博士研究生学位论文

新 疆 大 学

论文题目(中文)：非交换Lorentz 型空间的研究

论文题目(英文)：Research on non-commutative Lorentz type space

研 究 生 姓 名：韩亚洲

学 科 、专 业：应 用 数 学

研 究 方 向：泛函分析及应用

导师 姓名 职称：吐尔德别克 教授

论文答辩日期　　年　月　日

学位授予日期　　年　月　日

中文摘要

本文考虑了与一个半有限 von Neumann 代数对应的非交换 Lorentz 型空间, 包含四部分内容.

第一部分介绍了文章的研究背景, 非交换积分理论的基础知识以及本文的主要结果.

第二部分研究了非交换弱 L_p 空间, 给出了非交换弱 L_p 空间对偶空间的具体形式. 在这一部分中还讨论了非交换弱 L_p 空间上的紧左(右)乘算子.

第三部分研究了非交换加权 Lorentz 空间的对偶空间, 得到了类似于经典的加权 Lorentz 空间对偶空间的结论. 另外在这一部分中还讨论了非交换 Hardy-Lorentz 空间, 给出了非交换 Hardy-Lorentz 空间上有关 Riesz 分解, Riesz 投影和 Herglotz 变换的一些结论.

第四部分研究了非交换加权 Orlicz-Lorentz 空间和非交换加权弱 Orlicz-Lorentz 空间, 给出了非交换加权(弱) Orlicz-Lorentz 空间的基本性质, 并给出了一类非交换加权 Orlicz-Lorentz 空间的对偶空间. 另外我们在这一章中还讨论了非交换加权 Orlicz-Lorentz 空间上拟线性算子的插值. 在这一章的最后我们还讨论了非交换 Calderón-Lozanovskiĭ 空间 $E_\varphi(\mathcal{M})$ 的广义伴随空间 $M(E_{\varphi_1}(\mathcal{M}), E_\varphi(\mathcal{M}))$.

关键词: von Neumann 代数, 非交换 Lorentz 空间, 非交换 Hardy-Lorentz 空间, 对偶空间, 插值.

English Abstract

This thesis is devoted to the study of noncommutative Lorentz type space associated with a semifinite von Neumann algebra $\mathcal{M}$, which consists of the following four parts:

In the first part, we introduce some basic concepts about noncommutative integration theory and the main results about this thesis.

In the second part, we consider the noncommutative weak L_p spaces, plus two theorems as main results of our work. One concerns mainly about the dual spaces of noncommutative weak L_p spaces the other is about the compact multiplication operators on $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$.

In the third part, we consider the noncommutative weighted Lorentz spaces. After a brief introduction of noncommutative weighted Lorentz spaces, we prove some noncommutative analogues of the classical results about dual spaces of weighted Lorentz spaces. In this part, we also introduction the noncommutative Hardy-Lorentz spaces and give some results about Riesz factorization, Riesz projection and Herglotz transform on these spaces.

In part four, we consider the noncommutative Orlicz Lorentz spaces and noncommutative weak Orlicz Lorentz spaces. After a brief introduction of noncommutative (weak) Orlicz Lorentz spaces, we presents some results about dual spaces Marcinkiewicz interpolation theorem about noncommutative (weak) Orlicz Lorentz spaces and noncommutative Orlicz Lorentz spaces. At the end of this part, we presents some results about the general associate spaces of noncommutative Calderón-Lozanovskiĭ spaces $E_\varphi(\mathcal{M})$.

Key Words: von Neumann algebras, Noncommutative Lorentz space, Noncommutative Hardy-Lorentz space, Dual space, Interpolation.

目　录

第一章 序言

§ 1.1 研究背景

Riesz 在 1910 年引入了 L_p 空间的概念, 它与分析学的许多分支都有紧密的联系. 作为(拟) Banach 空间的具体事例, 它的发展为(拟) Banach 空间理论的完善和发展提供了必要的方法和实例. Lorentz空间 $L_{p,q}$ 和加权 Lorentz 空间 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 都是 L_p 空间的推广. Lorentz 在1951 年在文献 [1] 中引入了Lorentz 空间 $\Lambda_{p,\omega}$, 并证明了 Lorentz 空间是重排不变函数空间, 还证明了 Banach 空间 $\Lambda_{p,\omega}, 1 < p < \infty$ 是自反的. 随后在60 年代 O'Neil 与 Hunt 在文献 [2, 3] 中系统的研究了 Lorentz 空间 $L_{p,q}$, 得到了 $L_{p,q}$ 的对偶空间, 插值理论和空间的张量积等重要结论. 到了 70 年代M.Cwikel 在文献 [4, 5] 中系统的研究了弱 L_p 空间并给出了其对偶空间. 最近 Cwikel, Kaminska, Maligranda, Haaker, Carro, Sawyer 和 Soria 等考虑了更广义的 Lorentz 空间并得到了丰富的结论, 具体内容见文献 [6-23]. Lorentz 空间理论经过长时间的发展取得了长足的进步,并逐渐完善起来. 当然这些空间理论都是对经典的Lorentz空间理论来说的, 即它们的元素都是函数. 但分析学的许多分支需要考虑算子或算子值函数，例如: 在算子值调和分析及预报理论中矩阵值解析函数就起到了重要作用. 这就要求我们把经典 Lorentz 空间理论推广到非交换 Lorentz 空间理论上去.

对紧算子奇异值的研究一直是人们研究紧算子的一个重要方法. 一些学者于文献 [24-28] 中研究了 τ 可测算子的奇异值, 为后来者从事 τ-可测算子的研究开辟了道路. 在经典的函数空间中对某个可测函数 f 来说其广义奇异值就是它的非增重排 f^*, 因此 τ 可测算子的奇异值就成为了联系重排不变函数空间和非交换 Banach 函数空间之间的一座桥梁. 上世纪 50 年代 Dixmier, Segal 和 von Neumann 建立了与具有迹的 von Neumann 代数相关的非交换 L_p 空间理论, 随后 70 年代 Ovcinnikov 定义了与具有迹的 von Neumann 代数相关的非交换对称空间. 随着非交换空间理论的发展，人们开始研究非交换 Lorentz 空间. 首先在 1981 年 Kosaki 在文献 [29] 中定义了非交换 Lorentz 空间,并给出了非交换 Lorentz 空间的性质及实插值理论. 随后 Ciach 在文献 [30] 中推广了 Kosaki 的定义并讨论了空间的基本性质和对偶空间等. 另外, 1989 年 Chilin 等人在文献 [31] 中还研究了非交换Lorentz空间之间的同构问题. 这些研究使得有关非交换Lorentz 空间的理论越来越丰富. 最近十几年 Xu, Sukochev, Randrianantoanina, Dodds, de Pagter 等人的研究成果, 使得人们对非交换Lorentz空间的研究越来越深入.

但是人们对非交换加权 Lorentz 空间和非交换 Orlicz-Lorentz 空间的研究还很不多. 在这篇文章中我们主要研究研究非交换加权 Lorentz 空间和非交换 Orlicz-Lorentz 空间, 尝试着把一些加权 Lorentz 空间和 Orlicz-Lorentz 空间中的结论推广到非交换空间理论中去. 更多的有关非交换(拟) Banach 空间理论的知识参见文献 [32-49] 等.

§ 1.2 本文主要工作

在第二章中我们讨论了非交换弱 L_p 空间, 主要结论如下:

定理 A. 设 $\mathcal{M}$ 为不含最小投影算子的半有限 von Neumann代数. 我们定义在 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 空间上的 N_0 和 N_∞ 分别为

$$N_0(x) = \limsup_{t\to 0} tx^{**}(t, 1-t) \quad 和 \quad N_\infty(x) = \limsup_{t\to\infty} tx^{**}(t, 1-\frac{1}{t}).$$

令

$$S_0 = \{l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* : |l(x)| \le CN_0(x), \text{ 对某个常数 } C\text{ ;成立}\}$$

和

$$S_\infty = \{l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* : |l(x)| \le CN_\infty(x), \text{ 对某个常数 } C\text{ ;成立}\}.$$

则 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* = S_0 \oplus S_\infty$.

定理 B. 设 $\mathcal{M}$ 为不含最小投影算子的半有限 von Neumann代数且 $1 < p < \infty$. 我们定义 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的半范数 N_0 和 N_∞ 分别为

$$N_0(x) = \limsup_{t\to 0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds \quad 和 \quad N_\infty(x) = \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds.$$

令

$$S_0 = \{l \text{ 是 } L_{p,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \le CN_0(x), \text{ 对某个常数}C\text{成立}\}$$

和

$$S_\infty = \{l \text{ 是} L_{p,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \le CN_\infty(x), \text{ 对某个常数}C\text{成立}\}.$$

则 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})^* = L_{p',1}(\mathcal{M}) \oplus S_0 \oplus S_\infty$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

定理 C. 设 T_u^l 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的有界算子. 则 T_u^l 是紧算子的充分必要条件是对任意的 $\varepsilon > 0$, $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是有限维的, 其中 $e_\varepsilon = e_{(\varepsilon,\infty)}(|u|)$.

在第三章中, 我们讨论了非交换加权 Lorentz 空间, 主要结论是:

定理 D. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子且权函数 ω 满足下列条件之一:

(1) $\sup_{t>0}\frac{t^p}{\int_0^t\omega(s)ds}=\infty$.

(2) 存在 $c>0,\alpha>0$, 使得$W(t)\le c\max\{\alpha,t^p\}$.

(3) ω 是非增权函数.

则

$$\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*=\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'\oplus\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^s.$$

定理 E. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0<p<\infty$, 则 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $\int_0^1\frac{1}{W(t)^{\frac{1}{p}}}dt<\infty$.

定理 F. 设 $2\le p<\infty$, $\beta_{\Lambda_\omega^p}<\infty$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, 则线性映射

$$\sim: Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}))\to Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})), H: Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}))\to\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}),$$

可以延拓为实线性映射

$$\sim: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}\to\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}, H:\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}\to H^p(\mathcal{A}).$$

若 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}$, 则 $H(x)=x+i\widetilde{x}\in H^p(\mathcal{A})$ 且 $\mathcal{E}(\widetilde{x})=0$. $\sim$ 和 H 具有 p 阶范数.

定理 G. 设 $0<p,q\le\infty,\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数. 则对任意的 $x\in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 存在 $y\in H_\omega^q(\mathcal{A}),z\in H_\omega^r(\mathcal{A})$, 使得 $x=yz$.

在第四章中, 我们讨论了非交换(弱) Orlicz-Lorentz 空间, 主要结论是:

定理 H. 设 $\varphi(t)=t$ 或 φ 是满足 Δ_2-条件的 N-函数, ω 是正则的非增权函数, 则 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})^*=M_{\varphi_*,\omega}(\mathcal{M})$.

定理 I. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是具有 n.s.f. 迹的半有限von Neumann 代数, $W_i(t)=\int_i^t\omega_0(s)ds\in\Delta_2$, $i=0,1$ 且 $0<p_0<p_1\le\infty$. 若 φ 是 Orlicz 函数且 $p_0<a_\varphi\le b_\varphi<p_1$, 拟线性算子 $T:L_0(\mathcal{M})\to L_0(\mathcal{N})$ 满足条件$\|Tx\|_{\Lambda_{\omega_0}^{p_i,\infty}(\mathcal{M})}\le\|x\|_{\Lambda_{\omega_1}^{p_i,\infty}(\mathcal{M})}$, $i=0,1$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\sup_{t>0}W_0(t)\varphi(\mu_t(Tx))\le C\sup_{t>0}W_1(t)\varphi(\mu_t(x)),\ \forall\, x\in L_{\varphi,\omega_1}^\infty(\mathcal{M}).$$

因此 $\|Tx\|_{\Lambda_{\varphi,\omega_0}^\infty(\mathcal{M})}\le\|x\|_{\Lambda_{\varphi,\omega_1}^\infty(\mathcal{M})}$.

定理 J. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是分别具有 $n.s.f.$ 迹 ν_1 和 ν_2 的半有限von Neumann 代数, $W_i(t)=\int_i^t\omega_0(s)ds\in\Delta_2$, $i=0,1$. 设 $1\le p_0<p_1\le\infty$, $T:L_0(\mathcal{M})\to L_0(\mathcal{N})$ 的拟线性算子且 $\|Tx\|_{\Lambda_{\omega_0}^{p_i,\infty}(\mathcal{N})}\le A_i\|x\|_{\Lambda_{\omega_1}^{p_i}(\mathcal{M})}$, $i=1,2$. 若 φ 是 Orlicz 函数且 $p_0<p_\varphi\le q_\varphi<p_1$, 则存在常数 C(只与 p_0,p_1 和 ω_i 有关), 使得对任意的 $x\in L_{\varphi,\omega_1}(\mathcal{M})$ 有

$$\|\varphi(|Tx|)\|_{\Lambda_{1,\omega_0}(\mathcal{N})}\le C\|\varphi(|x|)\|_{\Lambda_{1,\omega_1}(\mathcal{M})}.$$

即 $\int_0^\infty \varphi(\mu_t(Tx))\omega_0(t)dt \le C\int_0^\infty \varphi(\mu_t(x))\omega_1(t)dt$.

§ 1.3 预备知识

在这一节中我们将介绍一下在这篇文章中通用的记号及相关定义. 这些基本定义及相关知识均可在文献 [25, 24, 36, 37, 50] 中找到. 记 $B(\mathcal{H})$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子的集合.

定义1.3.1. 设 x 是 $\mathcal{H}$ 上的线性算子. 若它的定义域 $D(x)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠, 则称 x 是稠定的.

定义1.3.2. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, x 是一个线性算子, 其中定义域 $D(x)\subset\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间, 其值域 $R(x)\subset\mathscr{Y}$, 我们称乘积空间 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 上的线性子空间

$$G(x)=\{<\xi,x\xi>\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y},\ \xi\in D(x)\}$$

为线性算子 x 的图. 如果图 $G(x)$ 在 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 中是闭的, 就称算子 x 是闭的.

设 x_1,x_2 是两个 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的线性算子, 如果 $G(x_1)\subset G(x_2)$, 就称 x_2 是 x_1 的一个扩张算子, 记作 $x_1\subset x_2$.

对于线性算子 x, 若存在扩张算子 $y\supset x$, 使得 $\overline{G(x)}=G(y)$, 就称 x 是可闭化的, y 称为 x 的闭包, 记作 $y=\overline{x}$.

定义1.3.3. 设 x 是 $\mathcal{H}$ 上的稠定线性算子. 若 $x^*=x$, 则称 x 为自伴算子; 若 $xx^*=x^*x=I$ (等价于 $x^*=x^{-1}$), 则称 x 为酉算子.

定义1.3.4. $P\in B(\mathcal{H})$ 称为投影算子, 若

(i) P 是自伴算子;

(ii) $P^2=P$.

定义1.3.5. 设 X 是一个集合, Ω 是 X 的一个子集族, 且是一个包含 ϕ 和 X 的 $\sigma-$代数. $(X,\Omega,\mathcal{H})$ 上的谱测度是指一个函数 $E:\Omega\to\mathscr{P}(B(\mathcal{H}))$ (即 $B(\mathcal{H})$ 中的投影算子全体) 满足以下条件:

(i) 对于 Ω 中的任一个集合 Δ, $E(\Delta)$ 是一个投影;

(ii) $E(\Delta)=0,E(X)=I$;

(iii) 对于 Ω 中的两个集合 Δ_1, Δ_2, $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$;

(iv) 如果 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Ω 中的互不相交的集合, 则 $E(\cup_{n=1}^{\infty}\Delta_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty}E(\Delta_n)$.

定义1.3.6. $B(\mathcal{H})$ 的子集 $\mathcal{M}$ 称为 von Neumann 代数, 如果

(i) $x \in \mathcal{M}$ 则 $x^* \in \mathcal{M}$.

(ii) $1 \in \mathcal{M}$.

(iii) $\mathcal{M}$ 关于算子弱拓扑封闭.

定义1.3.7. 记 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数, $\mathcal{M}^+$ 是 $\mathcal{M}$ 中的正元, 则函数 $\tau : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ 叫做正规的、忠实的、半有限的迹(n.s.f. 迹), 如果

(i) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$;

(ii) $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$; $x \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \in [0, \infty]$ (假定 $0 \cdot \infty = 0$)

(iii) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$; $x \in \mathcal{M}$

(iv) 如果 x_α 是在算子强拓扑意义下单调递增的趋向于 x 的网, 则 $\tau(x_\alpha)$ 单调增趋向于 $\tau(x)$.

记 $\mathcal{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的半有限 von Neumann 代数且具有正规的, 忠实的半有限迹 τ. $\mathcal{M}'$ 为 $\mathcal{M}$ 的交换子, 即 $\mathcal{M}' = \{x \in B(\mathcal{H}) : xy = yx, \forall\, y \in \mathcal{M}\}$.

定义1.3.8. 设 F 是 $\mathcal{H}$ 的子空间, 若 $\forall\, \delta \in R^+$, 存在 $\mathcal{M}$ 上的投影 P 使得 $PH \subseteq F$ 且 $\tau(1 - P) \leq \delta$ 其中, $1 - P = P^\perp$ 为 P 的正交投影, 则称 F 是 $\tau-$ 稠的.

定义1.3.9. 设 x 为 $\mathcal{H}$ 上闭稠定线性算子, 定义域记为 $\mathcal{D}(x)$, 称 x 是重属于 $\mathcal{M}$ 的, 若对 $\mathcal{M}'$ 中的每一个酉算子 u , 有等式 $u^*xu = x$ 成立.

定义1.3.10. 设 x 重属于 $\mathcal{M}$, 则算子 x 称为是 $\tau-$ 可测的. 若 $D(x)$ 是 τ-稠的, 即对任意的正实数 δ 存在 $\mathcal{M}$ 上的投影 P, 满足 $PH \subseteq D(a)$ 且 $\tau(1 - P) \leq \delta$.

我们用 $L_0(\mathcal{M})$ 表示所有 τ-可测算子的集合.

定义1.3.11. 若两个稠定算子 x 和 y 的和 $x+y$ 是可闭化的且是稠定的, 则闭包 $[x+y]$ 称为 x 与 y 的强和; 若 xy 是可闭化的和稠定的, 则闭包 $[xy]$ 称为 x 与 y 的强积.

我们以 $\mathcal{M}$ 来表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的半有限 von Neumann 代数, τ 为 $\mathcal{M}$ 上正规的忠实的半有限迹. $L_0(\mathcal{M})$ 中的和与积定义为代数和与积的闭包(即强和与强积). 对任意的 $\epsilon,\delta>0$, 令

$$\mathcal{N}(\varepsilon,\delta)=\{x\in L_0(\mathcal{M});\text{存在投影算子}P\in L_0(\mathcal{M})\ \text{使得}\|xP\|\le\varepsilon\text{且}\tau(1-P)\le\delta\}.$$

以集族 $\{\mathcal{N}(\varepsilon,\delta);\ \varepsilon,\ \delta>0\}$ 为 0 点的基, 则 $L_0(\mathcal{M})$ 成为Hausdorff 拓扑空间, 并且是一个完备的拓扑$*$–代数.

设 x 是 τ-可测算子, $t\ge0$, 定义 x 的广义奇异值 $\mu_t(x)$ 为:

$$\mu_t(x)=\inf\{\|xP\|;\ P\ \text{是}\ \mathcal{M}\ \text{中的投影且}\ \tau(1-P)\le t\}.$$

设 x 是 $\tau-$可测算子, 定义 x 的分布函数为:

$$\lambda_t(x)=\tau(E_{(t,\ \infty)}(|x|)),\ t\ge0.$$

其中 $E_{(t,\ \infty)}(|x|)$ 是 $|x|$ 在区间 (t,∞) 上的谱投影.

由文献 [24] 知, 若 x 是 $\tau-$可测算子, 对任意的 $t\ge0$, 有

$$\mu_t(x)=\inf\{s\ge0:\ \lambda_s(x)\le t\}.$$

并且这个下确界是可以达到的, 从而 $\lambda_{\mu_t(x)}(x)\le t,\ t>0$. 更多有关广义奇异值的知识参见文献 [24].

设 $\mathcal{M}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上具有半有限的, 正规的, 忠实的半有限迹 τ 的 von Neumann 代数. 我们用 $P(\mathcal{M})$ 来表示 $\mathcal{M}$ 中所有投影算子组成的集合. 设 $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则存在唯一的极分解 $x=u|x|$, 其中 $|x|\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ 且 u 是一个部分等距算子. 令 $r(x)=u^*u$ 和 $l(x)=uu^*$. 我们称 $r(x)$ 和 $l(x)$ 分别为 x 的右和左支撑. 若 x 是自伴的, 则 $r(x)=l(x)$, 此时称 $s(x)\triangleq r(x)=l(x)$为 x 的支撑.

设 $0<p<\infty$, 我们定义

$$L^p(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}:\tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\},$$

和

$$\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}},x\in L^p(\mathcal{M}).$$

则 $(L^p(\mathcal{M});\|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间(或拟 Banach 空间, $p<1$). 类似于经典的情况, 定义 $L^\infty(\mathcal{M};\tau)=\mathcal{M}$, 且 $\|\cdot\|_\infty\ (=\|\cdot\|)$ 是算子范数.

为了方便, 有时我们分别记函数 $t \to \lambda_t(x)$ 和 $t \to \mu_t(x)$ 为 $\lambda(x)$ 和 $\mu(x)$. 设 x 是 $\mathcal{H}$ 上的线性自伴算子, $(\,,)$ 为 $\mathcal{H}$ 上的内积. 我们记 $x \geq 0$, 若 $(x\xi,\xi) \geq 0$, $\forall\, \xi \in D(x)$. 若$x \in L_0(\mathcal{M})$且$E \subset D(x)$是$\tau-$稠的, 则$x \geq 0$的充分必要条件是$(x\xi,\xi) \geq 0$对任意的$\xi \in E$成立, 这是因为 x 是 $x|_E$ 的闭包. 由此我们可以定义$L_0(\mathcal{M})$上的偏序 $x \geq y \Leftrightarrow x-y \geq 0$, 因此 $L_0(\mathcal{M})$ 是一个序向量空间. 由文献 [44] 中的命题 1.1 可知, 若 $0 \leq x_\alpha \uparrow_\alpha \leq z$ 在 $L_0(\mathcal{M})$ 中成立, 则 $x = \sup_\alpha x_\alpha$ 在 $L_0(\mathcal{M})$ 中存在, 其中 $x = \sup_\alpha x_\alpha$ 在 $L_0(\mathcal{M})$ 中存在是指 $D(x^{\frac{1}{2}}) = \{\xi : \sup_\alpha \|x^{\frac{1}{2}}\xi\| < \infty\}$ 和 $\|x^{\frac{1}{2}}\xi\| = \sup_\alpha \|x_\alpha^{\frac{1}{2}}\xi\|, \xi \in D(x^{\frac{1}{2}})$ 成立. 进而, 在上述意义下在 $L_0(\mathcal{M})$ 是一个完备的序向量空间. 更多的有关这一方面的知识可以参见 [44, 34].

设$x, y \in L_0(\mathcal{M})$, 我们称$x \prec\prec y$, 若

$$\int_0^t \mu_s(x)ds \leq \int_0^t \mu_s(y)ds, \forall\, t > 0.$$

一个赋范算子空间$E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$ 称为对称的(或, 重排不变的), 若$x \in L_0(\mathcal{M})$, $y \in E(\mathcal{M})$且$\mu(x) \leq \mu(y)$, 则$\|x\|_E \leq \|y\|_E$. $E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$ 称为强对称的, 若$x, y \in E(\mathcal{M})$且$x \prec\prec y$, 则$\|x\|_E \leq \|y\|_E$. $E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$ 称为完全对称的, 若$x \in L_0(\mathcal{M})$, $y \in E(\mathcal{M})$且$x \prec\prec y$, 则$\|x\|_E \leq \|y\|_E$. $E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$ 称为真对称的(properly symmetric), 若$E(\mathcal{M})$是强对称的且$L_1(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M} \subseteq E(\mathcal{M}) \subseteq L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$. 空间$E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$上的范数$\|\cdot\|_{E(\mathcal{M})}$称为Fatou范数, 若$0 \leq x_\alpha \uparrow_\alpha x \subseteq E(\mathcal{M})$, 蕴含了$0 \leq \|x_\alpha\|_{E(\mathcal{M})} \uparrow_\alpha \|x\|_{E(\mathcal{M})}$. 空间$E(\mathcal{M}) \subseteq L_0(\mathcal{M})$上的范数$\|\cdot\|_{E(\mathcal{M})}$称为序连续范数, 若$0 \leq x_\alpha \downarrow_\alpha 0 \subseteq E(\mathcal{M})$, 蕴含了$0 \leq \|x_\alpha\|_{E(\mathcal{M})} \downarrow_\alpha 0$. 更多的有关这方面的知识参见文献[33, 34, 44, 45].

设 f 和 g 为两个非负函数. 在这章中我们记 $f \approx g$, 若 $C_1 f \leq g \leq C_2 f$ 其中 $C_j > 0, j = 1, 2$.

设 A, B 是两个非负量, 我们记 $A \lesssim B$, 若存在某个常数 C 满足 $A \leq CB$.

在下面的章节中我们有时假设 $\mathcal{M}$ 无最小投影, 但这一假定在应用时并无影响. 事实上, 若 $\mathcal{M}$ 有最小投影, 我们总是可以将 $\mathcal{M}$ 嵌入到 $\mathcal{M} \otimes L^\infty([0,1]; dt)$, 并记作 $\overline{\mathcal{M}}$, 此时, $\overline{\mathcal{M}}$ 无最小投影, 且 $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$(参见文献 [24]).

第二章 弱 L_p 空间

设 (X,Σ,ν) 是一个测度空间, $0<p,\ q\le\infty$ 且 f 是 (X,Σ,ν) 上的可测函数, 定义

$$\|x\|_{L_{p,q}(X)}=\begin{cases}(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} & \text{如果 } q<\infty,\\ \sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t) & \text{如果 } q=\infty,\end{cases}\tag{2.1}$$

这里 $f^*(t)$ 是 f 的非增重排. 经典的 Lorentz 空间 $L_{p,q}(X)$ 是由所有满足 $\|f\|_{L_{p,q}(X)}<\infty$的 (X,Σ,ν)上的可测函数f组成的集合. 更多的 $L_{p,q}(X)$ 的知识参见 [3, 4, 5, 51].

定义2.0.12. [29] 设 x 是一个重属于一个半有限的 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的 τ-可测算子, 且 $0<p,q\le\infty$, 定义

$$\|x\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}=\begin{cases}(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} & \text{如果 } q<\infty\\ \sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x) & \text{如果 } q=\infty\end{cases}\tag{2.2}$$

非交换 Lorentz 空间是所有 $L_0(\mathcal{M})$ 中, 满足$\|x\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}<\infty$ 的元素, 记为 $L_{p,q}(\mathcal{M})$.

注记2.0.1. (i) [29] 如果 $p=q$, 则 $L_{p,p}(\mathcal{M})=L_p(\mathcal{M})$.

(ii) [29] 赋予范数 $\|\cdot\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}$, $L_{p,q}(\mathcal{M})$ 是一个拟 Banach 空间. 进而, 若 $p>1$, $q\ge1$, 则 $L_{p,q}(\mathcal{M})$ 可以重新赋予范数成为 Banach 空间:

$$x\to\Big(\int_0^\infty\big[t^{-1+\frac{1}{p}}\int_0^t\mu_s(x)ds\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

是 $L_{p,q}(\mathcal{M})$ 上的一个等价范数.

(iii) $L_{\infty,q}(\mathcal{M})=\{0\}$.

(iv) 设 x 为 τ-可测算子, 则

$$\lambda_t(x)=d_{\mu_s(x)}(t)$$

这里 $d_{\mu_s(x)}(t)$ 是 $s\to\mu_s(x)$ 作为 s 的函数的分布函数.

引理2.0.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子且 φ 是 $[0,\infty)$ 上连续的增函数, $x\in L_0(\mathcal{M})$, 则

$$\int_0^t\varphi(\mu_s(x))ds=\sup\{\tau(\varphi(E|x|E));E\in\mathcal{M}_{proj},\tau(E)\le t\},\ t>0.$$

进而, 上面所取的上确界可以限定在 $\mathcal{M}$ 的一个包含 $|x|$ 的谱投影算子的交换的子代数 $\mathcal{N}$ 上.

证明 由文献 [24] 中的推论 2.8 知, 若 $E \in \mathcal{M}_{proj}, \tau(E) \le t$ 且 $s \ge t$, 则 $\mu_s(E|x|E) = 0$. 因此,

$$\tau(\varphi(E|x|E)) = \int_0^\infty \varphi(\mu_s(E|x|E))ds = \int_0^t \varphi(\mu_s(E|x|E))ds \le \int_0^t \varphi(\mu_s(x))ds.$$

从而有, $\int_0^t \varphi(\mu_s(x))ds \ge \sup\{\tau(\varphi(E|x|E)); E \in \mathcal{M}_{proj}, \tau(E) \le t\}$. 为了证明相反的不等式, 设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个由 $|x|$ 的谱投影算子和 1 生成的子代数. 显然 $\mathcal{N}$ 是交换的且无最小投影算子, 另外 τ 限制在 $\mathcal{N}$ 上还是半有限的. 由文献 [24] 中的引理 4.1 和引理 2.5 知,

$$\begin{aligned}\int_0^t \varphi(\mu_s(x))ds &= \int_0^t \mu_s(\varphi(|x|))ds = \sup\{\tau((E\varphi(|x|)E)); E \in \mathcal{N}_{proj}, \tau(E) \le t\} \\ &= \sup\{\tau(\varphi(E|x|E)); E \in \mathcal{N}_{proj}, \tau(E) \le t\}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^t \varphi(\mu_s(x))ds &= \sup\{\tau(\varphi(E|x|E)); E \in \mathcal{N}_{proj}, \tau(E) \le t\} \\ &\le \sup\{\tau(\varphi(E|x|E)); E \in \mathcal{M}_{proj}, \tau(E) \le t\}.\end{aligned}$$

□

注记2.0.2. (i) 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 类似于经典理论的证明可得 $\|\cdot\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}$ 是范数的充要条件是 $1 \le q \le p$ 或 $p = q = \infty$.

(ii) 令 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 且 $0 < p, q \le \infty$. 我们可以定义 $\|\cdot\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})}$ 为

$$\|x\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 若 \quad q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds, & 若 \quad q = \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

当 $1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$ 或 $p = q = \infty$ 时, $\|\cdot\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})}$ 是 $L_{p,q}(\mathcal{M})$ 上的范数. 此时 $(L_{p,q}(\mathcal{M}), \|\cdot\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})})$ 是 Banach 空间. 特别地,

$$\|x\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})} \le \|x\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})} \le \frac{p}{p-1}\|x\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}.$$

事实上, 上述第一个不等式可以由下面的不等式得到

$$\mu_t(x) \le t^{-1}\int_0^t \mu_s(x)ds, \quad t > 0.$$

下面我们来证明第二个不等式, 首先证明 $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ 的情形. 由文献 ([3], P.256) 中的 Hardy 不等式可得

$$\begin{aligned}
\|x\|^*_{L_{p,q}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} \\
&= (\int_0^\infty (\int_0^t \mu_s(x)ds)^q t^{-(1-\frac{1}{p})q-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{p}{p-1}(\int_0^\infty (t\mu_t(x))^q t^{-(1-\frac{1}{p})q-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|x\|_{L_{p,q}(\mathcal{M})}.
\end{aligned}$$

当 $1 < p < \infty$ 且 $q = \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\|x\|^*_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\mu_s(x)ds \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}}\mu_u(x))ds \\
&= \|x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}ds \\
&= \frac{p}{p-1}\|x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}.
\end{aligned}$$

(iii) 设 $x \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})$ 和 $y \in L_{p',1}(\mathcal{M})$, 这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 我们可以推出下述的 Hölder 不等式成立

$$\begin{aligned}
|\tau(xy)| &\leq \int_0^\infty \mu_t(xy)dt \\
&\leq \int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x)t^{\frac{1}{p'}}\mu_t(y)\frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p'}}\mu_t(y)\frac{dt}{t} sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x) \\
&\leq \|x\|^*_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\|y\|^*_{L_{p',1}(\mathcal{M})}.
\end{aligned}$$

设 ψ 为 $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ 上递增的凹函数且满足 $\psi(0^+) = 0$ 和 $\psi(\infty) = \infty$. 由文献 [51] 中第二章的定理 5.1, 我们可以定义经典的 Lorentz 空间和 Marcinkiewicz 空间, 并把他们分别记为 $\Lambda_\psi(\mathbb{R}^+)$ 和 $M_\psi(\mathbb{R}^+)$, 这两个空间上的范数分别为

$$\|f\|_{\Lambda_\psi(\mathbb{R}^+)} = \int_0^\infty f^*(t)\psi'(t)dt,$$

和

$$\|f\|_{M_\psi(\mathbb{R}^+)} = \sup_{\alpha>0} \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_0^\alpha f^*(t)dt.$$

我们定义 $M_\psi^0(\mathbb{R}^+)$ 为

$$M_\psi^0(\mathbb{R}^+) = \{f \in M_\psi(\mathbb{R}^+) : \lim_{\alpha\to 0,\infty} \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_0^\alpha f^*(t)dt = 0\}.$$

另外我们还定义

$$\Lambda_\psi(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M})| \ \ \mu_t(x) \in \Lambda_\psi(\mathbb{R}^+)\},$$

$$M_\psi(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M})| \ \ \mu_t(x) \in M_\psi(\mathbb{R}^+)\},$$

$$M_\psi^0(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M})| \ \ \mu_t(x) \in M_\psi^0(\mathbb{R}^+)\}.$$

显然, $S(\mathcal{M}) \subseteq M_\psi^0(\mathcal{M})$. 若 $\psi(t) = t^{1-\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$, 则有

$$L_{p,\infty}(\mathcal{M}) = M_\psi(\mathcal{M}), \quad L_{p',1}(\mathcal{M}) = \Lambda_\psi(\mathcal{M}).$$

当 $\psi(t) = t^{1-\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$时我们记 $M_\psi^0(\mathcal{M})$ 为$S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$. 因此

$$S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))^* = L_{p',1}(\mathcal{M}) \tag{2.4}$$

(见文献, [44]).

§ 2.1 弱 L_p 空间的对偶空间

设 $x \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$, 我们定义

$$x^{**}(t,r) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}.$$

记 N_0 和 N_∞ on $L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 分别为

$$N_0(x) = \limsup_{t\to 0} tx^{**}(t, 1-t), \qquad N_\infty(x) = \limsup_{t\to\infty} tx^{**}(t, 1-\frac{1}{t}).$$

由文献 [52] 中的定理 2.1 可知 $N_0(\cdot)$ 和 $N_\infty(\cdot)$ 都是 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 上的半范数.

定理2.1.1. 设 $\mathcal{M}$ 是无最小投影算子的半有限 von Neumann 代数. 记 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$ 为 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 的对偶空间. 定义

$$S_0 = \{l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* : |l(x)| \le CN_0(x), \text{对某个常数 } C \text{ 成立}\}$$

和

$$S_\infty = \{l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* : |l(x)| \le CN_\infty(x), \text{对某个常数 } C \text{ 成立}\}.$$

则 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* = S_0 \oplus S_\infty$.

Proof. 首先我们来证明 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* \subset S_0 \oplus S_\infty$. 设 $l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$. 由文献 [52] 中的定理 2.4 和引理 1.6, 可知 $l(x) = 0$ 对任意的 $x \in L_{1,q}(\mathcal{M}) \subset L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 成立, 其中 $1 < q < \infty$. 事实上, 设 $l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$, 应用文献 [52] 中的引理1.6, 我们可以推出

$$|l(x)| \le \|l\|\|x\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})} \le q^{\frac{1}{q}}\|l\|\|x\|_{L_{1,q}(\mathcal{M})},\ 1 < q < \infty,$$

因此$l \in L_{1,q}(\mathcal{M})^*$. 再应用文献 [52] 中的定理2.4, 可知$l(x) = 0$ 对任意的$x \in L_{1,q}(\mathcal{M}) \subset L_{1,\infty}(\mathcal{M}), 1 < q < \infty$ 成立.

为了证明 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* = S_0 \oplus S_\infty$, 我们把 $l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$ 写成 $l = l_0 + l_\infty$, 其中 $l_0(x) = l(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|))$ 且 $l_\infty(x) = l(xE_{[0,\alpha]}(|x|))$, $\alpha > 0$. 下面我们首先来证明 l_0 与 l_∞ 的定义与 α 的选取无关, 且 l_0 和 l_∞ 都是线性的.

对 $1 < q < \infty$ 有

$$xE_{(\alpha,\beta]} \in S \subseteq L_{1,q}(\mathcal{M}), \tag{2.5}$$

$$(x+y)E_{(\alpha,\infty)}(|x+y|) - xE_{(\alpha,\infty)}(|x|) - yE_{(\alpha,\infty)}(|y|) \in S \subseteq L_{1,q}(\mathcal{M}), \tag{2.6}$$

其中 $\beta \ge \alpha \ge 0$ 和 $x, y \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$. 事实上, 由 $xE_{(\alpha,\beta]}$ 和 S 的基本性质, 容易验证 (2.5). 下证 (2.6), 令 $e_1 = E_{(\alpha,\infty)}(|x+y|), e_2 = E_{(\alpha,\infty)}(|x|), e_3 = E_{(\alpha,\infty)}(|y|)$, $A = (x+y)E_{(\alpha,\infty)}(|x+y|) - xE_{(\alpha,\infty)}(|x|) - yE_{(\alpha,\infty)}(|y|)$ 和 $e = e_1 \vee e_2 \vee e_3$. 由此可得

$$\begin{aligned}
Ae &= [(x+y)E_{(\alpha,\infty)}(|x+y|) - xE_{(\alpha,\infty)}(|x|) - yE_{(\alpha,\infty)}(|y|)]e \\
&= (x+y)E_{(\alpha,\infty)}(|x+y|)e - xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)e - yE_{(\alpha,\infty)}(|y|)e \\
&= A,
\end{aligned}$$

进而有 $r(A) \le e$. 故, $\tau(r(A)) = \tau(l(A)) \le \tau(e) < \infty$. 取 $\xi \in H$ 满足$\|\xi\| = 1$, 则 ξ 有分解 $\xi = \xi_1 + \xi_2$, 其中 $\xi_1 \in e_1(H), \xi_2 \perp e_1(H)$, 由此可得如下不等式

$$\begin{aligned}
\|A\xi\| &= \|(x+y)e_1\xi - xe_2\xi - ye_3\xi\| \\
&\le \|(x+y)e_1\xi_1 - xe_2e_1\xi_1 - ye_3e_1\xi_1\| + \|xe_2\xi_2 + ye_3\xi_2\| \\
&\le \|xe_2^\perp\xi_1\| + \|ye_3^\perp\xi_1\| + \|xe_2^\perp\xi_2 + xe_2\xi_2 + ye_3^\perp\xi_2 + ye_3\xi_2\| + \|xe_2^\perp\xi_2\| + \|ye_3^\perp\xi_2\| \\
&= \|xe_2^\perp\xi_1\| + \|ye_3^\perp\xi_1\| + \|(x+y)e_1^\perp\xi_2\| + \|xe_2^\perp\xi_2\| + \|ye_3^\perp\xi_2\| \\
&\le 5\alpha.
\end{aligned}$$

因此 $A \in L_{1,q}(\mathcal{M}), 1 < q < \infty$.

由 (2.6) 可知 l_0 和 l_∞ 的定义与 α 的选择无关, 且 l_0 和 l_∞ 都是线性的, 即,

$$l_0(x) = \lim_{\alpha\to\infty} l(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)), \tag{2.7}$$

$$l_\infty(x) = \lim_{\alpha\to 0} l(xE_{[0,\alpha]}(|x|)). \tag{2.8}$$

不失一般性, 我们可设$\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)) < 1$. 从而当 $\alpha\to\infty$ 时有$\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\to 0$. 故

$$\begin{aligned}
|l_0(x)| &= |l(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|))| \\
&\le \|l\|\|xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})} \\
&= \|l\| \sup_{t>0} t\mu_t(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) \\
&= \|l\| \sup_{t>0} t\mu_t(x)\chi_{(0,\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)))} \\
&\le \|l\| \sup_{0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} tx^{**}(t,1-t),
\end{aligned}$$

进而由 (2.7) 和上述不等式以及下面两个等式

$$\mu_t(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) = \mu_t(x)\chi_{(0,\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)))},$$

与

$$\mu_t(x) \le [\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)^{1-t}ds]^{\frac{1}{1-t}} = x^{**}(t,1-t), 0<t<1,$$

可得 $l_0\in S_0$.

下证 $l_\infty\in S_\infty$. 令 $x_\alpha = |x|E_{[0,\alpha]}(|x|)+\alpha E_{(\alpha,\infty)}(|x|)$, 其中 $x=u|x|$ 为 x 的极分解, 显然 $l_\infty(x)=l_\infty(ux_\alpha)$, $\forall\ \alpha>0$. 由 $ux_\alpha\in L_{1,q}(\mathcal{M})$, $\forall\ \alpha>0$ 可知, 若 $\tau(E_{(0,\infty)}(|x|))<\infty$, 则

$$l_\infty(x) = l(ux_\alpha E_{[0,\alpha]}(|x|)) = 0, \quad \forall\alpha>0.$$

因此 $|l_\infty(x)|\le CN_\infty(x)$.

另一方面, 若当 $\alpha\to 0$ 时, 有 $\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\to\infty$, 不失一般性, 设 $\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\ge 2$. 容易验证 $\mu_t(x_\alpha)\le\mu_t(x)$, $\forall\ t>0$. 若 $0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))$, 则$\mu_t(x_\alpha)=\alpha$. 事实上, $\mu_t(x_\alpha)\le\|x_\alpha\|\le\alpha$ 是显然的. 下证相反的不等式, 令 $E\in\mathcal{M}_{\text{proj}}$ 且 $\tau(1-E)\le t$, 则$E(H)\bigcap E_{(\alpha,\infty)}(|x|)(H)\ne\{0\}$. (否则, $E(H)\bigcap E_{(\alpha,\infty)}(|x|)(H)=\{0\}$, 即, $E\wedge E_{(\alpha,\infty)}(|x|)=0$, 因此 $E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\prec 1-E$. 所以, $\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\le\tau(1-E)\le t$, 这与 $0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))$ 矛盾. 由此可得 $\mu_t(x_\alpha)\ge\alpha$. 再联合前面的讨论可知

$$\mu_t(x_\alpha)=\alpha,\ 0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)).$$

从而

$$\begin{aligned}
|l_\infty(x)| &= |l(ux_\alpha E_{[0,\alpha]}(|x|))| \\
&\leq \|l\|\|ux_\alpha E_{[0,\alpha]}(|x|)\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})} \\
&\leq \|l\|\|x_\alpha\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})} \\
&= \|l\|\sup_{t>0} t\mu_t(x_\alpha) \\
&= \|l\|\max\{\sup_{0<t<\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t\mu_t(x_\alpha), \sup_{t\geq\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t\mu_t(x_\alpha)\} \\
&= \|l\|\sup_{t\geq\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t\mu_t(x_\alpha) \\
&= \|l\|\sup_{t\geq\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t\mu_t(x) \\
&\leq \|l\|\sup_{t\geq\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} tx^{**}(t, 1-\frac{1}{t}).
\end{aligned}$$

联合上述不等式和等式 (2.8), 可得 $|l_\infty(x)| \leq CN_\infty(x)$.

只需再证明 $S_\infty \cap S_0 = \{0\}$. 任取 $x \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$, 令 $x = xE_{(\alpha,\infty)}(|x|) + xE_{[0,\alpha]}(|x|)$, $\alpha > 0$. 若 $l \in S_\infty \cap S_0$, 有

$$l(x) = l_\infty(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) + l_0(xE_{[0,\alpha]}(|x|)) = 0.$$

从而 $S_0 \cap S_\infty = \{0\}$. 因此 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* \subseteq S_0 \oplus S_\infty$. □

注记2.1.1. 任取 $x \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$. 我们定义 $\overline{N}_0$ 和 $\overline{N}_\infty$ 分别为

$$\overline{N}_0(x) = \limsup_{t\to 0} tx^{**}(t,r), \quad 0 < r < 1,$$

和

$$\overline{N}_\infty(x) = \limsup_{t\to\infty} tx^{**}(t,r), \quad 0 < r < 1.$$

显然 $\overline{N}_i(\alpha x) = |\alpha|\overline{N}_i(x), \alpha \in \mathbb{C}, i = 0, \infty$. 另一方面, 由文献 [52] 中的定理2.1 可得

$$\overline{N}_i(x+y) \leq 2^{\frac{1}{r}-1}(\overline{N}_i(x) + \overline{N}_i(y)), i = 0, \infty.$$

我们再定义

$$\overline{S}_0 = \{l \text{ 为 } L_{1,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \leq C\overline{N}_0(x) \text{ 对某个常数 } C \text{ 成立}\}$$

和

$$\overline{S}_\infty = \{l \text{ 为 } L_{1,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \le C\overline{N}_\infty(x) \text{ 对某个常数 } C \text{ 成立}\}.$$

若 $\mathcal{M}$ 不含有最小投影算子, 可得$L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* = \overline{S}_0 \oplus \overline{S}_\infty$.

事实上, 若 $x \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$, 则

$$\begin{aligned} tx^{**}(t,r) &= t[\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)^r ds]^{\frac{1}{r}} \\ &= t[\frac{1}{t}\int_0^t (s\mu_s(x))^r s^{-r} ds]^{\frac{1}{r}} \\ &\le \sup_{s>0}(s\mu_s(x))t[\frac{1}{t}\int_0^t s^{-r} ds]^{\frac{1}{r}} \\ &= (\frac{1}{1-r})^{\frac{1}{r}} \|x\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})},\ 0<r<1. \end{aligned}$$

因此

$$\overline{N}_i(x) \le (\frac{1}{1-r})^{\frac{1}{r}} \|x\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M})},\ i=0,\infty,\ 0<r<1,$$

故 $\overline{S}_i \subseteq L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$, $i=0,\infty$. 所以 $L_{1,\infty}(\mathcal{M})^* \supseteq \overline{S}_0 \oplus \overline{S}_\infty$.

相反地, 若 $l \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})^*$, 应用定理 2.1.1 中的方法可证明 $l \in \overline{S}_0 \oplus \overline{S}_\infty$.

定理2.1.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子的半有限 von Neumann 代数, $1<p<\infty$. 定义 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的半范数 N_0 和 N_∞ 分别为

$$N_0(x) = \limsup_{t\to 0} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds \quad \text{和} \quad N_\infty(x) = \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \mu_s(x)ds.$$

记

$$S_0 = \{l \text{ 为 } L_{p,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \le CN_0(x), \text{ 对某个常数} C \text{ 成立}\}$$

和

$$S_\infty = \{l \text{ 为} L_{p,\infty}(\mathcal{M}) \text{ 上的线性泛函} : |l(x)| \le CN_\infty(x), \text{ 对某个常数} C \text{ 成立}\}.$$

则 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})^* = L_{p',1}(\mathcal{M}) \oplus S_0 \oplus S_\infty$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Proof. 若 $1<p<\infty$, 由注记 2.0.2 中的 (ii) 可知

$$N_i(x) \le \frac{p}{p-1}\|x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}, i=0,\infty.$$

从而 $S_i \subseteq L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$, $i=0,\infty$. 因此, 由文献 [52]中的定理2.7可知

$$L_{p,\infty}(\mathcal{M})^* \supseteq L_{p',1}(\mathcal{M}) \oplus S_0 \oplus S_\infty.$$

另一方面, 设 $l \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$. 记 l_1 为 l 在 $S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$ 上的限制. 由 (2.4) 可知

$$l_1 \in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))^* = L_{p',1}(\mathcal{M}) = \{l_y(\cdot) = \tau(\cdot y) : y \in L_{p',1}(\mathcal{M})\}.$$

故存在 $y \in L_{p',1}(\mathcal{M})\}$ 使得 $l(x) = l_1(x) = \tau(xy)$, $\forall\, x \in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$. 对任意的 $y \in L_{p',1}(\mathcal{M})$, 显然有$l(\cdot) = \tau(\cdot y) \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$. 因此, 对任意的 $l \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$, 可以选取元素 $y \in L_{p',1}(\mathcal{M})$ 使得 $l_y(x) = \tau(xy) = l(x), \forall\, x \in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$.

记 $l_s = l - l_y$. 则 $l_s \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$ 且 $l_s(x) = 0, \forall\, x \in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$. 因此, $l \in L_{p,\infty}(\mathcal{M})^*$ 唯一决定 l_y 和 l_s. 从而

$$L_{p,\infty}(\mathcal{M})^* = L_{p',1}(\mathcal{M}) \oplus S,$$

其中 S 为 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的奇异泛函构成的空间. 故, 对任意的 $l_s \in S$ 有$l(x) = 0$, $\forall\, x \in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$ 成立.

下证 $S = S_0 \oplus S_\infty$. 对 $l_s \in S$, 我们定义

$$l_0(x) = l_s(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)), \qquad l_\infty(x) = l_s(xE_{[0,\alpha]}(|x|))$$

其中 $\alpha > 0$. 类似于定理 2.1.1 的讨论可知, l_0 和 l_∞ 与 α 的选取无关, 且 l_0 和 l_∞ 都是线性的. 从而

$$l_0(x) = \lim_{\alpha\to\infty} l_s(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) \tag{2.9}$$

$$l_\infty(x) = \lim_{\alpha\to 0} l_s(xE_{[0,\alpha]}(|x|)). \tag{2.10}$$

由 $\mu_t(x)$ 的性质可得

$$\begin{aligned}
|l_0(x)| &= |l(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|))| \\
&\le \|l\| \|xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} \\
&= \|l\| \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \mu_t(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) \\
&= \|l\| \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \mu_t(x) \chi_{(0,\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)))} \\
&\le \|l\| \sup_{0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t \mu_s(x) ds.
\end{aligned}$$

应用 $\mu_t(x)$ 的性质还可得

$$\mu_t(xE_{(\alpha,\infty)}(|x|)) = \mu_t(x)\chi_{(0,\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|)))},$$

和

$$\mu_t(x) \le \frac{1}{t} \int_0^t \mu_s(x) ds, t > 0.$$

当 $\alpha\to\infty$ 时 $\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\to 0$. 因此, 由 (2.9)可得 $l_0\in S_0$.

现在我们来证 $l_\infty\in S_\infty$. 设 $x=u|x|$ 为 x 的极分解, 令$x_\alpha=|x|E_{[0,\alpha]}(|x|)+\alpha E_{(\alpha,\infty)}(|x|)$. 显然 $l_\infty(x)=l_\infty(ux_\alpha), \alpha>0$. 若 $\tau(E_{(0,\infty)}(|x|))<\infty$, 则 $ux_\alpha\in S(L_{p,\infty}(\mathcal{M}))$. 因此, $l_\infty(x)=l_s(ux_\alpha E_{[o,\alpha]}(|x|))=0, \alpha>0$. 故, $|l_\infty(x)|\le CN_\infty(x)$.

通过计算可得 $\mu_t(x_\alpha)\le\mu_t(x)$, $t>0$ 且 $\mu_t(x_\alpha)=\alpha$, $0<t<\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))$. 因此, 若 $\tau(E_{(0,\infty)}(|x|))=\infty$, 则

$$
\begin{aligned}
|l_\infty(x)| &= |l_s(ux_\alpha E_{[0,\alpha]}(|x|))|\\
&\le \|l_s\|\|ux_\alpha E_{[0,\alpha]}(|x|)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\\
&\le \|l_s\|\|x_\alpha\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\\
&= \|l_s\|\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x_\alpha)\\
&= \|l_s\|\max\{\sup_{0<t<\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x_\alpha), \sup_{t\ge\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x_\alpha)\}\\
&= \|l_s\|\sup_{t\ge\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x_\alpha)\\
&= \|l_s\|\sup_{t\ge\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x)\\
&\le \|l_s\|\sup_{t\ge\frac{1}{2}\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))} t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t\mu_s(x)ds.
\end{aligned}
$$

令 $\alpha\to 0$, 我们可得 $|l_\infty(x)|\le CN_\infty(x)$ (这是因为当 $\alpha\to 0$ 时 $\tau(E_{(\alpha,\infty)}(|x|))\to\infty$). 类似于定理 2.1.1 的证明可知 $S_\infty\cap S_0=\{0\}$. □

§ 2.2 弱 L_p 空间上的算子

命题2.2.1. (i) 设 $x\in L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 且 $\tau(s(|x|))<\infty$, 则 $x\in L^q(\mathcal{M}), q<p<\infty$.

(ii) 设 $x\in L^{p,\infty}(\mathcal{M})\cap\mathcal{M}$, 则 $x\in L^q(\mathcal{M})$, $q>p$.

(iii) 设 $x\in L^{p_0,\infty}(\mathcal{M})\cap L^{p_1,\infty}(\mathcal{M})$, 其中 $p_0<p<p_1$, 则 $x\in L^p(\mathcal{M})$.

(iv) 设 $0<p_0<p<p_1\le\infty$, 则 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})\subseteq L^{p_0}(\mathcal{M})+L^{p_1}(\mathcal{M})$.

Proof. (i):设 $p<\infty$, 由文献 [53] 中的引理 3 (ii) 可知,

$$\begin{aligned}
\tau(|x|^q) &= q\int_0^\infty t^{q-1}\lambda_t(x)dt \\
&= q\int_0^1 t^{q-1}\lambda_t(x)dt + q\int_1^\infty t^{q-1}\lambda_t(x)dt \\
&= q\tau(s(|x|))\int_0^1 t^{q-1}dt + q\|x\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\int_1^\infty t^{q-p-1}dt \\
&= \tau(s(|x|)) + \frac{q\tau(s(|x|))}{q-p}.
\end{aligned}$$

即, $x\in L^q(\mathcal{M})$.

(ii): 设 $x\in L^{p,\infty}(\mathcal{M})\cap\mathcal{M}$, 则

$$\begin{aligned}
\tau(|x|^q) &= q\int_0^\infty t^{q-1}\lambda_t(x)dt \\
&= q\int_0^{\|x\|_\infty} t^{q-1}\lambda_t(x)dt + q\int_{\|x\|_\infty}^\infty t^{q-1}\lambda_t(x)dt \\
&= q\int_0^{\|x\|_\infty} t^{q-1}\lambda_t(x)dt \\
&\le q\|x\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\int_0^{\|x\|_\infty} t^{q-p-1}dt < \infty.
\end{aligned}$$

因此 $x\in L^q(\mathcal{M})$.

(iii): 取 $x\in L^{p_0,\infty}(\mathcal{M})\cap L^{p_1,\infty}(\mathcal{M})$. 设 $e_1=e_{[0,1]}(|x|)$ 且 $e_2=e_{(1,\infty)}(|x|)$, 则 $x=xe_1+xe_2$. 进而, $x_1=xe_1\in L^{p_0,\infty}(\mathcal{M})$ 和 $x_2=xe_2\in L^{p_1,\infty}(\mathcal{M})$ 成立. 再应用上面的 (i) 和 (ii) 可知, $x_1\in L^p(\mathcal{M})$ 且 $x_2\in L^p(\mathcal{M})$. 即 $x\in L^p(\mathcal{M})$. (iv) 可以由 (i) 和 (ii) 直接得到. □

定理2.2.1. $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的左乘算子 $T_u^l: x\to ux$ 有界的充分必要条件是 $u\in\mathcal{M}$. 特别地, $\|T_u^l\|=\|u\|_\infty$.

Proof. 设 $u\in\mathcal{M}$,

$$\|T_u^l x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(ux) \le \|u\|_\infty\|x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}.$$

则 $\|T_u^l\|\le\|u\|_\infty$. 反过来, 设 T_u^l 是一个有界算子. 若 u 是一个无界算子, 则对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, 有$\tau(e_n)\neq 0$ 和 $ne_n\le|u|e_n$ 成立, 其中 $e_n=e_{(n,\infty)}(|u|)$. 因此

$$n\|e_n\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(ne_n) \le \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(|u|e_n) = \|T_u^l e_n\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}.$$

这与 T_u^l 的有界性矛盾. 又因为 $\tau(e_\varepsilon) > 0, \forall\ \varepsilon > 0$ 和 $(\|u\|_\infty - \varepsilon)e_\varepsilon \leq |u|e_\varepsilon$, 其中 $e_\varepsilon = e_{(\|u\|_\infty-\varepsilon,\infty)}(|u|)$. 所以 $(\|u\|_\infty - \varepsilon)\|e_\varepsilon\|_{p,\infty} = \|T_u^l e_\varepsilon\|_{p,\infty}$, 即,

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \frac{\|T_u^l e_\varepsilon\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}}{\|e_\varepsilon\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}} \leq \|T_u^l\|.$$

故结论成立. □

注记2.2.1. (i) $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的右乘算子 $T_u^l : x \to ux$ 有界的充分必要条件是 $u \in \mathcal{M}$. 特别地, $\|T_u^l\| = \|u\|_\infty$.

(ii) $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上所有的左乘算子(或右乘算子)组成的集合是 $\mathcal{B}(L^{p,\infty}(\mathcal{M}))$ 的子代数.

(iii) 设 $x \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 且 $\mathcal{N}$ 是由 $|x|$ 的谱集组成的 $\mathcal{M}$ 的子代数. 记 $A_1 = \{T_u^r : u \in \mathcal{N}\}, A_2 = \{T_u^l : u \in \mathcal{N}\}$, 则 A_1 和 A_2 都是 $\mathcal{B}(L^{p,\infty}(\mathcal{M}))$ 的 Abelian 子代数.

引理2.2.1. 设 T_u^l 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的紧的有界算子. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $e_\varepsilon = e_{(\varepsilon,\infty)}(|u|)$ 和 $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon) = \{xe_\varepsilon : x \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})\}$. 则 $L^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是关于算子 T_u^l 的闭不变子空间且 $T_u^l|_{L^{p,\infty}(e_\varepsilon)}$ 是紧算子.

Proof. 设 $x, y \in L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$, 则 $x = x_1e_\varepsilon, y = y_1e_\varepsilon$, 其中 $x_1, y_1 \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})$. 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 显然有, $\alpha x + \beta y = \alpha x_1 e_\varepsilon + \beta y_1 e_\varepsilon = (\alpha x_1 + \beta y_1)e_\varepsilon \in L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$. 因此, $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 的子空间. 记 $x = x_1e_\varepsilon \in L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$. 由 $T_u^l x = ux = ux_1e_\varepsilon$ 和 $ux_1 \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 可知, $T_u^l x \in L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$. 下证 $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是闭集. 事实上, 设 x 是 $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 的闭包中的算子, 从而存在一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}} \subseteq L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 满足 $\|x - x_n\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} \to 0,\ n \to \infty$. 因此, 对任意的 $\eta > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\|x - x_{n_0}\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} < \eta$, 所以

$$\begin{aligned}\|x(1-e_\varepsilon)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} &= \|(x - x_{n_0} + x_{n_0})(1-e_\varepsilon)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}\\ &= \|(x - x_{n_0})(1-e_\varepsilon)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} \leq \|x - x_{n_0}\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} < \eta.\end{aligned}$$

故, $x(1-e_\varepsilon) = 0$ 和 $x = xe_\varepsilon \in L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 成立. 另外, $T_u^l|_{L^{p,\infty}(e_\varepsilon)}$ 为紧算子是显然的. □

定理2.2.2. 设 T_u^l 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的有界算子. 则 T_u^l 是紧算子的充分必要条件是 $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是有限维的, 其中 $\varepsilon > 0$ 且 $e_\varepsilon = e_{(\varepsilon,\infty)}(|u|)$.

Proof. 设 T_u^l 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 上的紧算子, 应用引理 2.2.1 可知, $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 的关

于算子 T_u^l 的不变子空间且 $T_u^l|_{L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)}$ 是一个紧算子. 根据文献 [24] 中的引理 2.5 可知,

$$\begin{aligned}\mu(T_u^l x e_\varepsilon) &= \mu(uxe_\varepsilon) = \mu(|uxe_\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \mu(e_\varepsilon x^* u^* u x e_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \geq \mu(e_\varepsilon x^* \varepsilon^2 x e_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon\mu(xe_\varepsilon).\end{aligned}$$

因此 $\|T_u^l x e_\varepsilon\|_{p,\infty} \geq \varepsilon\|xe_\varepsilon\|_{p,\infty}$. 故, $T_u^l|_{L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)}$ 在 $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是闭值域的并且还是可逆的, 紧的. 所以, $L_r^{p,\infty}(e_\varepsilon)$ 是有限维的. 反过来, 由条件可知, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $L_r^{p,\infty}(e_{\frac{1}{n}})$ 是有限维的. 记 $u_n = ue_{\frac{1}{n}}$. 显然,

$$\|T_u^l x - T_{u_n}^l x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} = \|(u-u_n)x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} = \|u(1-e_{\frac{1}{n}})x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} \leq \frac{1}{n}\|x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})},$$

由此可知 $T_{u_n}^l$ 一致收敛于 T_u^l. 由于 $L_r^{p,\infty}(e_{\frac{1}{n}})$ 是有限维的, 所以 $T_{u_n}^l$ 是有限秩算子. 因此, $T_{u_n}^l$ 是紧算子. 故, T_u^l 是一个紧算子. □

注记2.2.2. 对于右乘算子 $L^{p,\infty}(\mathcal{M})$, 我们考虑 $L_l^{p,\infty}(e_\varepsilon) = \{e_\varepsilon x : x \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})\}$, 则有类似于 引理 2.2.1 和定理 2.2.2 的结论成立.

命题2.2.2. 设 $u \in \mathcal{M}$ 和 $L_l^{p,\infty}(s(|u|)) = \{s(|u|)x : x \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})\}$. 若存在 $\eta > 0$, 使得 $|u| \geq \eta s(|u|)$, 则 $T_u^l : L_l^{p,\infty}(s(|u|)) \to L_l^{p,\infty}(s(|u|))$ 是闭值域算子.

Proof. 设 $\eta > 0$ 满足 $|u| \geq \eta s(|u|)$. 若 $x \in L^{p,\infty}(\mathcal{M})$, 则有

$$\begin{aligned}\|T_u^l(s(|u|)x)\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} &= \|ux\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(ux) \\ &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x^*u^*ux)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(x^*\eta^2 s(|u|)x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \eta \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\mu_t(s(|u|)x) \\ &= \|s(|u|)x\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

因此, T_u^l 是 $L_l^{p,\infty}(s(|u|))$ 上的闭值域算子. □

第 三 章　非交换加权 Lorentz 空间

为了方便我们记 $L_1 = L_1(\mathbb{R}^+)$, 其中 $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$. 我们称 ω 是权函数, 如果 ω 是 $\mathbb{R}^+$ 上不恒等于零的非负局部可积函数. 我们一般用字母 $\omega, \widetilde{\omega}, \omega_0 ...$ 来表示权函数. 任给权函数 ω, 记 $W(t) = \int_0^t \omega(s)ds < \infty, 0 \le t < \infty$. 我们称 $W \in \Delta_2$ 如果存在常数 $C > 0$ 使得 $W(2t) \le CW(t), t > 0$. 两个非负量 A 和 B 称为等价的若存在常数 $C > 1$ 使得 $C^{-1}A \le B \le CA$, 记为 $A \approx B$.

§ 3.1　非交换加权 Lorentz 空间

定义3.1.1. 设 $x \in L_0(\mathcal{M})$, $0 < p, q \le \infty$ 且 ω 是权函数. 定义

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} = \begin{cases} (\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[(\mu_t(x))_\omega^*]^q dt)^{\frac{1}{q}}, & if\ q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(\mu_t(x))_\omega^*, & if\ q = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

$\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} < \infty\}$.

设 $x \in L_0(\mathcal{M})$, $0 < p = q < \infty$. 则有

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p}(\mathcal{M})} = (\int_0^\infty \mu_t(x)^p \omega(t)dt)^{\frac{1}{p}}, p < \infty. \tag{3.2}$$

命题3.1.1. 设 $0 < p, q < \infty$ 和 $x \in L_0(\mathcal{M})$, 则

(i) $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} = (\int_0^\infty pt^{q-1}W(\lambda_t(x))^{\frac{q}{p}}dt)^{\frac{1}{q}}$.

(ii) $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p}(\mathcal{M})} = (\int_0^\infty pt^{p-1}W(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} tW(\lambda_t(x))^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} \mu_t(x)W(t)^{\frac{1}{p}}$.

Proof. 这些结果是文献 [52] 中的命题 1.2 和文献 [17] 中的命题 2.2.5 的推论. 事实上, 由文献 [17] 中的引理 2.2.4 可得 $d_{d^\omega_{\mu.(x)}}(t) = (\mu.(x))^*_\omega(t)$ 和

$$W(\lambda_t(x)) = W(d_{\mu.(x)}(t)) = \int_0^{d_{\mu.(x)}(t)} \omega(s)ds = \int_{\{s>0;\mu_s(x)>t\}} \omega(s)ds = d^\omega_{\mu.(x)}(t).$$

因此

$$
\begin{aligned}
(\int_0^\infty pt^{q-1}W(\lambda_t(x))^{\frac{q}{p}}dt)^{\frac{1}{q}} &= (\int_0^\infty pt^{q-1}d^\omega_{\mu.(x)}(t)^{\frac{q}{p}}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\int_0^\infty \frac{q}{p}t^{\frac{q}{p}-1}\int_0^{d_{d^\omega_{\mu.(x)}}(t)} ps^{q-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\int_0^{(\mu.(x))^*_\omega} qs^{q-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[(\mu.(x))^*_\omega(t)]^q dt)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})},
\end{aligned}
$$

其中 $d_{\mu.(x)}(t)$ 是函数 $s\to\mu_s(x)$ 的经典的分布函数且 $d^\omega_{\mu.(x)}(t)=\int_{\{|f|>\lambda\}}\omega(s)ds$. (ii) 可由 (i) 直接得到. (iii) 可由下面的等式得到

$$
\|x\|_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}(\mu.(x))^*_\omega(t)=\|\mu_t(x)\|_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathbb{R}+)}.
$$

□

注记3.1.1. (i) 设 $q<\infty$ 且 $\widetilde{\omega}(t)=W^{\frac{q}{p}-1}(t)\omega(t), 0<t<\tau(1)$. 由上述命题可得

$$
\|x\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}=\|x\|_{\Lambda^{q}_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{M})}.
$$

因此, 在这里我们只需研究 Lorentz 空间 $\Lambda^q_\omega(\mathcal{M})$ 以及弱型空间 $\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})$.

(ii) 设 $q<\infty$ 且 $\widetilde{\omega}(t)=W^{\frac{q}{p}-1}(t)\omega(t), 0<t<\tau(1)$. 由命题 3.1.1 可得

$$
\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})=\Lambda^{q,\infty}_{\frac{q}{p}\widetilde{\omega}}(\mathcal{M}),\ 0<p,q<\infty.
$$

(iii) 若 $0\neq e\in\mathcal{M}_{proj}$, 则 $\|e\|_{\Lambda^{\infty,q}_\omega(\mathcal{M})}=(\int_0^{\tau(e)}[(\mu_s(e))^*_\omega]^q t^{-1}dt)^{\frac{1}{q}}=\infty$, 故

$$
\Lambda^{\infty,q}_\omega(\mathcal{M})=\{0\}.
$$

(iv) 若 $x\in\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})$ 或 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$, $\omega\notin L^1$, 则 $\mu_t(\mathcal{M})\to 0, t\to\infty$.

(v) 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 下列论述等价

(a) $\Lambda^\infty_\omega(\mathcal{M})=L^\infty(\mathcal{M})$.

(b) $(\Lambda^\infty_\omega(\mathcal{M}),\|\cdot\|_{\Lambda^\infty_\omega(\mathcal{M})})$ 是 Banach 空间.

(c) 设 $e\in\mathcal{M}_{proj}$ 且 $\tau(e)>0$, 则 $W(\tau(e))>0$.

并且若 $W\in\Delta_2$, 上述结论都成立.

命题3.1.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0<q<p<\infty$ 且 $x\in L_0(\mathcal{M})$, 则

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}\leq \sup_{e\in\mathcal{M}_{proj}}\|xe\|_{\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\leq (\frac{p}{p-q})^{\frac{1}{q}}\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}.$$

Proof. 令 $a=\sup_{e\in\mathcal{M}_{proj}}W(\tau(e))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. 由于 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 对 $0<t\leq\tau(s|x|)$, 应用文献 [57] 中的引理 1.8, 可以选取投影算子 $e\in\mathcal{M}_{proj}$,使得 $\mu_t(xe)=\mu_t(x)\chi_{(0,\tau(e))}(t)$ 且 $\tau(e)=t$, 从而可得

$$\begin{aligned}
\mu_t(x)(\int_0^t w(s)ds)^{\frac{1}{p}} &= \mu_{\tau(e)}(x)(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}}\\
&= \mu_{\tau(e)}(x)(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&= (\int_0^{\tau(e)} \mu_{\tau(e)}(x)^q w(s)ds)^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&\leq (\int_0^{\tau(e)} \mu_s(x)^q w(s)ds)^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&= (\int_0^{\infty} (\mu_s(x)\chi_{[0,\tau(e))}(s))^q w(s)ds)^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&= (\int_0^{\infty} \mu_s(xe)^q w(s)ds)^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\tau(e)} w(s)ds)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\
&= \|xe\|_{\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\leq a.
\end{aligned}$$

因此

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}=\sup_{t>0}\mu_t(x)(\int_0^t w(s)ds)^{\frac{1}{p}}\leq a.$$

另一方面, 由 $\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}=\sup_{t>0}t^pW(\lambda_t(xe))$ 可知

$$\frac{\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}}{t^p}\geq W(\lambda_t(xe)).$$

令 $b=\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{-\frac{1}{p}}$, 则有

$$\begin{aligned}
\|xe\|^q_{\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})} &= \int_0^\infty qt^{q-1}W(\lambda_t(xe))dt\\
&= \int_0^\alpha qt^{q-1}W(\lambda_t(xe))dt+\int_\alpha^\infty qt^{q-1}W(\lambda_t(xe))dt\\
&\leq W(\tau(e))\int_0^\alpha qt^{q-1}dt+\int_\alpha^\infty qt^{q-1}\frac{\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}}{t^p}dt\\
&= W(\tau(e))\alpha^q+\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}\int_\alpha^\infty qt^{q-p-1}dt\\
&= W(\tau(e))\alpha^q+\frac{q}{p-q}\alpha^{q-p}\|xe\|^p_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|xe\|^q_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})} W(\tau(e))^{\frac{p-q}{p}}(1+\frac{q}{p-q}) \\
&= \|xe\|^q_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})} W(\tau(e))^{\frac{p-q}{p}}\frac{p}{p-q} \\
&\le \|x\|^q_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})} W(\tau(e))^{\frac{p-q}{p}}\frac{p}{p-q}.
\end{aligned}
$$

故, $\|xe\|^q_{\Lambda^q_\omega(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{\frac{q-p}{p}} \le \|x\|^q_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})}\frac{p}{p-q}$, 即,

$$
\|xe\|_{\Lambda^q_\omega(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \|x\|_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})}(\frac{p}{p-q})^{\frac{1}{q}}.
$$

所以

$$
\sup_{e\in\mathcal{M}_{proj}} \|xe\|_{\Lambda^q_\omega(\mathcal{M})}W(\tau(e))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \|x\|_{\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})}(\frac{p}{p-q})^{\frac{1}{q}}.
$$

□

命题3.1.3. 设 $0<q,p<\infty$ 且 $x,y,x_n\in L_0(\mathcal{M}), n=1,2,3,....$

(i) 若 $x_n,x\in L_0(\mathcal{M}), |x_n|\le|x_{n+1}|, n=1,2,3......$ 且 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 以 τ 可测拓扑收敛于 x, 则 $\|x_n\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}\to\|x\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}$, $n\to\infty$.

(ii) 设 $x_n,x\in L_0(\mathcal{M}), n=1,2,3......$ 且 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 以 τ 可测拓扑收敛于 x, 则$\|x\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}\le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}$.

(iii) $\Lambda^{p,q_0}_\omega(\mathcal{M})\subset\Lambda^{p,q_1}_\omega(\mathcal{M}), 0<q_0\le q_1\le\infty$.

(iv) 若 $\tau(1)=1$, 则对 $0<p_0<p_1\le\infty$ 有, $\Lambda^{p_1,q}_\omega(\mathcal{M})\subseteq\Lambda^{p_0,r}_\omega(\mathcal{M}), 0<r\le\infty$.

(v) 若 $\tau(e)<\infty$ 且 $e\in\mathcal{M}_{proj}$, 则 $e\in\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})$.

Proof. (i): 由条件 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 以 τ 可测拓扑收敛于 x 且 $|x_n|\le|x_{n+1}|, n=1,2,3......$, 应用文献 [24] 中的引理 3.4 可知, $\mu_t(x_n)\uparrow_n\mu_t(x), n\to\infty$. 进而有$(\mu_(x_n))^*_\omega\uparrow_n(\mu_t(x))^*_\omega, n\to\infty$. 再应用文献 [17] 中的命题 2.2.8(iii) 可得$\|x_n\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}\to\|x\|_{\Lambda^{p,q}_\omega(\mathcal{M})}, n\to\infty$. (ii): 由条件 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 以 τ 可测拓扑收敛于 x, 应用文献 [24] 中的引理 3.4 可知, $\mu_t(x)\le\liminf_{n\to\infty}\mu_t(x_n)$. 由文献 [7] 中的命题 1.7 可得, $(\mu_t(x))^*_\omega\le\liminf_{n\to\infty}(\mu_t(x_n))^*_\omega$. 因此

$$
\begin{aligned}
(\int_0^\infty[(\mu_s(x))^*_\omega]^q t^{\frac{q}{p}-1}dt)^{\frac{1}{q}} &\le (\int_0^\infty[(\liminf_{n\to\infty}\mu_s(x_n))^*_\omega]^q t^{\frac{q}{p}-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \liminf_{n\to\infty}(\int_0^\infty[(\mu_s(x_n))^*_\omega]^q t^{\frac{q}{p}-1}dt)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

(iii): 下面的不等式是显然的

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q_0}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty pt^{q_0-1}W^{\frac{q_0}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\geq (\int_0^t ps^{q_0-1}W^{\frac{q_0}{p}}(\lambda_s(x))ds)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\geq (\frac{p}{q_0}t^{q_0}W^{\frac{q_0}{p}}(\lambda_t(x)))^{\frac{1}{q_0}} \\
&= (\frac{p}{q_0})^{\frac{1}{q_0}}tW^{\frac{1}{p}}(\lambda_t(x)).
\end{aligned}
$$

由此可得 $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q_0}(\mathcal{M})} \geq (\frac{p}{q_0})^{\frac{1}{q_0}}\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})}$. 另一方面, 若 $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, 则

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q_1}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty pt^{q_1-1}W^{\frac{q_1}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= (\int_0^\infty pt^{q_0-1}t^{q_1-q_0}W^{\frac{q_0}{p}}(\lambda_t(x))W^{\frac{q_1-q_0}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq (\sup_{t>0} tW^{\frac{1}{p}}(\lambda_t(x)))^{\frac{q_1-q_0}{q_1}}(\int_0^\infty pt^{q_0-1}W^{\frac{q_0}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q_0}\frac{q_0}{q_1}}.
\end{aligned}
$$

因此, $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q_1}(\mathcal{M})} \leq (\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})})^{\frac{q_1-q_0}{q_1}}(\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q_0}(\mathcal{M})})^{\frac{q_0}{q_1}}$. 故,

$$
\Lambda_\omega^{p,q_0}(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^{p,q_1}(\mathcal{M}), 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty.
$$

(iv): 在这里只需证明$\Lambda_\omega^{p_1,\infty}(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^{p_0,r}(\mathcal{M}), 0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$. 这是下面不等式的推论

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{\Lambda_\omega^{p_0,r}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty [(\mu_s(x))_\omega^*]^r t^{\frac{r}{p_0}-1}dt)^{\frac{1}{r}} \\
&= (\int_0^1 [(\mu_s(x))_\omega^*]^r t^{\frac{r}{p_0}-1}dt)^{\frac{1}{r}} \\
&= (\int_0^1 [t^{\frac{1}{p_1}}(\mu_s(x))_\omega^*]^r t^{\frac{r}{p_0}-\frac{r}{p_1}-1}dt)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_1}}(\mu_s(x))_\omega^*(\int_0^1 t^{\frac{r}{p_0}-\frac{r}{p_1}-1}dt)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|x\|_{\Lambda_\omega^{p_1,\infty}(\mathcal{M})}[\frac{p_0p_1}{r(p_1-p_0)}]^{\frac{1}{r}} < \infty.
\end{aligned}
$$

(v): 若 $\tau(e) < \infty$, 则

$$
\begin{aligned}
\|e\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(e))dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= W^{\frac{1}{p}}(\tau(e))(\int_0^1 pt^{q-1}dt)^{\frac{1}{q}} \\
&= W^{\frac{1}{p}}(\tau(e))(\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}} < \infty.
\end{aligned}
$$

□

定理3.1.1. 设 $0<p<\infty$, $0<q\leq\infty$ 且 $W\in\Delta_2$, 则空间 $\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})$ 是拟-Banach 空间.

Proof. 由条件可知若 $\tau(e)>0$ 则 $W(\tau(e))>0$. 若 $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}=0$, 应用命题 3.1.1 可得 $W(\lambda_t(x))=0$, $t>0$, 进而有 $\lambda_t(x)=0, t>0$, 因此 $x=0$. 另外 $\|tx\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}=|t|\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}$ 是显然的. 由不等式 $\lambda_t(x+y)\leq\lambda_{\frac{t}{2}}(x)+\lambda_{\frac{t}{2}}(x)$ 可得,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^q_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} &= \int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(x+y))dt\\
&\leq \int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_{\frac{t}{2}}(x)+\lambda_{\frac{t}{2}}(y))dt\\
&\leq C(\int_0^\infty pt^{q-1}[W(\lambda_{\frac{t}{2}}(x))+W(\lambda_{\frac{t}{2}}(y))]^{\frac{q}{p}}dt).\\
&\leq C'(\int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(x))dt+\int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(y))dt)\\
&= C'(\|x\|^q_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}+\|y\|^q_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}).
\end{aligned}$$

所以存在常数 $K>0$ 使得

$$\|x+y\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}\leq K(\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}+\|y\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}).$$

由命题 3.1.1 可得,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})} &= (\int_0^\infty pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q}}\\
&\geq (\int_0^r pt^{q-1}W^{\frac{q}{p}}(\lambda_t(x))dt)^{\frac{1}{q}}\\
&\geq W^{\frac{1}{p}}(\lambda_r(x))r(\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

因此, $W(\lambda_r(x))\leq C_{p,q}\frac{\|x\|^p_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}}{r^p}$, 其中 $C_{p,q}=(\frac{p}{q})^{-\frac{p}{q}}$. 设 $(x_n)_n^\infty$ 是 $\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})$ 中的一列可测算子且 $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}=0$. 由此可得 $W(\lambda_r(x_n-x_m))\to 0, n,m\to\infty$, $\forall\, r>0$, 这就意味着 $\lambda_r(x_n-x_m)\to 0, n,m\to\infty, \forall\, r>0$. 所以 $(x_n)_n$ 是一个以 τ-可测拓扑的 cauchy 列. 由 $L_0(\mathcal{M})$ 的完备性可知, 存在算子 $x\in L_0(\mathcal{M})$, 使得 $(x_n)_n$ 以 τ-可测拓扑收敛于 x. 再应用命题 3.1.3 (ii) 可得,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}\leq\lim_{n\to\infty}\liminf_{m\to\infty}\|x_n-x_m\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}=0.$$

故, $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}\leq\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Lambda_\omega^{p,q}(\mathcal{M})}<\infty$. □

为了方便我们在这一章中我们将使用下列记号, $L^\infty(\mathcal{M})=\mathcal{M}$, $L_0^\infty(\mathcal{M})=\{x\in L^\infty(\mathcal{M}):\tau(s(|x|))<\infty\}$, $S(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}):x=\sum_{n=1}^N e_n, e_n\in\mathcal{M}_{proj}, N<\infty\}$,

$S_0(\mathcal{M}) = \{x \in S(\mathcal{M}) : \tau(s(|x|)) < \infty\}$. 显然 $S(\mathcal{M})$ 在 $L^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ (或 $\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})$) 中的范数拓扑是稠密的.

定理3.1.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影, $0 < p < \infty$ 且 $W \in \Delta_2$, 则

(i) $S_0(\mathcal{M}) \subset L^\infty_0(\mathcal{M}) \subset \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 且 $S_0(\mathcal{M})$ 在 $L^\infty_0(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中的范数拓扑是稠密的.

(ii) 若 $w \notin L^1$, 则 $L^\infty_0(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是稠密的.

(iii) 若 $w \in L^1$, 则 $S(\mathcal{M}) \subset L^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 且 $S(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是稠密的. 但是, 此时若 $\tau(1) = \infty$, 则 $L^\infty_0(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是不稠密的.

Proof. $S_0(\mathcal{M}) \subset L^\infty_0(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega(\mathcal{M})$ 是显然的. 若 $y \in L^\infty_0(\mathcal{M})$, 则存在$x_n \in S_0(\mathcal{M}), n = 1,2,3......$, 使得 $\|y - x_n\| \to 0, n \to \infty$. 从而

$$\|x - x_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \le \|x - x_n\| \|s(|x|)\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty.$$

若 $x \in \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$, 由命题 3.1.1 可得 $\lim_{t\to\infty} \lambda_t(x) = 0$. 令 $x_n = xE_{(0,n]}(|x|)$, 则有 $\mu_t(x - x_n) = \mu_t(xE_{(n,\infty)}(|x|)) = \mu_t(x)\chi_{(0,\lambda_n(|x|))}(t) \to 0, n \to \infty$ 且 $\mu_t(x - x_n) \le \mu_t(x)$. 再应用控制收敛定理可得, $\|x - x_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$. 这就意味着 $L^\infty(\mathcal{M}) \cap \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是稠密的.

若 $\omega \notin L^1$ 且 $y \in L^\infty(\mathcal{M}) \cap \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$, 则有 $L^\infty_0(\mathcal{M}) \subset L^\infty(\mathcal{M}) \cap \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 且 $\lim_{t\to\infty} \mu_t(y) = 0$. 由条件 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 应用文献 [57] 中的引理 1.8 可知, 存在 $P_n \in \mathcal{M}_{proj}$ 使得 $\tau(P_n) = n$ 且 $\mu_t(yP_n^\perp) = \mu_{t+n}(y), t > 0, n = 1,2,3.......$ 令 $y_n = yP_n$, 则 $y_n \in L^\infty_0(\mathcal{M})$, $\mu_t(y - y_n) = \mu_{t+n}(y) \to 0, n \to \infty$ 且 $\mu_t(y - y_n) = \mu_t(yP_n^\perp) \le \mu_t(y)$. 再应用控制收敛定理可得 $\|y - y_n\|_{\Lambda^p_\omega} \to 0, n \to \infty$, 因此, $L^\infty_0(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是稠密的. 若 $\omega \in L^1$, 显然 $S(\mathcal{M}) \subset L^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$. 因此, $L^\infty(\mathcal{M}) \cap \Lambda^p_\omega(\mathcal{M}) = L^\infty(\mathcal{M})$. 对任意的 $x \in L^\infty(\mathcal{M})$, 存在 $x_n \in S(\mathcal{M})$ 满足 $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$. 故,

$$\|x - x_n\|^p_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} = \int_0^\infty \mu_t(x - x_n)^p \omega(t)dt \le \|x - x_n\|^p \int_0^\infty w(t)dt \to 0, n \to \infty.$$

由此可知 $S(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中是稠密的. 此时, $1 \in L^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$. 对任意的 $y \in L^\infty_0(\mathcal{M})$, 有 $\tau(r(y)) < \infty$. 令 $x_0 = 1 - y$, 则有 $x_0 r(y)^\perp = r(y)^\perp$. 从而, $1 = \mu_t(r(y)^\perp) = \mu_t(x_0 r(y)^\perp) \le \mu_t(x_0)$, 故

$$\|1 - y\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} = \|x_0\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \ge \|1\|_{\Lambda^p_\omega(\mathbb{R}+)} \ne 0.$$

这就意味着 $L^\infty_0(\mathcal{M})$ 在 $L^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中的拓扑是不稠密的. □

注记3.1.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0<p<\infty$ 且 $W\in\Delta_2$, 则有下列结论成立,

(i) 若 $\tau(1)<\infty$, 则 $L_0^\infty(\mathcal{M})=\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})\cap L^\infty(\mathcal{M})$. 若这两个空间不同构, 则 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})\cap L^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 中的拓扑是不稠密的(即使在经典的情况也是不稠密的).

(ii) $S_0(\mathcal{M})$ 在 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 中的拓扑是稠密的.

(iii) 若 $\tau(1)=\infty$, 则 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 在 $L^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 中的拓扑是不稠密的.

引理3.1.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 设 f 为可测函数且

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_f(t)=0,$$

则存在 $x\in L_0(\mathcal{M})$ 使得 $\mu_t(x)=f^*(t)$.

Proof. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $P\in\mathcal{M}_{proj}$ 满足 $\tau(P)=1$. 取 $\frac{k}{2^n}, n,k\in\mathbb{N}$, 应用文献 [57] 中的引理 1.8 及其证明可知, 存在 $Q_{k2^{-n}}\in(P\mathcal{M}P)_{proj}$ 满足 $Q_{k2^{-n}}P=PQ_{k2^{-n}}, \tau(Q_{k2^{-n}})=k2^{-n}$ 且 $Q_{k_12^{-n_1}}\le Q_{k_22^{-n_2}}, k_12^{-n_1}\le k_22^{-n_2}$. 令 $Q_\lambda=\sup_{\frac{k}{2^n}\le\lambda}Q_{k2^{-n}}$, $\lambda\in[0,1]$, 这样我们就定义了一列属于 $\mathcal{M}$ 的递增投影算子, 满足 $\tau(Q_\lambda)=\lambda, Q_0=0$ 和 $Q_1=P$. 因此, Q_λ 是 $P_1\mathcal{M}P_1$ 中的谱族. 若 $\tau(1)=\infty$, 我们可以选取一列投影算子 $(P_n)_{n=1}^\infty$ 满足 $\tau(P_n)=1, n=1,2,3,......$ 和 $P_i\wedge P_j=0, i\neq j$. 因此存在 $Q_\lambda^n\subset(P_n\mathcal{M}P_n)_{proj}$ 使得 $Q_0^n=0, Q_1^n=P_n$ and $\tau(Q_\lambda^n)=\lambda, \lambda\in[0,1]$. 令 $E_\lambda=\Sigma_{n\le\lambda}Q_1^n+Q_{\lambda-[\lambda]}^{[\lambda]+1}$, 从而存在 $\tau(E_\lambda)=\lambda$ 且 $\{E_\lambda\}$ 是递增列. 显然 $E_\lambda\uparrow Q=\bigvee_{n=1}^\infty Q_1^n$, 因此, $\{E_\lambda\}$ 是 $Q\mathcal{M}Q$ 中的谱族. 若可测函数 f 满足 $\lim_{t\to\infty}\lambda_f(t)=0$, 我们可以定义 $x=\int_0^\infty f^*(\lambda)dE_\lambda$, 则 $\tau(E_{(t,\infty)})=\tau(\int_{\{\lambda\ge0:f^*(\lambda)>t\}}dE_\lambda)=\int_{\{\lambda\ge0:f^*(\lambda)>t\}}d\lambda=\lambda_{f^*}(t)\downarrow 0, t\to\infty$, 由此可得 $x\in L_0(Q\mathcal{M}Q)\subset L_0(\mathcal{M})$ 和 $\mu_t(y)=f^*(t), t>0$. □

定义3.1.2. 设 $W\in\Delta_2$, 把非交换 Lorentz 空间简记为 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})$, 我们定义相伴范数(associate "norm")为

$$\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}=\sup\{\tau(|xy|):\|y\|_{\Lambda(\mathcal{M})}\le 1\}.$$

定义空间 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})$ 的相伴空间 (associate space)为由所有满足 $\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}<\infty$ 的τ-可测算子, 记为 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 即,

$$\Lambda_\omega(\mathcal{M})'=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\|x\|_{\Lambda(\mathcal{M})'}<\infty\}.$$

注记3.1.3. 设 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 则

$$\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} = \{\sup |\tau(xy)| : \|y\|_{\Lambda(\mathcal{M})} \le 1\}.$$

定理3.1.3. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $W \in \Delta_2$, 则相伴空间 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 是非交换 Banach 函数空间. 若 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 则

$$\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} = \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1\}.$$

进而, 算子 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 属于 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 的充分必要条件是$\tau(|xy|) < \infty$ 对任意的 $y \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})$ 成立.

Proof. 若 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})', y \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})$, 则$xy \in L^1(\mathcal{M})$ 且 $\tau(|xy|) \le \int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt$. 因此

$$\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \le \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1\}.$$

下证相反的不等式, 取$y \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})$ 满足$\|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1$, 应用文献 [75] 中的命题 2.2 可得,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt &= \sup\{\tau(|x|\widetilde{y}) : \widetilde{y} \in L_0(\mathcal{M}), \widetilde{y} \sim y\} \\ &\le \sup_{\|\widetilde{y}\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1} \tau(|x|\widetilde{y}) = \sup_{\|\widetilde{y}\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1} \tau(u^*x\widetilde{y}) \\ &\le \sup_{\|\widetilde{y}\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1} \tau(|x\widetilde{y}|) = \|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}.\end{aligned}$$

由此可知, $\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \ge \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \le 1\}$. 由上述讨论可知 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 是完全对称空间, 故 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 是非交换 Banach 函数空间. 下证 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 的充分必要条件是 $\tau(|xy|) < \infty$, $\forall\, y \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})$. 必要性可以由 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 定义直接得到. 另一方面, 我们定义线性算子 $T_x : \Lambda_\omega(\mathcal{M}) \to L^1(\mathcal{M})$ 为 $T_x(y) = xy$. 若 $y_n \to y$ (以空间 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})$ 中的范数) 且 $T_x y_n \to z$ (以空间 $L^1(\mathcal{M})$ 中的范数), 则有$\|y_n - y\|_{\Lambda^p_\omega} \to 0, n \to \infty$ 且 $\|T_x y_n - z\|_{L^1(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$, 这就意味着 $y_n \to y$(以 $\tau-$可测拓扑) 且 $T_x y_n \to z$((以 $\tau-$可测拓扑). 故 $xy = z$. 由闭图像定理可得 T_x 是连续的, 进而有$\|T_x y\|_{L^1(\mathcal{M})} \le C\|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})}$. 故 $\tau(|xy|) \le C\|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})}$. 因此 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$. □

注记3.1.4. 设 $W \in \Delta_2$, $x, y, x_n \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 且 $e \in \mathcal{M}_{proj}$, 则 $\|\cdot\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}$ 是一个范数且满足下列性质,

(a) 若 $|x| \le |y|$, 则 $\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \le \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}$.

(b) 若 $0 \le x_n \le x_{n+1}$ 且以 $\tau-$可测拓扑收敛于 x, 则 $\|x_n\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \to \|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}, n \to \infty$.

(c) 若 $e \in \mathcal{M}$ 满足 $\tau(e) < \infty$, 则 $e \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 的充分必要条件是 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})' \neq \{0\}$.

(d) 若 $e \in \mathcal{M}$ 满足 $\tau(e) < \infty$, 则 $\tau(|xe|) \leq C_e \|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'}$.

事实上, 由文献 [24] 中的引理 4.3 可知, 存在部分等距同构 $U, V \in \mathcal{M}$ 满足 $|(x+y)z| \leq V|xz|V^* + U|yz|U^*$, 由此可知 $\|\cdot\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}$ 是一个范数. (a): 若 $|x| \leq |y|$, 则 $\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \leq \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}$, 由

$$\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} = \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \leq 1\}$$

可知性质 (b) 成立. 若 $\tau(e) < \infty$, 则

$$|\tau(xe)| \leq \|e\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})}\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}.$$

故性质 (d) 成立. 只需再证性质 (c) 即可. 若 $0 \neq x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 则存在 $e = E_{(t,\infty)}(|x|)$ 满足 $\tau(e) > 0$. 显然, $te \leq |x|$ 且 $e \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$. 也就是说, 若 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})' \neq \{0\}$, 则存在 $e \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 满足 $b = \tau(e) > 0$. 由 $\|\cdot\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}$ 的性质可知, 若 $e \in \mathcal{M}_{proj}$ 满足 $\tau(e) \leq b$, 则 $e \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$. 如果 $b < \tau(e) < \infty$, 上述讨论仍然是成立的, 这是因为此时 e可以分解为 $e = \bigvee_{n=1}^N e_n$, 其中 $\tau(e_n) \leq b$, 进而有$\|e\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \leq \sum_{n=1}^N \|e_n\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} < \infty$. □

定理3.1.4. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $W \in \Delta_2$ 且 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$, 则 $\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} = \|\mu_t(x)\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{R}+)'}$. 进而有, $\Lambda'_\omega(\mathcal{M}) = \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$.

Proof. 这个结论可以由引理 3.1.1 和定理 3.1.3 直接得到. 事实上,

$$\begin{aligned}\|x\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} &= \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \leq 1\} \\ &= \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)f^*(t)dt : \|f\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \leq 1\} \\ &= \|\mu_t(x)\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{R}+)'}.\end{aligned}$$

因此, $\Lambda_\omega(\mathcal{M})' = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \mu_t(x) \in \Lambda_\omega(\mathbb{R}^+)'\}$.

定理3.1.5. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $W \in \Delta_2$, 则相伴空间 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 是非交换 Banach 函数空间.

Proof. 设 $x_n, n = 1, 2, 3...$ 是 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})'$ 中的 Cauchy 列, 则有

$$\int_0^\infty \mu_t(x_n - x_m)\mu_t(e)dt \leq \|x_n - x_m\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}\|e\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})}, \quad \tau(e) < \infty.$$

由此可知

$$\int_0^{\tau(e)} \mu_t(x_n - x_m)dt \le \|x_n - x_m\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'} \|e\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})}, \quad \tau(e) < \infty.$$

进而有, $\mu_t(x_n - x_m) \to 0, n, m \to \infty, t > 0$. 因此 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 是 $L_0(\mathcal{M})$ 中的 Cauchy 列. 所以必存在 $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, 使得 $x_n \to x, n \to \infty$. 应用文献 [64] 中的定理 3.4 和定理 3.1.4 可知

$$\|\mu_t(x_n) - \mu_t(x_m)\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{R}^+)'} \le \|\mu_t(x_n - x_m)\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{R}^+)'} = \|x_n - x_m\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})'}.$$

从而可知 $\mu_t(x_n)$ 是 $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^+)'$ 中的 Cauchy 列. 故, $\mu_t(x_n)$ 以空间 $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^+)'$ 的范数收敛于 $\mu_t(x)$, 因此 $x \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})'$. 最后, 应用文献 [24] 中的引理 3.4 可知,

$$\int_0^\infty \mu_t(x - x_n)\mu_t(y)dt \le \liminf_{m\to\infty} \int_0^\infty \mu_t(x_n - x_m)\mu_t(y)dt \le \liminf_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'}.$$

□

定义3.1.3. 设 $0 < p \le \infty$, 我们定义

$$\Gamma_\omega^p(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \|x\|_{\Gamma_\omega^p(\mathcal{M})} = (\int_0^\infty x^{**}(t)^p \omega(t)dt)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

$$\Gamma_{d\Phi}^{p,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \|x\|_{\Gamma_{d\Phi}^{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} \Phi(t)^{\frac{1}{p}} x^{**}(t) < \infty\},$$

其中 $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)ds$. 若 $\Phi(t) = W(t) = \int_0^t \omega(s)ds$, 我们记 $\Gamma_{d\Phi}^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 为$\Gamma_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$.

下面的注记可以由定理 3.1.4 和文献 [17] 中的定理 2.4.7 和注记 2.4.8 得到.

注记3.1.5. (i) 若 $\omega \in L^1$, 则 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 在 $\Gamma_\omega^p(\mathcal{M})$ 中稠密.

(ii) 在上述定义中我们总可以限制函数 Φ 是递增的, 这是因为若 Φ 不是递增的, 我们可以定义$\widetilde{\Phi} = \sup_{0<s<t} \Phi(s), t > 0$, 并用递增函数 $\widetilde{\Phi}$ 来代替 Φ 即可, 此时有 $\|x\|_{\Gamma_{d\Phi}^{p,\infty}(\mathcal{M})} = \|x\|_{\Gamma_{d\widetilde{\Phi}}^{p,\infty}(\mathcal{M})}$.

(iii) 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 且 $W(t) \in \Delta_2$,

(a) 设 $0 < p \le 1$, 则 $\Gamma_{d\Phi}^{1,\infty}(\mathcal{M}) = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$, 其中$\Phi(t) = tW(t)^{\frac{1}{p}}, t > 0$.

(b) 设 $1 < p < \infty$ 且 $x \in L_0(\mathcal{M})$, 则

$$\begin{aligned}\|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'} &\approx (\int_0^\infty (\frac{1}{Wt)} \int_0^t \mu_s(x)ds)^{p'} \omega(t)dt)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\int_0^\infty \mu_t(x)dt}{(\int_0^\infty \omega(t)dt)^{\frac{1}{p}}} \\ &\approx (\int_0^\infty (\frac{1}{W(t)} \int_0^t \mu_s(x)ds)^{p'-1} \mu_t(x)dt)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

(c) 设 $0<p<\infty$, 则$\Lambda_{\omega}^{p,\infty}(\mathcal{M})'=\Lambda^1_{W^{\frac{1}{p}}}(\mathcal{M})$.

(iv) 设 $p>1$ 且 $\widetilde{\omega}(t)=t^{p'}W(t)^{-p'}\omega(t), t>0$, 则

$$\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'=\Gamma^{p'}_{\widetilde{\omega}(t)}(\mathcal{M}),\ \omega\notin L^1,$$
$$\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'=\Gamma^{p'}_{\widetilde{\omega}(t)}(\mathcal{M})\cap L^1(\mathcal{M}),\ \omega\in L^1.$$

(v) 设 $\omega\notin L^1, 1<p<\infty$, 则

$$\Lambda^{p'}_{\omega^{1-p'}}(\mathcal{M})\subset\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'\subseteq\Gamma^{p'}_{\widetilde{\omega}(t)}(\mathcal{M})\subset\Lambda^{p'}_{\widetilde{\omega}(t)}(\mathcal{M}),$$

其中 $\widetilde{\omega}(t)=t^{p'}W(t)^{-p'}\omega(t), t>0$.

(vi) 设 $\omega\notin L^1, 1<p<\infty$ 且

$$(\int_0^r(\frac{W(t)}{t})^{-p'}\omega(t)dt)^{\frac{1}{p'}}W(r)^{\frac{1}{p}}\geq Cr,\quad r>0,$$

则$\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'=\Lambda^{p'}_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{M})$.

(vii) 由 (ii) 和 (iii) 可知, 若 $0<p\leq 1$, 则$\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'=\Gamma^{1,\infty}_{d\Phi_p}(\mathcal{M})$, 其中 $\Phi_p(t)=\sup_{0<s<t}W(s)^{-\frac{1}{p}}, t>0$.

推论3.1.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子,

(i) 设 $0<p\leq 1$, 则 $\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $\sup_{0<t<1}\frac{t^p}{W(t)}<\infty$.

(ii) 设 $1<p<\infty$, 则 $\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $\int_0^1(\frac{t}{W(t)})^{p'-1}dt<\infty$.

(iii) 设 $0<p<\infty$, 则 $\Lambda_{\omega}^{p,\infty}(\mathcal{M})'\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $\int_0^1\frac{1}{W(t)^{\frac{1}{p}}}dt<\infty$.

Proof. 这些结论可以由注记 3.1.5 (iii) 和注记 3.1.4 (c) 直接得到. □

我们称 ω 为 $\mathbb{R}^+$ 上的权函数为正则的(regular), 若 ω 满足$\frac{W(t)}{t}\leq C\omega(t), \forall\, t>0$, 其中 $C>0$ 是与 t 无关的常数. 应用定理 3.1.4 和注记 3.1.5 以及文献 [17]中的定理 2.4.12 可以得到下列的推论.

推论3.1.2. 设 $1<p<\infty$ 且 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子,

(i) 设 $\omega\notin L^1$, 则 $\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})'=\Lambda^{p'}_{\omega^{1-p'}}(\mathcal{M})$ 的充分必要条件是存在 $C>0$, 使得

$$\int_0^r\omega(t)^{1-p'}dt\leq C(r^{p'}(W(r))^{1-p'}+\int_0^r t^{p'}W(t)^{-p'}\omega(t)dt), r>0.$$

(ii) 设 ω 是正则的, 则

$$\Lambda^{p'}_{\omega^{1-p'}}(\mathcal{M}) = \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})' = \Gamma^{p'}_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{M}) = \Lambda^{p'}_{\widetilde{\omega}}(\mathcal{M}),$$

其中 $\widetilde{\omega}(t) = t^{p'}W(t)^{-p'}\omega(t), t > 0$.

(iii) 设 ω 是递增的, 则$\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})' = \Lambda^{p'}_{\omega^{1-p'}}(\mathcal{M})$.

定义3.1.4. 我们把非交换加权 Lorentz 空间简记为 $\Lambda_\omega(\mathcal{M})$. 设 $l \in \Lambda_\omega(\mathcal{M})^*$, 我们称 l 是正规的 (normal), 若 $x_\alpha \downarrow 0$ 可以推出 $l(x_\alpha) \to 0$.

若 $l \in \mathcal{M}^*$, 由文献 [50] 中的定理 5.11 可知, l 是正规的的充分必要条件是 l 是以超弱拓扑 (ultra-weak topology) 连续的. 类似于文献 [44] 中引理 5.10 的证明可得到下面的命题.

命题3.1.4. 设 $l \in \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$ (或 $l \in \Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathcal{M})^*$) 且 $e \in L^\infty_0(\mathcal{M})_{proj}$, 我们定义 l_e 为 $l_e(x) = l(ex), x \in \mathcal{M}$, 则 l_e 为 $\mathcal{M}$ 上的正规线性泛函.

Proof. 若 $x \in \mathcal{M}$, 则 $ex \in L^\infty_0(\mathcal{M})$. 取 $0 \leq x_\alpha \subseteq \mathcal{M}, \alpha \geq 0$ 满足 $x_0 > x_\alpha \downarrow_\alpha 0$, 则 $\mu_t(ex_\alpha e) \downarrow_\alpha 0$ 成立且

$$\mu_t(ex_\alpha) = \mu_t(x_\alpha e) = \mu_t(|x_\alpha e|^2)^{\frac{1}{2}} = \mu_t(ex_\alpha^2 e)^{\frac{1}{2}} \leq \|x_0\|^{\frac{1}{2}}\mu_t(ex_\alpha e)^{\frac{1}{2}} \downarrow_\alpha 0.$$

又 $\mu_t(x_\alpha e) \in L^\infty_0(\mathbb{R}^+)$ 在空间 $\Lambda^p_\omega(\mathbb{R}^+)$ (和 $\Lambda^{p,\infty}_\omega(\mathbb{R}^+)$) 中具有绝对连续范数, 因此 $\|ex_\alpha\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} = (\int_0^\infty \mu_t(ex_\alpha)^p\omega(t))^{\frac{1}{p}} \downarrow_\alpha 0$. 从而, $l_e(x_\alpha) \to 0$. 故, l_e 是 $\mathcal{M}$ 上的正规线性泛函.

定理3.1.6. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子且权函数 ω 满足下列条件之一:

(1) $\sup_{t>0} \frac{t^p}{\int_0^t \omega(s)ds} = \infty$.

(2) 存在 $c > 0, \alpha > 0$, 使得$W(t) \leq c\max\{\alpha, t^p\}$.

(3) ω 是非增权函数.

若 $l \in \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$, $0 < p < \infty$, 则存在唯一的算子 $y \in \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'$, 使得 $l(x) = \tau(yx)$, $\forall\, x \in L^\infty_0(\mathcal{M})$ 且 $\|l\| \geq \|y\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'}$.

Proof. 不失一般性, 我们可以设泛函 l 是自伴的, 即 $l(x^*) = \overline{l(x)}, x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 设 $e \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}$, 我们定义 l_e 为 $l_e(x) = l(ex), x \in \mathcal{M}$. 由前面的命题 3.1.4 可知, $l_e \in \mathcal{M}_*$, 故存在唯一的 $y_e \in L^1(\mathcal{M})$ 使得 $l_e(x) = l(ex) = \tau(y_e x), x \in \mathcal{M}$. 由简单的讨论可得,

(i) 当 $e, e_1 \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}, e_1 \le e$ 时, $y_{e_1} = y_e e_1$

(ii) 当 $e \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}$ 时, ey_e 是自伴的.

进而, 由文献 [76] 中定理 4.2 的证明和文献 [37] 中的推论 I.15 的证明可知必存在重属于 $\mathcal{M}$ 的闭稠定算子 y, 使得 $y^* = y$ 且 $y_e = ye, \forall\, e \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}$. 对 $e \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}$, 有 $l(ex) = l_e(x) = \tau(y_e x) = \tau(yex), \forall\, x \in \mathcal{M}$ 且 $|\tau(yex)| = |l(ex)| \le \|l\|\|ex\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \le \|l\|\|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}$. 下证 $y \in L_0(\mathcal{M})$. 设 $y = u|y|$ 且 $|y| = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$.

(a) 设存在 $\lambda_0 > 0$, 满足 $\tau(1 - E_{\lambda_0}) = \infty$. 则, 由条件 (1), 我们可以选取 $e \in L_0^\infty(\mathcal{M})$, 满足 $e \le 1 - E_{\lambda_0}$ 且 $\frac{\tau(e)^p}{W(\tau(e))} > \frac{\|l\|}{\lambda_0^p}$. 因此

$$\|l\| \ge \frac{|\tau(ye)|}{\|e\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}} = \frac{|\tau(eye)|}{W(\tau(e))^{\frac{1}{p}}} \ge \frac{\lambda_0 \tau(e)}{W(\tau(e))^{\frac{1}{p}}} > \|l\|,$$

矛盾. 故 $y \in L_0(\mathcal{M})$.

(b) 取 $\lambda > c^{\frac{1}{p}}\|l\|$, 若 $e \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 满足 $0 \le e \le E_{(\lambda,\infty)}(|y|)$, 则有

$$\lambda\tau(e) \le \tau(e|y|e) = \tau(u^*ye) = \tau(yeu^*) = l(eu^*) \le \|l\|\|e\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'}.$$

因此, 由条件 (2) 可知

$$\lambda\tau(e) \le \|l\| W(\tau(e))^{\frac{1}{p}} \le \|l\| c^{\frac{1}{p}} \max\{\alpha^{\frac{1}{p}}, \tau(e)\}.$$

从而 $\tau(e) \le \alpha^{\frac{1}{p}}$, 进而有$\tau(E_{(\lambda,\infty)}(|y|)) \le \alpha^{\frac{1}{p}}, \forall\, \lambda > c^{\frac{1}{p}}\|l\|$. 由此可得 $y \in L_0(\mathcal{M})$.

(c) 若权函数 ω 满足条件 (3), 则空间 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 是对称的非交换 Banach 空间, 因此

$$L^1(\mathcal{M}) \cap L^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}).$$

即, 存在 $\beta > 0$ 使得

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \le \beta \max\{\|x\|_{L^1(\mathcal{M})}, \|x\|_{L^\infty(\mathcal{M})}\}, x \in L^1(\mathcal{M}) \cap L^\infty(\mathcal{M}).$$

从而由类似于前面的讨论可知 $\tau(E_{(\lambda,\infty)}(|y|)) \le 1, \lambda > \alpha\|l\|$. 因此, $y \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

令 $0 \le x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 且 $e_n = E_{(\frac{1}{n},n]}(|x|)$, 则 $l(e_n x) = l_{e_n}(x) = \tau(y e_n x)$. 记 $|y e_n x - yx| = u_n(y e_n x - yx)$, 其中 $u_n \in \mathcal{M}$ 是部分等距同构且 $n, m = 1, 2, \dots$, 由此可知

$$\begin{aligned}\tau(|y e_n x - yx|) &= \tau((y e_n x - yx)u_n) \\ &= l((e_n x - x)u_n) \\ &\le \|l\| \|e_n x - x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

因为 $\mu_t(e_n x - x) \downarrow_n 0$, 所以$\|e_n x - x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$. 进而 $y e_n x \to yx, n \to \infty$(以 τ 可测拓扑) 且 $\tau(y e_n x) \to \tau(yx), n \to \infty$. 另一方面, 联合文献 [17] 中的推论 2.3.5, $\mu_t(x) \ge \mu_t(e_n x - x) \downarrow_n 0$ 和下面的不等式

$$|l((e_n x - x))| \le \|l\| \|e_n x - x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} = \|l\| \|\mu_t(e_n x - x)\|_{\Lambda_\omega^p(\mathbb{R}+)},$$

可得 $l(e_n x) \to l(x), n \to \infty$. 因此, $l(x) = \tau(yx)$ 对任意的 $0 \le x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 成立. 对任意的 $x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$, 我们可以把 x 写成 $x = (x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4)$ 的形式, 其中 $0 \le x_i \in L_0^\infty(\mathcal{M}), i = 1, 2, 3, 4$, 这就意味着 $l(x) = \tau(yx)$ 对任意的 $x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 成立. 下证 $\|l\| \ge \|y\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'}$, 设 $x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}|\tau(yx)| &= \lim_{n\to\infty} |\tau(yxe_n)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |l(xe_n)| \\ &\le \|l\| \liminf_{n\to\infty} \|xe_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \\ &= \|l\| \|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

故, $\|y\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'} \le \frac{|\tau(yx)|}{\|x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}} \le \|l\|$. □

注记3.1.6. (i) $\Lambda(\mathcal{M})' \ne \{0\}$ 的充分必要条件是 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$ 是可分点的. 事实上, 若 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$ 是可分点的, 则, 对 $0 < e_1 < e_2 \in L_0^\infty(\mathcal{M})_{proj}$, 存在 $l \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$ 使得 $l(e_2 - e_1) \ne 0$. 由定理 3.1.6 可知, 必存在 $l_y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$ 使得 $l(x) = l_y(x)$ 对任意的 $x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 成立且 $l_y(e_2 - e_1) = l(e_2 - e_1) \ne 0$. 从而, $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})' \ne \{0\}$. 另一方面, 由定理 3.1.3 可知 $L_0^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$ 成立. 若存在 $0 \ne x_0 \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 使得 $l(x_0) = 0$ 对所有的 $l \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$ 成立, 则对任意的 $y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$, 有 $l_y(x_0) = \tau(x_0 y)$. 从而 $\tau(x_0 E_{(a,\infty)}(|x_0|)) = l_{E_{(a,\infty)}(|x_0|)}(x_0) = 0, \forall\, a > 0$, 这就意味着 $x_0 = 0$, 矛盾. 故, $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$ 是可分点的.

(ii) 设 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 是非交换加权 Lorentz 空间且 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, 则 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'=\{0\}$ 的充分必要条件是对任意的 $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$ 有 l 在$L^\infty_0(\mathcal{M})$ 上为零.

命题3.1.5. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子. 若 $0<p<\infty$, $W\in\Delta_2$ 且

$$\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s=\{l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*:|l(x)|\le C\lim_{t\to\infty}\mu_t(x),x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})\},$$

则 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s\neq\{0\}$ 的充分必要条件是 $\tau(1)=\infty$ 且 $\omega\in L^1$.

Proof. 若 $\tau(1)<\infty$ 或 $\omega\notin L^1$, 对任意 $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 有 $\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)=0$. 由此可知, 若 $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s$, 则 $l(x)=0$, 对任意 $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 成立. 故, $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s=\{0\}$. 若 $\tau(1)=\infty$ 且 $\omega\in L^1$, 我们定义半范数 $T:\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})\to[0,\infty)$ 为 $T(x)=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$: (i): $T(\lambda x)=|\lambda|T(x)$. (ii): $T(x+y)=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x+y)\le\lim_{t\to\infty}(\mu_{\frac{1}{2}}(x)+\mu_{\frac{1}{2}}(y))$. 由 $T(1)=1$ 可知, $T\neq 0$. 因此, 存在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 上的非零的有界线性泛函 l, 满足 $|l(x)|\le T(x)=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$, $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$. 事实上, 若 $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$ 且 $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$, 则 $\|x\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}=(\int_0^\infty\mu_t(x)^p\omega(t)dt)^{\frac{1}{p}}\ge T(x)\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L^1}$, 进而有, $|l(x)|\le T(x)\le C\|x\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}$, $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$. 故, $|l(x)|\le T(x)=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$, $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$, 由此可知, $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s$. 从而, $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s\neq\{0\}$.

定理3.1.7. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子. 若 $0<p<\infty$ 且 ω 满足定理 3.1.6 中的条件, 则

$$\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*=\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'\oplus\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s.$$

Proof. 设 $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'\cap\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^s$, 则存在 $y\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'$, 满足

$$l(x)=l_y(x)=\tau(xy)\le C\lim_{t\to\infty}\mu_t(x),\ x\in L^\infty_0(\mathcal{M}).$$

由此可知 $\tau(yE_{[\frac{1}{n},\infty)}(|y|))=0$, 从而 $y_n=yE_{[\frac{1}{n},\infty)}(|y|)=0,n=1,2,3.......$ 又因为 $y_n\to y,n\to\infty$(以 τ 可测拓扑), 所以 $y=0$, 即 $l=0$. 下证定理中的分解成立. 设 $l\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$, 由定理 3.1.6 可知, 存在 $y\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})'$ 使得

$$l(x)=l_y(x)=\tau(xy),\forall\ x\in L^\infty_0(\mathcal{M}).$$

取 $l^s=l-l_y$, 则有 $l^s\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})^*$ 且 $l^s(x)=0$, $x\in L^\infty_0(\mathcal{M})$. 设 $x\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 且 $a=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$, 则 $\tau(E_{(a+\frac{1}{n},\infty)}(|x|))<\infty,n=1,2,3,\cdots$. 事实上, 若上述结论不成立, 则必存在 n_0 使得 $\tau(E_{(a+\frac{1}{n_0},\infty)}(|x|))=\infty$. 应用文献 [24] 中的命题 2.2 可知, $\mu_t(x)\ge a+\frac{1}{n_0}$, $t>0$, 这与 $a=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$ 矛盾. 记 $x_n=xE_{[0,a+\frac{1}{n})}(|x|)$, 则 $x-x_n\in L^\infty_0(\mathcal{M})$. 因此, $l^s(x)=l^s(x_n)$ 且 $|l^s(x)|=|l^s(x_n)|\le\|l^s\|\|x_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})},n=1,2,3\cdots$, 我们可以分以下两种情况讨论:

(i) 若 $\omega \notin L^1$, 则 $a = 0$ 且 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 具有绝对连续范数. 由 $|x_n| \leq |x|$ 和 $\mu_t(x_n) \to 0, n \to \infty$ 可知, $\|x_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$ 且 $|l^s(x)| = |l^s(x_n)| = 0$.

(ii) 若 $\omega \in L^1$, 则 $\|x_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} \leq \|x_n\| \|\omega\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \leq (a+\frac{1}{n})\|\omega\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}$, 从而 $|l^s(x)| \leq \|l^s\| \|\omega\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} a = Ca = C\lim_{t\to\infty} \mu_t(x)$.

综上所述, 存在 x 无关的非负常数 C 使得 $|l^s(x)| \leq C\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$. 即 $l^s \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^s$. □

推论3.1.3. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0 < p < \infty$, ω 满足定理 3.1.6 中的条件, 且 $W \in \Delta_2$.

(i) 若 $\tau(1) < \infty$ 或 $\omega \notin L^1$, 则 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})' = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$.

(ii) 若 $\tau(1) = \infty$ 且 $\omega \in L^1$, 则 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})' \subsetneq \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$. 特别地, 此时 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^* \neq \{0\}$.

§ 3.2 非交换弱加权 Lorentz 空间

定义3.2.1. 设 $x \in L_0(\mathcal{M})$, $0 < p, q \leq \infty$. 我们定义

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (\mu_t(x))_\omega^*. \tag{3.3}$$

定义空间 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 为

$$\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} < \infty\}.$$

注记3.2.1. (i) $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}) = \Lambda_{\frac{q}{p}\omega}^{q,\infty}(\mathcal{M})$, $0 < p, q < \infty$.

(ii) 设 $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ 且 $W \in \Delta_2$, 则 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 是拟 Banach 空间.

定理3.2.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0 < p < \infty$ 且 $W \in \Delta_2$, 则 $S_0(\mathcal{M}) \subset L_0^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 且 $S_0(\mathcal{M})$ 在 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 中以空间 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 中的拓扑是稠密的.

Proof. $S_0(\mathcal{M}) \subset L_0^\infty(\mathcal{M}) \subset \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 是显然的. 若 $y \in L_0^\infty(\mathcal{M})$ 则存在 $x_n \in S_0(\mathcal{M}), n = 1, 2, 3......$ 使得 $\|y - x_n\| \to 0, n \to \infty$. 因此 $\|x - x_n\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} \leq \|x - x_n\| \|supp|x|\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} \to 0, n \to 0$. □

注记3.2.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影, $0 < p < \infty$ 且 $W \in \Delta_2$, 则 $L_0^\infty(\mathcal{M}) = \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}) \cap L^\infty(\mathcal{M})$. 若上面的两个空间不相等, 即使在经典的情况 $L_0^\infty(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}) \cap L^\infty(\mathcal{M})$ 中也不稠密.

类似于定理 3.1.4 和定理 3.1.3 的证明可得下面的两个定理.

定理3.2.2. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $W \in \Delta_2$, 则相伴空间 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$ 是非交换 Banach 函数空间. 若 $x \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$, 则

$$\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'} = \sup\{\int_0^\infty \mu_t(x)\mu_t(y)dt : \|y\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} \leq 1\}.$$

进而, 算子 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 属于 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$ 的充分必要条件是 $\tau(|xy|) < \infty$ 对每个 $y \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 成立.

定理3.2.3. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $W \in \Delta_2$ 且 $x \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$, 则 $\|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'} = \|\mu_t(x)\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathbb{R}+)'}$. 进而, $(\Lambda_\omega^{p,\infty})'(\mathcal{M}) = \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$.

定理3.2.4. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0 < p < \infty$, 则 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \{0\}$ 的充分必要条件是 $\int_0^1 \frac{1}{W(t)^{\frac{1}{p}}} dt < \infty$.

Proof. 此定理可以由注记 3.1.5 以及 $e \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$, $\tau(e) < \infty$ 的充分必要条件是 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \{0\}$ 直接得到. □

定理3.2.5. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子, $0 < p < \infty$ 且 $W \in \Delta_2$, 则 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' = \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})^*$ 的充分必要条件是这两个空间都是零空间.

Proof. 充分性是显然的. 下证必要性, 只需证明: 当 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \{0\}$ 时, $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})^*$. 若 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \{0\}$, 由定理 3.2.4 可知, 函数 $W^{-\frac{1}{p}}$ 在 $[0,\infty)$ 上是局部可积的. 我们可以定义半范数

$$H(x) = \limsup_{t\to 0} \frac{\int_0^t \mu_s(x)ds}{\int_0^t W(s)^{-\frac{1}{p}}ds}, \ x \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}).$$

若 $x \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$, 显然有, $\mu_t(x) \leq \|x\|_{\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})} W(t)^{-\frac{1}{p}}$, 由此可知 H 的定义是合理的且是连续的. 由引理 3.1.1 可知, 存在 $x_0 \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 满足 $\mu_t(x_0) = W^{-\frac{1}{p}}$ *a.e.*, $[0, \tau(1))$, 且此时有$H(x_0) = 1$. 故, 存在 $0 \neq l \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})^*$ 满足 $|l(x)| \leq H(x)$, $\forall\, x \in \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M}$. 另外 $l \notin \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})'$, 且 $l(x) = 0$, $x \in L_0^\infty(\mathcal{M})$, 这是因为

$$H(x) = \limsup_{t\to 0} \frac{\int_0^t \mu_s(x)ds}{\int_0^t W(s)^{-\frac{1}{p}}ds} \leq \|x\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \limsup_{t\to 0} \frac{t}{\int_0^t W(s)^{-\frac{1}{p}}ds} = 0.$$

因此 $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})' \neq \Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})^*$. □

引理3.2.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子且 $W \in \Delta_2$. 若 $\tau(1) = \infty$ 且 $\omega \in L^1$, 则 $\Lambda_\omega^{1,\infty}(\mathcal{M})^* \neq \{0\}$.

Proof. 设 $\tau(1) = \infty$ 且 $\omega \in L^1$, 令 $H(x) = \lim_{t\to\infty} \mu_t(x)$, 则 $H : \Lambda_\omega^{1,\infty}(\mathcal{M}) \to [0,\infty)$ 是 $\Lambda_\omega^{1,\infty}(\mathcal{M})$ 中非零的连续的半范数. 故, $\Lambda_\omega^{1,\infty}(\mathcal{M})^* \neq \{0\}$. □

定义3.2.2. 设 $(\Lambda(\mathcal{M}), \|\cdot\|_{\Lambda(\mathcal{M})})$ 是非交换的拟范空间, 我们定义 $N : \Lambda(\mathcal{M}) \to [0,\infty)$ 为

$$N(x) = \inf\{\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} : x_k \in \Lambda(\mathcal{M}), k = 1,2,3,...,K, x = \sum_{k=1}^{K} x_k, K \in \mathbb{N}^+\},$$

$x \in \Lambda(\mathcal{M})$.

命题3.2.1. 设 $\mathcal{M}$ 无最小投影算子且 $\Lambda(\mathcal{M})$ 是非交换的拟范空间, $x, y \in \Lambda(\mathcal{M})$, 则有,

(i) $N(x) \leq \|x\|_{\Lambda(\mathcal{M})}$.

(ii) $N(x) \leq N(y)$, if $|x| \leq |y|$.

(iii) $N(x) = N(|x|)$.

(iv) $N(x) = \inf\{\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} : x_k \in \Lambda(\mathcal{M}), k = 1,2,3,...,K, |x| \leq \sum_{k=1}^{K} x_k\}$.

(v) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

进而, $\Lambda(\mathcal{M})^* = \{0\}$ 的充分必要条件是 $N = 0$.

Proof. (i), (iii) 和 (v) 是显然的. 由 (iii) 可知, 在证明 (ii)时, 只需证明 (ii) 对非负元成立即可. 设 $0 \leq x \leq y$, 我们可以定义算子 a 满足 $x = ay$, 则 $\|a\| \leq 1$. 若 $y = \sum_{k=1}^{K} y_k$, 则 $x = ay = \sum_{k=1}^{K} ay_k$. 因此,

$$N(x) \leq \sum_{k=1}^{K} \|ay_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} \leq \sum_{k=1}^{K} \|y_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})}.$$

即, $N(x) \leq N(y)$. (iv): 由定义和 (iii) 可知

$$\begin{aligned} N(x) &= \inf\{\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} : x_k \in \Lambda(\mathcal{M}), k = 1,2,3,...,K, |x| = \sum_{k=1}^{K} x_k\} \\ &\geq \inf\{\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} : x_k \in \Lambda(\mathcal{M}), k = 1,2,3,...,K, |x| \leq \sum_{k=1}^{K} x_k\}, \end{aligned}$$

另一方面, 若 $|x| \le \sum_{k=1}^{K} x_k$, 则存在 $a \in \mathcal{M}$ 满足 $\|a\| \le 1$ 使得 $|x| = \sum_{k=1}^{K} a x_k$, 从而有

$$N(x) \le \sum_{k=1}^{K} \|a x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} \le \sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})}.$$

故 $N(x) \le \inf\{\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} : x_k \in \Lambda(\mathcal{M}), k = 1, 2, 3, ..., K, |x| \le \sum_{k=1}^{K} x_k\}$.

下证最后一个结论. 若存在 $0 \ne l \in \Lambda(\mathcal{M})^*$, 则必存在 $x \in \Lambda(\mathcal{M})$ 使得 $l(x) \ne 0$. 对 x 的任一个有限分解 $x = \sum_{k=1}^{K} x_k$ and $x = u|x|$, 有 $\sum_{k=1}^{K} \|x_k\|_{\Lambda(\mathcal{M})} \ge \frac{|l(x)|}{\|l\|}$, 即 $N(x) \ge \frac{|l(x)|}{\|l\|} > 0$, 所以 $N \ne 0$. 相反地, 由 N 是 $\Lambda(\mathcal{M})$ 上连续的半范数可知, 若 $N \ne 0$, 则至少存在一个非零的连续线性泛函 $l \in \Lambda(\mathcal{M})^*$. □

§ 3.3 非交换 Hardy-Lorentz 空间

经典的 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{D})$, $1 \le p \le \infty$, 是由圆盘上满足

$$\sup_{0<r<1} \{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\} < \infty$$

的解析函数组成的 Banach 空间. 由径向极限可知 $H^p(\mathbb{D})$ 与 $H^p(\mathrm{T})$ 是等价的, 其中 $H^p(\mathrm{T})$ 是由圆环上的空间 $L^p(\mathrm{T})$ 中满足负 Fourier 系数为 0 的元素组成的 Banach 空间. 设 (X, ν) 是一个概率测度空间, 我们称 $\mathcal{A}$ 是一个 w^*- Dirichlet 代数, 若 $\mathcal{A}$ 是 $L_\infty(X)$ 的 w^* 子代数, $\mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}}$ 在 $L_\infty(X)$ 是 w^* 稠密的且$\int fgd\nu = \int fd\nu \int gd\nu$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$.

为了统一算子代数中的一些非自伴代数, 1967 年 Arveson 引入了次对角代数的概念. 次对角代数可以看作 w^*- Dirichlet 代数的推广. Arveson 的这些工作被不同的学者做了不同的推广, 例如: 1997 年 Marsalli 和 West 定义了与有限 von Neumann 代数相关的非交换Hardy 空间并得到了 Riesz 分解定理和 $H^p(\mathcal{A})$ 与 $H^q(\mathcal{A})$ 之间的对偶关系. 最近, Bekjan 和 Xu 在文献 [59] 中给出了更广泛的 Riesz 分解定理, Szegö 分解定理以及内外分解等结论. 更多的结论见文献 [36, 56, 59, 71] 等.

设 $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数, D 为 $\mathcal{M}$ 的 von Neumann 子代数. 记 $\mathcal{E} : \mathcal{M} \to D$ 是满足 $\tau \circ \mathcal{E} = \tau$ 的唯一的正规的忠实的条件期望. $\mathcal{M}$ 的与 $\mathcal{E}$ (或 D) 相关的有限的次对角代数 $\mathcal{A}$ 是指 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的w^*-闭子代数并且满足下列条件:

(i) $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 在 $\mathcal{M}$ 中是 w^*-稠密的;

(ii) $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{A}$ 上是可乘的, 即, $\mathcal{E}(ab) = \mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)$, $a, b \in \mathcal{A}$;

(iii) $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^* = D$.

当 $\mathcal{M}$ 为有限 von Neumann 代数且 W 满足 Δ_2 条件时, $\mathcal{M}=\Lambda_\omega^\infty(\mathcal{M})\subseteq\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}),0<p\leq\infty$. 我们定义非交换 Hardy-Lorentz 空间 $H_\omega^p(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 在 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 中的闭包.

定义3.3.1. 设 $\mathcal{M}$ 为半有限 von Neumann 代数, 我们定义非交换 Hardy-Lorentz 空间 $H_\omega^p(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 中的闭包. 同时定义 $(H_\omega^p)_0(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}_0\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 在 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 中的闭包.

令 $\mathcal{M}_e=e\mathcal{M}e,\mathcal{A}_e=e\mathcal{A}e,\mathcal{D}_e=e\mathcal{D}e$ 且$\mathcal{E}_e(x)=\mathcal{E}(exe)$. 由 Bekjan 的结论可知 $\mathcal{A}_e$ 是 $\mathcal{M}_e$ 的关于 $\mathcal{D}_e$ 和 $\mathcal{E}_e(x)$ 的次对角代数且 $(\mathcal{A}_e)_0=e\mathcal{A}_0e$.

引理3.3.1. 设 $\tau(1)=\infty$ 且 $\omega\notin L^1$ 或 $\tau(1)<\infty$. 若 e_i 强收敛于 1 且 $e_n<e_{n+1}\subseteq P(\mathcal{M}),n=1,2,\ldots\ldots$, 则 $\lim_{i\to\infty}\|xe_i-x\|_{p,\omega}=0,\lim_{i\to\infty}\|e_ix-x\|_{p,\omega}=0,\forall\, x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$.

Proof. 不失一般性, 我们可以设 $0\leq x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 令 $x=\int_0^\infty\lambda dE_\lambda$ 为 x 的谱分解. 显然 $\mu_t(x)\in\Lambda_\omega^p(R^+)$, 进而由文献 [17] 中的定理 2.3.4 可知 $\mu(x)$ 具有绝对连续范数. 记 $q_n=1-e_n$, 由条件可知 q_n 强收敛于 0 且 $q_n>q_{n+1},n=1,2,\ldots\ldots$. 取 $x_n=(xq_nx)^{\frac{1}{2}},n=1,2,\ldots\ldots$ 设 $f\in P(\mathcal{M})$ 且 $\tau(f)<\infty$, 显然有 $fx_n^2f\to0,n\to\infty$ (以 τ 可测拓扑) 并且根据文献[61] 中的引理 2 可得 $\mu_t(fx_n^2f)^{\frac{1}{2}}=\mu_t(x_nfx_n)^{\frac{1}{2}}\leq\mu_t(x)$. 因此, 由文献 [7] 中的第一章的命题 3.6 可知,

$$\begin{aligned}\|fx_nf\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}&=\|\mu_t(fx_nf)\|_{\Lambda_\omega^p(R^+)}\\&=\|\mu_t(fx_nffx_nf)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda_\omega^p(R^+)}\\&\leq\|\mu_t(fx_n^2f)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda_\omega^p(R^+)}\downarrow_n 0.\end{aligned}$$

若 $\tau(1)<\infty$, 取 $f=1$, 对上述不等式再应用文献 [17] 中的定理 2.3.4 可知, $\|x_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\downarrow_n 0$. 进而有 $\|xq_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}=\|(xq_nx)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}=\|x_n\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\to0,n\to\infty$.

若 $\tau(1)=\infty$ 且 $\omega\notin L^1$. 若 $\tau(e_{(0,\infty)}(|x|)<\infty$ 可以归结为 $\tau(1)<\infty$ 的情形. 设 $\tau(e_{(\alpha,\infty)}(|x|)\to\infty,\alpha\to0$. 根据文献 [57] 中的引理 1.8 和文献 [17] 中的定理 2.3.4, 我们可以选取 α_0 使得

$$\|xe_{[0,\alpha_0]}(|x|)\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}=\|\mu_t(x(1-e_{(\alpha_0,\infty)}(|x|))\|_{\Lambda_\omega^p(R^+)}=\|\mu_{t+\tau(e_{(\alpha_0,\infty)}(|x|)}(x)\|_{\Lambda_\omega^p(R^+)}<\varepsilon.$$

另外根据上面的讨论取 $f=e_{(\alpha_0,\infty)}(|x|)$ 可知, 存在 $n_0\in\mathbb{N}^+$ 使得当 $n\geq n_0$ 时有,

$$\|e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)x_ne_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\leq\|\mu(e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)x_n^2e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|))^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}<\varepsilon.$$

因此, 当 $n \geq n_0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \\
&= \|\mu_t(e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp})\|_{\Lambda^p_\omega(R^+)} \\
&= \|\mu_t(e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp})^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda^p_\omega(R^+)} \\
&\leq \|\mu_t(e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)x_n^2 e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|))^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 $e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)^{\perp} = 1 - e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|) = e_{(\lambda_0,\infty)}(|x|)$. 类似的,

$$\|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} < \varepsilon, n \geq n_0.$$

另一方面, 由不等式

$$\begin{aligned}
\mu_t(x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)) &= \mu_t(e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n^2 e_{[0,\alpha_0]}(|x|))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu_t(e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x^2 e_{[0,\alpha_0]}(|x|))^{\frac{1}{2}} = \mu_t(x e_{[0,\alpha_0]}(|x|))
\end{aligned}$$

可知, $\|x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} < \varepsilon$.

根据上面的讨论可知, 当 $n \geq n_0$ 时,

$$\begin{aligned}
\|xq_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} &= \|(xq_n x)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} = \|x_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \\
&\leq C(\|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} + \|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \\
&+ \|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} + \|e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}x_n e_{[0,\alpha_0]}(|x|)^{\perp}\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}) \\
&< 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

故, $\|xq_n\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$. 类似可得 $\|q_n x\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})} \to 0, n \to \infty$. □

在这一节下面的讨论中, 当 $\mathcal{M}$ 为半有限 von Neumannn 代数时, 我们总是假设 $\omega \notin L_1$. 由于 $\mathcal{D}$ 是半有限的, 我们可以选取一族属于 $\mathcal{D}$ 的 τ 有限的投影算子列 $\{e_i\}$, 使得 e_i 是单调递增的且强收敛于 1 的. 在下面的讨论中为了方便我们把 $\|\cdot\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}$ 简记为 $\|\cdot\|_{p,\omega}$.

引理3.3.2. 设 $\tau(1) = \infty$ 且 $\omega \notin L^1$ 或 $\tau(1) < \infty$. 若 $0 < p \leq \infty$, 则 $H^p_\omega(\mathcal{A})$ 是 $\cup_{i\in I}\mathcal{A}_{e_i}$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中的闭包且 $(H^p_\omega)_0(\mathcal{A})$ 是 $\cup_{i\in I}(\mathcal{A}_{e_i})_0$ 在 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 中的闭包.

Proof. 设 $x \in H^p_\omega(\mathcal{A}), \varepsilon > 0$, 则存在 $a \in \mathcal{A} \cap \Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 使得 $\|x - a\|_{p,\omega} < \varepsilon$. 另一方面, 由条件和引理 3.3.1 可知 $\|ae_i - a\|_{p,\omega} \to 0, \|e_i a - a\|_{p,\omega} \to 0$, 从而 $\|e_i a e_i - a\|_{p,\omega} \to 0$, 故

存在 i_0 使得 $\|e_{i_0}ae_{i_0}-a\|_{p,\omega}<\varepsilon$. 所以 $\|e_{i_0}ae_{i_0}-x\|_{p,\omega}<2\varepsilon$. 类似的可证明另一个结论也成立. □

应用 Bekjan 的方法可以得到下面的结论.

引理3.3.3. 设 $0<p\leq\infty$, $e\in\mathcal{M}$, 则有 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)=e\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})e$, $H_\omega^p(\mathcal{A}_e)=eH_\omega^p(\mathcal{A})e$ 和 $(H_\omega^p)_0(\mathcal{A}_e)=e(H_\omega^p)_0(\mathcal{A})e$ 成立.

Proof. 设 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)$, 则必存在$x_n\in\mathcal{M}_e\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)$, 使得$\|x_n-x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)}\to 0$. 因此,$\|ex_ne-exe\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\to 0$. 又因为 $x_n=ex_ne$, 故 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)\subseteq e\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})e$. 相反地, 若 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 则存在 $x_n\in\mathcal{M}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 使得 $\|x_n-x\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\to 0$. 进而可知 $\|ex_ne-exe\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)}\to 0$. 故 $exe\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)$, 即 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)\supseteq e\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})e$.

另外, 由引理 3.3.2 可知 $\cup_{i\in I}\mathcal{A}_{e_i}$ 在 $H_\omega^p(\mathcal{A})$ 中是稠密的. 又因为 $e\cup_{i\in I}\mathcal{A}_{e_i}e\subseteq\mathcal{A}_e$, 故,$H_\omega^p(\mathcal{A}_e)\supseteq eH_\omega^p(\mathcal{A})e$. 相反地, 因为 $\mathcal{A}_e\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_e)=e\mathcal{A}e\cap e\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})e\subseteq eH_\omega^p(\mathcal{A})e$, 所以 $H_\omega^p(\mathcal{A}_e)\subseteq eH_\omega^p(\mathcal{A})e$. 类似可证 $(H_\omega^p)_0(\mathcal{A}_e)=e(H_\omega^p)_0(\mathcal{A})e$ 成立. □

命题3.3.1. 设 $x\in\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 设$0<p<\infty$ 且权函数 ω 对某个 $1\leq q<\infty$ 满足

$$\int_r^\infty\frac{\omega(t)}{t^q}dt\leq\frac{B}{r^q}\int_0^r\omega(t)dt,\quad\forall\, r>0,\tag{3.4}$$

其中 $B>0$ 为常数. 则有 $\|\mathcal{E}(x)\|_{p,\omega}\leq C\|x\|_{p,\omega}$, 其中 $C>0$ 为常数. 因此, $\mathcal{M}$ 可以延拓为 $H_\omega^p(\mathcal{A})$ 到 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{D})$ 的收缩投影. 我们仍然把这个延拓记为 $\mathcal{E}$.

Proof. 设 $\mathcal{M}$ 是无最小投影算子的半有限 von Neumann 代数, $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的由 $|\mathcal{E}(x)|$ 的谱集生成的 von Neumann 子代数, 则有 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{D}$ 且

$$\begin{aligned}\int_0^t\mu_s(\mathcal{E}(x))^rds&=\sup\{\tau((e|\mathcal{E}(x)|e)^r);e\in\mathcal{M}_{proj},\tau(e)\leq t\}\\&\leq\sup\{\tau((|\mathcal{E}(x)e|)^r);e\in\mathcal{D}_{proj},\tau(e)\leq t\}\\&=\sup\{\tau((|\mathcal{E}(xe)|)^r);e\in\mathcal{D}_{proj},\tau(e)\leq t\}\\&\leq\sup\{\tau((|xe|^r);e\in\mathcal{D}_{proj},\tau(e)\leq t\}\\&\leq\int_0^t\mu_s(x)^rds,\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式用到了结论 $\|\mathcal{E}(x)\|_r\leq\|x\|_r, 0<r<\infty$. 即

$$\int_0^t\mu_s(\mathcal{E}(x))^rds\leq\int_0^t\mu_s(x)^rds.\tag{3.5}$$

当 $\mathcal{M}$ 有最小投影算子时考虑 $\mathcal{M}\otimes L^{\infty}(\mathbb{R}^{+})$ 即可. 由条件 (3.4) 和文献 [9] 中的定理 1.7 可知,

$$\int_0^{\infty}(\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)^r ds)^{\frac{p}{r}}\omega(t)dt \leq C\int_0^{\infty}\mu_t(x)^p\omega(t)dt, \tag{3.6}$$

对某个 $r>0$ 成立, 其中 $C>0$ 为常数. 由此可知对某个 r 有

$$\|x\|_{p,\omega} \leq (\int_0^{\infty}(\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)^r ds)^{\frac{p}{r}}\omega(t)dt)^{\frac{1}{p}} \leq C\|x\|_{p,\omega}.$$

因此, 再应用不等式 3.5 可知结论成立.

□

设 x 为一个线性算子, 记 $Rex=\frac{x+x^*}{2}$ 和 $Imx=\frac{x-x^*}{2i}$. 若 $u\in Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M}))$, 则存在 $x\in\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})$, 使得 $u=Rex$. 令 $a=x-\frac{1}{2}\mathcal{E}(x-x^*)$, 显然有 $a\in\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M}), u=Rea$ 且 $\mathcal{E}(Ima)=0$. 因此, 存在 $\widetilde{u}=Ima\in Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M}))$ 满足 $a=u+i\widetilde{u}\in\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M})$ 和 $\mathcal{E}(\widetilde{u})=\mathcal{E}(Ima)=0$. 应用文献 [71] 中的的方法可以证明 $\widetilde{u}\in Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M}))$ 是唯一的. 故, 我们可以定义 $\widetilde{u}=Ima$, 其中 $a\in\mathcal{M}$ 是唯一满足 $a=Rea$ 和 $\mathcal{E}(Ima)=0$ 的元素. 显然映射 $\sim: x\mapsto\widetilde{x}$ 是实线性的. 我们称 $\widetilde{u}$ 为 u 的共轭.

应用 Bekjan 的方法可知下面的命题成立.

命题3.3.2. 设 $0<p<\infty, e\in\mathcal{D}$, 若 $u\in Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_{\omega}^{p}(\mathcal{M}))$, 则 $\widetilde{eue}=e\widetilde{u}e$.

设 ω 为权函数, 我们称 $\omega\in\mathcal{B}_p$, 若存在常数 B, 使得

$$\int_r^{\infty}\frac{\omega(t)}{t^p}dt \leq \frac{B}{r^p}\int_0^r\omega(t)dt,\ \ \forall\, r>0.$$

我们称 $\omega\in\mathcal{B}_{\infty}^{*}$, 若存在常数 B, 使得

$$\int_0^r[\frac{1}{t}\int_0^t\omega(s)ds]dt \leq B\int_0^r\omega(t)dt,\ \ \forall\, r>0.$$

我们称 $\omega\in\mathcal{B}_{p,\infty}, p>1$, 若存在常数 B, 使得

$$(\int_r^{\infty}(\frac{W(t)}{t})^{1-p'}dt)^{\frac{1}{p'}}W(r)^{\frac{1}{p}} \leq Br,\ \ \forall\, r>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

我们称 $\omega\in\mathcal{B}_{p,\infty}, 0<p\leq 1$, 若存在常数 B, 使得

$$\frac{W(r)^{\frac{1}{p}}}{r} \leq B\frac{W(t)^{\frac{1}{p}}}{t}, 0<t<r.$$

显然有 $\mathcal{B}_p\subseteq\mathcal{B}_{p,\infty}$. 更多的有关权函数的知识见文献 [9, 21, 17, 67].

由文献 [17] 中的定理 2.5.2 和非交换 Lorentz 空间的定义可知

(a) $1 \le p < \infty$ 且 ω 是非增的权函数时, $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 是非交换 Banach 函数空间.

(b) $1 \le p < \infty$ 且 $\omega \in \mathcal{B}_{p,\infty}$, $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 可以重新赋范为非交换 Banach 函数空间.

(c) $0 < p < \infty$ 且 $\omega \in \mathcal{B}_p$, $\Lambda_\omega^{p,\infty}(\mathcal{M})$ 可以重新赋范为非交换 Banach 函数空间.

再应用文献 [17] 中的定理 2.5.4 和非交换 Lorentz 空间的相伴空间的性质可知$\|\cdot\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})} \approx \|\cdot\|_{\Lambda_\omega(\mathcal{M})''}$. 另外, 根据文献 [7] 可知他们都同构于某个 $L_1(\mathcal{M})$ 与 $\mathcal{M}$ 的插值空间.

设 α_X, β_X 分别为空间 X 的 Boyd 指数(定义见文献 [6]), 由文献 [21] 可知

$$\alpha_{\Lambda_\omega^p} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\log \overline{W}^{\frac{1}{p}}(t)},\ \beta_{\Lambda_\omega^p} = \lim_{t\to 0} \frac{\log t}{\log \overline{W}^{\frac{1}{p}}(t)},$$

其中 $\overline{W}(t) = \sup_{s>0} \frac{W(st)}{W(s)}$. 显然有 $0 \le \alpha_{\Lambda_\omega^p} \le \beta_{\Lambda_\omega^p} \le \infty$. 其基本性质如下:

(i) 当 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 是 Banach 空间时, $1 \le \alpha_{\Lambda_\omega^p} \le \beta_{\Lambda_\omega^p} \le \infty$,

(ii) $\omega \in \mathcal{B}_p$ 的充分必要条件是 $\alpha_{\Lambda_\omega^p} > 1$,

(iii) $\omega \in \mathcal{B}_\infty^*$ 的充分必要条件是 $\beta_{\Lambda_\omega^p} < \infty$.

若 $1 \le r < \alpha_{\Lambda_\omega^p} \le \beta_{\Lambda_\omega^p} < q \le \infty$, 且 $\omega \notin L_1$, 应用文献 [6] 中的命题 2.b.3 可知 $L_r(I) \cap L_q(I) \subseteq \Lambda_\omega^p(I) \subseteq L_r(I) + L_q(I)$, 其嵌入映射是连续的. 进而, 根据非交换 Lorentz 空间的定义可知 $L_r(\mathcal{M}) \cap L_q(\mathcal{M}) \subseteq \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) \subseteq L_r(\mathcal{M}) + L_q(\mathcal{M})$ 成立, 其嵌入映射是连续的.

命题3.3.3. 设 ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件且 p 是偶数, $x \in Re\mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p((M)$, 则有 $\|\widetilde{x}\|_{p,\omega} \le \frac{2Cp}{ln2}\|x\|_{p,\omega}$, 其中 C 为常数.

Proof. 设 $x \in Re\mathcal{A}_0 \cap \Lambda_\omega^p((M), y \in \Lambda_\omega^p((M)'$, 则 $x + i\widetilde{x} \in \mathcal{A}_0$. 进而可知 $(x+i\widetilde{x})^p y \in \mathcal{A}_0$. 因此

$$0 = \tau((x+i\widetilde{x})^p y) = \sum_{k=0}^{p} i^{p-k} \sum_{u\in\mathcal{P}(k,p)} \tau(uy),$$

其中

$$\mathcal{P}(k,p) = \{x^{\alpha_1}\widetilde{x}^{\beta_1}x^{\alpha_2}\widetilde{x}^{\beta_2}\cdots x^{\alpha_n}\widetilde{x}^{\beta_n} : n \in N, \alpha_i, \beta_i \ge 0, \sum \alpha_i = k, \sum \beta_i = p-k\}.$$

又因为 $\widetilde{x}^p = \mathcal{P}(0,p)$, 所以 $-i^p\tau(\widetilde{x}^p y) = \sum_{k=1}^p i^{p-k}\sum_{u\in\mathcal{P}(k,p)} \tau(uy)$. 故,

$$|\tau(\widetilde{x}y)| \le \sum_{k=1}^{p} \sum_{u\in\mathcal{P}(k,p)} |\tau(uy)|.$$

其中 $y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$ 且 $\|y\|_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'} \le 1$. 由 $u \in \mathcal{P}(k,p)$ 可知,

$$\begin{aligned}|\tau(uy)| &\le \int_0^\infty \mu_t(u)\mu_t(y)dt \le \int_0^\infty \mu_t(x)^k \mu_t(\widetilde{x})^{p-k}\mu_t(y)dt \\ &\le \|\mu_t(x)^k\mu_t(\widetilde{x})^{p-k}\|_{\Lambda_\omega^p(\mathbb{R}+)}\|\mu_t(y)\|_{\Lambda_\omega^p(\mathbb{R}+)'} \\ &\le \|x\|_{p,\omega}^k\|\widetilde{x}\|_{p,\omega}^{p-k}.\end{aligned}$$

因此 $|\tau(\widetilde{x}y)| \le \sum_{k=1}^p C_p^k\|x\|_{p,\omega}^k\|\widetilde{x}\|_{p,\omega}^{p-k}$. 取 $\alpha = \frac{\|\widetilde{x}\|_{p,\omega}}{\|x\|_{p,\omega}}$, 则 $\alpha \le \frac{p}{ln2}$. 故, $\|\widetilde{x}\|_{p,\omega} \le \frac{p}{ln2}\|x\|_{p,\omega}$. 设 $x \in \mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 由命题 3.3.1 和文献 [71] 中的引理 5.1 可知,

$$\|\widetilde{x}\|_{p,\omega} \lesssim \frac{p}{ln2}\|x-\mathcal{E}(x)\|_{p,\omega} \lesssim \frac{2p}{ln2}\|x\|_{p,\omega} = \frac{2p}{ln2}\|x\|_{p,\omega}.$$

□

命题3.3.4. 设 $1 \le p < \infty$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, 则

$$[Re(\mathcal{A}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}))]_{p,\omega} = [\mathcal{M}^{sa}\cap\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})]_{p,\omega} = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}.$$

Proof. 首先证明 $\mathcal{M}$ 是有限 von Neumann 代数的情况. 只需证明第一个等式即可, 即只需证明 $[Re(\mathcal{A})]_{p,\omega} = [\mathcal{M}^{sa}]_{p,\omega}$. 另外 $[Re(\mathcal{A})]_{p,\omega} \subseteq [\mathcal{M}^{sa}]_{p,\omega}$ 是显然的. 下证相反的包含关系. 设 $x \in \mathcal{M}^{sa}$, 则存在 $(x_\alpha),(y_\alpha) \in \mathcal{A}$ 使得 $x_\alpha + y_\alpha^*$ 以 w^* 拓扑收敛于 x. 因此, $z_\alpha = \frac{x_\alpha+x_\alpha^*}{2}+\frac{y_\alpha+y_\alpha^*}{2}$ 以 w^* 拓扑收敛于 x 且 $z_\alpha \in Re(\mathcal{A})$. w^* 拓扑是拓扑 $\sigma(\mathcal{M}, L_1(\mathcal{M}))$. 应用文献 [71] 中的命题 5.3 中的讨论可知 x 属于 $[Re(\mathcal{A})]_p, 1 \le p < \infty$. 而由上面关于 Boyd 指数的讨论可知 $L_r(\mathcal{M}) \subseteq \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}), \beta_{\Lambda_\omega^p} \le r < \infty$. 因此, $x \in [Re(\mathcal{A})]_r \subseteq [Re(\mathcal{A})]_{p,\omega}$. 设 e_i 与命题 3.3.2 中的一样. 从而有 $[Re\mathcal{A}_{e_i}]_{p,\omega} = [\mathcal{M}_{e_i}^{sa}]_{p,\omega} = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}_{e_i})^{sa} = e_i\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}e_i$. 因此结论成立. □

设 p 为偶数, 应用命题 3.3.3 和命题 3.3.4 可得, 映射 $\sim: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa} \to \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}$ 是一个具有 p 阶范数的实线性映射. 现在我们来考虑 $\sim$ 的复标准化 $\eqsim: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M} \to \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 由文献 [71] 可知 $x, y \prec x+iy$. 若 $x,y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 且 $\omega \in \mathcal{B}_p$, 则

$$\|\eqsim(x+iy)\|_{p,\omega} = \|\widetilde{x}+i\widetilde{y}\|_{p,\omega} \le \frac{4Cp}{ln2}\|x+iy\|_{p,\omega}.$$

因此 $\eqsim$ 具有 p 阶范数. 对于一般的情况, 应用定理 4.3.1 和类似于文献 [71] 的讨论我们可以对 $2 \le p < \infty$ 定义 $\eqsim$, 并且 $\eqsim$ 具有 p 阶范数.

我们定义 $H: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) \to \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 为 $H(x) = x + i\widetilde{x}$. 显然 H 是一个实线性映射. 由上面的讨论可以得到下面的结论.

定理3.3.1. 设 $2 \le p < \infty$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, 则线性映射

$$\sim: Re(\mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})) \to Re(\mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})), H: Re(\mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})) \to \mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}),$$

可以延拓为实线性映射

$$\sim: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa} \to \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}, H: \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa} \to H_\omega^p(\mathcal{A}).$$

若 $x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}$, 则 $H(x) = x + i\widetilde{x} \in H^p(\mathcal{A})$ 且 $\mathcal{E}(\widetilde{x}) = 0$, $\sim$ 和 H 有界.

推论3.3.1. 设 $2 \le p < \infty$, $\beta_{\Lambda_\omega^p} < \infty$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件,则

$$ReH_\omega^p(\mathcal{A}) = [Re\mathcal{A} \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})]_{p,\omega} = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^{sa}.$$

Proof. 与定理 3.3.1 同样的方法可知, 只需证明第一个等式对有限 von Neumann 代数成立即可. 事实上, 若 $\mathcal{M}$ 是有限 von Neumann 代数且 $x \in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 我们可以选取 $(x_n) \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $\|x_n - x\|_{p,\omega} \to 0$. 由此可知 $\|Rex_n - Rex\|_{p,\omega} \to 0$. 故, $ReH_\omega^p(\mathcal{A}) \subseteq [Re\mathcal{A}]_{p,\omega}$. 下证相反的不等式, 设 $(x_n) \subseteq H_\omega^p(\mathcal{A})$, 满足 $\|Rex_n - y\|_{p,\omega} \to 0$. 显然有 $y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 应用定理 3.3.1 可得, $\|H(Rex_n) - H(y)\|_{p,\omega} \to 0, H(Rex_n), H(y) \in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 因此 $y = Re(y_i + i\widetilde{y}) = ReH(z) \in ReH_\omega^p$. □

我们定义 Riesz 投影 R 为

$$R(x) = \frac{1}{2}(x + i\widetilde{\widetilde{x}} + \mathcal{E}(x)), \quad \forall\, x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}), 1 \le p \le \infty.$$

由定理 3.3.1 可知当 $2 \le p < \infty$ 时 R 为 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 到 $H_\omega^p(\mathcal{A})$ 的有界投影.

命题3.3.5. 设 $1 < p < \infty, \omega$ 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件且 $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数. 则

$$H_\omega^p(\mathcal{A}) = \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}_0\},$$

$$(H_\omega^p)_0(\mathcal{A}) = \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}\}.$$

特别地, 若 $r < \alpha_{\Lambda_\omega^p}$, 则

$$H^r(\mathcal{A}) \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) = H_\omega^p(\mathcal{A}).$$

$$H_0^r(\mathcal{A}) \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) = (H_\omega^p)_0(\mathcal{A}).$$

Proof. 由已知条件可知 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})' = \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})^*$. 由 $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的理想可知

$$\mathcal{A} \subseteq \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}_0\}.$$

对任意的 $x \in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 存在 $x_n \in \mathcal{A}$ 使得 $\|x - x_n\|_{p,\omega} \to 0$. 故 x_n 以 τ 可测拓扑收敛于 x. 因此 $x_n y$ 以 τ 可测拓扑收敛于 xy, 其中 $y \in \mathcal{A}_0$. 由条件 ω 是非增的权函数和上面关于 Boyd 指数的讨论可知 $\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) \subseteq L_1(\mathcal{M})$. 应用文献 [24] 中的定理 3.5 可知 $|\tau(x_n y - xy)| \le \liminf_{n\to\infty} \tau(|x_n y - xy|) \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n y - xy\|_{p,\omega} = 0$. 下证相反的包含关系. 反正法, 存在 $x \in \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}_0\}$, 但 $x \notin H_\omega^p(\mathcal{A})$. 因此, 存在 $y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'$ 使得 $\tau(xy) \neq 0$ 且 $\tau(ya) = 0, \forall\, a \in H_\omega^p((A))$. 取 $1 \le r < \alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})'}$, 则有 $y \in L_r(\mathcal{M})$ 和 $\tau(ya) = 0, \forall\, a \in \mathcal{A}$. 应用文献 [59] 中的命题 3.3 可知 $y \in H_0^r(\mathcal{A})$. 取 $1 \le s < \alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}$, 则 $x \in \{z \in L_s(\mathcal{M}) : \tau(za) = 0, \forall\, a \in \mathcal{A}_0\} = H^s(\mathcal{A})$. 由文献 [59] 中的定理 2.1 可得 $\tau(xy) = \tau(\mathcal{E}(xy)) = \tau(\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)) = 0$. 矛盾. 故第一个等式成立.

下证第二个等式. 首先 $(H_\omega^p)_0(\mathcal{A}) \subseteq \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}\}$ 是显然的. 另一方面, 设 $x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 满足 $\tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}$. 由于 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, 则有 $\tau(xy) = \tau(\mathcal{E}(x)y) = 0, y \in \mathcal{D}$. 因此 $\mathcal{E}(x) = 0$. 由前面的结论 $H_\omega^p(\mathcal{A}) = \{x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(xy) = 0, \forall\, y \in \mathcal{A}_0\}$ 可知 $x \in H_\omega^p(\mathcal{A})$. 另外, 若 $x \in H_\omega^p(\mathcal{A})$ 且 $\mathcal{E}(x) = 0$, 则存在 $x_n \in \mathcal{A}$ 使得 $\|x - x_n\|_{p,\omega} \to 0$. 进而可知 $\|x_n - \mathcal{E}(x_n) - x\|_{p,\omega} \to 0$ 且 $x_n - \mathcal{E}(x_n) \in \mathcal{A}_0$. 因此 $x \in (H_\omega^p)_0(\mathcal{A})$. 故第二个等式成立. 在第三个等式中 $H_\omega^r(\mathcal{A}) \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) \supseteq H_\omega^p(\mathcal{A})$ 是显然的. 反过来, 若 $x \in H_\omega^r(\mathcal{A}) \cap \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 则 $x \in \{z \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M}) : \tau(za) = 0, \forall\, a \in \mathcal{A}_0\}$. 由上面的讨论可知 $x \in H_\omega^p(\mathcal{A})$. 第四个等式可以类似得到. □

定理3.3.2. 设 $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数, $0 < p, q \le \infty$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, $x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 是一个可逆算子且 $x^{-1} \in \Lambda_\omega^q(\mathcal{M})$, 则存在酉算子 $u \in \mathcal{M}$ 和 $h \in H_\omega^p(\mathcal{A})$ 满足 $x = uh, x^{-1} \in H_\omega^q(\mathcal{A})$.

Proof. 设 $\min(p,q) > 1$ 若 $x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 且 $x^{-1} \in \Lambda_\omega^q(\mathcal{M})$. 取 $1 \le r_1 < \alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}, 1 \le r_2 < \alpha_{\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})}$. 应用文献 [59] 中的定理 3.1 可知存在 $u \in \mathcal{M}$ 和 $h \in H^{r_1}(\mathcal{A})$ 使得 $h = u^*x$ 和 $h^{-1} \in H^{r_2}(\mathcal{A})$ 成立. 又因为 $h = u^*x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$, 所以$h \in H_\omega^p(\mathcal{A})$. 类似的有 $h^{-1} \in H_\omega^q(\mathcal{A})$.

另一方面, 若 $\min(p,q) \le 1$, 则存在正整数 n 使得 $\min(np, nq) > 1$. 设 $x = v|x|$ 是 x 的极分解. 令 $x_1 = v|x|^{\frac{1}{n}}, x_k = |x|^{\frac{1}{n}}, 2 \le k \le n$, 则 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$. 显然 $x_k \in \Lambda_\omega^{np}(\mathcal{M})$ 且 $x_k^{-1} \in \Lambda_\omega^{nq}(\mathcal{M})$. 由上面的讨论可知, 存在 $u_n \in \mathcal{M}$ 和 $h_n \in H_\omega^p(\mathcal{A})$ 满足 $x_n = u_n h_n$ 和 $x_n^{-1} \in H_\omega^q(\mathcal{A})$. 同样的方法, 我们可以得到 $x_{n-1}u_n$ 的分解, $x_{n-1}u_n = u_{n-1}h_{n-1}$, 依次考

虑 $x_{k-1}u_k, k=n-1,n-2,\cdots 2$ 的分解. 由此可得 $x=uh_1\cdots h_n, u\in\mathcal{M}$ 和 $h_k\in H_\omega^{np}(\mathcal{A})$, 使得 $h_k^{-1}\in H_\omega^{nq}(\mathcal{A})$. 取 $h=h_1\cdots h_n$, 则 $x=uh$ 就是我们想要的分解. □

命题3.3.6. 设 $0<p<q<\infty$, $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件. 则

$$H_\omega^p(\mathcal{A})\cap\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})=H_\omega^q(\mathcal{A}),\quad (H_\omega^p)_0(\mathcal{A})\cap\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})=(H_\omega^q)_0(\mathcal{A}).$$

Proof. 由 $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数可知, $\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})\subseteq\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 因此 $H_\omega^p(\mathcal{A})\cap\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})\supseteq H_\omega^q(\mathcal{A})$. 下证反过来的不等式, 取 $x\in H_\omega^p(\mathcal{A})\cap\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})$. 令 $a=(x^*x+1)^{\frac{1}{2}}$, 则 $a\in\Lambda_\omega^q(\mathcal{M})$ 且 $a^{-1}\in\mathcal{M}$. 应用定理 3.3.2 可知存在 $u\in\mathcal{M}$ 和可逆算子 $h\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 使得 $a=uh$ 和 $h^{-1}\in\mathcal{A}$. 又因为 $h^*h=x^*x+1$, 所以存在收缩算子 $v\in\mathcal{M}$ 使得 $x=vh$. 从而 $v=xh^{-1}\in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 所以 $v\in\mathcal{A}$. 由此可得 $x\in\mathcal{A}\cdot H_\omega^q(\mathcal{A})=H_\omega^q(\mathcal{A})$. 故第一个等式结论成立. 第二个等式可以类似得到. □

定理3.3.3. 设 $0<p,q<\infty, \frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, ω 满足 $\mathcal{B}_p$ 条件, $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数. 则对任意的 $x\in H_\omega^p(\mathcal{A})$, 存在 $y\in H_\omega^q(\mathcal{A}), z\in H_\omega^r(\mathcal{A})$, 使得 $x=yz$.

Proof. 当 $\max\{q,r\}=\infty$ 时结论显然成立. 设 $\max\{q,r\}<\infty$, $x\in H_\omega^p(\mathcal{A})$ 和 $\varepsilon>0$. 令 $a=(x^*x+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, 则 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 且 $a^{-1}\in\mathcal{M}$. 取收缩算子 $v\in\mathcal{M}$ 使得 $x=va$. 对算子 $a^{\frac{p}{r}}$ 应用定理 3.3.2 可知, 存在酉算子 $u\in\mathcal{M}$ 和 $z\in H_\omega^r(\mathcal{A})$, 使得 $a^{\frac{p}{r}}=uz$ 和 $z^{-1}\in\mathcal{A}$. 令 $y=va^{\frac{p}{q}}u$ 则 $x=yz$. 因此 $y=xz^{-1}$. 由 $x\in H_\omega^p(\mathcal{A})$ 和 $z^{-1}\in\mathcal{A}$ 知, $y\in\Lambda_\omega^p$, 应用命题 3.3.6 可知 $y\in H_\omega^q(\mathcal{A})$. □

定理3.3.4. 设 $\mathcal{M}$ 为有限的 von Neumann 代数, $1\le p\le\infty$ 且 $\omega\in\mathcal{B}_p$. 若 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}),\varepsilon>0$, 则存在酉算子 $v_i\in\mathcal{M}$ 和 $h_i\in H_\omega^p(\mathcal{A}), i=1,2$ 使得

(i) $x=h_1v_1=v_2h_2$,

(ii) $\|v_i\|_\infty\le 1$,

(iii) $\|h_i\|_{p,\omega}\le C(1+\varepsilon)\|x\|_{p,\omega}$, C 是与 x 无关的常数,

(iv) h_i 可逆且 $h_i^{-1}\in\mathcal{A}$,

(v) 若 $x\in\Lambda_\omega^\infty(\mathcal{M})$, 则 $h_i\in\mathcal{A}$.

Proof. 设 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M}),\varepsilon>0$, 取 $0<\delta<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|x\|_{p,\omega}}{W(1)^{\frac{1}{p}}}$. 首先, 令 $\alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}\ge 2$, 则 $x\in\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})\subseteq L_2(\mathcal{M})$. 由文献 [71] 中的定理 4.2 的讨论可知

(a) 存在 $y \in L^2(\mathcal{M})$ 使得 $y^*y = \delta^2 1 + x^*x$. 且存在收缩算子 $s \in \mathcal{M}$ 使得 $x = sy$, 存在 $r \in \mathcal{M}$ 使得 $\delta 1 = ry$.

(b) 存在 $u_i \in \mathcal{M}$ 和可逆算子 $a_i \in \mathcal{A}$, 使得 $\frac{r}{\delta} = u_1a_1 = a_2u_2$ 和 $a_i^{-1} \in H^2(\mathcal{A})$, 其中 $\frac{r}{\delta} \in L_2(\mathcal{M})$ 并且还是 y 的右逆.

由 $1, x \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$ 可知 $y \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 由 (a) 和 (b) 可知 $1 = u_1a_1y = a_2u_2y$, 所以 $y = a_1^{-1}u_1^* = u_2^*a_2^{-1}$. 因此 $a_i^{-1} \in \Lambda_\omega^p(\mathcal{M})$. 再应用命题 3.3.5 可知 $a_i^{-1} \in H_\omega^p(\mathcal{A})$. 从而 $x = sy = (su_2^*)a_2^{-1} \triangleq v_2h_2$, 其中 $v_2 \in \mathcal{M}, h_2 \in H_\omega^p(\mathcal{A}), h_2^{-1} \in \mathcal{A}$. 另外,

$$\|h_2\|_{p,\omega} \leq C(\delta^2 W(1)^{\frac{2}{p}} + \|x\|_{p,\omega}^2)^{\frac{1}{2}} < C(1+\varepsilon)\|x\|_{p,\omega}.$$

当 $1 \leq \alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})} < 2$ 时, 由 Boyd 指数的定义可知 $\alpha_{\Lambda_\omega^{2p}(\mathcal{M})} = 2\alpha_{\Lambda_\omega^p(\mathcal{M})}$. 再次应用文献 [71] 中的定理 4.2 的讨论可知结论 $(i) - (iv)$ 成立. 又因为 $\Lambda_\omega^\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, 故, 由文献 [56] 中的定理 4.1 知 (v) 成立. □

第四章 非交换 Orlicz-Lorentz 空间

在这一部分中 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为 Orlicz 函数, 即 φ 为凸函数且满足 $\varphi(0)=0,\varphi(t)>0,t>0,\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. 权函数 $\omega:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是局部可积函数且 $\int_0^\infty\omega dt=\infty$. 另外还定义 φ 的 Young 对偶 φ_* 为

$$\varphi_*(t)=\sup\{st-\varphi(s):s\geq 0\},\forall\, t\geq 0.$$

我们称 φ 为 N-函数，如果 φ 还满足$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=0$ 和 $\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty$.

§ 4.1 非交换弱 Orlicz-Lorentz 空间的基本性质

定义4.1.1. 设 φ 是 Orlicz 函数且 $W\in\Delta_2$, 我们定义

$$\Lambda_{\varphi,\omega}^{\infty}(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\exists c>0\text{ 使得 }\sup_{t>0}W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})<\infty\},$$

并定义

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=\inf\{c>0:W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\leq 1\}.$$

容易验证: $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=\inf\{c>0:\frac{\mu_s(x)}{c\varphi^{-1}(\frac{1}{W(s)})}\leq 1\}$. 同时可得

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=\sup\frac{\mu_s(x)}{\varphi^{-1}(\frac{1}{W(s)})}=\sup_{t>0}W(t)\varphi(\mu_t(x)).$$

命题4.1.1. 设 φ 为Orlicz 函数，ω 为权函数, 对 $c>0$ 有

$$\sup_{s>0}\varphi(\frac{\mu_s(x)}{c})W(s)=\sup_{s>0}W(\lambda_s(x))\varphi(\frac{s}{c}),\quad x\in L_0(\mathcal{M}).$$

因此有, $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=\inf\{c>0:W(\lambda_s(x))\varphi(\frac{s}{c})\leq 1\}$.

Proof. 由结论 $\lambda_s(x)=\lambda_{\mu(x)}(s)$ 可知, 我们只需证明此命题中的结论对简单函数成立即可. 令 $f=\Sigma_{k=1}^{n}a_k\chi_{A_k}$, 其中 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$ 且 $A_k\subseteq[0,\infty)$, $A_j\cap A_k=\phi,k\neq j$. 则有

$$\lambda_f(s)=\Sigma_{j=1}^{n}\beta_j\chi_{[a_{j+1},a_j)},\text{ 其中 }\beta_j=\Sigma_{i=1}^{j}|A_i|,\ a_{n+1}=0,$$

$$f^*(t)=\Sigma_{i=1}^{n}a_j\chi_{[\beta_{j-1},\beta_j)},\text{ 其中 }\beta_0=0.$$

简单的计算可知

$$\sup_{s>0}\varphi(\frac{f^*(s)}{c})W(s)=\sup_{s>0}W(\lambda_f(s))\varphi(\frac{s}{c}).$$

又因为所有的非负可测函数都可以用非负简单函数逼近, 从而结论成立.

命题4.1.2. 设 φ 为Orlicz 函数，ω 为权函数.

(i) 若 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}>0$, 则

$$\sup_{t>0}\varphi(\frac{\mu_t(x)}{\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}})W(t)\le 1,\qquad \sup_{s>0}W(\lambda_s(x))\varphi(\frac{s}{\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}})\le 1.$$

(ii) $\|\cdot\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$ 是拟范数.

(iii) 若 $x\in\Lambda_{\varphi,\omega}^{\infty}(\mathcal{M})$, 则有

$$\sup_{t>0}\varphi(\mu_t(x))W(t)=\sup_{s>0}W(\lambda_s(x))\varphi(s)=\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}.$$

(iv) $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}\le\|x\|_{\varphi,\omega}$, 因此, $\Lambda_{\varphi,\omega}^{\infty}(\mathcal{M})\supseteq\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$.

Proof. (i) 由 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$ 的定义可知存在 $c_k\subseteq\mathbb{R}^+$ 使得 $c_k\downarrow\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$ 和 $W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c_k})\le 1,\ t>0$ 成立. 因此, 此结论可由 φ 的连续性和命题 4.1.1 得到.

(ii) 若 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=0$. 由 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$ 的定义可知存在 $c_k\subseteq\mathbb{R}^+$ 使得 $c_k\downarrow 0$ 和 $W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c_k})\le 1,\ t>0$ 成立. 又因为 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, 从而可知 $\mu_t(x)=0,t>0$, 因此 $x=0$. 另外 $\|\alpha x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=|\alpha|\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$ 是显然的. 设 $x,y\in\Lambda_{\varphi,\omega}^{\infty}(\mathcal{M})$, 则有

$$\begin{aligned}W(\lambda_{2s}(x+y))\varphi(\frac{2s}{2(a+b)})&\le W(\lambda_s(x)+\lambda_s(y))\varphi(\frac{s}{a+b})\\&\lesssim W(\lambda_s(x))\varphi(\frac{s}{a+b})+W(\lambda_s(y))\varphi(\frac{s}{a+b})\\&\le\frac{a}{a+b}W(\lambda_s(x))\varphi(\frac{s}{a})+\frac{b}{a+b}W(\lambda_s(y))\varphi(\frac{s}{b})\le 1,\end{aligned}$$

其中 $a=\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty},b=\|y\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$. 因此, $\|x+y\|_{\varphi,\omega}^{\infty}\lesssim\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}+\|y\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$.

(iii) 由 (ii) 可知, 若 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=0$, 则结论成立. 若 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}=a\neq 0$, 由 (i) 可知 $W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{a})\le 1,t>0$. 另外由 φ 的凸性和 $\varphi(0)=0$ 可知$\frac{W(t)}{a}\varphi(\mu_t(x))\le W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x)}{a})\le 1$. 故此 $\sup_{t>0}\varphi(\mu_t(x))W(t)\le\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$. 相反的不等式是显然的, 因此, $\sup_{t>0}\varphi(\mu_t(x))W(t)=\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}$. 第二个等式可以由命题 4.1.1 得到.

(iv) 设 $x\in\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\omega(t)dt&\ge\int_0^t\varphi(\frac{\mu_s(x)}{c})\omega(s)ds\\&\ge\int_0^t\omega(s)ds\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\\&=\varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})W(t).\end{aligned}$$

由此可知 $\|x\|_{\varphi,\omega}^{\infty}\le\|x\|_{\varphi,\omega}$.

命题4.1.3. 设 φ 为Orlicz 函数，ω 为权函数.

(i) 若 $\|x_n - x\|^{\infty}_{\varphi,\omega} \to 0$, 则 x_n 以 τ 可测拓扑收敛于 x.

(ii) $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是拟 Banach 空间.

Proof. (i) 若 $\|x_k - x\|^{\infty}_{\varphi,\omega} \to 0$, 则存在 $c_k \subseteq \mathbb{R}^+$ 使得 $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ 和对所有的 k 有 $W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x_k-x)}{c_k}) \leq 1$, $t > 0$ 成立. 又因为 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$, 从而可知 $\mu_t(x_k - x) \to 0, t > 0$, 因此 x_k 以 τ 可测拓扑收敛于 x.

(ii) 由命题 4.1.2 可知在这里只需证此空间的完备性即可. 设 $x_n \in L^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 使得 $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\|^{\infty}_{\varphi,\omega} = 0$. 因此对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 N_0, 使得 $\|x_n - x_m\|^{\infty}_{\varphi,\omega} < \varepsilon, n, m \geq N_0$. 从而由 $L_0(\mathcal{M})$ 的完备性和 (i) 可知存在 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 使得 $\mu_t(x_n - x) \to 0, t > 0$. 故 $x_n - x_m$ 以 τ 可测拓扑收敛于 $x_n - x$. 所以, 应用文献 [24] 中的引理 3.4 和命题 4.1.2(iii) 以及 φ 的连续性可知

$$W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x_n - x)}{\varepsilon}) \leq \liminf_{m\to\infty} W(t)\varphi(\frac{\mu_t(x_n - x_m)}{\varepsilon}) \leq \liminf_{m\to\infty}\|x_n - x_m\|^{\infty}_{\varphi,\omega} \leq 1, \ t > 0.$$

这就意味着 $\|x_n - x\|^{\infty}_{\varphi,\omega} \leq \varepsilon$, 即 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^{\infty}_{\varphi,\omega} = 0$. 在应用命题 4.1.2((ii)) 可推出 $x \in \Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$, 故此空间是完备的.

设 $a = (a_n)$ 为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列, 我们定义

$$\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)} = \|(\sum_n |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})}$$

和

$$\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_R)} = \|(\sum_n |a^*_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})}.$$

命题4.1.4. $\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)}$ 和 $\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_R)}$ 为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列组成的集合上的拟范数.

Proof. 设 $\mathcal{B}(l^2)$ 为 l^2 上所有有界线性算子组成的代数, 并记 tr 为此代数上的迹. 令 $\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2)$ 为 von Meumann 代数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{B}(l^2)$ 的张量积, $\tau\overline{\otimes}tr$ 为此张量积代数上的迹. 与此 von Neumann 代数对应的弱 Orlicz-Lorentz 空间为 $L^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2))$. 这样我们就可以把 $L^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列 $a = (a_n)_{n\geq 0}$ 通过下面的映射看成 $L^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2))$ 中的元素:

$$a \mapsto T(a) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, a = (a_n)_{n\geq 0} \subseteq L^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}),$$

在上述矩阵中除了第一列元素的其他元素都是 0. 与 $T(a)$ 对应的的矩阵称为列矩阵, 由其组成的空间称为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2))$ 的列子空间. 又因为 $\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)} = \||T(a)|\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2))} = \|T(a)\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{B}(l^2))}$, 故 $\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)}$ 为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列组成的集合上的拟范数. 类似的讨论可知 $\|a\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_R)}$ 为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列组成的集合上的拟范数.

我们定义空间 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)$ 为 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的有限序列组成的集合上赋予拟范数 $\|\cdot\|_{\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_C)}$. 类似的可以定义空间 $\Lambda^{\infty}_{\varphi,\omega}(\mathcal{M},l^2_R)$.

§ 4.2 非交换 Orlicz-Lorentz 空间及其对偶空间

定义4.2.1. 设 $x \in L_0(\mathcal{M})$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是 Orlicz 函数且 ω 是权函数, 我们定义非交换 Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 为

$$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \|x\|_{\varphi,\omega} < \infty\},$$

其中 $\|\cdot\|_{\varphi,\omega}$ 为

$$\|x\|_{\varphi,\omega} = \inf\{c > 0 : \varrho_{\varphi}(\frac{x}{c}) = \int_0^{\infty} \varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\omega(t)dt \le 1\}.$$

若 $\varphi(t) = t$, 则 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 就是非交换 Lorentz 空间 $\Lambda_{\omega}(\mathcal{M})$.

注记4.2.1. 通过简单函数逼近可得

$$\int_0^{\infty} \varphi(\mu_t(\frac{x}{c}))\omega(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda^{\omega}_{\mu(\frac{x}{c})}(s)d\varphi(s) = \int_0^{\infty} W(\lambda_t(\frac{x}{c}))d\varphi(t), c > 0.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} W(\lambda_t(\frac{x+y}{2c}))d\varphi(t) &\lesssim \int_0^{\infty} W(\lambda_{\frac{t}{2}}(\frac{x}{2c}))d\varphi(t) + \int_0^{\infty} W(\lambda_{\frac{t}{2}}(\frac{y}{2c}))d\varphi(t)\\ &= \int_0^{\infty} W(\lambda_t(\frac{x}{2c}))d\varphi(2t) + \int_0^{\infty} W(\lambda_t(\frac{y}{2c}))d\varphi(2t)\\ &= \int_0^{\infty} \varphi(2\mu_t(\frac{x}{2c}))\omega(t)dt + \int_0^{\infty} \varphi(2\mu_t(\frac{y}{2c}))\omega(t)dt\\ &= \int_0^{\infty} \varphi(\mu_t(\frac{x}{c}))\omega(t)dt + \int_0^{\infty} \varphi(\mu_t(\frac{y}{c}))\omega(t)dt\end{aligned}$$

类似于上一节中对非交换弱 Orlicz-Lorentz 空间的讨论可知 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是拟 Banach 空间.

在这一节下面的讨论中, 我们总是取 ω 是非增的权函数.

命题4.2.1. 设 $\varrho_\varphi(x)=\int_0^\infty \mu_t(\varphi(|x|))\omega(t)dt=\int_0^\infty \varphi(\mu_t(x))\omega(t)dt$, 则

(i) $\varrho_\varphi(x)=0$ 的充分必要条件是 $x=0$,

(ii) $\varrho_\varphi(x)=\varrho_\varphi(|x|)$,

(iii) $\varrho_\varphi(\alpha x+\beta y)\le \alpha\varrho_\varphi(x)+\beta\varrho_\varphi(y)$, 其中 $\alpha+\beta=1,\alpha,\beta\ge 0$.

Proof. (i): 若 $x=0$, 显然 $\varrho_\varphi(x)=0$. 若 $\varrho_\varphi(x)=0$, 则有 $\varrho_\varphi(\mu_t(x))=0$, 进而可知 $\mu_t(x)=0, a.e.$, 故, $x=0$. (ii) 可以由 $\mu_t(x)=\mu_t(|x|)$ 直接得到. (iii): 取 $\alpha+\beta=1$ 且 $\alpha,\beta\ge 0$. 由文献 [24] 中的定理 4.4, 文献 [7] 的第二章中的命题 3.6 和凸函数的性质可知,

$$\begin{aligned}\varrho_\varphi(\alpha x+\beta y)&=\int_0^\infty \varphi(\mu_s(\alpha x+\beta y))\omega ds\\&\le\int_0^\infty \varphi(\mu_s(\alpha x)+\mu_s(\beta y))\omega ds\\&\le\alpha\int_0^\infty \varphi(\mu_s(x))\omega ds+\beta\int_0^\infty \varphi(\mu_s(y))\omega ds\\&=\alpha\varrho_\varphi(x)+\beta\varrho_\varphi(y).\end{aligned}$$

命题4.2.2. $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是完全对称空间, 其 Luxemburg 范数为

$$\|x\|_{\varphi,\omega}=\inf\{c>0:\int_0^\infty \varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\omega(t)dt\le 1\}.$$

定义4.2.2. 设 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 为非交换 Orlicz-Lorentz 空间, 我们定义相伴"范数" 为

$$\|x\|_{\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'}=\sup\{\tau(|xy|):\|y\|_{\varphi,\omega}\le 1\}.$$

定义 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 的相伴空间为

$$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\|x\|_{\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'}<\infty\}.$$

注记4.2.2. 由文献 [7] 中第三章中的定理 2.2 可知, 重排不变 Banach 函数空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathbb{R}^+)$ 是偶对 ($L^1(\mathbb{R}^+)$, $L^\infty(\mathbb{R}^+)$) 的中间空间, 进而, 由命题 4.2.2 可知, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathbb{R}^+)$ 是真对称的. 由文献 [44] 中的定理 5.6 可得, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=(\Lambda_{\varphi,\omega})'(\mathcal{M})$. 故, 再应用文献 [44] 中的命题 5.4 可得, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'$ 是真对称的 Banach 空间.

引理4.2.1. 设 φ 满足 Δ_2 条件, 且 $\int_0^\infty \omega(t)dt=\infty$, 则 $\|x_n\|_{\varphi,\omega}\to 0, n\to\infty$ 的充分必要条件是 $\varrho_\varphi(x_n)\to 0, n\to\infty$.

Proof. 若 $\|x_n\|_{\varphi,\omega} \to 0, n \to \infty$, 则 $\|\mu_t(x_n)\|_{\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathbb{R}+)} \to 0, n \to \infty$, 应用文献 [10] 中的定理 2.5 (c) 可得, $\varrho_\varphi(\mu_t(x_n)) \to 0, n \to \infty$. 因此 $\varrho_\varphi(x_n) \to 0, n \to \infty$. 另一方面, 若 $\varrho_\varphi(x_n) \to 0, n \to \infty$, 则$\varrho_\varphi(\mu_t(x_n)) \to 0, n \to \infty$. 进而, 由文献 [10] 中的定理 2.5(c) 可知, $\varrho_\varphi(\lambda\mu_t(x_n)) \to 0, n \to \infty$ 对 $\lambda > 0$ 成立.. 故, $\|x_n\|_{\varphi,\omega} \to 0, n \to \infty$.

命题4.2.3. 设 φ 满足 Δ_2, 且 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$, 则

$$K = \left\{ x : \begin{array}{l} x = \sum_{k=1}^n c_k E_k, c_k \in \mathbb{C}, \\ E_k \in \mathcal{M}_{proj}, E_k \perp E_j, if\ k \neq j, \tau(E_k) < \infty,\ j,k = 1,2,\cdots,n \end{array} \right\}$$

在 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中稠密.

Proof. 若 $x \in \Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$, 则

$$\|x\|_{\varphi,\omega} = \inf\{c > 0 : \varrho_\varphi(\frac{x}{c}) = \int_0^\infty \varphi(\frac{\mu_t(x)}{c})\omega(t)dt \leq 1\} < \infty.$$

因此 $\mu_t(x) \to 0, t \to \infty$.

设 $y \in \Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M}), y \geq 0$, $y = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ 是 y 的谱分解. 则由文献 [24] 中的命题 3.2 可知, $y_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \lambda dE_\lambda\,(n = 1,2,\cdots)$ 以 τ-可测拓扑收敛于 y. 另外 $\tau(supp|y_n|) < \infty$, $y_n \leq y\,(n = 1,2,\cdots)$ 是显然的. 取

$$y_{n,m} = \sum_{j=0}^{m-1} [\frac{1}{n} + \frac{n - \frac{1}{n}}{m} j] E_{\left[\frac{1}{n} + \frac{n-\frac{1}{n}}{m} j, \frac{1}{n} + \frac{n-\frac{1}{n}}{m}(j+1)\right)}(y),$$

则 $\|y_n - y_{n,m}\|_\infty \to 0, m \to \infty$, 且 $y_{n,m} \leq y_n$. 从而有

$$\mu_t(y_n - y_{n,m}) \leq \|y_n - y_{n,m}\|_\infty \to 0, m \to \infty$$

和 $\mu_t(y_n - y_{n,m}) \leq 2\mu_{\frac{t}{2}}(y_n)$. 又 $y_n \in \Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$, 应用控制收敛定理可得,

$$\varrho_\varphi(y_n - y_{n,m}) = \int_0^\infty \varphi(\mu_t(y_n - y_{n,m}))\omega(t)dt \to 0, m \to \infty,$$

由此可知 $\|y_n - y_{n,m}\|_{\varphi,\omega} \to 0, n \to \infty$. 类似可得, $\|y - y_n\|_{\varphi,\omega} \to 0, n \to \infty$. 故, $y \in \overline{K}$.

设 $y \in \Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$, 则

$$y = Re(y) + iIm(y) = Re^+(y) - Re^-(y) + i(Im^+(y) - Im^-(y)),$$

其中 $Re^+(y), Re^-(y), Im^+(y), Im^-(y)$ 是 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的正算子. 由上面的结论可知此命题成立. □

命题4.2.4. 若 φ 满足 Δ_2 条件且$\int_0^\infty \omega(t)dt=\infty$, 则$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是自反空间.

Proof. 此命题可以由文献 [45] 中的定理 4.8 得到.

命题4.2.5. 设 $\mathcal{M}$ 是可分的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的算子构成的 von Neumann 代数. 若 φ 满足 Δ_2 条件且$\int_0^\infty \omega(t)dt=\infty$, 则$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是可分的.

Proof. 此命题可以由文献 [39] 中的命题 6.9 和推论 6.2 和文献 [10] 中的定理 2.4 得到. □

命题4.2.6. 设 φ 满足 Δ_2 条件, 则 $\rho_\varphi(x)=1$ 的充分必要条件是 $\|x\|_{\varphi,\omega}=1$.

Proof. 这个定理可以由文献 [10] 中的定理 2.5 以及 $\rho_\varphi(x)=\rho_\varphi(\mu_t(x))$ 和 $\|\mu_t(x)\|_{\varphi,\omega}=\|x\|_{\varphi,\omega}$ 得到. □

命题4.2.7. 设 φ 和 φ_* 满足 Δ_2-条件, 且 φ 是严格凸的, 则

(i) $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是一致凸的.

(ii) $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是自反的和严格凸的.

Proof. (i): 可以由文献 [63] 中的定理 3.1 和文献 [69] 中的定理 7 直接得到. (ii): 由文献 [45] 中的定理 4.8 和文献 [69] 中的定理 7 可知, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是自反的. 应用文献 [77] 中的定理 5.2.5 和定理 5.2.6 以及 (i) 可得, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 是严格凸的.

定理4.2.1. 设 ω 是正则的权函数, 令 $\varphi(t)=t$ 或 φ 是 N 函数, 则 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=M_{\varphi_*,\omega}(\mathcal{M})$.

Proof. 这个定理可以由文献 [12] 中的定理 2 和注记 4.2.2 得到. □

定理4.2.2. 设 ω是正则的权函数且 φ 是 Orlicz 函数. 则下列结论成立:

(i) 设 $0<\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)}{t}<\infty$, 则 $\varphi(t)\approx t$ 且 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=M_S(\mathcal{M})$.

(ii) 设 $0<\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)}{t}$ 和 $\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty$, 则存在 N-函数 ϕ 使得 $\phi(t)\approx t^2$ 对足够小的 t 成立且 $\phi(t)\approx\varphi(t)$ 对足够大的 t 成立, 且

$$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=M_S(\mathcal{M})+M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M}).$$

(iii) 设 $0=\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)}{t}$ and $\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}<\infty$, 则存在 $N-$ 函数 ϕ 使得 $\phi(t)\approx\varphi(t)$ 对足够小的 t 成立且 $\phi(t)\approx t$ 对足够大的 t 成立, 且

$$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=M_S(\mathcal{M})\cap M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M}).$$

Proof. 下证 $M_S(\mathcal{M})+M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M})=(M_S+M_{\phi_*,\omega})(\mathcal{M})$ 和 $(M_S\cap M_{\phi_*,\omega})(\mathcal{M})=M_S(\mathcal{M})\cap M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M})$. 事实上, $(M_S\cap M_{\phi_*,\omega})(\mathcal{M})=M_S(\mathcal{M})\cap M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M})$ 是显然的. 另一方面, 由 [P.106, 定理 2.2, [7]] 可知, $M_S(\mathbb{R}^+)$ 和 $M_{\phi_*,\omega}(\mathbb{R}^+)$ 都是 $L^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ 的完全的插值空间 (exact interpolation space). 应用文献 [42] 中的命题 3.1 可知, $M_S(\mathcal{M})+M_{\phi_*,\omega}(\mathcal{M})=(M_S+M_{\phi_*,\omega})(\mathcal{M})$. 由上面的讨论和文献 [12] 中的定理 3 以及 注记 4.2.2 可知结论成立. □

定理4.2.3. 设 $\varphi(t)=t$ 或 φ 是满足 Δ_2–条件的 N-函数, ω 是正则的权函数, 则$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})^*=M_{\varphi_*,\omega}(\mathcal{M})$.

Proof. 若 φ 是满足 Δ_2– 条件的 N-函数, 应用文献 [10] 中的定理 2.4 可知, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathbb{R}^+)$ 是可分空间, 则 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathbb{R}^+)$ 中的范数是序连续的. 因此, 应用文献 [44] 中的命题 3.6 可得, 空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 中的范数是序连续的, 进而, 由文献 [44] 中的定理 5.11 可知, $\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})^*=\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'$. 另一方面, 由注记 4.2.2 和文献 [10] 中的定理 4 可知,

$$\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})'=M_{\varphi_*,\omega}(\mathcal{M}).$$

故, 结论成立. □

§ 4.3 非交换 Orlicz-Lorentz 空间上算子的插值

设 $1\le p<\infty$, 当 ω 是非增权函数时, $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 是完全对称的非交换的函数空间. 应用文献 [42] 中的定理 3.2 可知：若 $0<\theta<1, 0<q\le\infty, \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{p}$, 则

$$(\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})_{\theta,q}=\Lambda^{r,q}_\omega(\mathcal{M}).$$

同样的方法还可以知道如果 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 是可以重新赋范成为 Banach 空间时上述结论仍然成立. 但是对于更广泛的权函数 $W(t)=\int_0^t\omega(s)ds\in\Delta_2$, 空间 $\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})$ 仅是非交换拟 Banach 空间, 文献 [42] 中的定理 3.2 就不再适用了. 对于这种情况我们有下面的结论成立.

命题4.3.1. 设 $0<p<\infty$, ω 是权函数且 $x\in L_0(\mathcal{M})$. 则

$$K_t(x;\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})\approx K_t(\mu(x);L^p_\omega(\mathbb{R}^+),L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+)).$$

Proof. 若 $x=x_1+x_2$, $x_1\in\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}), x_2\in\mathcal{M}$, 则有 $\mu_t(x)\le\mu_{t-\varepsilon}(x_1)+\mu_\varepsilon(x_2)$. 令 $\varepsilon\to 0$ 可知 $\mu_t(x)\le\mu_t(x_1)+\|\mu_t(x_2)\|_{L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+)}$, $a.e.\ t>0$. 因此

$$\begin{aligned}K_t(\mu(x);L^p_\omega(\mathbb{R}^+),L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+)&\le\|\mu_t(x_1)\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^+)}+t\|\mu_t(x_2)\|_{L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+)}\\&=\|x_1\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}+t\|x_2\|_\infty.\end{aligned}$$

所以

$$K_t(x;\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})\ge K_t(\mu(x);L^p_\omega(\mathbb{R}^+),L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+).$$

下证反过来的不等式, 设 $0<x\in L_0(\mathcal{M})$, $t>0$. 令 $a=(\mu(x))^*_\omega(t^p)$, 取 $x_0=(x-a)e_{(a,\infty)}(|x|)$, $x_1=x-x_0=xe_{[0,a]}(|x|)+ae_{(a,\infty)}(|x|)$. 计算可得

$$\mu(x_0)^*_\omega(s)=(\mu(x)^*_\omega(s)-a)\chi_{(0,t^p)}(s)$$

和 $\mu(x_1)\le a$. 由此可知

$$\begin{aligned}K_t(x;\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})&\le\|x_0\|_{\Lambda^p_\omega(\mathcal{M})}+t\|x_1\|_\infty\\&\le\|\mu(x_0)\|_{L^p(\omega)}+ta\\&=\|\mu(x_0)^*_\omega\|_p+ta\\&=(\int_0^{t^p}(\mu(x)^*_\omega(s)-a)^pds)^{\frac{1}{p}}+(\int_0^{t^p}a^pds)^{\frac{1}{p}}\\&\le C_p(\int_0^{t^p}(\mu(x)^*_\omega(s))^pds)^{\frac{1}{p}}\\&=C_pK_t(\mu(x);L^p_\omega(\mathbb{R}^+),L^\infty_\omega(\mathbb{R}^+).\end{aligned}$$

□

应用命题 4.3.1 和文献 [17] 中的定理 2.6.2 容易得出下面的结论.

定理4.3.1. 设 $0<p<\infty$, $x\in L_0(\mathcal{M})$, 则

$$K_t(x;\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})\approx K_t(\mu(x);\Lambda^p_\omega(\mathbb{R}^+),L^\infty(\mathbb{R}^+)).$$

特别地, 若 $0<\theta<1, 0<q\le\infty, \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{p}$ 则

$$(\Lambda^p_\omega(\mathcal{M}),\mathcal{M})_{\theta,q}=\Lambda^{r,q}_\omega(\mathcal{M}).$$

定义4.3.1. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是分别具有 n.s.f. 迹 τ 和 ν 的半有限 von Neuamnn 代数. 我们称映射 $T:L_0(\mathcal{M})\to L_0(\mathcal{N})$ 为拟线性算子, 若

(i) $|T(\alpha x)| \leq |\alpha||T(x)|, x \in L_0(\mathcal{M}), \alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) 存在常数 $K > 0$ 使得对任意的 $x, y \in L_0(\mathcal{M})$, 都能找到两个部分等距同构 $u, v \in \mathcal{N}$ 满足$|T(x+y)| \leq K(u^*|Tx|u + v^*|Ty|v)$.

特别地, 当 $K = 1$ 时称为次线性算子.

设 φ 为 Orlicz 函数,令 $a_\varphi = \inf_{t>0} \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}$, $b_\varphi = \sup_{t>0} \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}$, 其基本性质如下:

(1) $1 \leq a_\varphi \leq b_\varphi \leq \infty$.

(2) 关于指标 a_φ 和 b_φ 有如下性质:

$$a_\varphi = \{p > 0 : t^{-p}\varphi(t) \text{ 在 } (0, \infty) \text{ 上是非减函数}\},$$

$$b_\varphi = \{q > 0 : t^{-q}\varphi(t) \text{ 在 } (0, \infty) \text{ 上是非增函数}\}.$$

(3) $\varphi \in \Delta_2$ 的充要条件是 $b_\varphi < \infty$.

定理4.3.2. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是具有 n.s.f. 迹的半有限von Neumann 代数, $W_i(t) = \int_i^t \omega_0(s)ds \in \Delta_2$, $i = 0, 1$ 且 $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. 若 φ 是 Orlicz 函数且 $p_0 < a_\varphi \leq b_\varphi < p_1$, 拟线性算子 $T : L_0(\mathcal{M}) \to L_0(\mathcal{N})$ 满足条件$\|Tx\|_{\Lambda^{p_i,\infty}_{\omega_0}(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{\Lambda^{p_i,\infty}_{\omega_1}(\mathcal{M})}$, $i = 0, 1$, 则存在 $C > 0$ 使得

$$\sup_{t>0} W_0(t)\varphi(\mu_t(Tx)) \leq C \sup_{t>0} W_1(t)\varphi(\mu_t(x)),\ \forall\, x \in \Lambda^\infty_{\varphi,\omega_1}(\mathcal{M}).$$

因此 $\|Tx\|_{\Lambda^\infty_{\varphi,\omega_0}(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{\Lambda^\infty_{\varphi,\omega_1}(\mathcal{M})}$.

Proof. 我们选取 $\theta_0, \theta_1, r_0, r_1$ 满足 $p_0 < r_0 < a_\varphi \leq b_\varphi < r_1 < p_1, 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 且 $\frac{1}{r_k} = \frac{1-\theta_k}{p_0} + \frac{\theta_k}{p_1}, k = 0, 1$. 应用定理 4.3.1 可知

$$\|Tx\|_{\Lambda^{r_k,\infty}_{\omega_0}(\mathcal{M})} \leq A_k \|x\|_{\Lambda^{r_k,\infty}_{\omega_1}(\mathcal{M})}, k = 0, 1. \tag{4.1}$$

其中 A_0, A_1 是与 x 无关的常数. 取 $x \in \Lambda^\infty_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$, 令 $x = x_0^\alpha + x_1^\alpha$, 其中

$$x_0^\alpha = xe_{(\alpha,\infty)},\ x_1^\alpha = x - x_0^\alpha,\ \alpha > 0.$$

又 $t^{-r_0}\varphi(t)$ 是 $(0, \infty)$ 上的增函数, 故,

$$\begin{aligned}
W_0(\lambda_\alpha(Tx_0^\alpha)) &\leq \alpha^{-r_0}\|Tx_0^\alpha\|^{r_0}_{\Lambda^{r_0,\infty}_{\omega_0}(\mathcal{M})} \leq \alpha^{-r_0} A_0^{r_0} \|x_0^\alpha\|^{r_0}_{\Lambda^{r_0,\infty}_{\omega_1}(\mathcal{M})} \\
&= \alpha^{-r_0} A_0^{r_0} \sup_{t>0} t^{r_0} W_1(\lambda_t(x_0^\alpha)) \leq A_0^{r_0} \sup_{t>\alpha} (\frac{t}{\alpha})^{r_0} W_1(\lambda_t(x)) \\
&\leq A_0^{r_0} \sup_{t>\alpha} \frac{\varphi(t)}{\varphi(\alpha)} W_1(\lambda_t(x)) \leq \frac{A_0^{r_0}}{\varphi(\alpha)} \sup_{t>\alpha} \varphi(t) W_1(\lambda_t(x)).
\end{aligned}$$

由条件 $t^{-r_1}\varphi(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是递减的, 类似的可以证明

$$W_0(\lambda_\alpha(Tx_0^\alpha) \le \frac{A_1^{r_1}}{\varphi(\alpha)}\sup_{t>\alpha}\varphi(t)W_1(\lambda_t(x)).$$

由文献 [62]中文定理 4.2 的证明和 $W_0 \in \Delta_2$ 可知,

$$W_0(\lambda_{2K\alpha}(Tx)) \lesssim W_0(\lambda_\alpha(|Tx_0^\alpha|)) + W_0(\lambda_\alpha(|Tx_1^\alpha|)),$$

其中的常数 K 就是定义 4.3.1 中的常数. 从而,

$$\begin{aligned} W_0(\lambda_{2K\alpha}(Tx)) &\lesssim \frac{A_0^{r_0}}{\varphi(\alpha)}\sup_{t>\alpha}\varphi(t)W_1(\lambda_t(x)) + \frac{A_1^{r_1}}{\varphi(\alpha)}\sup_{t>\alpha}\varphi(t)W_1(\lambda_t(x) \\ &\lesssim \frac{1}{\varphi(2K\alpha)}\sup_{t>\alpha}\varphi(t)W_1(\lambda_t(x)). \end{aligned}$$

进而, 由命题 4.1.1 可知结论成立.

推论4.3.1. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是具有 n.s.f. 迹的半有限von Neumann 代数, $W_i(t) = \int_i^t \omega_0(s)ds \in \Delta_2$, $i = 0,1$ 且 $0 < p_0 < p_1 \le \infty$. 若 φ 是 Orlicz 函数且 $p_0 < a_\varphi \le b_\varphi < p_1$, 拟线性算子 $T: L_0(\mathcal{M}) \to L_0(\mathcal{N})$ 满足条件$\|Tx\|_{\Lambda_{\omega_0}^{p_i}(\mathcal{M})} \le \|x\|_{\Lambda_{\omega_1}^{p_i,\infty}(\mathcal{M})}$, $i = 0,1$, 则存在 $C > 0$ 使得

$$\sup_{t>0} W_0(t)\varphi(\mu_t(Tx)) \le C\sup_{t>0} W_1(t)\varphi(\mu_t(x)),\ \forall\, x \in \Lambda_{\varphi,\omega_1}^\infty(\mathcal{M}).$$

因此 $\|Tx\|_{\Lambda_{\varphi,\omega_0}^\infty(\mathcal{M})} \le \|x\|_{\Lambda_{\varphi,\omega_1}^\infty(\mathcal{M})}$.

推论4.3.2. 设 $\mathcal{M}$ 是具有 n.s.f. 迹的半有限von Neumann 代数, φ 是 Orlicz 函数, $p_0 < a_\varphi \le b_\varphi < p_1$ 且 ω 满足 $\mathcal{B}_{p_0} \cap \mathcal{B}_{p_1}$ 条件. 则

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^\infty \approx \inf\{c > 0 : W(t)\varphi(\frac{\frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(x)ds}{c}) \le 1,\ \forall\, t > 0\}.$$

因此, $\Lambda_{\varphi,\omega}^\infty(\mathcal{M})$ 可以重新赋范成为 Banach 空间.

Proof. 由定理 4.3.2 和文献 [9] 中的定理 1.7 以及文献 [62] 中的推论 4.5 的讨论方法可知此结论成立.

设 φ 为 Orlicz 函数, 令 $M(t,\varphi) = \sup_{s>0}\frac{\varphi(ts)}{\varphi(s)}, t > 0$. 我们定义

$$p_\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{lnM(t,\varphi)}{lnt}, \qquad q_\varphi = \lim_{t\to\infty}\frac{lnM(t,\varphi)}{lnt}.$$

其基本性质如下:

(1) $1 \le p_\varphi \le q_\varphi \le \infty$.

(2) 关于指标 p_φ 和 q_φ 有如下性质:

$$p_\varphi = \sup\{p > 0 : \int_0^t s^{-p}\varphi(s)\frac{ds}{s} = O(t^{-p}\varphi(t)),\quad \forall t > 0\},$$

$$q_\varphi = \inf\{q > 0 : \int_0^t s^{-q}\varphi(s)\frac{ds}{s} = O(t^{-q}\varphi(t)),\quad \forall t > 0\}.$$

(3) $\varphi \in \Delta_2 \Leftrightarrow q_\varphi < \infty \Leftrightarrow \sup_{t>0}\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} < \infty$.

(4) $p_\varphi = p_{\varphi'} + 1,\quad q_\varphi = q_{\varphi'} + 1$.

用简单函数逼近的方法容易验证:

$$\int_0^\infty \varphi(\mu_t(x))\omega(t)dt = \int_0^\infty \lambda^\omega_{\mu(x)}(s)d\varphi(s) = \int_0^\infty W(\lambda_t(x))d\varphi(t),$$

其中 $\lambda^\omega_{\mu(x)}(s)$ 是函数 $t \mapsto \mu_t(x)$ 对应于权测度的分布函数.

定理4.3.3. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是分别具有 $n.s.f.$ 迹 ν_1 和 ν_2 的半有限von Neumann 代数, $W_i(t) = \int_i^t \omega_0(s)ds \in \Delta_2$, $i = 0, 1$. 设 $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, $T : L_0(\mathcal{M}) \to L_0(\mathcal{N})$ 的拟线性算子且 $\|Tx\|_{\Lambda^{p_i,\infty}_{\omega_0}(\mathcal{N})} \le A_i\|x\|_{\Lambda^{p_i}_{\omega_1}(\mathcal{M})}$, $i = 1, 2$. 若 $\varphi \in \Delta_2$ 是 Orlicz 函数且 $p_0 < p_\varphi \le q_\varphi < p_1$, 则存在常数 C(只与 p_0, p_1 和 ω_i 有关), 使得对任意的 $x \in \Lambda_{\varphi,\omega_1}(\mathcal{M})$ 有

$$\|\varphi(|Tx|)\|_{\Lambda_{1,\omega_0}(\mathcal{N})} \le C\|\varphi(|x|)\|_{\Lambda_{1,\omega_1}(\mathcal{M})}.$$

即 $\int_0^\infty \varphi(\mu_t(Tx))\omega_0(t)dt \le C\int_0^\infty \varphi(\mu_t(x))\omega_1(t)dt$.

Proof. 首先我们来证明 $p_1 < \infty$ 的情况. 设 $x \in \Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$. 令 $x = x_0^\alpha + x_1^\alpha$, 其中 $x_0^\alpha = xe_{(\alpha,\infty)}(|x|)$. 由条件可知

$$W_0(\lambda_t(Tx_i^\alpha)) \le A_i^{p_i}t^{-p_i}\int_0^\infty p_i t^{p_i-1}W_1(\lambda_t(x_i^\alpha))dt, x \in \Lambda^{p_i}_\omega(\mathcal{M}), i = 0, 1.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(\mu_t(Tx))\omega_0(t)dt &\le \int_0^\infty \varphi(\mu_t(K(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v)))\omega_0(t)dt \\
&\lesssim \int_0^\infty \varphi(\mu_t(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v))\omega_0(t)dt \\
&= \int_0^\infty W_0(\lambda_t(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v))d\varphi(t) \\
&= \int_0^\infty W_0(\lambda_{2\alpha}(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v))d\varphi(2\alpha) \\
&\le \int_0^\infty W_0(\lambda_\alpha(|Tx_0^\alpha|)+\lambda_\alpha(|Tx_1^\alpha|))d\varphi(2\alpha) \\
&\lesssim A_0^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_0^\infty p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_t(x_0^\alpha))dtd\varphi(2\alpha) \\
&+ A_1^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{-p_1}\int_0^\infty p_1t^{p_1-1}W_1(\lambda_t(x_1^\alpha))dtd\varphi(2\alpha) \\
&= A_0^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_0^\alpha p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_\alpha(x))dtd\varphi(2\alpha) \\
&+ A_0^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_\alpha^\infty p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_t(x))dtd\varphi(2\alpha) \\
&+ A_1^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{-p_1}\int_0^\alpha p_1t^{p_1-1}W_1(\lambda_t(x))dtd\varphi(2\alpha) \\
&\lesssim A_0^{p_0}\int_0^\infty W_1(\lambda_\alpha(x))d\varphi(\alpha) \\
&+ A_0^{p_0}\int_0^\infty\int_0^t \alpha^{-p_0}d\varphi(\alpha)p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_t(x))dt \\
&+ A_1^{p_1}\int_0^\infty\int_t^\infty \alpha^{-p_1}d\varphi(\alpha)p_1t^{p_1-1}W_1(\lambda_t(x))dt.
\end{aligned}
$$

又由 $p_\varphi = p_{\varphi'}+1$, $q_\varphi = q_{\varphi'}+1$ 且 φ 满足 Δ_2 条件可知,

$$
\int_0^t \alpha^{-p_0+1}\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = O(t^{-p_0+1}\varphi'(t))
$$

和

$$
\int_t^\infty \alpha^{-p_1+1}\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} = O(t^{-p_1+1}\varphi'(t))
$$

成立. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(\mu_t(Tx))\omega_0(t)dt &= \int_0^\infty W_0(\lambda_t(Tx))d\varphi(t) \\
&\lesssim \int_0^\infty W_1(\lambda_\alpha(x))d\varphi(\alpha),
\end{aligned}
$$

当 $p_1=\infty$ 时, 同样选取 $x=x_0^\alpha+x_1^\alpha$. 显然, $\|Tx_1^\alpha\|_{\Lambda^\infty_{\omega_0}((M))} = \|Tx_1^\alpha\|_\infty \le A_1\|x_1^\alpha\|_\infty \le A_1\alpha$ 且 $\lambda_{A_1\alpha}(|Tx_1^\alpha|)=0$. 由此可得 $W_0(\lambda_{2A_1\alpha}(Tx)) \le W_0(\lambda_{A_1\alpha}(Tx_0^\alpha)) \le (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\alpha^{-p_0}\|x_0^\alpha\|_{p_0,\omega_1}^{p_0}$.

应用上述讨论方法可得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(\mu_t(Tx))\omega_0(t)dt &\lesssim \int_0^\infty W_0(\lambda_t(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v))d\varphi(t)\\
&= \int_0^\infty W_0(\lambda_{2A_1\alpha}(u^*|Tx_0^\alpha|u+v^*|Tx_1^\alpha|v))d\varphi(2A_1\alpha)\\
&\le \int_0^\infty W_0(\lambda_{2A_1\alpha}(Tx_0^\alpha))d\varphi(2A_1\alpha)\\
&\le (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\|x_0^\alpha\|_{\Lambda_{\omega_1}^{p_0}(\mathcal{M})}d\varphi(2A_1\alpha)\\
&= (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_0^\infty p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_t(x_0))dtd\varphi(2A_1\alpha)\\
&\le (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_0^\alpha p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_\alpha(x))dtd\varphi(2A_1\alpha)\\
&+ (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{-p_0}\int_\alpha^\infty p_0t^{p_0-1}W_1(\lambda_\alpha(x))dtd\varphi(2A_1\alpha)\\
&\lesssim (\frac{A_0}{A_1})^{p_0}\int_0^\infty W_1(\lambda_\alpha(x))d\varphi(\alpha).
\end{aligned}$$

推论4.3.3. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是分别具有 *n.s.f.* 迹 ν_1 和 ν_2 的半有限von Neumann 代数, $W_i(t)=\int_i^t\omega_0(s)ds\in\Delta_2,\ i=0,1.$ 设 $1\le p_0<p_1\le\infty$, $T:L_0(\mathcal{M})\to L_0(\mathcal{N})$ 的次线性算子且 $\|Tx\|_{\Lambda_\omega^{p_i,\infty}(\mathcal{N})}\le A_i\|x\|_{\Lambda_\omega^{p_i}(\mathcal{M})}$, $i=1,2.$ 若 $\varphi\in\Delta_2$ 是 Orlicz 函数且 $p_0<p_\varphi\le q_\varphi<p_1$, 则存在常数 C(只与 p_0,p_1 和 ω 有关), 使得对任意的 $x\in\Lambda_{\varphi,\omega}(\mathcal{M})$ 有

$$\|\varphi(|Tx|)\|_{\Lambda_{1,\omega}(\mathcal{N})}\le C\|\varphi(|x|)\|_{\Lambda_{1,\omega}(\mathcal{M})}.$$

即 $\int_0^\infty\varphi(\mu_t(Tx))w(t)dt\le C\int_0^\infty\varphi(\mu_t(x))w(t)dt.$

§ 4.4 非交换 Calderón-Lorzanovskiĭ 空间

在这一节我们将主要讨论一下非交换 Calderón- Lorzanovskiĭ 空间 $E_\varphi(\mathcal{M})$ 空间的广义伴随空间.

称 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ 为 Young 函数若 φ 是凸函数, 非减的且 $\varphi(0)=0$. 设 φ 在 $(0,\infty)$ 上既不等于零也不等于无穷. 我们定义 φ 的右连续的逆 φ^{-1} 为 $\varphi^{-1}(t)=\inf\{s\ge0:\varphi(s)>t\}$, $\forall\, t\in[0,\infty)$ 且 $\varphi^{-1}(\infty)=\lim_{t\to\infty}\varphi^{-1}(t)$. 我们定义

$$\gamma_\varphi=\sup\{t\ge0,\varphi(t)=0\},\quad \gamma^\varphi=\sup\{t\ge0,\varphi(t)<0\},$$

则有 $0\le\gamma_\varphi\le\gamma^\varphi\le\infty$ 和 $\gamma_\varphi<\infty,\gamma^\varphi>0.$

在这一章中我们设 $\gamma_\varphi \neq \gamma^\varphi$. 并且记 $\varphi(\gamma^\varphi) = \lim_{s\to\gamma^{\varphi}-}\varphi(s)$ 若 $\gamma^\varphi < \infty$. 记 $\varphi > 0$, 若 $\gamma_\varphi = 0$. 记 $\varphi < \infty$ 若 $\gamma^\varphi = \infty$. 另外, Young 函数 φ 在 $[0,\gamma^\varphi)$ 是连续的非减的, 在 $[\gamma_\varphi,\gamma^\varphi)$ 上是严格增的. Young 函数 φ 的右连续逆有下列基本性质: $\varphi(\gamma_\varphi) = 0$ 并且

(1) 若 $\varphi \in \mathcal{Y}_1$, 则 φ^{-1} 在 $[0,\infty]$ 上是连续的且

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \gamma_\varphi & e\, t = 0, \\ s, & e\, t \in (0,\infty),\ t = \varphi(s),\ \ s \in (\gamma_\varphi,\infty), \\ \infty, & if\ t = \infty. \end{cases}$$

(2) 若 $\varphi \in \mathcal{Y}_2$, 则 φ^{-1} 在 $[0,\infty]$ 上是连续的且

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \gamma_\varphi & e\, t = 0, \\ s, & e\, t \in (0,\infty),\ t = \varphi(s),\ \ s \in (\gamma_\varphi,\gamma^\varphi), \\ \gamma^\varphi, & e\, t = \infty. \end{cases}$$

(3) 若 $\varphi \in \mathcal{Y}_3$, 则 φ^{-1} 在 $[0,\infty]$ 上是连续的且

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \gamma_\varphi & e\, t = 0, \\ s, & e\, t \in (0,\varphi(\gamma^\varphi)),\ t = \varphi(s),\ \ s \in (\gamma_\varphi,\gamma^\varphi), \\ \gamma^\varphi, & e\, t \geq \varphi(\gamma^\varphi), \end{cases}$$

其中 Young 函数集合 $\mathcal{Y}_i, i = 1,2,3$ 是指:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= \{\varphi : \gamma^\varphi = \infty\}, \\ \mathcal{Y}_2 &= \{\varphi : \gamma^\varphi < \infty \text{and } \varphi(\gamma^\varphi) = \infty\}, \\ \mathcal{Y}_2 &= \{\varphi : \gamma^\varphi < \infty \text{and } \varphi(\gamma^\varphi) < \infty\}. \end{aligned}$$

更多的有关 Young 函数的知识, 参见 [22, 55]. 设 $x \in L_0(\mathcal{M})$. 应用文献 [55] 中的引理 2.1 可知 $\varphi(|x|) \in L_0(\mathcal{M})$ 和 $\mu(\varphi(|x|)) = \varphi(\mu(|x|))$ 成立.

我们称对任意的自变量 $\psi_1 \prec \psi_2$ [对足够大的自变量](对足够小的自变量) 是指存在常数 $C > 0$ [存在常数 $C > 0, t_0 > 0$] (存在常数 $C > 0, t_0 > 0$) 使得 $\psi_1(t) \leq C\psi_2(t)$ 对任意的 $t > 0$成立[对任意的 $t \geq t_0$ 成立](对任意的 $0 < t < t_0$ 成立), 若 $\psi_1 \prec \psi_2$ 和 $\psi_2 \prec \psi_1$ 同时成立, 我们记为 $\psi_1 \asymp \psi_2$

设 φ 是一个 Young 函数, $(E, \|\cdot\|_E)$ 是具有 Fatou 性质的 Banach 空间, 我们可以定义 Calderón- Lorzanovskiĭ 空间 E_φ 为

$$E_\varphi = \{f \in L^0 : \varphi(\lambda|f|) \in E \text{ 对某个 } \lambda > 0\text{成立}\}.$$

此空间上的范数为

$$\|f\|_{E_\varphi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\varphi(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\},$$

其中

$$\rho_\varphi(f) = \begin{cases} \|\varphi(|f|)\|_E, & \text{若 } \varphi(|f|) \in E, \\ \infty, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4.2}$$

若 E 是重排不变的, 则 E_φ 也是重排不变的. 更多的有关 Calderón-Lozanovskiĭ 空间的知识参见 [72, 13, 22, 23].

定义4.4.1. 设 E 是一个重排不变的 Banach 函数空间且 $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是Young 函数. 我们定义非交换 Calderón-Lozanovskiĭ 空间 $E_\varphi(\mathcal{M})$ 为

$$E_\varphi(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \mu(x) \in E_\varphi\},$$

其中 $\|\cdot\|_\varphi$ 的定义为 $\|x\|_\varphi = \|\mu(x)\|_{E_\varphi}$.

命题4.4.1. 设 E 是一个具有 Fatou 性质的重排不变的 Banach 函数空间. 下列性质成立:

(i) 若 $e \in P(\mathcal{M})$ 和 $\tau(e) < \infty$ 成立, 则 $e \in E_\varphi(\mathcal{M})$.

(ii) 若 $x \in E_\varphi(\mathcal{M})$, 则 $\rho(x) \leq 1$ 的充分必要条件是 $\|x\| \leq 1$.

(iii) 若 $0 \leq x_n \in E_\varphi(\mathcal{M}), \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in L_0(\mathcal{M}), x_n \uparrow x$ 其中的收敛指的是以 τ 可测拓扑收敛且 $\sup_n \|x_n\|_\varphi < \infty$, 则 $x \in E_\varphi(\mathcal{M})$ 和 $\|x_n\|_\varphi \uparrow \|x\|_\varphi$ 成立.

进而可知, $(E_\varphi(\mathcal{M}), \|\cdot\|_\varphi)$ 是具有 Fatou 性质的 Banach 空间.

Proof. (i) 显然成立. 由 E 具有 Fatou 性质且函数 $f(\lambda) = \varrho\varphi(\lambda x) = \varrho_\varphi(\lambda\mu(x))$ 在 $(0, \infty)$ 上是左连续的. 故, (ii) 成立.

(iii): 设 $0 \leq x_n \in E_\varphi(\mathcal{M})$, $x \in L_0(\mathcal{M})$, $x_n \uparrow x$(以 $\tau-$ 可测拓扑). 令 $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_\varphi < \infty$. 则 $\mu(x_n) \uparrow_n \mu(x)$. 从而 $\varphi(\mu(x_n)) \uparrow_n \varphi(\mu(x))$. 由 E 的 Fatou 性质可知, $\varphi(\mu(x)) \in E$ 和

$$\|\varphi(\mu(x))\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi(\mu(x_n))\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_\varphi < \infty$$

成立. 因此, $x \in E_\varphi(\mathcal{M})$ 且 $\|x\|_\varphi = \sup_n \|x_n\|_\varphi$. 再应用文献 [48] 中的引理 4.1 (或, 文献 [49] 中的定理 4) 和 E_φ 的 Fatou 性质, 可知 $E_\varphi(\mathcal{M})$ 是 Banach 空间. □

定义4.4.2. 设 $\mathcal{M}$是半有限的 von Neumann 代数且 $E(\mathcal{M})$ 和 $F(\mathcal{M})$ 都是非交换的 Banach 函数空间. 我们定义广义的相伴空间 $M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 为

$$M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M})) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : xy \in F(\mathcal{M}),\ \forall\, y \in E(\mathcal{M}\}.$$

我们还可以在 $M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 上定义函数 $\|\cdot\|_M$ 为

$$\|x\|_M = \sup\{\|xy\|_{F(M)} : y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\}.$$

命题4.4.2. (i) 若 $x \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$, 则 $\|x\|_M = \||x|\|_M$.

(ii) $\|x\|_M = \sup\{\|xy\|_{F(M)} : 0 \leq y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\}$.

(iii) 若 $0 < x \leq z$ 且 $x, z \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$, 则 $\|x\|_M \leq \|z\|_M$.

(iv) 若 $M(E(\mathbb{R}^+), F(\mathbb{R}^+)) \neq \{0\}$ 且 $e \in P(\mathcal{M})$ 满足 $\tau(e) < \infty$, 则

$$e \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M})).$$

(v) 若 $E_1(\mathcal{M}) \hookrightarrow E_2(\mathcal{M})$, 则 $M(E_2(\mathcal{M}), F(\mathcal{M})) \hookrightarrow M(E_1(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$.

(vi) 若 $F_1(\mathcal{M}) \hookrightarrow F_2(\mathcal{M})$, 则 $M(E(\mathcal{M}), F_1(\mathcal{M})) \hookrightarrow M(E(\mathcal{M}), F_2(\mathcal{M}))$.

(vii) 若 $\lim_{t\to\infty} \mu_t(x) = 0$ 对任意的 $x \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 成立, 则

$$M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M})) \hookrightarrow L_0(\mathcal{M}).$$

其中符号 $\hookrightarrow$ 表示连续嵌入.

Proof. (i): 设 $x = u|x|$ 是 x 的极分解且 $y \in E(\mathcal{M})$满足 $\|y\|_{E(\mathcal{M})} \leq 1$. 由此可得

$$\|xy\|_{F(\mathcal{M})} = \|u|x|y\|_{F(\mathcal{M})} \leq \||x|y\|_{F(\mathcal{M})},$$

$$\||x|y\|_{F(\mathcal{M})} = \|u^*xy\|_{F(\mathcal{M})} \leq \|xy\|_{F(\mathcal{M})}.$$

故, $\|x\|_M = \||x|\|_M$.

(*ii*): 设 $y \in E(\mathcal{M})$ 满足 $\|y\|_{E(\mathcal{M})} \leq 1$ 且 $y = v|y|$ 是 y 的极分解, 则 $\mu(xy) = \mu(x|y^*|v) \leq \mu(x|y^*|)$. 进而,

$$\|xy\|_{F(\mathcal{M})} \leq \|x|y^*|\|_{F(\mathcal{M})}.$$

因此,

$$\|x\|_M \leq \sup\{\|xy\|_{F(M)} : 0 \leq y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\}.$$

所以,

$$\|x\|_M = \sup\{\|xy\|_{F(M)} : 0 \leq y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\}.$$

(*iii*): 若 $0 \leq x \leq z$, 则存在 $u \in \mathcal{M}$, $\|u\| \leq 1$ 使得 $x = uz$. 因此, $\mu(xy) = \mu(uzy) \leq \mu(zy)$. 所以 (*iii*) 成立.

(*iv*): 根据条件 $M(E(\mathbb{R}^+), F(\mathbb{R}^+)) \neq \{0\}$ 和文献 [22] 中的命题 1 可得, $\chi_A \in M(E(\mathbb{R}^+), F(\mathbb{R}^+))$, 其中 $A \subseteq \mathbb{R}^+$ 满足 $m(A) < \infty$. 若 $e \in P(\mathcal{M})$ 满足 $\tau(e) < \infty$, 则

$$\begin{aligned}
\|e\|_M &= \sup\{\|\mu(ey)\|_{F(\mathbb{R}^+)} : y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|\mu(y)\chi_{[0,\tau(e))}\|_{F(\mathbb{R}^+)} : \mu(y) \in E(\mathbb{R}^+), \|\mu(y)\|_{E(\mathbb{R}^+)} \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|f\chi_{[0,\tau(e))}\|_{F(\mathbb{R}^+)} : f \in E(\mathbb{R}^+), \|f\|_{E(\mathbb{R}^+)} \leq 1\} \\
&= \|\chi_{[0,\tau(e))}\|_{M(E(\mathbb{R}^+),F(\mathbb{R}^+))} < \infty.
\end{aligned}$$

因此 $e \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$. (*v*) 和 (*vi*) 可以由 $\|\cdot\|_M$ 的定义直接得到.

(*vii*): 类似于文献 [46] 中的定理 7.1 的讨论可知 (*v*) 成立. 事实上, 设 $x \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 满足 $\|x\|_M \leq 1$. 令 $x = u|x|$ 是 x 的极分解, $|x| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ 是 $|x|$ 的谱分解. 则 $|x|$ 有 Schmidt 分解 $|x| = \int_0^\infty \mu_t(x) d\widetilde{e}_t$, 其中$\widetilde{e}_t = e_{\mu_t(x)-0}, t > 0$, 且 $e_{0-0} = 1$[cf. [26]]. 任给 $\delta > 0$, 显然有 $\mu_t(x) \geq \mu_\delta(x)\chi_{[\frac{\delta}{2},\delta)}$, 从而 $|x| = \int_0^\infty \mu_t(x) d\widetilde{e}_t \geq \mu_\delta(x)q$, 其中 $q = \int_0^\infty \chi_{[\frac{\delta}{2},\delta)} d\widetilde{e}_t$. 又因为 $\tau(q) < \infty$, 所以 $q \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$. 因此, $\|x\|_M = \||x|\|_M \geq \mu_\delta(x)\|q\|_M$ 且 $\|q\|_M^{-1} \geq \mu_\delta(x)$, 故, 结论成立. □

命题4.4.3. 设 $E(\mathcal{M})$ 和 $F(\mathcal{M})$ 是两个非交换 Banach 函数空间. 若 $\lim_{t\to\infty} \mu_t(x) = 0$ 对任意的 $x \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 成立. 则空间 $M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 以范数 $\|x\|_M$ 成为非交换 Banach 空间, 其中

$$\|x\|_M = \sup\{\|xy\|_{F(M)} : y \in E(M), \|y\|_{E(M)} \leq 1\}.$$

Proof. 容易验证 $\|\cdot\|_M$ 是次可加的, 齐次的并且是正的. 若 $\|x\|_M = 0$, 则 $\|xy\|_{F(M)} = 0$ 对任意的 $y \in E(\mathcal{M}), \|y\|_{E(\mathcal{M})} \le 1$ 成立. 由于 $e_A(|x|) \in E(\mathcal{M})$, 所以 $xe_A(|x|) = 0$, 其中 A 是 $(0,\infty)$ 的子集, 这就意味着 $x = 0$. 应用文献 [35] 中的定理 8.11 可知, 只需再证明非交换形式的 Riesz-Fischer 定理成立即可: 即只需证明下述不等式成立,

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_M \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M, x_n \ge 0, n = 1, 2, 3 \cdots.$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 $L_0(\mathcal{M})$ 以 τ 可测拓扑收敛于 x. 事实上, 令 $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, 显然有 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M}))$ 中的 Cauchy 列, 应用命题 4.4.2(vii) 可知, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 τ 可测拓扑收敛于 $L_0(\mathcal{M})$ 中的某个 x. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n y\|_M \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M < \infty$ 和

$$\begin{aligned}\|(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)y\|_{F(\mathcal{M})} = \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y\|_{F(\mathcal{M})} &\le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n y\|_{F(\mathcal{M})} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M < \infty,\end{aligned}$$

成立, 其中 $y \in E(\mathcal{M})$ 且 $\|y\|_{E(\mathcal{M})} \le 1$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in M(E(\mathcal{M}), F(\mathcal{M})), \quad \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_M \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M < \infty$$

成立. □

命题4.4.4. 设 $E(\mathcal{M}) \ne \{0\}$ 是非交换 Banach 函数空间, 则 $M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$.

Proof. $\mathcal{M} \subseteq M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M}))$ 是显然的. 反过来, 设 $x \in M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M}))$ 且 $x \notin \mathcal{M}$, 则有无限多个投影算子 $e_n = e_{(n^3,(n+1)^3]}(|x|), n \in \mathbb{N}^+$ 满足 $\tau(e_n) > 0$. 不失一般性, 我们可以设对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 满足$0 < \tau(e_n) < \infty$. 取 $a_n = \|e_n\|_{E(\mathcal{M})}, n \in \mathbb{N}^+$ 且 $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n} e_n$. 则 $y \in E(\mathcal{M})$. 由于

$$\begin{aligned}\|xy\|_{E(\mathcal{M})} &\ge \|xye_n\|_{E(\mathcal{M})} \\ &\ge n^3 \|ye_n\|_{E(\mathcal{M})} = n, n \in \mathbb{N}^+,\end{aligned}$$

则 $x \notin M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M}))$. 这就意味着

$$\mathcal{M} \supseteq M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M})).$$

因此, $M(E(\mathcal{M}), E(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$. □

例子

(i) 设 $1 \le p < r \le \infty$. 则 $M(L^p(\mathcal{M}), L^r(\mathcal{M})) = \{0\}$. 事实上, 设 $x \in M(L^p(\mathcal{M}), L^r(\mathcal{M}))$ 且 $x \neq 0$. 则存在投影算子 $e \in P(\mathcal{M})$ 使得 $ex = xe$ 和 $0 < \tau(e) < \infty$ 成立. 令 $e_n = e_{[\frac{1}{n},n]}(|exe|), n = 1, 2, 3\cdots$, 则 $e_n \uparrow e$ 和 $\tau(e_n) > 0, \forall\, n > n_0$ 成立. 进而, 若 $y \in L^p(e_n\mathcal{M}e_n)$, 则有 $|y|e_n \in L^p(\mathcal{M})$. 再应用文献 [61] 中的定理可知,

$$\begin{aligned}\mu(\frac{1}{n}ye_n) &\le \mu(\frac{1}{n}|y|e_n) = \mu((|y|e_n)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}(|y|e_n)^{\frac{1}{2}}) \\ &\le \mu((|y|e_n)^{\frac{1}{2}}|e_nxe_n|(|y|e_n)^{\frac{1}{2}}) \le \mu(e_nxe_n(|y|e_n)) \le \mu(x|y|e_n),\end{aligned}$$

成立. 因此, $ye_n \in L^r(\mathcal{M})$. 从而, $y \in L^r(e_n\mathcal{M}e_n)$. 由此可知, 当 $\tau(e_n) > 0$ 时, $L^r(e_n\mathcal{M}e_n) \supseteq L^p(e_n\mathcal{M}e_n)$. 但是上述包含关系即使在经典情况也不成立, 矛盾. 故, $M(L^p(\mathcal{M}), L^r(\mathcal{M})) = \{0\}$.

(ii) 设 $1 \le p \le r \le \infty$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. 则 $M(L^p(\mathcal{M}), L^r(\mathcal{M})) = L^q(\mathcal{M})$.

引理4.4.1. 设 $\varphi \in \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ 且 $x = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k$, 其中 $e_k \in P(\mathcal{M}), e_i \perp e_j, i \neq j$ 满足 $\tau(e_k) < \infty$. 则 $\rho_\varphi(\frac{x}{\|x\|_{E_\varphi(\mathcal{M})}}) = 1$.

Proof. 这个引理可以由文献 [22] 中的引理 5.1 和 $\rho_\varphi(x) = \rho_\varphi(\mu(x))$ 得到. □

应用文献 [22, 23] 中的经典理论的方法和函数演算可得.

定理4.4.1. 设 E 是具有 Fatou 性质的 Banach 函数空间且 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ 是至少满足下列条件之一的 Young 函数:

(i) 对任意的变量有 $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \asymp \varphi^{-1}$,

(ii) 对足够大的变量有 $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \asymp \varphi^{-1}$ 且 $\mathcal{M} \hookrightarrow E(\mathcal{M})$,

(iii) 对足够小的变量有 $\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1} \asymp \varphi^{-1}$ 且 $E(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{M}$.

则

$$M(E_{\varphi_1}(\mathcal{M}), E_\varphi(\mathcal{M})) = E_{\varphi_2}(\mathcal{M}), E_\varphi(\mathcal{M}) = E_{\varphi_1}(\mathcal{M}) \cdot M(E_{\varphi_1}(\mathcal{M}), E_\varphi(\mathcal{M})).$$

进而, $E_{\varphi_1}(\mathcal{M}) \cdot E_{\varphi_2}(\mathcal{M}) = (E_{\varphi_1} \cdot E_{\varphi_2})(\mathcal{M}) = E_\varphi(\mathcal{M})$.

结论

本文的主要结论是：

1.给出了弱Lp空间的具体形式.

2.讨论了非交换弱 L_p 空间上的左乘(右乘)算子和复合算子.

3.讨论了非交换加权Lorentz 空间的对偶空间.

4.讨论了非交换 Hardy-Lorentz 空间.

5. 讨论了非交换 Orlicz-Lorentz 空间及此空间上拟线性算子的插值定理.

6. 讨论了非交换弱 Orlicz-Lorentz 空间及此空间上拟线性算子的插值定理.

参考文献

[1] Lorentz G., On the theorospaces Λ. Trans. Pac. J. Math.[J], 1951, 1:411-429.

[2] O'Neil R., Fractional integration in Orlicz spaces. I. Trans. Amer. Math. Soc.[J], 1965, 115:300-328.

[3] Hunt R. A., On $L_{(p,q)}$ Spaces. L'Enseignement Math.[J], 1966, 12:249-276.

[4] Cwikel M., SagherY ., $L(p,\infty)^*$. Indiana Math. J.[J], 1972, 21:781-786.

[5] Cwikel M., The dual of weak L^p. Ann. Inst. Fourier[J], 1975,25:81-126.

[6] Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach spaces II. Springer[M], 1979.

[7] Bennett C., Sharpley R., Interpolation of operators. Florida: Academic Press[M], 1988.

[8] Sawyer E., Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces. Studia Math.[J], 1990, 96:145-158.

[9] M. A. Arino, B. Muckenhoupt, Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. Tran. Amer. Math.[J], 1990, 320:727-735.

[10] Kaminska A., Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces. Math. Nachr.[J], 1990, 147:29-38.

[11] Kaminska A., Maligranda L., Persson L.E., convexity, concavity, type and cotype of Lorentz spaces. Indag. Mathem., N. S.[J], 1998, 9:367-382.

[12] Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M., On the dual of Orlicz-Lorentz space. Proc. Amer. Math. Soc.[J], 2002,130:1645-1654.

[13] Kaminska A.,Maligranda L., Persson L. E., Indices, convexity and concavity of Calderón-Lozanovskiǐ spaces. Math. Scand.[J], 2003, 92:141-160.

[14] Kaminska A., Maligranda L., Order convex and concavity of Lorentz spaces. Studia Math.[J], 2004, 160:267-286.

[15] Cwikel M., Kaminska A., Maligranda L., Pick L., Are generalized Lorentz "spaces" really spaces. Proc. Amer. Math. Soc.[J], 2004, 132:3615-3625.

[16] Kaminska A., Maligranda L., On Lorentz spaces $\Gamma_{p,\omega}$. Israel J. Math.[J], 2004, 140:285-318.

[17] Carro M. J., Raposo J. A., SoriJ., Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities. Memoir Am. Math. Soc.[M], 2007.

[18] Sparr A., On the conjugate space of the Lorentz space $L(\phi, q)$. Conte. Math.[J], 2007, 445:313-336.

[19] Kaminska A., Raynaud Y., Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz-Lorentz spaces. J. Func. Anal.[J], 2009, 257:271 - 331.

[20] Schep A. R., Products and factors of Banach function spaces. Positivity[J], 2010,14:301-319.

[21] Agora E., Antezana J., Carro M. J., Soria J., Lorentz - Shimogaki and Boyd theorems for weighted Lorentz spaces. J. London Math. Soc.[J], 2013, doi: 10.1112/jlms/jdt063.

[22] Kolwicz P., Lesnik K., Maligranda L., Pointwise multipliers of Calderón-Lozanovskii spaces. Math. Nachr.[J], 2013,286:876 - 907.

[23] Kolwicz P., Lesnik K., Maligranda L., Pointwise products of some Banach function spaces and factorization. J. Funct. Anal.[J], 2014,266:616-659.

[24] Fack T., Kosaki H., Generalized s-numbers of τ-measurable Operators. Prac. J. Math.[J], 1986, 123:269-300.

[25] Nelson E., Notes on noncommutative integration. J. Funct. Anal.[J], 1974, 15:103-116.

[26] Ovčinnikov V.I., s-numbers of measurable operators. Func. Anal. Appl. [J], 1970, 4:236-242.

[27] Yeadon E.J., Convergence of measurable operators. Math. Proc. Camb. Philos. Soc.[J], 1973:74:257-268.

[28] Fack T., Sur la notion de valeur caracteristique. J. Operator Theory[J], 1982, 7:307-333.

[29] Kosaki H., Non-commutative Lorentz spaces associated with a semi-finite von Neumann algebra and applications. Proc. Japan Acad. Ser. A[J], 1981, 57:303-306.

[30] Ciach L. J., Subadditive measures on projectors of a von Neumann algebra. Dissertationes Math.[J], 1990,288.

[31] Chilin V. I., Medzhitov A. M., Sukochev P. A., Isometries of noncommutative Lorentz spaces. Math. Z.[J], 1989, 200:527-545.

[32] Q. Xu, Interpolation of operator spaces. J. Funct. Anal.[J], 1996, 139:500-539.

[33] Dodds P.G., de Pagter B., The non-commutative Yosida-Hewitt decomposition revisited. Tran. Amer. Math. Soci.[J], 2012, 364:6425-6457.

[34] Dodds P.G., de Pagter B., Normed köthe spaces: A non-commutative viewpoint. Inda. Math.[J], 2014, 25:206 - 249.

[35] Kalton N.J., Sukochev F.A., Symmetric norms and spaces of operators. J. rein. Math.[J], 2008, 621:81—121.

[36] Pisier G., Xu Q., Noncommutative L^p- Spaces. In Handbook of the geometry of Banach spaces, 2003, 2:1459-1517.

[37] Terp M., L^p Spaces associated with von Neumann algebras. Notes, Copenhagen Univ., 1981.

[38] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾, 算子代数与非交换 L_p 空间引论. 北京:科学出版社[M], 2010.

[39] Dodds P.G., de Pagter B., Properties (u) and (v*) of Pelczynski in symmetric spaces of τ-measurable operators. Positivity[J], 2011, 15:571-594.

[40] Dodds P. G., Dodds T. K., Sukochev F. A., On p-convexity and q-concavity in non-commutative symmetric spaces. Int. Equa. Oper. Theory[J], 2013, 78:91-114.

[41] Dodds P., Dodds T., de Pagter B., Non-commutative Banach function spaces. Math. Z.[J], 1989, 201:583-597.

[42] Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B., Fully symmetric operator Spaces. Integr. Equat. oper. th.[J], 1992, 15:942-972.

[43] Levitina G., Pietsch A., Sukochev F.A., Zanin D., Completeness of quasi-normed operator ideals generated by s-numbers. Inda. Math.[J], 2014, 25:49-58.

[44] Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B., Noncommutative Köthe duality. Trans. Amer. Math. Soc.[J], 1993, 339:717-750.

[45] Dodds P., Dodds T., Some aspects of the theory of symmetric operator spaces. Quaest. Math.[J], 1995, 18:47-89.

[46] de Pagter B., Non-commutative Banach function spaces. Positivity, Trends in Math., 2007, 197-227.

[47] Potapov D., Sukochev F., Double operator integrals and submajorization. Math. Modl. Natr. Ph.[J], 2010, 5:317 – 339.

[48] Xu Q., Analytic functions with values in lattices and symmetric spaces of measurable operators. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.[J], 1991, 109:541-563.

[49] Sukochev F., Completeness of quasi-normed symmetric operator space. Inda. Math.[J], 2012, doi:10.1016/j.indag.2012.05.007.

[50] Strtil S., Zsido L., Lectures on von Neumann Algebras. Tunbridge Well, Kent:Abacus Press[M], 1979.

[51] Krein S. G., Petunin J. I., Semenov E. M., Interpolation of Linear Operators. Providence: Amer. Math. Soc.[M], 1982.

[52] Han Y., Bekjan T. N., The dual of Noncommutative Lorentz Spaces. Acta Math. Sci., B. [J], 2011, 31:2067-2080.

[53] Bekjan T. N., Hardy-Littlewood maximal function of τ-measurable operators. J. Math. Anal. Appl.[J], 2006, 322:87 - 96.

[54] Kalton N. J., Peck N. T., Roberts J. W., An F-space sampler. Cambridge: Cambridge University Press[M], 1984.

[55] Labuschagne L. E., Majewski W. A., Maps on noncommutative Orlicz spaces. Illinois J. Math.[J], 2011, 55:1053-1081.

[56] Labuschagne L. E., Analogues of composition operators on non-commutative H^p-spaces. J. Oper. Theo.[J], 2003, 49:115-141.

[57] Guido D., Isola T., Singular traces on semifinite von Neumann algebras. J. Funct. Anal.[J], 1995, 134:451-485.

[58] Bergh J., Lofstrom J., Interpolation space: An introduction. New York:Springer[M], 1976.

[59] Bekjan N., Xu Q., Riesz and Szego type factorizations for noncommutative Hardy spaces. J. Oper. Theory[J], 2009, 62:215 - 231.

[60] Bekjan N., Chen Z., Interpolation and Φ-moment inequalities of noncommutative martingales. Probab.Theory Relat.Fields[J], 2012, 152:179-206.

[61] Bikchentaev A., Majorization for products of measurable operators. Inter. J. Theo. Phy.[J], 1998, 37:571-576.

[62] Bekjan T. N., Chen Z., Liu P., Jiao Y., Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities. Studia Math.[J], 2011, 204:195-212.

[63] Chilin V., Krygin A., Sukochev P., Local uniform and uniform convexity of non-commutative symmetric spaces of measurable operators. Math. Proc. Cambr. Phi. Soc.[J], 1992, 111:355-368.

[64] Dodds P., Dodds T., de Pagter B., A general markus inequality. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.[J], 1989, 24:47-57.

[65] Grafakos L., Classical fourier analysis, 2nd Edition. New York:Springer[M], 2008.

[66] Hiai F., Nakamura Y., Majorizations for generalized s-numbers in semifinite von Neumann algebras. Math. Z.[J], 1987, 195:17-27.

[67] Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R., Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. Tran. Amer. Math.[J], 1973, 176:227-251.

[68] Holmstedt T., Interpolation of quasi-normed space. Math. Scand [J], 1970, 26:177-199.

[69] Lin P., Sun H., Some geometric properties of Lorentz-Orlicz space. Arch. Math.[J], 1995, 64:500-511.

[70] Maligranda L., Nakai E., Pointwise multipliers of Orlicz spaces. Arch. Math.[J], 2010, 95:251-256.

[71] Marsalli M., West G., Noncommutative H^p spaces. J. oper. Theo.[J], 1998, 40:339-355.

[72] Maligranda L., Orlicz spaces and interpolation. Campinas SP: University of Campinas [M], 1989.

[73] Muckenhoupt B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Tran. Amer. Math.[J], 1972, 165:207-226.

[74] Matuszewska W., Orlicz W., On certain properties of $\varphi-$functions. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.[J], 1960, 8:439-443.

[75] Watanabe K., Some results on non-commutative Banach function spaces II. Hok. Math. J.[J], 1993, 22:349-364.

[76] Yeadon E.J., Non-commutative L^P-spaces. Math. Proc. Camb. Philos. Soc.[J], 1975, 77:91-102.

[77] 俞鑫泰, Banach 空间几何理论. 北京: 华东师范大学出版社[M], 1986.

学术论文目录

[1] 韩亚洲, Turdebek N. Bekjan, The dual of noncommutative Lorentz spaces. Acta Math. Sci., B[J], 2011, 31: 2067-2080.

[2] 韩亚洲, 邵晶晶, The dual of $L_{p,\infty}(\mathcal{M})$. J. Math. Anal. Appl.[J], 2013, 398: 814 - 821.

[3] 韩亚洲, 非交换 Orlicz-Lorentz 空间对偶空间. 新疆大学学报[J], 2013, 30: 148-153.

[4] 邵晶晶, 韩亚洲, Szegö type factorization theorem for noncommutative Hardy-Lorentz spaces. Acta Math. Sci., B[J], 2013, 33:1675-1684.

[5] 韩亚洲, Turdebek N. Bekjan, The dual of noncommutative weighted Lorentz space. 已投稿

[6] 韩亚洲, Some results on noncommutative Hardy-Lorentz spaces. 已投稿

致 谢

首先我要感谢导师吐尔德别克教授八年来对我的耐心指导和关怀, 别克老师渊博的知识、严谨的治学态度、勤勉的敬业精神和平易近人的作风时刻激励着我奋发向上. 别克老师从本文的选题、开题、定稿到具体的内容安排等各个方面, 都给予了我悉心的指导, 并且在整个过程中严格把关, 没有别克老师的支持和帮助, 我将很难获得这样的学习和研究的机会. 整篇文章中所有的难点都是在别克老师的指导下完成的. 此外别克老师还在生活上给予了我细心的关怀和帮助. 在此毕业之际, 谨向恩师衷心地表达我最诚挚的谢意.

另外还要感谢艾尼教授给本文提出的宝贵意见, 感谢江寅生教授和李宝德老师, 朱晓荟老师的帮助和鼓励. 他们传授给了我宝贵的学习方法, 为我能完成本文及今后的人生之路打下了基础.

在这三年的求学过程中我还得到了同窗好友黄鹏展, 胡成、田应智、马小玲、刘奋进、赵新科、夏萍、邵晶晶、闫成、阿不都艾尼、文飞、冯晓梅、王松柏等人的帮助和鼓励, 在此一并致谢!

最后感谢家人对我无私的支持!

韩亚洲

2014年4月

于新疆大学

学位论文独创性声明

本人所呈交的学位论文系本人在导师指导下独立完成的研究成果。文中依法引用他人的成果，均已做出明确标注或得到许可。论文内容未包含法律意义上已属于他人的任何形式的研究成果，也不包含本人已用于其他学位申请的论文或成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本人如违反上述声明，愿意承担由此引发的一切责任和后果。

作者签名：韩玉树　　　　日期：2014年5月28日

学位论文知识产权权属声明

本人的学位论文是在学期间在导师指导下完成的，知识产权归属学校。学校享有以任何方式发表、复制、公开阅览、借阅以及申请专利等权利。本人离校后发表或使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，署名单位仍然为新疆大学。

本学位论文属于

保　密□，在　　年解密后适用本授权书。

不保密□√

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：韩玉树　　　　日期：2014年5月28日

导师签名：　　　　日期：2014年5月28日