme point of Orlicz function space equipped with s-norms to solve the characterization of the Kadec-Klee property of Orlicz function space equipped with s-norms.

Keywords Orlicz sapce, s-norms, Kadec-Klee property, β property

目　　录

第 1 章 绪 论

1.1 课题来源和研究的目的及意义

1.1.1 课题来源

本课题研究源自导师崔云安教授的国家自然科学基金项目(11871181)。

1.1.2 课题研究的目的及意义

波兰著名数学家 Władysław Orlicz 为解决傅里叶级数收敛的完备性问题于 1931 年联系积分方程以其名字引入了赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间[1-4]，使之成为 $L_p(1\le p\le\infty)$ 空间的推广，其作为一类具体的 Banach 空间类，Orlicz 函数生成的函数各式各样，因此 Orlicz 空间几乎包括所有的 Banach 空间类，这不仅为研究 Banach 空间提供了充足的模型库和无数实例，同时也为解决一般 Banach 空间的几何理论问题提供较为清晰的研究思路和解题方法。Orlicz 空间几何理论发展到今天愈来愈完善，应用日益广泛，根据不同理论和应用需求，Orlicz 空间以不同形式向众多领域进行扩充和延伸。

随着关于可测函数的 Orlicz 空间 L_Φ^o 空间和 Orlicz 范数的产生，从 20 世纪 50 年代到 21 世纪初，众多数学工作者已经得出经典 Orlicz 函数、Luxemburg 范数和 p-Amemiay 范数可以分别使用 Amemiya 公式 $\|x\|_\Phi^o=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}(1+I_\Phi(kx))$ 、$\|x\|_\Phi=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\{1,I_\Phi(kx)\}$ 和 $\|x\|_\Phi^p=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}(1+I_\Phi{}^p(kx))^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p\le\infty)$ 来定义[5,6]，这拓展了 Orlicz 空间理论内容。2019 年 Marek Wisła 对 Orlicz 空间赋予 s 范数得到赋 s 范数的 Orlicz 空间[7]，作为经典 Orlicz 空间的推广，其包含在 Orlicz 空间中的上述所有范数。他们利用外函数 $s(u)$ 的概念给出 s 范数的定义：$\|x\|_{\Phi,s}=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}s(I_\Phi(kx))$。新引入的赋 s 范数的 Orlicz 空间几乎蕴含了其他类型 Orlicz 空间的所有情况，从而使 Orlicz 空间理论得到推广和深化，赋 s 范数的 Orlicz 空间的应用范围也日益扩大。

赋 s 范数的 Orlicz 空间的几何性质对研究 Orlicz 空间有着重要地位，在研究其几何性质的过程中，可以获得一定经验，使得在探究 Banach 空间几何性质时，就可以参考赋 s 范数的 Orlicz 空间几何理论

的解决方法，并利用相似的方法和技巧，拓宽思路来讨论。这样既有助于研究工作的进行，又能通过不断完善 Orlicz 空间理论来使得 Orlicz 空间能够向着更宽泛的方向发展，使之能被渗透到更多的学科中。

1.2 国内外研究发展状况

1.2.1 Orlicz 空间理论发展状况

1932 年，波兰著名数学家 WładysławvOrlicz 为解决傅里叶级数收敛的完备性问题引入了的赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 L^{o}_{Φ}，并于 1936 年定义了 Orlicz 范数：$\|x\|^{o}_{\Phi}=\sup\left\{\int_G x(t)g(t)dt : I_{\Psi}(y)\le 1\right\}$。

1950 年，Nakano 在半序 Banach 空间中引入模范数形成模半序空间[8]，Orlicz 空间就是模半序空间的一个特例。

1955 年，W.A.J Luxemburg 引入 Luxemburg 范数，并深入研究赋 Luxemburg 范数 Orlicz 空间 L_{Φ}，证明了 Luxemburg 范数与 Orlicz 范数等价，并得到 Luxemburg 范数为：$\|x\|_{\Phi}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\max\{1, I_{\Phi}(kx)\}$。$L_{\Phi}$ 的形成成为推动 Orlicz 空间理论发展的关键，在很大程度上完善了 Orlicz 空间理论。

1958 年，Rutickiĭ Ya.B.和 Krasnosel′skiĭ M.A.为了解决非线性积分方程中的确解问题讨论了一类特殊的 Orlicz 空间，这类空间由不满足 Δ_2 条件的 Orlicz 函数生成[9]，而后总结了他们和 Orlicz、Luxemburg 等人的结果，并集中收集于 1961 年出版的《Convex Functions and Orlicz Spaces》，该书的出版象征了 Orlicz 空间理论已经基本成型，对日后众多数学工作者研究 Orlicz 空间理论具有重要意义。此书一经出版，中国数学研究者吴从炘教授便第一时间将其翻译成中文《凸函数与 Orlicz 空间》，以便于国内学者对 Orlicz 空间理论的进行深入研究，国内数学工作者们在此基础上对 Orlicz 空间进行探讨并取得了一些不菲的结果，为 Orlicz 空间理论在中国发展做出重要贡献。

进入 20 世纪 60 年代，世界各地研究 Orlicz 空间的数学工作者越来越多，有关 Orlicz 空间理论的一些好的结果被逐步发现，Orlicz 空间理论日臻完善。60 年代初期，日本学者 ANDO,T.和美国数学工作者 RAO,M.M.相继独立地得到了 Orlicz 空间对偶空间的刻画[10,11]；60 年代中期，王廷辅先生研究了该空间有界凸集是紧集的等价条件[12]；丁夏畦和 Trudinger,N.S.分别对索伯列夫定理进行推广[13,14]，使其能被应用到偏微分方程理论中；60 年代后期，Gaposkin,V.F.得到该空间具有无

条件基是空间自反的等价条件[15]。

到 20 世纪 80~90 年代，吴从炘先生、王廷辅先生等数学工作者相继出版了三本有关 Orlicz 空间的专著[16-18]，这在很大程度上充实了 Orlicz 空间理论，使其得到了更系统总结，哈尔滨从此成为 Orlicz 空间理论的核心研究地之一，以他们为首的数学研究者汇集于此得到了许多有价值的成果[19-28]。

20 世纪末，Maligranda、Henryk Hudzik 等人在讨论 Orlicz 范数与 Amemiya 范数相等条件时，提出了 p-Amemiya 范数的定义：$\|x\|_{\Phi}^{p}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}(1+I_{\Phi}{}^{p}(kx))^{\frac{1}{p}}(1\le p\le\infty)$，以此为基础详细研究了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}$ 的几何性质，并取得突破性的进展，给出该空间的对偶空间的结构[29-33]。

经过了众多数学工作者接近一个世纪努力钻研，为 Orlicz 空间理论注入生机和活力，其内容更加完善，在强化的同时不断开拓创新，使其能够更为广泛的应用和渗透到其他学科中。

1.2.2 赋 s 范数的 Orlicz 空间理论发展状况

2019 年 Marek Wisła 对 Orlicz 空间赋予 s 范数得到赋 s 范数的 Orlicz 空间 $L_{\Phi,s}(l_{\Phi,s})$，是 Orlicz 空间的一种更为普遍的推广形态。s 范数的引入使得 Orlicz 空间的其他范数都能被 s 范数表达出来，从而使 Orlicz 空间理论得到更系统地推广和深化。

Marek Wisła 于 2019 年发表《Orlicz spaces equipped with s-norms》一文，利用外函数 $s(u)$ 的概念给出 s 范数的定义：$\|x\|_{\Phi,s}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}s(I_{\Phi}(kx))$。并给出其对偶空间的结构、$s$ 范数的计算公式等一系列性质。同年，崔云安、安莉丽等人对该空间的端点进行讨论并发表了《赋 s 范数的 Orlicz 空间的端点》[34]。

对这类空间的探索可以为 Banach 空间提供直观材料，还可以拓宽思路，利用相通的方法和技巧来讨论其他空间的几何性质问题，因此我们更需要研究该空间的几何性质。

1.3 主要研究内容

时至今日，在国内外学者的研究下，许多关于 L_{Φ} 和 L_{Φ}^{o} 的几何性质成果已经给出[35-52]，但是对 $L_{\Phi,s}$ 的几何性质研究成果却寥寥无几，还有很多重要的几何性质没有讨论，如：正规结构，单调性，部分点态性质等。本文主要讨论赋 s 范数

的 Orlicz 空间的 Kadec-Klee 性质和 β 性质。

第一部分，叙述了赋 s 范数的 Orlicz 空间的基本结构及 Banach 空间中一些几何性质的刻画，为本文的研究工作提供了正确的方向。

第二部分，研究赋 s 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,s}$ 的 Kadec-Klee 性质，解决 $\Phi\notin\delta_2$ 刻画问题，利用 $l_{\Phi,s}$ 中的模收敛与范数的收敛的等价条件给出 $l_{\Phi,s}$ 具有 Kadec-Klee 性质的等价刻画。

第三部分，研究赋 s 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,s}$ 的 β 性质，通过研究相关论文，比较赋 Luxemburg 范数，赋 Orlicz 范数和赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz空间 β 性质的判别条件，讨论 $l_{\Phi,s}$ 具有 β 性质的条件。

第四部分，研究赋 s 范数的 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,s}$ 的 Kadec-Klee 性质，利用相关 s 范数的性质和有关 $L_{\Phi,s}$ 的端点的性质，给出 $L_{\Phi,s}$ 具有 Kadec-Klee 性质的充要条件。

第 2 章 赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 Kadec-Klee 性质

2.1 引言及预备知识

Kadec-Klee 性质与 Banach 空间的逼近论与不动点性质联系密切，且在逼近论和概率论等方面有重要应用，国内泛函分析方向研究者已给出有关本性质的众多成果。陈述涛先生、王玉文先生等人分别在《Orlicz 序列空间的 H 性质》[50]9,10 和《关于 Orlicz 空间 H 性质的注记》[51]218-220 中给出 Orlicz 空间的 Kadec-Klee 性质的判别。随后，崔云安、左明霞等人合作研究了其他的 Orlicz 的空间和 Musielak-Orlicz 空间中的 Kadec-Klee 性质的刻画[52]6-10。本章首先给出有关 Orlicz 空间和赋 s 范数的 Orlicz 空间的基本定义，在该序列空间上，联系 Banach 空间的知识分别从 Orlicz 空间的对偶向量空间、Kadec-Klee 性质、一致 Kadec-Klee 性质几个方面进行研究，进而给出赋 s 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,s}$ 具有 Kadec-Klee 性质的等价刻画。

本文中，设 X 为 Banach 空间，X^* 为 X 的对偶向量空间，$S(X)$，$B(X)$ 分别为 X 的单位球面和单位球，N、R 为非负整数集和实数集。

定义 2.1[16]7 称 Φ：$R \to R^+$ 为 Orlicz 函数是指：

（1）$\Phi(u)$ 是连续的凸函数且为偶函数；

（2）$\Phi(u) \geq 0$ 当且仅当 $\Phi(0)=0$；

（3）$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$ 。

定义 2.2[16]8 设 $\Phi(u)$ 为 Orlicz 函数，则称 $\Psi(v)=\sup\{|uv|-\Phi(u),u\geq 0\}$ 为 $\Phi(u)$ 的余函数。

定义 2.3[16]14,18 设 $l_0=\{x=(x(i)),x(i)\in R\}$，称 $I_\Phi : l_0 \to R^+$ 为 x 关于 Φ 的模是指：

$$I_\Phi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(x(i))$$

由 I_Φ 生成的 Orlicz 序列空间记为：

$$l_\Phi=\left\{x\in l_0 : \text{存在}\lambda>0, I_\Phi(\lambda x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\lambda x(i))<\infty\right\}$$

$$l_\Phi=\left\{x\in l_0:任意\lambda>0, I_\Phi(\lambda x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\lambda x(i))<\infty\right\}$$

在 Orlicz 序列空间中定义 Luxemburg 范数：

$$\|x\|_\Phi=\inf\left\{k>0, I_\Phi(\frac{x}{k})\le 1\right\}$$

和 Orlicz 范数：

$$\|x\|_\Phi^o=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}x(i)y(i): I_\Psi(y)\le 1\right\}$$

及 Amemiya 范数

$$\|x\|_\Phi^A=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+I_\Phi(kx))$$

已经证明：$\|x\|_\Phi^A=\|x\|_\Phi^o$。记

$$l_\Phi=[l_\Phi,\|\cdot\|_\Phi]，\quad h_\Phi=[h_\Phi,\|\cdot\|_\Phi]$$

$$l_\Phi^o=[l_\Phi,\|\cdot\|_\Phi^o]，\quad h_\Phi^o=[h_\Phi,\|\cdot\|_\Phi^o]$$

定义 2.4[7]6 称 $s:[0,\infty)\to[1,\infty)$ 为外函数是指：

（1） s 为凸函数；

（2）对任意的 $u\ge 0$， $\max\{u,1\}\le s(u)\le u+1$。

定义 2.5[7]6 设 s 为外函数，Φ 为 Orlicz 函数，在 Orlicz 序列中定义 s 范数：

$$\|x\|_{\Phi,s}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s(I_\Phi(kx))$$

记

$$l_{\Phi,s}=[l_\Phi,\|\cdot\|_{\Phi,s}]，\quad h_{\Phi,s}=[h_\Phi,\|\cdot\|_{\Phi,s}]$$

为赋 s 范数的 Orlicz 序列空间。

定义 2.6[7]12-16 设 s 为外函数，$s_+^{'}(u)$ 为 $s(u)$ 的右导数，对任意的 $0\le v\le 1$，定义：

$$\omega(v)=\int_0^v s_+^{'-1}(u)dt$$

对任意的 $0\le u\le\infty$， $0\le v\le\infty$， 定义：

$$\beta_s(u,v)=1-\omega(s_+^{'}(u))-vs_+^{'}(u)$$

对任意的 $x\in l_{\Phi,s}\setminus\{(0)\}$，定义：

$$k^*(x)=\inf\left\{k>0:\beta_s(I_\Phi(kx),I_\Psi(p_+(k|x|)))\le 0\right\}$$

$$k^{**}(x)=\sup\left\{k>0:\beta_s(I_\Phi(kx),I_\Psi(p_+(k|x|)))\ge 0\right\}$$

记

$$k(x)=[k^*(x),k^{**}(x)]$$

定义 2.7[16]9 称Φ满足δ_2条件（即$\Phi\in\delta_2$）是指：存在$K>0$，$u_0\geq 0$，当$|u|\leq u_0$时，有

$$\Phi(2u)\leq K\Phi(u)$$

称Φ满足$\overline{\delta}_2$条件（即$\Phi\in\overline{\delta}_2$）是指：存在$\delta\in(0,1)$，$u_0>0$，当$|u|\leq u_0$时，有

$$\Phi(\frac{u}{2})\leq\frac{1-\delta}{2}\Phi(u)$$

定义 2.8[16]119 称$x\in S(X)$为X的 Kadec-Klee 点是指：对任意的$(x_n)\subset B(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，蕴涵$x_n\to x$。

定义 2.9[16]119 称X具有 UKK 性质是指：对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta\in(0,1)$，$(x_n)\subset B(X)$，$sep(x_n)=\inf\{\|x_n-x_m\|:n\neq m\}\geq\varepsilon$，$x_n\xrightarrow{w}x$，蕴涵$\|x\|<1-\delta$。

2.2 赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 Kedec-Klee 性质

引 理 2.1[16]119,120 若$S(X)$上的任意点均为 Kadec-Klee 点，则X具有 Kadec-Klee 性质。

引 理 2.2[16]9 对任意 Orlicz 函数Φ，$\Phi\in\delta_2\Leftrightarrow\Psi\in\overline{\delta}_2$。

引 理 2.3 对任意 Orlicz 函数Φ，若$\Phi\in\delta_2$，则$l_{\Phi,s}=h_{\Phi,s}$。

引理 2.4[7]6,7 设Φ为 Orlicz 函数，s为外函数，对任意的$x\in l_\Phi$，有$\|x\|_\Phi\leq\|x\|_{\Phi,s}\leq\|x\|_\Phi^o$，故$s$范数与 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数等价。

引 理 2.5[7]18 设Φ为 Orlicz 函数，s为外函数，对任意的$x\in l_\Phi\setminus\{0\}$，有：

(1) 当$k(x)\neq\varnothing$，则存在$k\in(0,\infty)\cap k(x)$，$\|x\|_{\Phi,s}=\frac{1}{k}s(I_\Phi(kx))$；

(2) 若$k^{**}(x)=\infty$，则有$\|x\|_{\Phi,s}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}s(I_\Phi(kx))$。

定理 2.1 设Φ为 Orlicz 函数，s为外函数，$l_{\Phi,s}$为赋s范数的 Orlicz 序列空间，以下三个命题等价：

(1) $l_{\Phi,s}$为 UKK 空间；

(2) $l_{\Phi,s}$具有 Kadec-Klee 性质；

(3) $\Phi\in\delta_2$。

证明：

(1)$\Rightarrow$(2) 显然。

(2)$\Rightarrow$(3)

假设$\Phi\notin\delta_2$，则存在$x\in S(l_{\Phi,s})$，当$n\to\infty$时，满足

$$\|(0,...,0,x(n+1),x(n+2),...)\|_{\Phi,s}\to 1$$

设 $x_{n_m}=(0,...,0,x(n+1),...,x(m),0,...)$，则存在 $m_1<m_2<\cdots<m_i\in N$，使

$$\|(0,...,0,x(m_1+1),...,x(m_2),0,...)\|_{\Phi,s}>\frac{1}{2}$$

$$\|(0,...,0,x(m_2+1),...,x(m_3),0,...)\|_{\Phi,s}>\frac{1}{2}$$

依此类推，

$$\|(0,...,0,x(m_i+1),...,x(m_{i+1}),0,...)\|_{\Phi,s}>\frac{1}{2}$$

由 $I_\Phi(x)<+\infty$ 可知，

$$\sum_{j=m_{i+1}}^{m_i+1}\Phi(x(j))\to 0\qquad(i\to+\infty)$$

令 $x_i=(0,...,0,x(m_i+1),...,x(m_{i+1}),0,...)\in h_{\Phi,s}$，则对任意 $\varphi\in F$，$\varphi(x_i)=0$。

对任意 $v\in l_{\Psi,s^*}$，令

$$v(x)=\sum_{j=1}^{\infty}v(j)x(j)<\infty$$

则

$$v(x_i)=\sum_{j=m_{i+1}}^{m_i+1}v(j)x(j)\to 0\qquad(i\to+\infty)\tag{2-1}$$

从而 $x_i\xrightarrow{w}0$，令

$$x_0=(x_0(1),...,x_0(m_i),x_0(m_i+1),...,x_0(m_{i+1}),x_0(m_{i+1}+1),...)\tag{2-2}$$

$$y_i=(x_0(1),...,x_0(m_i),\frac{x_0(m_i+1)}{k},...,\frac{x_0(m_{i+1})}{k},x_0(m_{i+1}+1),...)\tag{2-3}$$

由上式可知，

$$\begin{aligned}y_i-x_0&=(0,...,\frac{x_0(m_i+1)}{k},...,\frac{x_0(m_{i+1})}{k},0,...)-(0,...,x_0(m_i+1),...,x_0(m_{i+1}),0,...)\\&=\frac{1}{k}x_i-(0,...,x_0(m_i+1),...,x_0(m_{i+1}),0,...)\xrightarrow{w}0\end{aligned}$$

则

$$
\begin{aligned}
\|y_i\|_{\Phi,s} &\le \frac{1}{k}s(I_\Phi(ky)) \\
&= \frac{1}{k}s(\sum_{j=1}^{m_i}\Phi(kx_0(i)) + \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(x_0(i)) + \sum_{j=m_{i+1}+1}^{\infty}\Phi(kx_0(i)) + \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i)) - \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i))) \\
&= \frac{1}{k}s(\sum_{j=1}^{m_i}\Phi(kx_0(i)) + \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i)) + \sum_{j=m_{i+1}+1}^{\infty}\Phi(kx_0(i))) + \frac{1}{k}s(\sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(x_0(i)) - \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i))) \\
&= \|x_0\|_{\Phi,s} + \frac{1}{k}s(\sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(x_0(i)) - \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i)))
\end{aligned}
$$

当$k\to\infty$时，

$$
\frac{1}{k}s(\sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(x_0(i)) - \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}}\Phi(kx_0(i))) \to 0
$$

从而$\lim\limits_{i\to\infty}\|y_i\|_{\Phi,s}=1$，但

$$
\lim_{i\to\infty}\|y_i - x\|_{\Phi,s} \ge \lim_{i\to\infty}\left\|\frac{1}{k}x_i\right\|_{\Phi,s} \ge \frac{1}{2k} \nrightarrow 0
$$

产生矛盾，故$\Phi\in\delta_2$。

(3)$\Rightarrow$(1)

由$\Phi\in\delta_2$，则对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得$\|x\|_{\Phi,s}\ge\frac{\varepsilon}{4}$，有$I_\Phi(x(i))\ge\delta_1$，对上述$\delta_1$，存在$\delta\in(0,1)$，使得$\|x\|_{\Phi,s}\ge 1-\delta$，有$I_\Phi(x(i))\ge 1-\delta_1$。

设$(x_n)\subset B(l_{\Phi,s})$，$x_n \xrightarrow{w} x$且$sep(x_n)\ge\varepsilon$。若$\|x\|_{\Phi,s}\ge 1-\delta$，则存在一个有限子集$I\in N$，使得$\|x|_I\|_{\Phi,s}\ge 1-\delta$。由$x_n \xrightarrow{w} x$和$I$有限可知$x_n(i)\to x(i)$，则$x_n\to x$。

若$x=0$，则显然。

若$x\ne 0$，若$\{k_n\}=k(x_n)$无界，令$y_n=\frac{x+x_n}{2}$，则$y_n \xrightarrow{w} x$且$\|y_n\|_{\Phi,s}\le 1$。由线性函数的延拓定理可知，存在$f\in S(X^*)$，使得$f(x)=\|x\|_{\Phi,s}=1$，则

$$
\|f\|\cdot\|y_n\| = \|y_n\|_{\Phi,s} \ge f(y_n) \to f(x) = 1 \tag{2-4}
$$

故$\|y_n\|_{\Phi,s}\ge 1$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|_{\Phi,s}=1$。因此，

$$
\begin{aligned}
2\|y_n\|_{\Phi,s} &\le \frac{k_n+k}{k_n k}(1+I_\Phi(\frac{k_n}{k_n+k}kx + \frac{k}{k_n+k}k_n x_n)) \\
&\le \frac{1}{k}(1+I_\Phi(kx)) + \frac{1}{k_n}(1+I_\Phi(k_n x_n)) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

由此可知，$\left\{\dfrac{k_n k}{k_n+k}\right\}$有界，$\left\{\dfrac{k_n k}{k_n+k}\right\}$存在收敛子列。因此，设$\{k_n\}$=$k(x_n)$有界，则$k_n\in\{k_n\}$存在收敛子列，不妨设$k_n\to k$。

I为有限子集，则$\|x|_I\|_{\Phi,s}\geq\|x\|_{\Phi,s}-\delta$。存在$k\in N$，使

$$\|x|_I\|_{\Phi,s}\geq 1-\delta \text{且} \|x_n-x_m|_I\|_{\Phi,s}\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2-5}$$

对任意的$n,m>k$，$n\neq m$，$I_\Phi(x_n|_I)\geq 1-\delta_1$，$\|x_n-x_m|_{N\setminus I}\|_{\Phi,s}\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$。由$sep(x_n)\geq\varepsilon$，有

$$\|x_n|_{N\setminus I}\|_{\Phi,s}\geq\frac{\varepsilon}{4} \text{或} \|x_m|_{N\setminus I}\|_{\Phi,s}\geq\frac{\varepsilon}{4} \tag{2-6}$$

由公式(2-6)，假设$\|x_n|_{N\setminus I}\|_{\Phi,s}\geq\dfrac{\varepsilon}{4}$，则$\|x_n|_{N\setminus I}\|_{\Phi,s}\geq\dfrac{\varepsilon}{8}$，$I_\Phi(x_n|_{N\setminus I})\geq 2\delta$。

由$\|x_n\|_{\Phi,s}\leq 1$，$k_n>1$，对任意的$n\in N$，

$$\begin{aligned}
1-2\delta &\geq \|x_n\|_{\Phi,s}-I_\Phi(x_n|_{N\setminus I})\\
&\geq \|x_n\|_{\Phi,s}-\mathrm{s}(I_\Phi(x_n|_{N\setminus I}))\\
&\geq \|x_n\|_{\Phi,s}-\frac{1}{k_n}\mathrm{s}(I_\Phi(k_n x_n|_{N\setminus I}))\\
&=\frac{1}{k_n}\mathrm{s}(I_\Phi(k_n x_n|_I))\to\frac{1}{k}\mathrm{s}(I_\Phi(kx|_I))\\
&\geq \|x|_I\|_{\Phi,s}\geq\|x\|_{\Phi,s}-\delta
\end{aligned}$$

故$\|x\|_{\Phi,s}\leq 1-\delta$，$l_{\Phi,s}$具有UKK性质。

□

2.3 本章小结

我们首先讨论了$l_{\Phi,s}=h_{\Phi,s}$的条件，并通过此条件完成了定理的必要性证明，得到了$l_{\Phi,s}$具有UKK性质与$l_{\Phi,s}$具有KK性质是等价的。然后解决$\Phi\notin\delta_2$时$l_{\Phi,s}$的刻画，定义了序列y_i，此定义形式也可用到其他性质的讨论中，随后又讨论了$\{k_n\}$的有界性，在Banach空间中UKK空间就是具有一致的Kadec-Klee的Banach空间，得到$\Phi\in\delta_2$也是$l_{\Phi,s}$具有UKK性质的充分条件。

第 3 章 赋 s 范数的 Orlicz 序列空间的 β 性质

3.1 引言及预备知识

β 性质作为Banach空间几何理论中的重要内容，与Banach空间的正规结构、接近一致凸等性质有着极为密切的联系，因此对赋 s 范数的Orlicz空间的 β 性质的研究也尤为重要。在本章中，利用 s 范数的定义解决K有界问题，并给出赋 s 范数的Orlicz空间的 β 性质的等价命题。以下是与 β 性质相关联的基本定义：

定义 3.1[16]84 称 X 具有 β 性质是指：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$，对任意的 $x\in B(X)$，$(x_n)\subset B(X)$，$sep(x_n)\geq\varepsilon$，则存在 $n>1$，满足 $\|\dfrac{x+x_n}{2}\|<1-\delta$。

定义 3.2[16]119 称 X 是接近一致凸(NUC)的是指：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$，任意 $(x_n)\subset B(X)$，$sep(x_n)\geq\varepsilon$，有 $\overline{co}(x_n)\cap B_{1-\delta}(X)\neq\varnothing$。

3.2 赋 s 范数的 Orlicz 序列空间 β 性质

引 理 3.1[16]119 设 X 为 Banach 空间，则下列性质有如下关系：

$$\beta\Rightarrow NUC\Rightarrow UKK\Rightarrow H$$

引 理 3.2[16]27-28 对任意 $f\in(l_{\Phi,s})^*$，$v\in l_{\Psi,s^*}$，$\varphi\in F$，F 为 $(l_{\Phi,s}\setminus h_{\Phi,s})^*$ 上奇异泛函全体（即任意 $x\in h_{\Phi,s}$，$\varphi(x)=0$），f 存在唯一的分解 $f=v+\varphi$。

引 理 3.3 对任意 Orlicz 函数 Φ 和外函数 s，若 $\Phi\in\overline{\delta}_2$，则 $K=\left\{k:a\leq\|x\|_{\Phi,s}=\dfrac{1}{k}s(I_\Phi(kx))\leq b,b\geq a>0\right\}$ 有界。

证明：

令 $k(x)=[k^*(x),k^{**}(x)]$，当 $k(x)\neq\varnothing$ 且存在 $k\in(0,\infty)\cap k(x)$ 时，有

$$\|x\|_{\Phi,s}=\frac{1}{k}s(I_\Phi(kx)) \tag{3-1}$$

设 $\Phi\in\overline{\delta}_2$，则对任意 $l>1$，存在 $h>1$，$u_0>0$，使得当 $u\leq u_0$ 时，有

$$\Phi(lu)\geq hl\Phi(u)$$

令 $l=2$，$h=1+\dfrac{\delta}{2}$，对任意的 $b\geq a>0$，存在 $x\in l_{\Phi,s}$，使得 $a\leq\|x\|_{\Phi,s}\leq b$，对任意 $u>0$，有

$$\Phi(2u)\geq(2+\delta)\Phi(u) \tag{3-2}$$

则

$$a \le \|x\|_{\Phi,s} \le \frac{a}{2} s(I_{\Phi}(\frac{2}{a}u)) \tag{3-3}$$

因此$s(I_{\Phi}(\frac{2}{a}u)) \ge 2$。

从而

$$\begin{aligned}
&s(\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\Phi(\frac{2}{a}x(i))) \\
&\ge s(\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\frac{2}{a}x(i))) - s(\sum_{i=1}^{i_0}\Phi(\frac{2}{a}x(i))) \\
&\ge 2 - \frac{1}{2^{i_0}} \to 2\left(i_0 \to \infty\right)
\end{aligned}$$

对任意的$k \in k(x)$，$k > \frac{2}{a} l$，存在$m \in N$，使$l^m < \frac{2}{a} k \le l^{m+1}$，则有

$$\Phi(l^m u) \ge (hl)^m \Phi(u) \tag{3-4}$$

于是，由公式(3-3)和(3-4)得

$$\begin{aligned}
b \ge \|x\|_{\Phi,s} &= \frac{1}{k} s(I_{\Phi}(kx)) \ge \frac{1}{k} s(\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\Phi(kx(i))) \\
&= \frac{1}{k} s(\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\Phi(\frac{a}{2}k \cdot \frac{2}{a}x(i))) > s(\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\frac{1}{k}(hl)^m \Phi(\frac{2}{a}x(i))) \\
&> 2\frac{1}{k}(hl)^m > (hl)^m \cdot \frac{a}{l^{m+1}} = \frac{ah^m}{l}
\end{aligned}$$

则$m < \log_h(\frac{bl}{a}) = c$，从而$k \le \frac{2}{a} l^{1+c}$，即$K$有界。

□

引理 3.4[7]7-9 对任意 Orlicz 函数Φ和外函数s，Orlicz 序列空间$l_{\Phi,s}$具有半法都性质。

定理 3.1 设Φ为Orlicz 函数，s为外函数，$l_{\Phi,s}$为赋s范数的Orlicz 序列空间，以下三个命题等价：

(1) $l_{\Phi,s}$具有β性质；

(2) $l_{\Phi,s}$是接近一致凸(NUC)的；

(3) $\Phi \in \delta_2 \cap \overline{\delta}_2$。

证明：

$(1)\Rightarrow(2)$ 显然。

$(2)\Rightarrow(3)$

已知$l_{\Phi,s}$是接近一致凸的充要条件是$l_{\Phi,s}$是自反的UKK空间，且$\Phi\in\delta_2$与$l_{\Phi,s}$具有UKK性质是等价的，故只需证$l_{\Phi,s}$是自反的充分必要条件是$\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta}_2$。

必要性：

若$l_{\Phi,s}$自反，则$h_{\Phi,s}$自反，从而有$(h_{\Phi,s})^{**}=h_{\Phi,s}$，由引理(2.3)可知$(h_{\Phi,s})^{*}=l_{\Psi,s^*}$。于是有

$$\left(h_{\Phi,s}\right)^{**}=\left(l_{\Psi,s^*}\right)^{*}=\left(h_{\Psi,s^*}\right)^{*}\oplus\left(l_{\Psi,s^*}/h_{\Psi,s^*}\right)^{*}=l_{\Phi,s}+F=h_{\Phi,s}$$

则$F=\varnothing$,且$l_{\Phi,s}=h_{\Phi,s}$，从而$\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta}_2$。

充分性：

若$\Phi\in\delta_2$，则$l_{\Phi,s}=h_{\Phi,s}$，$(l_{\Phi,s})^{*}=(h_{\Phi,s})^{*}=l_{\Psi,s^*}$；若$\Phi\in\overline{\delta}_2$，则$l_{\Psi,s^*}=h_{\Psi,s^*}$，$(l_{\Psi,s^*})^{*}=(h_{\Psi,s^*})^{*}=l_{\Phi,s}$。于是$(l_{\Phi,s})^{**}=l_{\Phi,s}$，证毕。

$(3)\Rightarrow(1)$

假设$\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta}_2$且$l_{\Phi,s}$不具有$\beta$性质，则存在$\varepsilon_0>0$，对任意的$\delta\in(0,1)$，$x_n\in S(l_{\Phi,s})$，$sep(x_n)\ge\varepsilon_0$，有$\|\frac{x+x_n}{2}\|>1-\delta$。

存在$n\in N$,令$k\in k(x)=[k^*(x),k^{**}(x)]$，$k_n\in k(x_n)=[k^*(x_n),k^{**}(x_n)]$，则

$$\|x\|_{\Phi,s}=\frac{1}{k}s(I_{\Phi}(kx))\text{；}\ \|x_n\|_{\Phi,s}=\frac{1}{k_n}s(I_{\Phi}(k_nx_n))$$

设$k_0=\max\{k,k_n\}$，根据引理(3.3)得$k_0<+\infty$，令$\lambda=\dfrac{k_0}{k_0+1}$。由$\Phi$是凸函数及$\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta}_2$，存在$\delta_1\in(0,1)$，$u_0>0$，当$u\ge u_0$时，有

$$\Phi(\lambda u)\le(1-\delta_1)\lambda\Phi(u)\tag{3-5}$$

于是，对任意$\lambda_1 \in (0,1)$，当$u \ge u_0$时，有

$$\Phi(\lambda_1 u) = \Phi(\lambda \frac{\lambda_1}{\lambda} u) \le (1-\delta_1)\lambda_1 \Phi(u) \tag{3-6}$$

当$k_n u \ge u_0$时，令$\lambda_n = \dfrac{k}{k_n + k}$，则有

$$\Phi(\lambda_n k_n u) \le (1-\delta_1)\lambda_n \Phi(k_n u) \tag{3-7}$$

下面证$\lim\limits_{i_0\to\infty}\sup\limits_{n>0}\sum\limits_{i=i_0}^{\infty}\Phi(k_n x_n(i)) \le \dfrac{3k_0\delta}{\delta_1}$，假设当时，$\sum\limits_{i=i_0}^{\infty}\Phi(k_n x_n(i)) > \dfrac{3k_0\delta}{\delta_1}$，由$s$为外函数，即$s$为凸函数且对任意$u \ge 0$，$\max\{1,u\} \le s(u) \le u+1$有

$$\begin{aligned}
2\delta &= 2-2(1-\delta) \\
&\ge \|x\|_{\Phi,s} + \|x_n\|_{\Phi,s} - \|x+x_n\|_{\Phi,s} \\
&\ge \frac{1}{k}s(I_\Phi(kx) + \frac{1}{k_n}s(I_\Phi(k_n x_n) - \frac{k_n+k}{kk_n}s(I_\Phi(\frac{kk_n}{k_n+k}(x+x_n))) \\
&= \frac{k_n+k}{kk_n}\{\frac{k_n}{k_n+k}s(I_\Phi(kx)) + \frac{k}{k_n+k}s(I_\Phi(k_n x_n)) - s(I_\Phi(\frac{kk_n}{k_n+k}(x+x_n)))\} \\
&\ge \frac{k_n+k}{kk_n}\{\frac{k_n}{k_n+k}I_\Phi(kx) + \frac{k}{k_n+k}I_\Phi(k_n x_n) - I_\Phi(\frac{kk_n}{k_n+k}(x+x_n))\} \\
&\ge \frac{k_n+k}{kk_n}\{\sum_{i=i_0}^{\infty}\frac{k_n}{k_n+k}\Phi(kx) + \sum_{i=i_0}^{\infty}\frac{k}{k_n+k}\Phi(k_n x_n) - \sum_{i=i_0}^{\infty}\Phi(\frac{kk_n}{k_n+k}(x+x_n))\} \\
&\ge \frac{k_n+k}{kk_n}\{\sum_{i=i_0}^{\infty}\frac{k}{k_n+k}\Phi(k_n x_n) - \sum_{i=i_0}^{\infty}(\frac{kk_n}{k_n+k}\Phi(x+x_n) - \frac{k_n}{k_n+k}\Phi(kx))\} \\
&\ge \frac{k_n+k}{kk_n}\sum_{i=i_0}^{\infty}(\frac{k_n}{k_n+k}\Phi(kx) - \Phi(\frac{k}{k_n+k}k_n x_n)) - \frac{2\delta}{k_0} \\
&\ge \frac{k_n+k}{kk_n}\sum_{i=i_0}^{\infty}(\frac{k_n}{k_n+k}\Phi(kx) - (1-\delta_1)\frac{k}{k_n+k}\Phi(k_n x_n)) - \frac{2\delta}{k_0} \\
&\ge \frac{\delta_1}{k_n}\sum_{i=i_0}^{\infty}\Phi(k_n x_n) - \frac{2k_0\delta}{2k_0} \\
&\ge \frac{3k_0\delta}{\delta_1 k_0} - \delta \\
&= 2\delta
\end{aligned}$$

产生矛盾，故 $\lim_{i_0\to\infty}\sup_{n>0}\sum_{i=i_0}^{\infty}\Phi(k_n x_n(i))\le\frac{3k_0\delta}{\delta_1}$。利用 δ_2 条件和模收敛与范数收敛的等价条件，故存在 $\delta_1=0(\delta)$，使得 $\|\sum_{i=i_0}^{\infty}x_n(i)e_i\|_{\Phi,s}<\delta_1$，从而 $\|\sum_{i=1}^{i_0}(x_n(i)-x_m(i))e_i\|_{\Phi,s}<\delta_1$。存在 $n_0\in N$，当 $n,m>n_0$ 时，

$$\begin{aligned}\|x_n+x_m\|_{\Phi,s}&\le\left\|\sum_{i=1}^{i_0}(x_n(i)-x_m(i))e_i\right\|_{\Phi,s}+\left\|\sum_{i=i_0}^{\infty}(x_n(i)\right\|_{\Phi,s}+\left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty}(x_m(i)\right\|_{\Phi,s}\\&\le3\delta_1=30(\delta)\end{aligned}$$

产生矛盾，故 $l_{\Phi,s}$ 具有 β 性质。

□

3.3 本章小结

Orlicz 空间的 β 性质在 Orlicz 空间的几何性质起着重要作用，本章为了研究 Orlicz 序列空间的 β 性质，首先讨论了在 $\Phi\in\overline{\delta}_2$ 条件下单位球面上序列范数可达点集的有界性；其次利用奇异泛函，得到 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,s}$ 是自反的充分必要条件是 $\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta}_2$；最后，在此基础上，根据赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 β 性质，给出赋 s 范数的 Orlicz序列空间 具有 β 性质的等价命题的证明。

第 4 章 赋 s 范数的 Orlicz 函数空间的 Kadec-Klee 性质

4.1 引言及预备知识

近几年来，Orlicz 空间作为一类经典的 Banach 空间向更为广泛应用的方向迅速发展，对 Orlicz 空间的几何性质的研究成为推动 Orlicz 空间发展的关键部分。其中对于赋 Orlicz 范数， Luxemburge 范数， p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的 Kadec-Klee 性质的刻画问题均被解决。本章主要研究赋 s 范数的 Orlicz 函数空间的 Kadec-Klee 性质的刻画问题。

本章中，(G,Σ,μ) 为有限的不含原子的测度空间，$L^0 = L^0(\mu)$ 为有限测度集 G 上 Σ 可测实函数的所有 $\mu-$等价类 的集合。$(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，X^* 表示 Banach 空间 X 的对偶向量空间。N，R，R^+ 将分别表示非负整数集、实数所集和正实数集。$S(X)$ 和 $B(X)$ 将分别表示 Banach 空间 X 的单位球面和单位球。

定义 4.1[16]6 称 $\Phi : R \to R^+$ 为严格凸的是指：对任意的 $u \neq v$，有

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\Phi(u)+\Phi(v)}{2}$$

定义 4.2[7]9 称外函数 s^* 在 Hölder 意义下与 s 共轭是指：对任意 $x \in L_{\Phi,s}$，$y \in L_{\Psi,s^*}$，有

$$\left|\int_G x(t)y(t)dt\right| \le \|x\|_{\Phi,s}\|y\|_{\Psi,s^*}$$

定义 4.3[16]51 称 $x \in S(L_{\Phi,s})$ 为 $B(X)$ 的端点是指：存在 $y,z \in B(X)$，使得 $x = \frac{y+z}{2}$，则 $x = y = z$ 。$B(X)$ 端点的全体记为 $Ext(B(X))$ 。

定义 4.4[16]7 称 $u_0 \in R$ 为 $\Phi(u)$ 的严格凸点是指：对任意 $v \neq w$，若 $\frac{v+w}{2} = u_0$，有

$$\Phi(u_0) < \frac{\Phi(v)+\Phi(w)}{2}$$

$\Phi(u)$ 的全体严格凸点记为 S_Φ。

定义 4.5[16]32 称集合 $A=\{x_n\}\subset L_{\Phi,s}$ 是 L_{Ψ,s^*} 弱紧的是指：存在 $\{x_n\}$ 子集 $\{x_{n_i}\}$ 和 $x\in L_{\Phi,s}$，使得对任意的 $v\in L_{\Psi,s^*}$，有 $v(x_{n_i})\to v(x)$。

定义 4.6[16]6 称 Φ 满足 Δ_2 条件（即 $\Phi\in\Delta_2$）是指：存在 $K>0$，$u_0\geq 0$，当 $|u|\geq u_0$ 时，有

$$\Phi(2u)\leq K\Phi(u)$$

4.2 赋 s 范数的 Orlicz 函数空间 Kadec-Klee 性质

引理 4.1[16]51 若 Φ 是严格凸的，则对任意 $[a,b]\subset(0,1),D,\varepsilon>0$，任意 $\lambda\in[a,b]$，$|u|\leq D$，$|v|\leq D$，$|u-v|\geq\varepsilon$，存在 $\delta>0$，使得

$$\Phi[\lambda u+(1-\lambda)v]\leq(1-\delta)[\lambda\Phi(u)+(1-\lambda)\Phi(v)]$$

引理 4.2[16]34-35 若集合 $A=\{x_n\}\subset L_{\Phi,s}$ 满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n>0}\frac{I_\Phi(\lambda x_n)}{\lambda}=0$$

则 A 是 L_{Ψ,s^*} 弱紧的。

引理 4.3[16]125-127，设 $x_n,x\in L_{\Phi,s}$，$I_\Phi(k_nx_n)\to I_\Phi(k_0x)$ 且 $k_nx_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0x(t)$，若 $\Phi\in\Delta_2$，则有

$$\|x_n-x\|_{\Phi,s}\to 0$$

引理 4.4[16]119 若 $B(X)$ 上的任意点均为端点，则称 X 是严格凸的。

定理 4.1 设 s 为外函数，Φ 为 Orlicz 函数，$L_{\Phi,s}$ 具有 Kadec $-$ Klee 性质的充分必要条件是：

(1) $\Phi\in\Delta_2$；

(2) Φ在R上是严格凸的。

证明：

必要性：

i) 若$\Phi \notin \Delta_2$，存在$x \in S(L_{\Phi,s} \setminus E_{\Phi,s})$，使得$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,s}=\theta(x)>0$，其中$\theta(x)=\inf\left\{\lambda>0, I_\Phi(\frac{x}{\lambda})<\infty\right\}$且$\lim_{n\to\infty} I_\Phi(x-x_n)=0$。

对任意的$n,m>0$，令

$$G_n=\{t\in G:|x(t)|\le n\};\quad G_{n,m}=\{t\in G:n\le|x(t)|\le m\}$$

由$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,s}=\theta(x)$，则有

$$\lim_{m\to\infty}\left\|x\chi_{G_{n,m}}\right\|_{\Phi,s}\ge\theta(x)$$

因此对任意$n\in N$，存在$m_n>n>0$，使得$\left\|x\chi_{G_{n,m_n}}\right\|_{\Phi,s}\ge\frac{\theta(x)}{2}$。令$\overline{x_n}=x\chi_{G_{n,m_n}}$，则

$$\left\|\overline{x_n}\right\|_{\Phi,s}\ge\frac{\theta(x)}{2}$$

现证$\overline{x_n}\xrightarrow{w}0$。对任意$f=v+\varphi\in(L_{\Phi,s})^*$，由于$\overline{x_n}\in E_{\Phi,s}$，则$\varphi(\overline{x_n})=0$且

$$f(\overline{x_n})=v(\overline{x_n})=\int_G v(t)\overline{x_n}(t)dt=\int_{G_{n,m_n}} v(t)x(t)dt\text{。}$$

由$\int_G v(t)x(t)dt<\infty$和$\lim_{n\to\infty}m(G_{n,m_n})=0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{G_{n,m_n}} v(t)x(t)=0$$

令$y_n(t)=x(t)-\overline{x_n}(t)$，则$y_n\xrightarrow{w}x$，且

$$1\ge\|y_n\|_{\Phi,s}\ge\left\|x\chi_{G|G_n}\right\|_{\Phi,s}\to\|x\|_{\Phi,s}=1$$

因此$\|y_n\|_{\Phi,s}\to 1$。但是

$$\|y_n-x\|_{\Phi,s}=\left\|\overline{x_n}\right\|_{\Phi,s}\ge\frac{\theta(x)}{2}$$

产生矛盾，则 $L_{\Phi,s}$ 具有Kadec-Klee性质。

ii) 若 Φ 不是严格凸的，存在 $x\in S(L_{\Phi,s})$ 使得 x 不是端点，存在 $k_0\in[k^*(x),k^{**}(x)]$ 使得 $m(\{t\in G:|k_0x(t)|\notin S_\Phi\})>0$ 。因此存在 $A>0$ ，$B>0$ ，$0<a<b$，当 $u\in(a,b)$ 时，

$$\Phi(u)=Au+B \tag{4-1}$$

令

$$G_0=\{t\in G:|k_0x(t)|\in(a,b)\}$$
$$G_n=\{t\in G_0:|k_0x(t)|\in(a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n})\}$$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}m(G_n)=m(G_0)$ 。

为不失一般性，对任意 $t\in G_0$，假设 $x(t)\geqslant 0$。因此，存在 $n_0\in N$ 使 $m\left(G_{n_0}\right)>0$。

令 $c=\frac{1}{m(G_{n_0})}\int\limits_{G_{n_0}}x(t)dt$，则 $\frac{a}{k_0}<c<\frac{b}{k_0}$ 。令 $x_0(t)=c\chi_{G_{n_0}}+x(t)\chi_{G|G_{n_0}}$， $\delta=\frac{k_0}{n_0b}$，则对任意 $k\in(k_0-\delta,k_0+\delta)$ 和 $t\in G_{n_0}$，有 $kx(t)\in(a,b)$。因此，

$$\begin{aligned}I_\Phi(kx(t))&=\int\limits_{G_{n_0}}\Phi(kx(t))dt+\int\limits_{G|G_{n_0}}\Phi(kx(t))dt\\&=\int\limits_{G_{n_0}}\left[A\left(kx\left(t\right)\right)+B\right]dt+\int\limits_{G|G_{n_0}}\Phi(kx(t))dt\\&=Akcm(G_{n_0})+Bm(G_{n_0})+\int\limits_{G|G_{n_0}}\Phi(kx(t))dt\\&=\Phi(kc)m(G_{n_0})+\int\limits_{G|G_{n_0}}\Phi(kx(t))\,dt\\&=I_\Phi(kx_0(t))\end{aligned}$$

即 $I_\Phi(kx_0(t))=I_\Phi(kx(t))$ 。

故当 $\beta_s(I_\Phi(kx),I_\Psi(p_+(k|x|)))\le 0$ 时， $\beta_s(I_\Phi(kx_0),I_\Psi(p_+(k|x_0|)))\le 0$

当$\beta_s(I_\Phi(kx), I_\Psi(p_+(k|x|))) \geq 0$时，$\beta_s(I_\Phi(kx_0), I_\Psi(p_+(k|x_0|))) \geq 0$。由公式(4-1)，有

$$\|x\|_{\Phi,s} = \frac{1}{k_0} s(I_\Phi(k_0 x(t))) = \frac{1}{k_0} s(I_\Phi(k_0 x_0(t))) = \|x_0\|_{\Phi,s} \tag{4-2}$$

将G_0划分成两个子集$G_1^{(1)}$和$G_1^{(2)}$且$G_1^{(1)} \cap G_1^{(2)} = \varnothing$，使得

$$m(G_1^{(1)}) = m(G_1^{(2)}) = \frac{1}{2} m(G_{n_0})$$

再将$G_1^{(1)}$和$G_1^{(2)}$分别划分成两个子集$G_2^{(1)}$，$G_2^{(2)}$和$G_2^{(3)}$，$G_2^{(4)}$且$G_2^{(1)} \cap G_2^{(2)} = \varnothing$，$G_2^{(3)} \cap G_2^{(4)} = \varnothing$，使得

$$m(G_2^{(1)}) = m(G_2^{(2)}) = m(G_2^{(3)}) = m(G_2^{(4)}) = \frac{1}{2^2} m(G_{n_0})$$

依此类推，对任意$n \in N$和$i = 1, 2, ..., 2^n$，得到序列$\{G_n^{(i)}\}$使得

$$m(G_n^{(2i-1)}) = m(G_n^{(2i)}) = \frac{1}{2^n} m(G_0)$$

令

$$x_n(t) = (c+\varepsilon)\chi_{\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} G_n^{(2i-1)}} + (c-\varepsilon)\chi_{\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} G_n^{(2i)}} + x(t)\chi_{G|G_{n_0}}$$

因此，存在$k_0 \in [k^*(x), k^{**}(x)]$，使得

$$\begin{aligned} I_\Phi(k_0 x_n(t)) &= \int_{G_1^{(1)}} \Phi(k_0(c+\varepsilon))dt + \int_{G_1^{(2)}} \Phi(k_0(c-\varepsilon))dt + \int_{G|G_{n_0}} \Phi(k_0 x(t))dt \\ &= \int_{G_{n_0}} \Phi(k_0 c)dt + \int_{G|G_{n_0}} \Phi(k_0 x(t))dt \\ &= I_\Phi(k_0 x_0(t)) \end{aligned}$$

则有$\|x\|_{\Phi,s} = \|x_0\|_{\Phi,s} = \frac{1}{k_0} s(I_\Phi(k_0 x_0(t))) = \frac{1}{k_0} s(I_\Phi(k_0 x_n(t))) = \|x_n\|_{\Phi,s}$。

令$\overline{x_n}(t) = x_n(t) - x(t)\chi_{G|G_{n_0}}$，则

$$\lim_{\lambda\to 0}\sup\frac{I_\Phi(\lambda\overline{x_n})}{\lambda}=0$$

由引理(4.2)，假设存在$\bar{x}\in L_{\Phi,s}$使$\overline{x_n}\xrightarrow{L_{\Psi,s^*}}\bar{x}$，又由$\overline{x_n}\in E_{\Phi,s}$，则有$\overline{x_n}\xrightarrow{w}\bar{x}$成立。令$\tilde{x}=\bar{x}+x(t)\chi_{G|G_{n0}}$，那么$x_n\xrightarrow{w}\tilde{x}$。

设 $y(t)\in S(L_{\Psi,s^*})$ 是 $x_0(t)$ 的一个支撑泛函，令 $d=\dfrac{1}{m(G_{n_0})}\int_{G_{n0}}y(t)dt$ 和 $y_0(t)=d\chi_{G_{n0}}+y(t)\chi_{G|G_{n0}}$，则

$$\begin{aligned}
y_0(x_0)&=\int_G y_0(t)x_0(t)dt\\
&=\int_{G_{n0}}y_0(t)x_0(t)dt+\int_{G|G_{n0}}y(t)x(t)dt\\
&=\int_{G_{n0}}cddt+\int_{G|G_{n0}}y(t)x(t)dt\\
&=c\int_{G_{n0}}y(t)dt+\int_{G|G_{n0}}y(t)x(t)dt\\
&=y(x_0)=\|x_0\|_{\Phi,s}=1
\end{aligned}$$

即$\|y_0\|_{\Psi,s^*}=\|y_0\|_{\Psi,s^*}\cdot\|x_0\|_{\Phi,s}\ge y_0(x_0)=y(x_0)=\|x\|_{\Phi,s}=1$。

另一方面，取$k>0$，满足$\|y\|_{\Psi,s^*}=\dfrac{1}{k}s^*(I_\Psi(ky))$，则

$$\begin{aligned}
\|y_0\|_{\Psi,s^*}&\le\frac{1}{k}s^*(I_\Psi(ky_0(t)))\\
&=\frac{1}{k}s^*(\int_G\Psi(ky_0(t))dt)\\
&=\frac{1}{k}s^*(\int_{G_{n0}}\Psi(kd)dt+\int_{G|G_{n0}}\Psi(ky(t))dt)\\
&=\frac{1}{k}s^*(\int_{G_{n0}}(\frac{1}{m(G_{n_0})}\int_{G_{n0}}\Psi(ky(t))dt)dt+\int_{G|G_{n0}}\Psi(ky(t))dt)\\
&=\frac{1}{k}s^*(I_\Psi(ky(t)))=1
\end{aligned}$$

因此，$\|y_0\|_{\Psi,s^*}=1$。

由 $x_n \xrightarrow{w} \tilde{x}$，$\|\tilde{x}\|_{\Phi,s} \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{\Phi,s} = 1$ 和 $\|\tilde{x}\|_{\Phi,s} \ge y_0(\tilde{x}) = 1$，因此 $\|\tilde{x}\|_{\Phi,s} = 1$。再由

$$\|x_n - x_m\|_{\Phi,s} = 2\varepsilon \left\|\chi_{G_1^{(1)}}\right\|_{\Phi,s}$$

可知 $\{x_n\}$ 不是柯西列，产生矛盾。

充分性：

设 s 是外函数，Φ 是 Orlicz 函数，且 Φ 是严格凸的满足 Δ_2 条件，取 $x_n, x \in S(L_{\Phi,s})$，当 $n \to \infty$ 时，满足 $\|x_n + x\|_{\Phi,s} \to 2$ 且 $x_n \xrightarrow{w} x$。

对任意的 $x \in L_{\Phi,s}$，令 $f(k) = \frac{1}{k} s(I_\Phi(kx))$，存在 $a > 0$，设 $G_a = \{t: |x(t)| > a\}$ 满足 $m(G_a) > 0$。由外函数的定义可知

$$f(k) = \frac{1}{k} s(I_\Phi(kx)) \ge \frac{I_\Phi(kx)}{k} \ge \int_{G_a} \frac{\Phi(k)}{k} dt \ge \int_{G_a} \frac{\Phi(ka)}{k} dt \ge \frac{\Phi(ka)}{k} m(G_a)$$

且

$$f(k) = \frac{1}{k} s(I_\Phi(kx)) \ge \frac{1}{k}$$

由 $\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ 可知，当 $k(x) \ne \varnothing$ 时，$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty$ 且 $\lim_{k\to 0} f(k) = \infty$。那么就存在 $k_n \in \left[k^*(x_n), k^{**}(x_n)\right]$，使得

$$\|x_n\|_{\Phi,s} = \frac{1}{k_n} s(I_\Phi(k_n x_n)) = 1 \tag{4-3}$$

最后，证明 $x_n \to x$，假设 $k_n x_n \overset{\mu}{\nrightarrow} k_0 x$（$n \to \infty$），则存在 $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ 满足：对任意的 $n \in N$，有 $m\left(\{t \in G: |k_n x_n - k_0 x| \ge \varepsilon_0\}\right) \ge \delta_0$ 成立。

i)假设 (k_n) 是有界的且 $\sup_{n>0}\{k_n, n = 1,2,...\} = \bar{k} < \infty$。因此，

$$0<\frac{k_0}{k_0+\overline{k}}\le\frac{k_0}{k_0+k_n};\frac{k_n}{k_0+k_n}\le\frac{\overline{k}}{k_0+\overline{k}}<1 \tag{4-4}$$

由 $k_n = s(I_\Phi(k_n x_n))$，则

$$\begin{aligned}\overline{k}&\ge k_n=s(I_\Phi(k_n x_n))\\&\ge\int_G\Phi(k_n x_n(t))dt\\&\ge\int_{\{t\in G:|k_n x_n(t)|>k\}}\Phi(k_n x_n(t))dt\\&\ge\Phi(k)m(\{t\in G:|k_n x_n(t)|>k\})\end{aligned}$$

则存在 $k\in N$，使得 $m\left(\left\{t\in G:\left|k_n x_n(t)\right|>k\right\}\right)\le\frac{\overline{k}}{\Phi(k)}<\frac{\delta_0}{3}$，令

$$G_n=\left\{t\in G:\begin{array}{l}|k_n x_n(t)|\le k\\|k_0 x(t)|\le k\\|k_n x_n(t)-k_0 x(t)|\ge\varepsilon_0\end{array}\right\}$$

则 $m(G_n)<\frac{\delta_0}{3}$。由引理(4.1)，存在 $\delta_1>0$，使得对任意的 $t\in G_n$ 有

$$\Phi(\frac{k_0 k_n}{k_0+k_n}(x_n(t)+x(t)))\le(1-\delta_1)[\frac{k_0}{k_0+k_n}\Phi(k_n x_n(t))+\frac{k_n}{k_0+k_n}\Phi(k_0 x(t))] \tag{4-5}$$

由外函数 s 和 Orlicz 函数 Φ 的定义和公式(4-4)和(4-5)可得

$$\begin{aligned}2\leftarrow\|x_n+x\|_{\Phi,s}&\le\frac{k_0+k_n}{k_0k_n}s(I_\Phi(\frac{k_0k_n}{k_0+k_n}(x_n(t)+x(t))))\\&\le\frac{k_0+k_n}{k_0k_n}s(\int_{G_n}\Phi(\frac{k_0k_n}{k_0+k_n}(x_n(t)+x(t)))dt+\int_{G|G_n}\Phi(\frac{k_0+k_n}{k_0k_n}(x_n(t)+x(t)))dt)\\&\le\frac{k_0+k_n}{k_0k_n}s((1-\delta_1)(\frac{k_0}{k_0+k_n}\int_{G_n}\Phi(k_n x_n(t))dt+\frac{k_n}{k_0+k_n}\int_{G_n}\Phi(k_0 x(t))dt)\\&+\frac{k_0}{k_0+k_n}\int_{G|G_n}\Phi(k_n x_n(t))dt+\frac{k_n}{k_0+k_n}\int_{G|G_n}\Phi(k_0 x(t))dt)\end{aligned}$$

$$\le \frac{k_0+k_n}{k_0k_n}[s(\frac{k_0}{k_0+k_n}\int_G \Phi(k_nx_n(t))dt+\frac{k_n}{k_0+k_0}\int_G \Phi(k_0x(t))dt$$

$$-s(\delta_1(\frac{k_0}{k_0+k_n}\int_{G_n} \Phi(k_nx_n(t))dt+\frac{k_n}{k_0+k_n}\int_{G_n} \Phi(k_0x(t))dt))]$$

$$\le 2-\frac{k_0+k_n}{k_0k_n}s(\delta_1(\frac{k_0}{k_0+k_n}\int_{G_n} \Phi(k_nx_n(t))dt+\frac{k_n}{k_0+k_n}\int_{G_n} \Phi(k_0x(t))dt))$$

$$\le 2-\delta_1(\frac{1}{k_n}\int_{G_n} \Phi(k_nx_n(t))dt+\frac{1}{k_0}\int_{G_n} \Phi(k_0x(t))dt)$$

$$\le 2-\frac{2\delta_1}{\bar{k}}\frac{1}{2}\int_{G_n} (\Phi(k_nx_n(t))+\Phi(k_0x(t)))dt$$

$$\le 2-\frac{2\delta_1}{\bar{k}}\int_{G_n} \Phi(\frac{k_nx_n(t)-k_0x(t)}{2})dt$$

$$< 2-\frac{2\delta_1}{\bar{k}}\Phi(\frac{\varepsilon_0}{2})\frac{\delta_0}{3}$$

产生矛盾，即$k_nx_n \xrightarrow{\mu} k_0x(n\to\infty)$。

ii)若(k_n)不是有界的，为不是一般性，假设$\lim\limits_{n\to+\infty} k_n=+\infty$，令$y_n=\frac{x_n+x}{2}$，$l_n=\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}$则$y_n \xrightarrow{w} x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\| y_n\|_{\Phi,s}=1$。从而，

$$\begin{aligned}
2\lim_{n\to\infty}\left\|y_n\right\|_{\Phi,s} &\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{l_n}s(I_\Phi(l_ny_n))\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}s(I_\Phi(\frac{k_0}{k_n+k_0}k_nx_n+\frac{k_n}{k_n+k_0}k_0x))\\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}(1+I_\Phi(k_nx_n))+\frac{1}{k_0}(1+I_\Phi(k_0x))\\
&=2
\end{aligned}$$

显然，序列(l_n)是有界的，且

$$\lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty}\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{k_0}{1+\frac{k_0}{k_n}}=k_0$$

依照上述方法可得

$$l_n x_n \xrightarrow{\mu} k_0 x$$

接下来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k_0$，只需证 $k_n x_n(t)$ 弱*收敛于 $k_0 x(t)$。对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $v \in E_{\Psi,s^*}$，由 v 具有绝对连续的范数，因此存在 $\delta > 0$，$E \subset G$ 且 $m(E) < \delta$，使得

$$\| v\chi_E \|_{\Psi,s^*} < \frac{\varepsilon}{3\bar{k}} \tag{4-6}$$

由叶果洛夫定理，存在 $e_0 \subset G$ 且 $m(e_0) < \delta$，使得当 $t \in G | e_0$ 时，有 $k_n x_n(t) \to k_0 x(t)$。因此，存在 $n_0 \in N$，当 $n \geq n_0$ 时，对任意的 $t \in G | e_0$ 满足

$$\|(k_n x_n - k_0 x)\chi_{G|e_0}\|_{\Phi,s} \leq \frac{\varepsilon}{3\| v\|_{\Psi,s^*}} \tag{4-7}$$

因此

$$\begin{aligned}
&|\int_G k_n x_n(t)v(t)dt - \int_G k_0 x(t)v(t)dt| \\
&\leq \int_{G|e_0} \left|k_n x_n(t) - k_0 x(t)\right| \cdot \left|v(t)\right| dt + \int_{e_0} \left|k_n x_n(t)v(t)\right| dt + \int_{e_0} \left|k_0 x(t)v(t)\right| dt \\
&\leq \left\|(k_n x_n - k_0 x)\chi_{G|e_0}\right\|_{\Phi,s} \left\|v\right\|_{\Psi,s^*} + \bar{k}\left\|x_n\right\|_{\Phi,s} \left\|v\chi_{e_0}\right\|_{\Psi,s^*} + \bar{k}\left\|x\right\|_{\Phi,s} \left\|v\chi_{e_0}\right\|_{\Psi,s^*} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

即 $k_n x_n \xrightarrow{w^*} k_0 x$。又由 $x_n \xrightarrow{w} x$ 可知，$k_n \to k_0$。由公式(4-3)可知，

$$s^{-1}(k_n) = I_\Phi(k_n x_n)，\quad s^{-1}(k_0) = I_\Phi(k_0 x)$$

从而 $I_\Phi(k_n x_n) \to I_\Phi(k_0 x)$，利用引理(4.3)得

$$\left\|x_n - x\right\|_{\Phi,s} \to 0$$

□

4.3 本章小结

本章给出赋 s 范数的 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,s}$ 具有 Kadec-Klee 性质的判别准则。以前都是在其对偶空间清晰的条件下，利用生成函数的仿射区间构造反例给出充分性证明，而本章是在对偶空间不清晰的条件下将是运用新的证明思路即通过利用赋 s 范数端点的等价条件构造反例而得出的充分性证明，此思路还可以推广到某些几何性质的研究证明中。最后给出 $L_{\Phi,s}$ 具有 Kadec-Klee 性质的充要条件。

结 论

经典Orlicz范数、Luxemburg范数、p-Amemiay范数和s范数可以分别使用Amemiya 公式：$\|x\|_{\Phi}^{o}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+I_{\Phi}(kx))$、$\|x\|_{\Phi}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\max\{1,I_{\Phi}(kx)\}$、$\|x\|_{\Phi}^{p}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+I_{\Phi}{}^{p}(kx))^{\frac{1}{p}}$和$\|x\|_{\Phi,s}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s(I_{\Phi}(kx))$来定义，其中$\Phi$是Orlicz函数且$I_{\Phi}(x)=\int_{G}\Phi(x(t))dt$，$1\le p\le\infty$。赋$s$范数的Orlicz空间是经典Orlicz空间的一种更为广泛的推广形式，其包含在Orlicz空间中的上述所有范数。本文在诸多学者得出的成果的基础上，创新思路来研究赋s范数的Orlicz函数空间$L_{\Phi,s}$的Kadec-Klee性质和赋s范数的Orlicz序列空间$l_{\Phi,s}$的Kadec-Klee性质和β性质。

首先，回顾Orlicz空间的发展历程，对Orlicz空间几何理论的背景和主要研究成果进行综述和分析，展示了研究赋s范数的Orlicz空间的几何性质对Orlicz空间的发展具有指导意义。

其次，Kadec-Klee性质是Banach空间几何理论的基础概念，本文第2章根据经典Orlicz序列空间的Kadec-Klee性质的研究成果，得出了$l_{\Phi,s}$具有Kadec-Klee性质的判别准则为$\Phi\in\delta_2$。

再次，β性质是Banach空间几何的重要分支，许多重要成果都与β性质有关，β性质蕴涵接近一致凸性和一致Kadec-Klee性质，因此具有鲜明的几何意义。本文出$l_{\Phi,s}$具有β性质的等价条件为$\Phi\in\delta_2\cap\overline{\delta_2}$。

最后，我们找到了一个新的方法，借助赋s范数Orlicz函数空间端点的刻画给出生成函数严格凸是赋s范数Orlicz函数空间具有Kadec-Klee性质的必要条件，最终得到赋s范数Orlicz函数空间具有Kadec-Klee性质的充要条件为Φ是严格凸的且$\Phi\in\Delta_2$。

赋s范数的Orlicz空间是的Orlicz空间的推广形式之一，对该空间几何性质的研究很浅，例如：一致凸，正规结构，一致非方及空间的点态性质等。这些有待于我们进行更深入的研究。

参考文献

[1] Birnbaum Z, Orlicz W. Über Die Verallgemeinerung Des Begriffes Der Zueinander Konjugierten Potenzen[J]. Studia Mathematica, 1931, 3(1): 1-67.

[2] Musielak J , Orlicz W . On Modular Spaces[J]. Studia Mathematica, 1959, 18(1): 1-98.

[3] Orlicz W. Uber Eine Gewisse Klasse Von Raumen Vom Typus B[J]. Bulletin Of International Academy Poland, Seria A, Krakow A, 1932, 8(9): 207-220.

[4] Orlicz W. Uber raumen (L^M)[J]. Bull. Acad. Polon. Sci. A, 1936, A: 93-107.

[5] Musielak J , Orlicz W . On Generalized Variations (I)[J]. Studia Mathematica, 1959, 18(1): 11-41.

[6] Luxemburg W A J. Banach Function Spaces[M]. Doctor Thesis, 1955: 31-206.

[7] Wisła M. Orlicz Spaces Equipped with s-norms[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 483(2): 1-20.

[8] Nakano H. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces[M].Maruzen Co, 1950: 210-223.

[9] Krasonsel′skiĭ M A, Rutickiĭ Ja B. Convex Functions and Orlicz Spaces[M]. P. Noordhoff, 1961: 3-79.

[10] Andô T. Linear Functionals on Orlicz Spaces[J]. Nieuw Arch. Wisk, 1960, 8(8): 1-16.

[11] Rao M M. Linear Functionals on Orlicz Spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1968, 12(3): 553-585.

[12] 王廷辅. 空间 B(S)和 L_M(G)的列紧性[J]. 数学进展, 1966, 23(03): 81-84.

[13] 丁夏畦. 一类泛函空间的一些性质及应用[J]. 数学学报, 1960, 10(3): 316-360.

[14] Trudinger N. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Spplications[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 1967, 17(5): 473-483.

[15] Gaposhkin V F . On Unconditional Bases in Orlicz Spaces[J]. Uspekhi Mat Nauk, 1968, 2(134): 113-114.

[16] Chen S T . Geometry of Orlicz Spaces[M]. Dissertationes Mathematicae, 1996 : 1-298

[17] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 空间几何理论[M]. 哈尔滨工业大

学出版社, 1986 : 54-378.

[18] Mazur S , Orlicz W . On Some Classes of Linear Spaces[J]. Studia Mathematica, 1958, 17(1): 97-119.

[19] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces I [J]. Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, 1977, 350(2): 572-580.

[20] Kolwicz, Paweł. The Property β of Orlicz-Bochner Sequence Spaces[J]. Comment Math Univ Carolin, 2001, 42(1): 119-132.

[21] Musielak J . Orlicz Spaces and Modular Spaces[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1983, 1034(4): 1-216.

[22] Rao M M , Ren Z D.Theory of Orlicz Spaces [M].M.Dekker,1991: 55-78.

[23] 孟晨晖, 王廷辅. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的接近一致凸性[J]. 数学季刊, 2000, 15(1): 1-18.

[24] Hudzik H , Maligranda L . Amemiya Norm Equals Orlicz Norm in General[J]. Indagationes Mathematicae, 2000, 11(4): 573-585.

[25] Zuo M X, Cui Y A. H-property in Musielak-Orlicz sequence Spaces[J] Journal Of Natural Science Of Heilongjiang University, 2003, 04: 5-10.

[26] Cui Y A , Puciennik R , Wang T F . On Property β in Orlicz Spaces[J]. Archiv Der Mathematik, 1997, 69(1): 57-69.

[27] Denka, Kutzarova. k-β and k-nearly Uniformly Convex Banach Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2013, 162(2): 322-338.

[28] Wang T F , Cui Y A ,Chen H M . On Property β in Orlicz Spaces[J]. Archiv der Mathematik, 2000, 69(1): 57-69.

[29] Cui Y A, Duan L F, Hudzik H, et al. Basic Theory of P-Amemiya Norm in Orlicz Spaces : Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5): 1796-1816.

[30] Chen L L, Cui Y A. Complex Extreme Points and Complex Rotundity in Orlicz Function Spaces Equipped with the P-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73(5): 1389-1393.

[31] Chen L L, Cui Y A. Complex Rotundity of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the P-Amemiya Norm[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 378(1): 151-158.

[32] 贺鑫. 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何常数及其应用[D]. 哈尔滨工业大学, 2015, 2: 43-56.

[33] 彭丽娜. 赋 p-Amemiya 范数下 Orlicz 序列空间的接近一致凸性[D]. 哈尔滨理工大学，2015: 15-33.

[34] 崔云安、安莉丽、展玉佳. 赋 s 范数的 Orlicz 空间的端点[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2020, 25(05): 143-148.

[35] Ciesielski M, Kolwicz P, Płuciennik R. Local Approach to Kadec–Klee Properties in Symmetric Function Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2015, 426(2): 700-726.

[36] Puciennik R, Wang T F, Zhang Y. H-Points and Denting Points in Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematicae, 1993, 33(33): 35-56.

[37] Hanebaly. The Fixed Point Property in Banach Spaces Via the Strict Convexity and the Kadec-Klee Property[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2020, 22(2): 431-438.

[38] Cui Y A, Foralewski P, Hudzik H et al. Kadec-Klee Properties of Orlicz-Lorentz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Positivity, 2021, 25(7): 1273-1294.

[39] Raymond S, Jean. Kadec-Klee Property and Fixed Points[J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 266(8): 5429-5438.

[40] Kaczmarek, Radoslaw. Uniform Rotundity of Orlicz Function Spaces Equipped with the P-Amemiya Norm[J]. Mathematische Nachrichten, 2019, 10(1): 71-86.

[41] Cui Y A, Hudzik H, Pluciennik R. Extreme Points and Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 789-817.

[42] Medzhitov A, Sukochev P. The Property (H) in Orlicz Spaces[J]. Bulletin of Polish Academy of Sciences Mathematics, 1992, 40(1): 5-11.

[43] Wang T F, Cui Y A, Zhang T. Kadec-Klee Property in Musielak-Orlicz function Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Scientiae Mathematicae, 1998, 24(3): 339-345.

[44] Kaczmark R. Uniform Rotundity in Every Direction of Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Collectanea Mathematica, 2019, 70(1): 71-86.

[45] He X, Cui Y A, Hudzik H. The Fixed Point Property of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013(1): 1-18.

[46] Kaminska A, Kurc W. Weak Uniform Rotundity in Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1986, 27(4): 651-664.
[47] Saint Raymond J. Kadec-Klee Property and Fixed Point [J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 266(8): 5429-5438.
[48] Dual J, Raymond S. Kadec-Klee Property and Fixed Point [J]. Journal of Functional Analysis, 2017, 272(9): 3825-3844.
[49] Khamsi M A. On Uniform Opial Condition and Uniform Kadec-Klee Property in Banach and Metric Spaces[J]. Nonlinear Analysis, 1996, 26(10): 1733-1748.
[50] 吴从炘，陈述涛，王玉文. Orlicz 序列空间的 H 性质[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1985, 6(A2): 6-11.
[51] 王廷辅，崔云安. 关于 Orlicz 空间的 H 性质的注记[J]. 数学物理学报, 1998, 18(2): 217-220.
[52] 左明霞，崔云安. Musielak-Orlicz 序列空间的 H 性质[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2003, 20(4): 5-10.
[53] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用[M]. 科学出版社, 2011: 31-80.

攻读硕士学位期间发表的学术论文及获得成果

[1]. 崔云安，董佳琪. 赋 s 范数 Orlicz 序列空间的 β 性质[J].哈尔滨理工大学学报.(录用待安排期刊)

[2]. Dong J Q, Cui Y A. Kadec-Klee Property in Orlicz Function Spaces Equipped with s-norms[J]. Journal of Function Space. (JCR 一区已发表，DOI：10.1155/2022/5902635)

致　谢

随着文章落笔，我的研究生生涯也即将结束。在这里学习的日子里，困顿过也迷茫过，但依旧坚定，我心怀感激也万般不舍，但相遇别离终有时，还是到了要说再见的时候。

首先，感谢我的老师，很幸运在这里我结识的老师都学识渊博，和蔼亲切。在此我要由衷的感谢我的每一位老师，特别的，我要感谢我的导师崔云安教授。学贵得师，亦贵得友，您就是我的良师益友。我的资质不高，学识尚浅，您还是耐心指导，了解了一个从未涉及过的数学领域，体会到了想不出问题的苦楚也享受到了解决问题的快乐，我们在实验室里共同探索发现。生活中，您幽默风趣，就像我的朋友一样，互相分享身边的趣事，可以一起研讨学业也可以畅谈古今。您教会了我要规规矩矩做人踏踏实实做事，我不会忘记您这位良师益友，在这里祝您越来越年轻，万事顺遂。

其次，感谢我的父母，二十多年的养育不易，你们从不要求我做什么，而是教会我独立的思考，清楚自己想要什么，并鼓励我让我有勇气做下去。儿行千里母担忧，在这么严峻的情况下在外读书，你们难免担忧，又不敢时常联系，对不起让你们总是担心，今后一定常伴在身边。借此机会感谢我的父母，谢谢你们的无私付出，谢谢你们对我做的每个决定的信任，谢谢你们，希望爸爸妈妈能长乐常安，安乐一生。

再次，感谢我的同窗，缘分让我们相聚在哈尔滨理工大学。两年半的时光里，我们一起不分昼夜的讨论学习，分享美食，逛街看电影，去旅行，让我可以载欢载笑的生活。感谢我的朋友们，谢谢你们在给我很多建议，陪我走出迷茫和低落，还总是在生活中给我惊喜，谢谢你们给了我数不尽的温暖和感动，谢谢你们让我很幸福。希望你们永远幸福可爱下去，奔着自己的理想前进。

最后感谢所有从事 Orlicz 空间研究的数学工作者，感谢国家自然科学基金项目 11871181 在论文完成过程中给予的资助。