博士学位论文

赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何常数及其应用

GEOMETRIC CONSTANTS AND THEIR APPLICATIONS OF ORLICZ SPACES EQUIPPED WITH THE *P*-AMEMIYA NORM

贺鑫

哈尔滨工业大学

2015 年 6 月

国内图书分类号：O177.2 学校代码：10213
国际图书分类号：51-7 密级：公开

理学博士学位论文

赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何常数及其应用

博 士 研 究 生：贺鑫
导 师：崔云安 教授
申 请 学 位：理学博士
学 科：基础数学
所 在 单 位：数学系
答 辩 日 期：2015 年 6 月
授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: O177.2
U.D.C: 51-7

Dissertation for the Doctoral Degree in Science

GEOMETRIC CONSTANTS AND THEIR APPLICATIONS OF ORLICZ SPACES EQUIPPED WITH THE P-AMEMIYA NORM

Candidate:	He Xin
Supervisor:	Professor Cui Yunan
Academic Degree Applied for:	Doctor of Science
Specialty:	Fundamental Mathematics
Affiliation:	Department of Mathematics
Date of Defence:	June, 2015
Degree-Conferring-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘 要

Banach 空间几何理论是近代泛函分析的重要分支。1965 年，W. Kirk 证明了具有正规结构的自反 Banach 空间具有不动点性质，自此，利用 Banach 空间几何性质研究非扩张映射的不动点性质的理论得到快速发展。不动点理论在微分方程、控制论、代数、经济对策理论、平衡理论等领域有着极其广泛的应用。在对 Banach 空间性质的研究中，常常引入与空间性质有关的几何常数，如凸性模、Opial 模、Jordan-von Neumann 常数、García-Falset 系数等。所以，研究 Banach 空间的几何常数及其在 Banach 空间不动点理论中的应用具有重要的意义和应用价值。

本文主要讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间和 Orlicz 函数空间的几个与不动点理论有关的模和常数，以及这些模和常数所描述的 Banach 空间的几何性质，全文共分六章，主要内容如下：

首先，研究赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的 Opial 性质，给出 $l_{\Phi,p}$ 的 Opial 模的计算公式；讨论 $l_{\Phi,p}$ 具有 Opial 性质、一致 Opial 性质、局部一致 Opial 性质、正 Opial 性质的判据；进而得到 $l_{\Phi,p}$ 具有（L）性质的判据。

其次，给出赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的弱收敛序列系数的计算公式，进而得到 $l_{\Phi,p}$ 具有弱一致正规结构的充分必要条件；讨论 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0 及 l^1 渐近等距同构的条件；由此，进一步得到 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质的充要判据。

再次，计算赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的装球常数及 Kottman 常数，并利用此结果计算 l^p 空间的装球常数；进一步，讨论 $l_{\Phi,p}$ 的装球常数与自反性的关系，从而从另一角度来描述空间的自反性。

最后，研究赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 及函数空间 $L_{\Phi,p}$ 的单调性，给出 $l_{\Phi,p}$ ($L_{\Phi,p}$)具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件，并进一步讨论 $l_{\Phi,p}$ ($L_{\Phi,p}$) 具有弱集值不动点性质的判据；利用单调性讨论最佳逼近问题；计算 $l_{\Phi,p}$ ($L_{\Phi,p}$) 的单调系数与单位球面上点的上（下）局部单调系数。

关键词： Orlicz 空间；Opial 模；弱收敛序列系数；装球常数；单调系数；不动点性质

Abstract

Geometric theory of Banach spaces is an important branch of modern functional analysis. In 1965, it is proved by W.Kirk that a reflexive Banach space with normal structure has fixed point property, which leads to an extensive research and rapid development on the fixed theory of single-valued or multi-valued nonexpansive mappings by using the geometric properties of Banach spaces. It is well known that fixed point theory arises in a large number of applications such as differential equation, control theory, algebra, economy balance theory and so on. Some geometric constants are always introduced according to the space, such as the modular of convexity, Opial modulus, Jordan-von Neumann constant, García-Falset coefficient etc. Therefore, geometric constants of Banach space and their applications for the fixed point theory in Banach spaces play an important role in theoretical aspect, as well as from a practical point of view.

In this dissertation, some modulus and constants relevant with fixed point theory in Orlicz sequence space endowed with the p-Amemiya norm and in Orlicz function space are discussed, as well as the geometric properties of Banach space described by these parameters. The main contributions of the research work are presented as follows.

Firstly, the Opial property of $l_{\Phi,p}$ is discussed in Orlicz sequence space endowed with the p-Amemiya norm and the calculation formula with respect to Opial modulus of $l_{\Phi,p}$ is presented. The criteria are investigated which guarantee the $l_{\Phi,p}$ possesses Opial property, uniform Opial property, local Opial property and positive Opial property. Further, the necessary and sufficient condition is obtained which proves that $l_{\Phi,p}$ possesses (L) property.

Secondly, the calculation formula of the weakly convergent sequence coefficient of Orlicz sequence space $l_{\Phi,p}$ endowed with the p-Amemiya norm are given, and furthermore the necessary and sufficient condition is obtained for $l_{\Phi,p}$ to get weakly uniform normal structure. In addition, the sufficient condition is proposed which guarantees the isometry and isostructuralism of the subspace of $l_{\Phi,p}$, c_0 and l^p, which leads to the necessary and sufficient condition for $l_{\Phi,p}$ possessing fixed point property.

Thirdly, the packing spheres constant as well as Kottman constant in Orlicz sequence space $l_{\Phi,p}$ equipped with the p-Amemiya norm is studied, and the packing spheres constant in l^p space is calculated according to the results developed in this paper. Moreover, the relationship between the packing spheres constant and reflexivity of $l_{\Phi,p}$ is discussed. As a result, a new point of view is introduced to describe the reflexivity of the space.

Finally, the monotonicity property is investigated with respect to Orlicz sequence space $l_{\Phi,p}$ equipped with the p-Amemiya norm and function space $L_{\Phi,p}$, and the necessary and sufficient condition is obtained to guarantee the uniform monotonicity, locally uniform monotonicity and strict monotonicity for $l_{\Phi,p}(L_{\Phi,p})$. The coefficient of monotonicity of $l_{\Phi,p}(L_{\Phi,p})$ is calculated, as well as the upper(lower) local coefficients of monotonicity with respect to the points located on the unit sphere. Further, the problem of best approximation is studied and analyzed.

Keywords: Orlicz spaces, Opial modulus, weakly convergent sequence coefficient, packing constant, monotone coefficient, fixed point property

目 录

Contents

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景及其意义

一. Banach 空间的不动点理论

不动点理论是非线性泛函分析的重要研究内容之一。1895 年，法国数学家 H. Poincare 在“庞加莱的最后定理”中，首次提出了不动点概念，把限制性三体问题的周期解的存在问题，归结为满足某种条件的平面连续变换不动点的存在问题。1910 年，L. E. J. Brouwer 证明了有限维空间中多面体上的连续映射至少存在一个不动点，开启了不动点理论研究的先河。1922 年，波兰数学家 Banach 利用 Picard 迭代法证明了 Banach 压缩映射原理，使得隐函数存在定理、微分方程初值问题解的存在性等一系列应用问题得到解决，也使得不动点理论得到了快速发展，促使数学工作者们对其更加深入和广泛的研究。

Banach 空间几何理论是泛函分析的主要研究方向之一，在不动点理论、控制论、微分方程、逼近论、鞅论等许多领域有着非常广泛的应用。1936 年， J. A. Clarkson[1]研究了向量测度的 Radon-Nikodym 定理，并引入一致凸性的概念，标志着利用 Banach 空间单位球形状来研究 Banach 空间几何性质这一新方法的诞生。1965 年， W. Kirk[2] 证明了具有正规结构的自反 Banach 空间具有不动点性质。1967 年，Z. Opial[3] 证明了具有 Opial 性质的 Banach 空间具有不动点性质。1975 年，T. C. Lim[4] 证明了一致凸的 Banach 空间关于集值非扩张映射具有不动点性质。这些结果将 Banach 空间几何性质与不动点理论联系在一起。自此，利用 Banach 空间几何性质研究非扩张映射的不动点问题的理论得到快速的发展。几十年来，Z. Opial、W. Kirk、S. Prus、T. D. Benavides、B. Sims 、J. Garcıa-Falset、K. Goebel 等数学工作者在研究 Banach 空间空间满足何种几何性质能够蕴含（弱）不动点性质方面做了许多的工作，具体可参阅文献[2, 3, 5–18] 等。

二. Orlicz 空间几何理论

Orlicz 空间是 L^p 空间的推广，作为一类具体的 Banach 空间，为一

般 Banach 空间的研究提供了的实例， Orlicz 空间几何性质刻画的方法和技巧也为一般 Banach 空间的讨论提供借鉴和参考。由于 Orlicz 函数的不同，由其生成的 Orlicz 空间就不同，从而为 Banach 空间理论的研究提供了丰富的模型库。 Orlicz 空间理论在积分方程、偏微分方程、算子理论、概率论和控制论等领域的应用也日益广泛。例如， L^p 空间对讨论方程求解、函数逼近等问题非常有用，但一般只限于线性问题或多项式型非线性问题，而对于非多项式型的非线性问题，一般要借助于 Orlicz 空间。因此对 Orlicz 空间的几何理论的研究是非常有必要的。

1932 年，W. Orlicz[19]引入了 Orlicz 空间， 1936 年，进一步给出了 Orlicz 范数的定义；1950 年，日本数学家 H. Nakano[20]引入了模范数，深入的研究了模空间的半序理论；1955 年，W. A. Luxemburg[21, 22] 给出了 Luxemburg 范数的定义，这类范数的引进极大地丰富了 Orlicz 空间理论；1961 年，M. Krasnoselskii 与Y. Rutickii[23] 出版《Convex Functions and Orlicz Spaces》，这是第一本关于 Orlicz 空间理论的著作，其内容系统地总结了对 Orlicz 空间研究所取得的相关结果，它的出版标志着 Orlicz 空间几何理论已初步形成。 20 世纪 80 年代中期，哈尔滨的数学工作者对 Orlicz 空间理论的研究做了大量工作。吴从炘、王廷辅[24]出版了国内关于 Orlicz 空间理论的第一本著作《Orlicz 空间及其应用》，此后，吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文[25] 的《Orlicz 空间几何理论》、陈述涛[26]的《Geometry of Orlicz Spaces》等著作的相继出版，使得 Orlicz 空间理论研究体系更加丰富和完善，为 Orlicz 空间理论的进一步研究奠定了基础。这些成果也使得中国的哈尔滨成为 Orlicz 空间几何理论研究的主要中心之一。

随着 Orlicz 空间理论越来越广泛地应用，学者们对 Orlicz 空间进行了各种形式的推广，例如：Musielak-Orlicz 空间、 Orlicz-Sobolev 空间、Orlicz-Bochner 空间， Orlicz-Lorentz 空间及 Cesaro-Orlicz 空间等。许多数学工作者对这些具体的 Banach 空间的几何性质及其应用展开了研究。

1.2 课题研究现状

1912 年，L. E. Brouwer 运用度理论证明了关于连续单值映射的不动点定理。1922 年，S. Banach 提出了著名的 Banach 压缩映像原理。

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，X^* 表示 X 的对偶空间，

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$$

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

分别表示 X 的单位球和单位球面。$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 分别表示自然数集、实数集。

定义 1.1 设集合 C 是 X 的非空子集，如果定义在集合 C 上的映射 T : $C \to C$ 满足，对任意 x，$y \in C$，都有

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$$

则称 T 为非扩张映射。

定义 1.2 称 Banach 空间 X 具有（弱）不动点性质，是指 X 的任意（弱紧凸子集）有界闭凸子集上的非扩张映射均具有不动点。

定义 1.3 [27] 设 C 是 X 的有界闭凸子集，称 C 具有（弱）正规结构，是指 C 的任意（弱紧凸子集）有界凸子集 B，B 至少包含两个元素，存在 $x_0 \in B$ 使得

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in B\} < \mathrm{diam}(B) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in B\}$$

如果存在 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in B\} \le \varepsilon \mathrm{diam}(B)$$

则称 C 具有一致正规结构。

显然，当 X 自反时，正规结构与弱正规结构是一致的。

1965 年，W. Kirk 利用 Banach 空间性质证明了下列结论:

定理 1.1 [2] 设 X 为自反 Banach 空间， C 是 X 的非空有界闭凸子集，若 C 具有正规结构，则非扩张映射 $T : C \to C$ 都有不动点。

定理 1.2 [27] 设 Banach 空间 X 具有弱正规结构， C 是 X 的弱紧凸子集，则非扩张映射 $T : C \to C$ 有不动点。

因此，利用 Banach 空间几何性质研究非扩张映射的不动点问题的理论是非常有意义的。讨论 Banach 空间几何性质有很多种方式，其中之一就是定义一个实函数，再定义一个与这个函数有关的适当的常数或模，使得我们可以更好的说明单位球的形状以及序列收敛所隐含的关系。而这些常数之间通常又有着错综复杂的关系，有些常数又有多种等价定义，所以可根据解决问题的不同而灵活应用，使得模或常数在 Banach 空间性质的讨论中起到重要作用，文献[28–36] 在这方面做了大量的工作。

一. Banach 空间的 Opial 模

Banach 空间的 Opial 性质在研究非扩张映射的度量不动点、全纯自映射的不动点、微分和积分方程等理论中都有重要应用。Opial 性质对于讨论弱收敛的迭代、非扩张映射的随机乘积、非线性半群的渐近特性也起着重要作用，详细内容可参阅文献[3, 8, 9, 27, 37–39]。

关于 Opial 性质的讨论起源于波兰数学家 Z. Opial 对不动点定理的证明[3]。1967 年，Z. Opial 引入了 Opial 性质的概念。

定义 1.4 [3] 称 Banach 空间 X 具有(非严格) Opial 性质，是指对任意 X 的弱收敛于零序列 $\{x_n\}$ 及 $x \in X\backslash\{0\}$，都有

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| < \liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|$$

$$(\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|)$$

Z. Opial [3]证明了 $l^p(1 < p < \infty)$ 具有 Opial 性质，但是 $L^p[0, 2\pi]$ 当 $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$ 时没有此性质。C. Franchetti[40] 则证明了任意无穷维 Banach 空间 X 均可赋等价范数 $\|\cdot\|_1$，使得 $(X, \|\cdot\|_1)$ 具有 Opial 性质。

定义 1.5 Banach 空间 X 具有 Schur 性质是指 X 中的每个弱收敛序列都是依范数收敛的。

显然具有 Schur 性质的 Banach 空间具有 Opial 性质。

1992 年，S. Prus[11]引入了一致 Opial 性质的概念。

定义 1.6 [11] 称 Banach 空间 X 具有一致 Opial 性质，是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$，对任意 $x \in X$ 及弱零序列 $\{x_n\}$，满足 $\|x\| \geq \varepsilon$，$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq 1$，都有

$$1 + r \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

Banach 空间 X 的 Hausdorff 测度定义为[2, 9]: 对任意 $A \subset X$,

$$\beta(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \text{ 可以被有限多个直径 } \leq \varepsilon \text{ 的球所覆盖}\}$$

X 的非紧凸模定义为

$$\Delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf\{\|x\| : x \in A\} : A \text{ 是 } S(X) \text{ 的闭子集，且 } \beta(A) \geq \varepsilon\}$$

称 Banach 空间 X 具有 (L) 性质，如果 $\lim_{\varepsilon\to 1^-} \Delta(\varepsilon) = 1$.

(L) 性质是讨论不动点性质非常有用的工具。S. Prus[11] 证明了下列结论：

定理 1.3 [11] Banach 空间 X 是自反的且具有一致 Opial 性质当且仅当 X 有 (L) 性质；当 X^* 具有（L）性质时，X 具有不动点性质。

定义 1.7 [11]称 Banach 空间 X 具有局部一致 Opial 性质，是指对任意 $\varepsilon > 0$ 及弱零序列 $\{x_n\}$ 满足 $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq 1$，存在 $r > 0$，使得

$$1 + r \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

对任意 $x \in X$，$\|x\| \geq \varepsilon$ 成立。

显然一致 Opial 性质蕴含局部一致 Opial 性质，进一步蕴含 Opial 性质。并且还有如下关系:

定理 1.4 若 Banach 空间 X 是 K 一致凸的，并且满足 Opial 性质，则 X 具有局部一致 Opial 性质。

定理 1.5 [27] 设 X 为 Banach 空间，C 是 X 的弱紧凸子集，若 C 具有 Opial 性质，则 C 具有正规结构。

定理 1.6 [27] 若 Banach 空间 X 具有 Opial 性质，则 X 具有弱不动点性质。

定义 1.8 [41] 对 $\varepsilon \in (0, 1]$，定义 Banach 空间 X 的 Opial 模 δ_o 为

$$\delta_o(\varepsilon) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\| : \{x_n\} \subset S(X), \{x_n\} \text{ 弱收敛于零}, \|x\| = \varepsilon\}$$

易证函数 δ_o 是连续非降的，且 X 具有一致 Opial 性质当且仅当对任意 $\varepsilon \in (0, 1]$ 都有 $\delta_o(\varepsilon) > 1$.

若 X 具有 Schur 性质，我们约定，有 $\delta_o(\varepsilon) = 1 \quad (\forall\, \varepsilon > 0)$.

若存在 $\varepsilon \in (0, 1)$，使得 $\delta_o(\varepsilon) > 1$，则 X 有弱正规结构。

对任意 $\varepsilon \geq 0$, l^p 空间的 Opial 模为 $\delta_o(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < \infty)$; $l^{p,q}$ 空间的 Opial 模为 $\delta_o(\varepsilon) = \min\{(1 + \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}, (1 + \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}\} \quad (1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty)$.

定理 1.7 [42]设 X 是 Banach 空间，C 为 X 的非空弱紧子集，$T : C \to C$ 是渐近正则映射。如果 $\liminf_n |T^n| < \delta_o(1)$，则 T 有不动点。

二. Banach 空间的弱收敛序列系数

弱收敛序列系数是与正规结构有关的重要的几何参数之一，也是 Banach 空间中讨论最为广泛的常数之一。W. L. Bynum[43] 引入了弱收敛序列系数 WCS(X) 的概念，计算了 WCS(l^p) 的值，并给出了该系数与正规结构的关系。

设 X 是自反的无穷维 Banach 空间，且没有 Schur 性质。

定义 1.9 对 X 中的有界序列 $\{x_n\}$，我们定义其渐近直径和渐近半径分别为

$$\mathrm{diam}_a(x_n) = \lim_{k\to\infty} \{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}$$

$$r_a(x_n) = \inf\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| : y \in \overline{\text{conv}}\{x_n\}\}$$

其中 $\overline{\text{conv}}\{x_n\}$ 表示 $\{x_n\}$ 的闭凸包。

1980 年， W. L. Bynum[43]引入了下列概念:

定义 1.10

$$\text{WCS}(X) = \sup\{M: \ \{x_n\} \text{ 是弱收敛序列, 存在 } y \in \overline{\text{conv}}\{x_n\} \text{ 满足}$$
$$M \limsup_n \|x_n - y\| \le \text{diam}_a(\{x_n\})\}$$

称为 X 的弱收敛序列系数。

$$\text{BS}(X) = \sup\{M: \ \{x_n\} \text{ 是有界序列, 存在 } y \in \overline{\text{conv}}\{x_n\} \text{ 满足}$$
$$M \limsup_n \|x_n - y\| \le \text{diam}_a(\{x_n\})\}$$

称为 X 的有界序列系数。

若 Banach 空间 X 具有 Schur 性质，按照 W. L. Bynum 的定义，$\text{WCS}(X)$ 是无意义的，此时我们约定 $\text{WSC}(X) = 2$.

1983 年，T. C. Lim[13] 给出了 $\text{WCS}(X)$ 的等价描述:

$$\text{WCS}(X) = \inf\left\{\frac{\text{diam}_a(\{x_n\})}{r_a(\{x_n\})} : \{x_n\} \text{ 弱收敛于 } 0, \text{但不范数收敛于 } 0\right\}$$

1999 年，B. Sims 和M. A. Smyth[44] 给出了 $\text{WCS}(X)$ 的另一个等价定义:

$$\text{WCS}(X) = \inf\left\{\lim_{n\neq m; n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|\right\}$$

其中，“inf” 取遍所有 X 中的弱零序列 $\{x_n\} \subset X$， 满足 $\|x_n\| = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$，且 $\lim_{n\neq m; n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|$ 存在。

定理 1.8 [44] 设 X 不具有 Schur 性质，则下列常数相等:

(1) $\text{WCS}(X)$

(2) $A(X) := \inf\left\{\frac{\text{diam}_a(\{x_n\})}{r_a(\{x_n\})} : \{x_n\} \text{ 弱收敛， 但不依范数收敛}\right\}$

(3) $\beta(X) := \inf\{\limsup_n(\limsup_m \|x_n - x_m\|) : \{x_n\} \text{ 弱收敛于 } 0, \|x_n\| \to 1\}$

(4) $B(X) := \inf\{M > 0 : \{x_n\} \text{ 弱收敛于 } 0, M \limsup_n \|x_n\| \le \text{diam}_a(\{x_n\})\}$

(5) $C(X) := \inf\{\text{diam}_a(\{x_n\}) : \{x_n\} \text{ 弱收敛于 } 0, \|x_n\| \to 1\}$

$\text{WCS}(l^p) = 2^{\frac{1}{p}}$ $(1 < p < \infty)$; 对于 Cesàro 序列空间 ces_p, $\text{WCS}(ces_p) = 2^{\frac{1}{p}}$ $(1 < p < \infty)$;

Hilbert 空间 H，$\text{WCS}(H) = \sqrt{2}$; $\text{WCS}(c_0) = 1$; $\text{WCS}(l^{p,q}) = \min\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{q}}\}$; $\text{WCS}(L^p(\Omega)) = \min\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\}$ $(p \ge 2, (\Omega, \Sigma, \mu)$为无原子有限测度空间).

文献 [41] 给出了 Opial 模与弱收敛序列系数的关系:

$$\delta_o(1) \le \mathrm{WCS}(X)$$

定义 1.11 如果 $\mathrm{WCS}(X) > 1$，则称 X 具有弱一致正规结构。

进一步可证，当 X 是自反 Banach 空间时， $\mathrm{WCS}(X) > 1$ 蕴含正规结构，进而 X 具有不动点性质。

定理 1.9 [45] 设 X 是 Banach 空间，$\mathrm{WCS}(X) > 1$, C 是 X 的弱紧凸子集，$T : C \to C$ 是渐近正则映射，如果 $\liminf_n |T^n| < \sqrt{\mathrm{WCS}(X)}$，则 T 有不动点。

文献 [17] 利用某些熟知的几何常数和系数来估计弱收敛序列系数的下界，从而可以得到一些蕴含正规结构的条件。关于这个系数的进一步讨论可参见文献 [44].

Banach 空间 X 的的 Maluta 系数定义为:

$$\mathrm{M}(X) = \sup\left\{\frac{\limsup_n \mathrm{dist}(x_{n+1},\ \mathrm{conv}(x_n)_{n=1}^{\infty})}{\lim_n\{\sup\{\|x_i - x_j\| :\ i \neq j,\ i, j \geq n\}\}} :\ \{x_n\}\text{ 是 } X \text{ 的有界非常数序列}\right\}$$

当 X 是有限维 Banach 空间时，$\mathrm{M}(X) = 0$. 当 X 是无穷维 Banach 空间时，这些常数具有下列关系:

$$1 \le \mathrm{BS}(X) \le \mathrm{WCS}(X) \le \frac{1}{\mathrm{M}(X)}$$

文献[46, 47]证明了若 X 是自反 Banach 空间，则 $\mathrm{M}(X) = \dfrac{1}{\mathrm{WCS}(X)}$；若 X 不是自反的，则 $\mathrm{M}(X) = 1$.

$\mathrm{M}(X)$ 也是与正规结构、不动点性质有关的重要几何常数。

三. Banach 空间的装球常数

从上世纪 50 年代，学者们开始研究 Banach 空间的装球问题。装球常数对于研究 Banach 空间几何结构、等距嵌入、自反性等都是重要的几何参数[28, 48–50]。装球常数 $P(X)$ 就是这样一个数，当 $r \le P(X)$ 时，有无穷多个半径为 r 的球可以装进 $B(X)$；当 $r > P(X)$ 时，仅有有限个半径为 r 的球可以装进 $B(X)$ 中。

定义 1.12 [48] 设 X 是 Banach 空间， X 的装球常数定义为

$$P(X) = \sup\{\ r > 0 :\ \text{存在 } \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ \|x_i\| \le 1 - r \\ \text{且 } \|x_i - x_j\| \ge 2,\ \ i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j\}$$

显然，如果 $\dim X < \infty$，则 $P(X) = 0$.

引理 1.1 [28] 设 X 是无穷维 Banach 空间。定义

$$K(X) = \sup\{\ \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X)\ \}$$

称为 X 的 Kottman 常数。则

$$P(X) = \frac{K(X)}{K(X) + 2}$$

对有限维空间，其 Kottman 常数等于零。

1955 年，Rankin[50] 确定了可分 Hilbert 空间的装球常数的值。1958 年， Burlak，Rankin 及 Robertson[48] 推广了这个结果到 l^p 空间，并证明了 $P(l^1) = P(l^\infty) = \dfrac{1}{2}$，$P(l^p) = \dfrac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p}}}$ $(1 < p < \infty)$. 1970 年，C. A. Kottman[28]给出了一般赋范线性空间装球常数的取值范围是 $1 \leq K(X) \leq 2$，从而 $\dfrac{1}{3} \leq P(X) \leq \dfrac{1}{2}$. 进一步，J. Elton 和 E. Odell[30] 证明存在 $\varepsilon > 0$，使得 $K(X) \geq 1 + \varepsilon$. J. N. Wells 和 L. R. Willians[51] 用内插法的三线定理计算出了 L^p 空间的装球值: 当 $1 \leq p \leq 2$ 时，$P(L^p) = \dfrac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p}}}$；当 $2 < p \leq \infty$ 时，$P(L^p) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{p}}}$.

对于 Kottman 常数的研究，还有下面结果:

1.对任意无穷维 Banach 空间 X，有 $K(X) > 1$.(见 [30])

若 X 是自反的，则 $1 < K(X) \leq 2$.(见 [52])

2.如果 X 是一致凸空间，或一致光滑空间，则 $K(X) < 2$ (见 [28]). 而对一致非方空间“ $K(X) < 2$ ”则不一定成立。(见 [53])

3.如果 X 包含子空间与 l^1 或 c_0 同构，则 $K(X) = 2$. $K(X) < 2$ 不蕴含自反性。(见 [28])

4.如果 X 不是自反的，则 $K(X) > 4^{\frac{1}{5}}$.(见 [54])

5.设 X是非自反的 Banach 格，则有 $K(X) = 2$，$P(X) = \dfrac{1}{2}$. (见 [55])

6.设 $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} l^{p_i}$ 是 Hilbert 直和空间，则 X 是自反的，且 $K(X) = 2$. (见 [55])

关于该常数的进一步讨论，可参见[56].

四. Banach 空间的单调系数

单调性在 Banach 格中的作用类似于凸性在 Banach 空间的作用, 在误差估计、逼近论和遍历性理论中有广泛的应用。 Banach 格的严格单调性和一致单调性的概念是由 G. Birkhoff[57] 引入的。

定义 1.13 [57] 称 Banach 格 X 是一致单调的，是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，满足对任意 x， $y \in X^+$, $\|x\| = 1$，$\|y\| \geq \varepsilon$，都有$\|x+y\| > 1+\delta(\varepsilon)$. 其中 X^+ 表示 X 的正锥。

1985 年, M. N. Akcoglu 和 L. Sucheston [58]讨论了该性质在遍历性理论中的应用.

显然，一致单调的 Banach 空间是序连续的 (是指对任意 $\{x_n\} \subset X$, $0 \leq x_n \downarrow 0$ 蕴含 $\|x_n\| \to 0$)，且单调完备的 (是指对 X 的任意非负单调降序列 $\{x_n\}$, $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ 蕴含 $\sup_n x_n < +\infty$).

定义 1.14 [57] 称 Banach 格 X 是严格单调的，是指对任意 x，$y \in X^+$ 满足 $\|x\| = 1$， $\|y\| > 0$，都有 $\|x+y\| > 1$.

易知，一致单调性蕴含严格单调性。 $L^p(1 \leq p < \infty)$ 是一致单调的，而 L^∞ 甚至不是严格单调的。

1992 年，W. Kurc[59]得到凸性与单调性的关系。

定理 1.10 [59] 如果 Banach 空间 X 是一致凸的，则 X 是一致单调的；如果 X 是严格凸的，则 X 是严格单调的。

2000年，H. Hudzik、A. Kamińska 及 M. Mastyło [60] 进一步刻画了 Banach 格的凸性与单调性的关系。

1993 年，W. Kurc[61]得到了单调性与序光滑性的关系。

定义 1.15 Banach 格 X 的序光滑模定义为

$$\rho_X(t) = \sup\{\, \|x \vee ty\| - 1 :\ x,\ y \in B(X),\ x,\ y \geq 0\}$$

其中 $t \in [0,1]$.

称 X 是序一致光滑的，如果$\lim_{t\to 0} \rho_X(t)/t = 0$.

定理 1.11 [61]设 X 是 Banach 格。

(1) 如果 X^* 是严格单调的，则 X 是序严格光滑的；如果 X^* 是严格光滑的，则 X 是严格单调的。

(2) X 是一致单调的当且仅当 X^{**} 是一致单调的。

(3) X 是一致单调的当且仅当 X^* 是序一致光滑的。

(4) X^* 是一致单调的当且仅当 X 是序一致光滑的。

定理 1.12 [61] 如果 Banach 格 X 是一致光滑的且是一致单调的，则 X 是超自反的。

1998 年, H. Hudzik 和 W. Kurc [62] 从一致单调的概念衍生出局部一致单调概念。

定义 1.16 [62] 设 X 是 Banach 格，$x \in S(X^+)$. 称 x 是上 (下) 局部一致单调点，是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(x,\varepsilon) > 0$，使得

$$\|x+y\| > 1+\delta(x,\varepsilon) \quad (\|x-y\| \le 1-\delta(x,\varepsilon))$$

对任意 $y \in X^+ (\ 0 \le y \le x)$， $\|y\| \ge \varepsilon$ 都成立。如果 $S(X^+)$ 上每个点都是上 (下) 局部一致单调点，则称 X 是上 (下) 局部一致单调的。

2003 年，T. Dominguez[63]等证明了下局部一致单调性也蕴含序连续性。

2005 年，H. Hudzik 与 A. Narloch[64]讨论了 Köthe 序列空间的单调性与复凸性的关系。

定理 1.13 [64] 设 X 是实 Köthe 空间，则 X^C 是复严格凸的当且仅当 X 是严格单调的。其中 $X^C = \{x+iy : x, y \in X\}$, 其范数为 $\|x+iy\|_{X^C} = \|(|x|^2+|y|^2)^{\frac{1}{2}}\|_X$.

定理 1.14 [64] 设 X 是实 Köthe 空间，则 X^C 是复一致凸的当且仅当 X 是一致单调的。

2005 年，H. J. Lee[65]进一步讨论了一般 Banach 格的单调性与复凸性之间的关系。

定理 1.15 [65] 设 X 是序连续的 Banach 格，则 X^C 是复严格凸的当且仅当 X 是严格单调的。

定理 1.16 [65] 设 X 是 Banach 格，则 X^C 是复一致凸的当且仅当 X 是一致单调的。

W. Kurc[59]及 H. Hudzik[62]将单调性应用于最佳逼近理论中。

设 $f \in X$，$K \subset X$ 是非空集合。K 上的最佳逼近算子定义为

$$P_K(f) = \{u \in K : \|f-u\| = \inf_{h\in K} \|f-h\|\}$$

定理 1.17 [59] 设 X 是 Banach 格, 下列命题等价:

(1) X 是严格单调的。

(2) 对任意 $f \in X$ 及序区间 $[a,b] \subset X$ 满足 $f \ge [a,b]$，有 $\mathrm{Card}(P_{[a,b]}(f)) \le 1$.

(3) 对任意 $f \in X$ 及子格 $K \subset X$ 满足 $f \ge K$，有 $\mathrm{Card}(P_K(f)) \le 1$.

定理 1.18 [62] Banach 格 X 是序连续的且有严格单调性当且仅当对 X 的任意闭子格 K 及任意 $f \in X$ 满足 $f \ge K$，有 $\mathrm{Card}(P_K(f)) = 1$.

定理 1.19 [62] 如果 Banach 格 X 是下局部一致单调的，则对 X 的任意闭子格 K 及任意 $f \in X$ 满足$f \ge K$, 有 $\mathrm{Card}(P_K(f)) = 1$.

定理 1.20 [62] 设 X 是序连续的 Banach 格且有上局部一致单调性，则对 X 的任意闭子格 K 及任意 $f \in X$ 满足 $f \geq K$，有 $\mathrm{Card}(P_K(f)) = 1$，且对 K 的任意极小化序列 $\{x_n\}$，有$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(x_n, P_K(f)) = 0$.

2009年，陈述涛、贺鑫[66]进一步讨论了上述问题，改进了结论，得到了较好的结果。

2008 年，A. Betiuk-Pilarska 与 S. Prus[67] 证明了单调性与不动点性质的关系。

定义 1.17 称 Banach 空间 X 为弱正交的，是指对 X 的任意弱收敛于零的序列 $\{x_n\}$ 及任意 $x \in S(X)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \|x_n + x\| - \|x_n - x\| \Big| = 0$$

定理 1.21 [67] 设 X 是弱正交的，且具有一致单调性，则 X 有弱正规结构，进而有弱不动点性质。

对 $\varepsilon \in [0,1]$，定义

$$\eta_X(\varepsilon) = \inf\{\|x + y\| - 1 : x, y \in X^+, \|x\| = 1, \|y\| \geq \varepsilon\}$$

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x - y\| : x \geq y \geq 0, \|x\| = 1, \|y\| \geq \varepsilon\}$$

分别称为 X 的上单调模和下单调模。

1993 年，W. Kurc[61]得出了两者的关系：

$$\delta_X(\varepsilon) = \frac{\eta_X(\varepsilon)}{1 + \eta_X(\varepsilon)} \quad (\forall\, \varepsilon \in [0,1))$$

易知，X 是一致单调的当且仅当对任意 $\varepsilon \in (0,1]$，都有 $\eta_X(\varepsilon) > 0$ 或 $\delta_X(\varepsilon) > 0$; X 是严格单调的当且仅当 $\delta_X(1) = 1$. 单调模 η_X 是 $[0,1]$ 非降的凸函数，且在 $[0,1)$ 上连续 (见 [61]).

进一步地，定义

$$\varepsilon_m(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,1] : \eta_X(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in [0,1] : \eta_X(\varepsilon) > 0\}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_m(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,1] : \delta_X(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in [0,1] : \delta_X(\varepsilon) > 0\}$$

分别称为 X 的上单调系数和下单调系数。

2009 年，H. Hudzik 和 R. Kaczmarek[68]证明了

$$\widetilde{\varepsilon}_m(X) \leq \varepsilon_m(X) \leq 2\widetilde{\varepsilon}_m(X)$$

易见， Banach 格 X 是一致单调的当且仅当 $\varepsilon_m(X) = \widetilde{\varepsilon}_m(X) = 0$.

对任意 $x \in S(X^+)$，对任意 $\varepsilon \in [0,1]$,

$$\eta_x(\varepsilon) = \inf\{\|x + y\| - 1 : y \in X^+, \|y\| \geq \varepsilon\}$$

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x - y\| : 0 < y \leq x, \|y\| \geq \varepsilon\}$$

分别称为 x 的上、下局部单调模。

$$\varepsilon_m(x) = \sup\{\varepsilon \in [0, 1] : \eta_x(\varepsilon) = 0\}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_m(x) = \sup\{\varepsilon \in [0, 1] : \delta_x(\varepsilon) = 0\}$$

分别称为 x 的上、下局部单调系数。显然，x 是上局部一致单调点当且仅当 $\varepsilon_m(x) = 0$, x 是下局部一致单调点当且仅当 $\widetilde{\varepsilon}_m(x) = 0$.

关于单调模与单调系数的更多讨论，可参阅文献[68–70]

五. 广义 Orlicz 空间

设映射 $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. 定义

$$a_\Phi = \max\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\},\ b_\Phi = \max\{u \geq 0 : \Phi(u) < \infty\}.$$

定义 1.18 称映射 Φ 是 Orlicz 函数，如果 $\Phi(0) = 0$，Φ 不恒等于零, Φ 是区间 $(-b_\Phi, b_\Phi)$ 上的偶的、凸函数，在 b_Φ 左连续。

称 Orlicz 函数 Φ 是 N-函数，如果 Φ 仅在零点处为零，且满足

$$\lim_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0,\ \lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$$

对任意 Orlicz 函数 Φ，定义其余函数 $\Psi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ 如下，

$$\Psi(v) = \sup\{u|v| - \Phi(u) : u \geq 0\}$$

则 Ψ 也是 Orlicz 函数。

定义 1.19 [26, 71, 72] 设 $(T, \sum, \mu)$ 是无原子测度空间。 L_0 是 μ- 几乎处处可测函数等价类全体。 Orlicz 函数空间定义为

$$L_\Phi = \{x \in L_0 :\ \text{存在}\ \lambda > 0,\ I_\Phi(\lambda x) = \int_T \Phi(\lambda x(t))dt < \infty\}.$$

赋予 Luxemburg 范数

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0 :\ I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\}$$

及 Orlicz 范数

$$\|x\|_\Phi^\circ = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kx)) = \sup\left\{ \int_T x(t)y(t)\mathrm{d}t : I_\Psi(y) \leq 1\right\}$$

Orlicz 函数空间 L_Φ 赋 Luxemburg 范数及 Orlicz 范数，分别记做 $L_\Phi = (L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$、$L_\Phi^\circ = (L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^\circ)$. 可证 L_Φ, L_Φ° 都是 Banach 空间（见[24]).

类似的，可定义Orlicz序列空间：

$$l_\Phi = \{x = (x(i)):\ \text{存在}\lambda > 0,\ I_\Phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(\lambda x(i)) < \infty\}.$$

Orlicz 序列空间 l_Φ 赋 Luxemburg 范数及 Orlicz 范数，分别记做 $l_\Phi = (l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$、$l_\Phi^\circ = (l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^\circ)$. 可证 l_Φ, l_Φ° 都是 Banach 空间。

定义 1.20 [26] 称 $\Phi \in \Delta_2(0)$ ($\Phi \in \Delta_2(\infty)$)，是指存在 $K \geq 2$ 及 $u_0 > 0$ 满足 $\Phi(u_0) > 0$ ($\Phi(u_0) < \infty$)，都有

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$$

对任意 $|u| \leq u_0$ ($|u| \geq u_0$) 成立。

关于 Orlicz 空间理论的介绍可参阅文献[23–26, 71–73].

2008 年，崔云安、段丽芬、H. Hudzik 等[74]引入了 p-Amemiya 范数的概念。

对任意 $1 \leq p \leq \infty$ 及 $u \geq 0$，定义

$$s_p(u) = \begin{cases} (1 + u^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{当 } 1 \leq p < \infty \text{ 时} \\ \max\{1, u\}, & \text{当 } p = \infty \text{ 时} \end{cases}$$

令 $s_{\Phi,p}(x) = s_p \circ I_\Phi(x)\ \ (1 \leq p \leq \infty)$.

易证 s_p 及 $s_{\Phi,p}$ 是凸函数，当 $1 \leq p < \infty$ 时，s_p 是 $\mathbb{R}_+$ 上的增函数，当 $p = \infty$ 时，s_∞ 仅在 $[1, \infty)$ 上是增函数。

定义 1.21 [74, 75] 设 $1 \leq p \leq \infty$. 对任意 x，定义 p-Amemiya 范数如下：

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} s_{\Phi,p}(kx).$$

赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间及 Orlicz 序列空间分别记做 $L_{\Phi,p} = (L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p})$，$l_{\Phi,p} = (l_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p})$.

文献 [74] 证明了 p-Amemiya 范数 $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ 与 Orlicz 范数 $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ 及 Luxemburg 范数 $\|\cdot\|_\Phi$ 均是等价的：当 $p = 1$ 时，p-Amemiya 范数等于 Orlicz 范数，当 $p = \infty$ 时，p-Amemiya 范数等于 Luxemburg 范数，即 $\|x\|_{\Phi,1} = \|x\|_\Phi^\circ$，$\|x\|_{\Phi,\infty} = \|x\|_\Phi$. 并且对任意 $1 < p < \infty$，$x \neq 0$，有

$$\frac{1}{2}\|x\|_\Phi^\circ \leq \|x\|_\Phi \leq \|x\|_{\Phi,p} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|x\|_\Phi < 2^{\frac{1}{p}}\|x\|_\Phi^\circ.$$

设 p_+ 是 Φ 在 $[0, b_\Phi)$ 上的右导数，令 $p_+(b_\Phi) = \lim\limits_{u \to b_\Phi^-} p_+(u)$. 设 q_- 是 Ψ 在 $[0, b_\Phi)$ 上的左导数。定义函数 $\alpha_p : l_{\Phi,p} \to [-1, \infty]$ 为

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} I_\Phi^{p-1}(x) I_\Psi(p_+(|x|)) - 1, & 1 \leq p < \infty \\ -1, & p = \infty, I_\Phi(x) \leq 1 \\ I_\Psi(p_+(|x|)), & p = \infty, I_\Phi(x) > 1 \end{cases}$$

及函数 $k_p^*: l_{\Phi,p} \to [0,\infty)$，$k_p^{**}: l_{\Phi,p} \to [0,\infty)$ 为

$$k_p^*(x) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kx) \geq 0\} \text{ (特别地} \inf\phi = \infty)$$

$$k_p^{**}(x) = \inf\{k \geq 0 : \alpha_p(kx) \leq 0\}$$

显然对任意 $1 \leq p \leq \infty$ 及 $x \in l_{\Phi,p}$，有 $k_p^*(x) \leq k_p^{**}(x)$.

记 $K_p(x) = \{0 < k < \infty : k_p^*(x) \leq k \leq k_p^{**}(x)\}$.

我们有，$K_p(x) = \emptyset$ 当且仅当 $k_p^*(x) = k_p^{**}(x) = \infty$. 如果 $k_p^*(x) < \infty$，则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{\Phi,p}$ 在区间 $[k_p^*(x), k_p^{**}(x))$ 上是范数可达的，如果 $k_p^{**}(x) < \infty$，则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{\Phi,p}$ 在 $k_p^{**}(x)$ 是范数可达的。

如果对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，都有 $k_p^*(x) < \infty$，则称 Φ 是 k_p^*-有限的；如果对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，都有 $k_p^{**}(x) < \infty$，则称 Φ 是 k_p^{**}- 有限的；如果对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，都有 $k_p^*(x) = k_p^{**}(x) < \infty$，则称 Φ 是 k_p^*-惟一的。

2008 年，崔云安等[74] 讨论了 p-Amemiya 范数的可达问题；还刻画了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,p}$ 的端点，给出了 $L_{\Phi,p}$ 具有严格凸性的充分必要条件。

2009 年，崔云安，H.Hudzik等 [75]进一步刻画了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,p}$ 的强端点。

定理 1.22 [75] 设 Φ 是 Orlicz 函数, $b_\Phi < \infty$.

(1) 如果 $\Phi(b_\Phi) = \infty$，则 $\mathrm{SExt}B(L_{\Phi,p}) = \emptyset$.

(2) 如果 $\Phi(b_\Phi) < \infty$， $\mathrm{SExt}B(L_{\Phi,p}) = \{x \in S(L_{\Phi,p}) : k_p^*(x)|x| = b_\Phi\chi_T\}$.

其中 $\mathrm{SExt}B(X)$ 表示 $B(X)$ 的强端点的全体。

定理 1.23 [75] 设 Φ 是 Orlicz 函数，$x \in S(L_\Phi)$，则 x 是 $B(L_\Phi)$ 的强端点当且仅当下列条件成立：

(1) x 是 $B(L_\Phi)$ 的端点，且

(2) 或者 $|x| = b_\Phi(s_{\Phi,p}(b_\Phi\chi_T))^{-1}\chi_T$，或者

(3) $I_\Phi(kx) \geq \chi_{\{\infty\}}(p)$，且下列条件至少之一成立

(i) $a_\Phi > 0$ 且 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$，或

(ii) $\Phi \in \Delta_2(\mu)$.

定理 1.24 [75] 设 Φ 是 Orlicz 函数，$1 \leq p \leq \infty$, $b_\Phi = \infty$，$\mathrm{SExt}B(L_{\Phi,p}) \neq \emptyset$. 则 $\mathrm{SExt}B(L_{\Phi,p}) = ExtB(L_{\Phi,p})$.

2012 年，崔云安[76]等给出了空间 $L_{\Phi,p}$ 具有非方性、一致非方性、局部一致非方性的判别条件。

陈丽丽和崔云安[77, 78]分别于 2010 年和 2011 年讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,p}$ 及序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的复端点与复强端点，给出了空间具有复严格凸性与复中点局部一致凸性的充分必要条件。

文献[74–76]中分别举例说明了 p-Amemiya 范数在 $1 < p < \infty$ 的情况与 $p = 1$ 及 $p = \infty$ 的情况确有不同之处。

例 1.1 [74, 75] 设 $\Phi(u) = |u| - \arctan|u|$，则

(1)当 $1 < p \le \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 是严格凸的，且是中点局部一致凸的。

(2)当 $p = 1$ 时，$L_{\Phi,p}$ 不是严格凸的，也不是中点局部一致凸的。

例 1.2 [74] 设 $\mu(T) = \infty$，$\Phi(u) = \begin{cases} |u|e^{-\frac{1}{|u|}}, u \neq 0 \\ 0, \quad u = 0 \end{cases}$

(1)当 $1 < p < \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 是严格凸的；

(2)当 $p = 1$ 及 $p = \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 不是严格凸的。

例 1.3 [76] 设 $\Phi(u) = \max\{0, e^u - e\}$，$2e^{-1} \le \mu(T) < \infty.$

(1)当 $1 < p < \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 是非方的。

(2)当 $p = 1$ 及 $p = \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 不是非方的。

以上几种性质分别在 $p = 1, 1 < p < \infty, p = \infty$ 几种情况下的判据的详细比较可见下表。

	$p=1$	$1<p<\infty$	$p=\infty$
Φ是k_p^*-有限	Φ在∞没有渐近线	Φ 在 $[0,\infty)$ 非线性	无条件成立
Φ是k_p^{**}-有限	Φ在∞ 没有渐近线	Φ 在 $[0,\infty)$ 非线性	Φ 在 $[0,\infty)$ 非线性
Φ是k_p-惟一	(1)Φ在$[a,b_\Phi)$严格凸 或 $a=b_\Phi$ (2)Φ在∞没有渐近线	Φ 在 $[0,\infty)$ 非线性	任意 $\varepsilon>0$, 有 Φ 在 $[0,b+\varepsilon]$ 非线性
$x\in S(L_{\Phi,p})$ 是端点	(1)$k_1^*=k_1^{**}<\infty$ (2)$k_1^*x(t)\in SC_\Phi$ $(\mu-a.e.)$	(1)$k_p^*=k_p^{**}<\infty$ (2)$k_p^*x(t)\in SC_\Phi$ $(\mu-a.e.)$	(1) $I_\Phi(x)=1$ (2) $x(t)\in SC_\Phi$ 或 $\lvert x(t)\rvert=b_\Phi$ $(\mu-a.e.)$
$L_{\Phi,p}$是 严格凸	(1)Φ是k_p惟一的 (2)Φ在$(-b_\Phi,b_\Phi)$ 严格凸	Φ在$(-b_\Phi,b_\Phi)$ 严格凸	(1)Φ在$(-b_\Phi,b_\Phi)$ 严格凸 (2)$\Phi\in\Delta_2(\mu)$
$L_{\Phi,p}$是中点 局部一致凸	(1)$L_{\Phi,p}$是严格凸 (2)$\Phi\in\Delta_2(\mu)$	同左	$L_{\Phi,p}$是严格凸
$L_{\Phi,p}$是非方	(1)Φ是k_1^*-有限 (2)$a_\Phi<b_\Phi$ (3)$a_\Phi\mu(T)<\infty$ (4)$\Psi(d_\Phi)\mu(T)<2$	(1)Φ 是k_p^*-有限 (2)$a_\Phi<b_\Phi$ (3)$a_\Phi\mu(T)<\infty$	(1)$a_\Phi<b_\Phi$ (2)$a_\Phi\mu(T)<\infty$ (3)$\Phi(d_\Phi)\mu(T)<2$ (4)$\Phi\in\Delta_2(\mu)$
$L_{\Phi,p}$是局部 一致非方	(1)$L_{\Phi,p}$是非方 (2)$\Psi(d_\Phi)\mu(T)<1$ 或 (3)$1\le\Psi(d_\Phi)\mu(T)<2$, 且$\Phi\in\Delta_2(\mu)$	$L_{\Phi,p}$是非方	$L_{\Phi,p}$是非方
$L_{\Phi,p}$是 一致非方	(1)$(a_\Phi+a_\Psi)\mu(T)<\infty$ (2)Φ, $\Psi\in\Delta_2(\mu)$ (3)$\Phi(d_\Phi)\mu(T)+$ $\Psi(d_\Phi)\mu(T)<2$	(1)$(a_\Phi+a_\Psi)\mu(T)<\infty$ (2)Φ, $\Psi\in\Delta_2(\mu)$	同 $p=1$ 情况

其中

$$a=\sup\{u\ge 0:\ \Psi(p_+(u))\mu T<1\},\quad b=\inf\{u\ge 0:\ \Phi(u)\mu T>1\}$$

$$a_\Psi=\sup\{u\ge 0:\ \Psi(u)=0\},\quad d_\Phi=\sup\{u\ge 0:\ \Phi \text{ 在 } [0,u] \text{ 是线性的}\}$$

由于赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间与赋 Orlicz 范及 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间有许多不同之处，因此，对于赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的讨论需要新的技巧与方法。目前，对于赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间，很多性质如一致凸性和光滑性等的判据尚未得到，诸多性质还有待进一步研究。

1.3 本文的主要工作

本文的主要内容和结构如下：

第二章讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的 Opial 模的计算公式；进一步，给出 $l_{\Phi,p}$ 具有一致 Opial 性质、局部一致 Opial 性质、Opial 性质、正 Opial 性质的充分必要条件。

第三章主要讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的弱收敛序列系数的计算公式，进而给出 $l_{\Phi,p}$ 具有弱一致正规结构的充分必要条件；进一步讨论 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质的充分必要条件。

第四章讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的装球常数及 Kottman 常数的值，并利用此结果计算 l^p 空间的装球常数；进一步讨论 $l_{\Phi,p}$ 的自反性与装球常数的关系。

第五章考虑赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的单调性，得到 $l_{\Phi,p}$ 具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件；进一步计算 $l_{\Phi,p}$ 的单调系数与单位球面上的点的局部单调系数。

第六章考虑赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调性，首先给出 $L_{\Phi,p}$ 具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件；其次，利用单调性讨论最佳逼近问题；最后，讨论 $L_{\Phi,p}$ 的单调系数与单位球面上的点的局部单调系数。

第 2 章 Orlicz 序列空间的 Opial 模

在本章，我们将讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的 Opial 模的计算公式，寻求赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间具有 Opial 性质、一致 Opial 性质的判据。

2.1 预备知识

1996 年，王廷辅、崔云安[79]给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间具有 Opial 性质的充要条件。1999 年，崔云安、H. Hudzik[80]进一步讨论了 Musielak-Orlicz 空间，给出了赋 Luxemburg 的 Musielak-Orlicz 序列空间具有 Opial 性质、一致 Opial 性质的充要条件。2003 年，崔云安等[81]给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间 Opial 模的准确表达式，以及具有一致 Opial 性质的充分必要条件。

引理 2.1 [76] 设 $1 \le p \le \infty$. 对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，$\|x\|_{\Phi,p} \le 1$ 蕴含 $I_\Phi(x) \le \|x\|_{\Phi,p}$.

引理 2.2 [74] 设 $1 \le p \le \infty$，$x \in l_{\Phi,p}\backslash\{0\}$，下列成立：

1. 如果 $k_p^*(x) = k_p^{**}(x) = \infty$，$K_p(x) = \phi$，则$\|x\|_{\Phi,p} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}$.
2. 如果 $k_p^*(x) < k_p^{**}(x) = \infty$，则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{\Phi,p}$ 在 $k \in [k_p^*(x), \infty)$ 是可达的。
3. 如果 $k_p^{**}(x) < \infty$，则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{\Phi,p}$ 在 $k \in [k_p^*(x), k_p^{**}(x)]$ 是可达的。

引理 2.3 设 $\Phi \in \Delta_2(0)$，$1 \le p < \infty$. 则对任意 $L > 0$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 满足

$$I_\Phi(x) \le L, I_\Phi(y) \le \delta \Rightarrow |I_\Phi^p(x+y) - I_\Phi^p(x)| < \varepsilon \quad (x,\ y \in l_{\Phi,p})$$

证明： 记

$$h = \sup\{I_\Phi(2x+2y) : I_\Phi(x) \le L, I_\Phi(y) \le 1\}$$

由 $\Phi \in \Delta_2(0)$，有 $L < h < \infty$. 不失一般性，我们设 $L > 1$，$\varepsilon < 1$. 令 $\beta = \dfrac{\varepsilon}{h^p}$. 由于模收敛蕴含范数收敛，因此存在 $\delta > 0$，使得 $I_\Phi(y) \le \delta$ 蕴含 $\|y\|_{\Phi,p} \le \min\left\{\dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\beta^{1-\frac{1}{p}}}{2}\right\}$. 于是由 Φ 的凸性及引理 2.1，有

$$
\begin{aligned}
I_\Phi^p(x+y) &= I_\Phi^p((1-\beta)x+\beta(x+\beta^{-1}y)) \\
&\le (1-\beta)I_\Phi^p(x)+\beta I_\Phi^p(x+\beta^{-1}y) \\
&\le (1-\beta)I_\Phi^p(x)+\frac{\beta}{2}I_\Phi^p(2x)+\frac{\beta}{2}I_\Phi^p(2\beta^{-1}y) \\
&\le (1-\beta)I_\Phi^p(x)+\frac{\beta}{2}I_\Phi^p(2x)+\frac{\beta}{2}\|2\beta^{-1}y\|_{\Phi,p}^p \\
&\le I_\Phi^p(x)+\frac{\beta h^p}{2}+\frac{2^{p-1}}{\beta^{p-1}}\|y\|_{\Phi,p}^p \\
&\le I_\Phi^p(x)+\varepsilon
\end{aligned}
$$

在上述不等式中用 $x+y$，$-y$ 分别替换 x，y，有

$$I_\Phi^p(x) \le I_\Phi^p(x+y)+\varepsilon$$

□

引理 2.4 [82] $l_{\Phi,p}$ 是自反的当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(0)$ 且 $\Psi \in \Delta_2(0)$.

引理 2.5 设 $1 \le p < \infty$. $l_{\Phi,p}$ 有子空间同构于 l^1 当且仅当 $e_\Phi > 0$，其中 $e_\Phi = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}$.

证明： 因为函数 $\dfrac{\Phi(u)}{u}$ 是非降的，故 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}$ 存在。

如果 $e_\Phi > 0$，由 $\dfrac{\Phi(u)}{u}$ 的连续性，存在 $M_0 > 0$ 满足

$$e_\Phi|u| \le \Phi(u) \le M_0|u| \quad (|u| \in [0,\Phi^{-1}(1)])$$

于是 $\Phi \in \Delta_2(0)$.

对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，有$I_\Phi\left(\dfrac{x}{\|x\|_\Phi}\right) = 1$，故$\dfrac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi} \in [0,\Phi^{-1}(1)] \quad (i \in \mathbb{N})$, 所以，

$$e_\Phi\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi} \le \Phi\left(\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi}\right) \le M_0\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi}$$

从而

$$e_\Phi\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi} \le \sum_{i=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi}\right) \le M_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x(i)|}{\|x\|_\Phi}$$

于是 $e_\Phi\|x\|_{l^1} \le \|x\|_\Phi \le M_0\|x\|_{l^1}$. 这个不等式说明 l^1 范数与 Luxemburg 范数等价，从而与 p-Amemiya 范数等价，故 $l_{\Phi,p}$ 有子空间与 l^1 同构。 □

因此，如果 $e_\Phi > 0$，则 $l_{\Phi,p}$ 有 Schur 性质及 Opial 性质，因为此时 $S(l_\Phi)$ 没有弱收敛于零的序列。所以在接下来讨论 Opial 模及弱收敛序列系数时，我们均假设 $e_\Phi = 0$.

由于当 $p=1$ 时， p-Amemiya 范数等于 Orlicz 范数，当 $p=\infty$ 时，p-Amemiya 范数等于 Luxemburg 范数，而对于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间，其 Opial 模、弱收敛序列系数以及单调系数等均已讨论，因此本文以下若不特别强调，均讨论 $1\le p<\infty$ 的情况。

2.2 $l_{\Phi,p}$ 的 Opial 模

接下来，我们讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的 Opial 模，给出其准确表达式。

定理 2.1 设 Φ 是 Orlicz 函数，满足 $\Delta_2(0)$ 条件，则对任意 $\varepsilon\in(0,1]$，我们有

$$\delta_o(\varepsilon)=\inf\{c_{xyk}>0: I_\Phi\left(\frac{kx}{c_{xyk}}\right)+I_\Phi\left(\frac{ky}{c_{xyk}}\right)=(k^p-1)^{\frac{1}{p}},$$
$$k>1,\|x\|_{\Phi,p}=1,\|y\|_{\Phi,p}=\varepsilon,x,y\in l_{\Phi,p}\}$$

证明： 记 $d(\varepsilon)=\inf\{c_{xyk}>0: I_\Phi\left(\frac{kx}{c_{xyk}}\right)+I_\Phi\left(\frac{ky}{c_{xyk}}\right)=(k^p-1)^{\frac{1}{p}},k>1,\|x\|_{\Phi,p}=1,\|y\|_{\Phi,p}=\varepsilon,x,y\in l_{\Phi,p}\}$.

(1)对于固定的 $k>1$，考虑函数

$$F(c)=I_\Phi\left(\frac{kx}{c}\right)+I_\Phi\left(\frac{ky}{c}\right)$$

易知 F 是$\mathbb{R}^+$上的连续函数。因为

$$1=\|x\|_{\Phi,p}\le\frac{1}{k}(1+I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}$$

所以 $I_\Phi^p(kx)\ge k^p-1$ ($k>0$)，于是

$$F(1)=I_\Phi(kx)+I_\Phi(ky)>(k^p-1)^{\frac{1}{p}}$$

又因为 $\lim\limits_{c\to+\infty}F(c)=0$，因此存在唯一的 $c_{xyk}\in(1,+\infty)$，使得

$$F(c_{xyk})=I_\Phi\left(\frac{kx}{c_{xyk}}\right)+I_\Phi\left(\frac{ky}{c_{xyk}}\right)=(k^p-1)^{\frac{1}{p}}$$

这说明函数 $d(\varepsilon)$ 是有定义的。

(2)接下来我们将证明：对任意 $\varepsilon\in(0,1]$，都有 $\delta_o(\varepsilon)\le d(\varepsilon)$ 成立。由 $d(\varepsilon)$ 的定义，对任意 $\theta>0$，存在 $x_0,y_0\in X$ 及 $k_0>1$ 满足 $\|x_0\|=1$，$\|y_0\|=\varepsilon$，都有$d(\varepsilon)+\theta>c_{x_0y_0k_0}$. 定义

$$x=(y_0(1),0,y_0(2),0,y_0(3),0,y_0(4),0,\ldots)$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_0(i+1)e_{2n+2^n i},\ (n = 1, 2, \ldots)$$

则 $\|x_n\|_{\Phi,p} = \|x_0\|_{\Phi,p} = 1, \|x\|_{\Phi,p} = \|y_0\|_{\Phi,p} = \varepsilon$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = 0 \quad (\forall\ i \in \mathbb{N})$.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(x(i)) < \infty$，则存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{i=i_0+1}^{\infty} \Phi(x(i)) < \theta$. 对于固定的 i_0，因为 $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\Phi(u)}{u} = 0$，于是

$$\lim_{l\to 0} \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{i_0} \Phi(lx(i)) = \lim_{l\to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\Phi(lx(i))}{l|x(i)|}|x(i)| = \sum_{i=1}^{i_0} \lim_{l\to 0} \frac{\Phi(lx(i))}{l|x(i)|}|x(i)| = 0$$

所以对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及充分小的 $l \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{I_\Phi(lx_n)}{l} &= \frac{I_\Phi(lx)}{l} \\
&= \frac{1}{l}\left(\sum_{i=1}^{i_0} \Phi(lx(i)) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \Phi(lx(i))\right) \\
&\le \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{i_0} \Phi(lx(i)) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \Phi(x(i)) \\
&< 2\theta
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{l\to 0} \dfrac{I_\Phi(lx_n)}{l} = 0.$

取任意 $f \in l_{\Psi,q}$，则存在 $\lambda > 0$ 满足 $I_\Psi(\lambda f) < \infty$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \inf(\operatorname{supp} x_n) = \infty$$

进一步根据 Young 不等式，有

$$|f(x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i)f(i)\right| \le \frac{1}{l\lambda}(I_\Phi(lx_n) + I_\Psi(\lambda f \chi_{\operatorname{supp} x_n})) \to 0 \quad (\ n \to \infty\ )$$

因此 x_n 弱收敛于零。

由于 x 与 x_n的支集互不相交，于是

$$\begin{aligned}
&\frac{\|x_n + x\|_{\Phi,p}}{d(\varepsilon) + \theta} \\
&\le \frac{1}{k_0}\left(1 + I_\Phi^p\left(\frac{k_0(x_n + x)}{d(\varepsilon) + \theta}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{k_0}\left(1 + \left(I_\Phi\left(\frac{k_0 x_n}{d(\varepsilon) + \theta}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 x}{d(\varepsilon) + \theta}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{1}{k_0}\left(1 + \left(I_\Phi\left(\frac{k_0 x_n}{c_{xx_nk_0}}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_0 x}{c_{xx_nk_0}}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

所以 $\|x_n + x\|_{\Phi,p} \le d(\varepsilon) + \theta$，由 $\theta > 0$ 的任意性可得 $\delta_o(\varepsilon) \le d(\varepsilon)$.

(3)假设存在 $\varepsilon \in (0,1]$ 使得 $\delta_o(\varepsilon) < d(\varepsilon)$. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\delta_o(\varepsilon) \le d(\varepsilon) - 2\varepsilon_0$，进而存在 $x \in l_{\Phi,p}$ 及 $(x_n) \subseteq S(l_{\Phi,p})$ 满足 $\|x\|_{\Phi,p} = \varepsilon, x_n$ 弱收敛于零，且

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\|_{\Phi,p} < d(\varepsilon) - 2\varepsilon_0$$

对固定的 $\frac{\varepsilon_0}{4}$，存在 i_0, 使得对于充分大的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} x(i)e_i\right\|_{\Phi,p} < \frac{\varepsilon_0}{4}, \left\|\sum_{i=1}^{i_0} x_n(i)e_i\right\|_{\Phi,p} < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

记

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_0} x(i)e_i\right\|_{\Phi,p} = a, \left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} x_n(i)e_i\right\|_{\Phi,p} = b_n$$

定义

$$y = \left(\frac{\varepsilon x(1)}{a}, \frac{\varepsilon x(2)}{a}, \ldots, \frac{\varepsilon x(i_0)}{a}, 0, 0, \ldots\right)$$

$$y_n = \left(0, 0, \ldots 0, \frac{x_n(i_0+1)}{b_n}, \frac{x_n(i_0+2)}{b_n}, \ldots, \frac{x_n(i_0+m)}{b_n}, \ldots\right)$$

则 $\|y\|_{\Phi,p} = \varepsilon$，$\|y_n\|_{\Phi,p} = 1$，$\{y_n\}$ 弱收敛于零。于是对充分大的 n，我们有

$$\begin{aligned}
&\|y_n + y\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{x_n(i)}{b_n} e_i - x_n\right\|_{\Phi,p} + \left\|\sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon}{a} x(i)e_i - x\right\|_{\Phi,p} + \|x_n + x\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\|\sum_{i=1}^{i_0} x_n(i)e_i\right\|_{\Phi,p} + |1 - b_n| + \left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} x(i)e_i\right\|_{\Phi,p} + |\varepsilon - a| + d(\varepsilon) - 2\varepsilon_0 \\
\le &2\left\|\sum_{i=1}^{i_0} x_n(i)e_i\right\|_{\Phi,p} + 2\left\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} x(i)e_i\right\|_{\Phi,p} + d(\varepsilon) - 2\varepsilon_0 \\
< &d(\varepsilon) - \varepsilon_0
\end{aligned}$$

(i).如果 $A = \left\{n \in \mathbb{N} : K_\Phi\left(\frac{y_n + y}{d(\varepsilon)}\right) \neq \phi\right\}$ 是无穷集，则对任意 $n \in A$，取 $k_n \in K_\Phi\left(\frac{y_n + y}{d(\varepsilon)}\right)$，有

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\varepsilon_0}{d(\varepsilon)} &\ge \frac{\|y_n + y\|_{\Phi,p}}{d(\varepsilon)} \\
&= \frac{1}{k_n}\left(1 + I_\Phi^p\left(\frac{k_n(y_n + y)}{d(\varepsilon)}\right)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_n}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{k_n y_n}{d(\varepsilon)}\right)+I_\Phi\left(\frac{k_n y}{d(\varepsilon)}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{k_n}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{k_n y_n}{c_{y_n y k_n}}\right)+I_\Phi\left(\frac{k_n y}{c_{y_n y k_n}}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

矛盾。

(ii). 如果 $B=\left\{n\in\mathbb{N}: K_\Phi\left(\frac{y_n+y}{d(\varepsilon)}\right)=\phi\right\}$ 是无限集，则对任意 $n\in B$，

$$
\begin{aligned}
1-\frac{\varepsilon_0}{d(\varepsilon)} &\geq \frac{\|y_n+y\|_{\Phi,p}}{d(\varepsilon)} \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\left(1+I_\Phi^p\left(\frac{l(y_n+y)}{d(\varepsilon)}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{l y_n}{d(\varepsilon)}\right)+I_\Phi\left(\frac{l y}{d(\varepsilon)}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{l y_n}{c_{y_n y l}}\right)+I_\Phi\left(\frac{l y}{c_{y_n y l}}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

同样矛盾。综上两种情况可得 $\delta_o(\varepsilon)=d(\varepsilon)$. □

推论 2.1 当 Φ 是 N-函数，且 $p=1$ 时，上述定理即得到 Orlicz 序列空间赋 Orlicz 范数的 Opial 模的计算公式（可参见文献[81]), 因此 Orlicz 空间赋 Orlicz 范数的 Opial 模是赋 p-Amemiya 范数的特殊情况。

2.3　$l_{\Phi,p}$ 的 Opial 性质

接下来，我们来考虑赋 p-Amemiya 的 Orlicz 序列空间的 Opial 性质、一致 Opial 性质。

定义 2.1 称 Banach 格 X 具有正 Opial 性质，如果对任意弱收敛于零的序列 $\{x_n\}\subset X^+$ 及 $x\in X^+$, 都有 $\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|<\liminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|$.

命题 2.1 $l_{\Phi,p}$ 具有正 Opial 性质的充要条件是 $a_\Phi=0$.

证明: 充分性. 设 $a_\Phi=0$. 任取 $\{x_n\}\subset(l_{\Phi,p})^+$ 及 $x\in(l_{\Phi,p})^+$，满足 $x\neq 0$, $\|x_n\|_{\Phi,p}=1$. 则 $\|x_n+x\|_{\Phi,p}\geq 1$. 对任意 $k>1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^p}(1+I_\Phi^p(k(x_n+x))) &\geq \frac{1}{k^p}(1+(I_\Phi(kx_n)+I_\Phi(kx))^p) \\
&\geq \frac{1}{k^p}(1+(I_\Phi^p(kx_n)+I_\Phi^p(kx)))
\end{aligned}
$$

$$\geq \|x_n\|_{\Phi,p} + I_\Phi^p(x)$$

从而

$$\|x_n + x\|_{\Phi,p} \geq 1 + I_\Phi^p(x) > 1 = \|x_n\|_{\Phi,p}$$

于是 $l_{\Phi,p}$ 具有正 Opial 性质。

必要性. 如果 $a_\Phi > 0$, 由第五章定理 5.1 知，$l_{\Phi,p}$ 不是严格单调的，所以不具有正 Opial 性质。 □

引理 2.6 [81] 设 X 是 Köthe 序列空间，具有 semi-Fatou 性质，且范数不是序连续的，则 X 没有一致 Opial 性质。事实上，我们还有，对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，$\delta_o(\varepsilon) = 1$.

定理 2.2 下列命题是等价的：

(1) $l_{\Phi,p}$ 具有一致 Opial 性质。

(2) $l_{\Phi,p}$ 具有局部一致 Opial 性质。

(3) $l_{\Phi,p}$ 具有 Opial 性质。

(4) $\Phi \in \Delta_2(0)$ 且 $a_\Phi = 0$.

证明： (4) $\Rightarrow$ (1). 如果 $\Phi \in \Delta_2(0)$ 但 $l_{\Phi,p}$ 没有一致 Opial 性质，则存在 $\varepsilon_0 \in (0,1]$ 使得 $\delta_o(\varepsilon_0) = 1$. 因此，对于任意系列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n \searrow 1$，存在$l_{\Phi,p}$中的序列 $\{x_n\}$及 $\{y_n\}$，使得 $\|x_n\| = 1$，$\|y_n\| = \varepsilon_0$，$k_n > 1$， 且

$$I_\Phi\left(\frac{k_n x_n}{c_n}\right) + I_\Phi\left(\frac{k_n y_n}{c_n}\right) = (k_n^p - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

因为

$$\frac{1}{c_n} = \frac{\|x_n\|_{\Phi,p}}{c_n} \leq \frac{1}{k_n}\left(1 + I_\Phi^p\left(\frac{k_n x_n}{c_n}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{c_n} = \frac{\|y_n\|_{\Phi,p}}{c_n} \leq \frac{1}{k_n}\left(1 + I_\Phi^p\left(\frac{k_n y_n}{c_n}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

则

$$I_\Phi^p\left(\frac{k_n x_n}{c_n}\right) \geq \left(\frac{k_n}{c_n}\right)^p - 1,\ I_\Phi^p\left(\frac{k_n y_n}{c_n}\right) \geq \left(\frac{\varepsilon_0 k_n}{c_n}\right)^p - 1$$

由此我们可得 $\left(\frac{k_n}{c_n}\right)^p - 1 + \left(\frac{\varepsilon_0 k_n}{c_n}\right)^p - 1 \leq k_n^p - 1$, 则 $k_n \leq \frac{c_n^p}{1 + \varepsilon_0^p - c_n^p}$, 从而 $\{k_n\}$ 是有界的。于是，

$$I_\Phi\left(\frac{k_n y_n}{c_n}\right) = (k_n^p - 1)^{\frac{1}{p}} - I_\Phi\left(\frac{k_n x_n}{c_n}\right) \leq (k_n^p - 1)^{\frac{1}{p}} - \left(\left(\frac{k_n}{c_n}\right)^p - 1\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

但是

$$\left\|\frac{k_n y_n}{c_n}\right\|_{\Phi,p} = \frac{\varepsilon_0 k_n}{c_n} > \frac{\varepsilon_0}{c_n} \to \varepsilon_0$$

由 $\Phi \in \Delta_2(0)$ 条件可得出这是一个矛盾。

如果 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则 $l_{\Phi,p}$ 没有序连续性质，于是根据引理 2.6 可证得 $l_{\Phi,p}$ 没有一致 Opial 性质。

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 显然。

(3) $\Rightarrow$ (4). 假设 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则存在 $x \in l_{\Phi,p} \setminus h_{\Phi,p}$，$\|x\|_{\Phi,p} = 1$. 令

$$[x]_n = (x(1), x(2), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots) \quad (n \in \mathbb{N})$$

则 $\lim_{n\to\infty} \|x - [x]_n\|_{\Phi,p} = \theta(x) = 1$. 取 i_n，$j_n \in \mathbb{N}$，$i_n > j_n$，使得

$$1 - \frac{1}{n} < \|[x]_{i_n} - [x]_{j_n}\|_{\Phi,p} < 1 + \frac{1}{n}$$

记 $y_n = [x]_{i_n} - [x]_{j_n}$，则 $y_n \in h_{\Phi,p}$ $(n \in \mathbb{N})$，且对任意 $y \in l_{\Psi,q}$，由 $< y, x >= \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)y(i)| < +\infty$，有

$$< y, y_n >= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=j_n}^{i_n} |x(i)y(i)| = 0$$

于是 $\{y_n\}$ 是弱零序列。

取 n_0 使得 $\|x - [x]_{n_0}\|_{\Phi,p} < \frac{3}{2}$. 定义

$$y_0 = \frac{1}{2}(x - [x]_{n_0})$$

如果 $n_0 < j_n$，则

$$y_n - y_0 = \frac{1}{2}(0, \ldots, 0, -x(n_0+1), \ldots, -x(j_n), x(j_n+1), \ldots, x(i_n), -x(i_n+1), \ldots)$$

于是 $\|y_n - y_0\|_{\Phi,p} = \|y\|_{\Phi,p} < \frac{3}{4}$, 从而

$$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y_0\|_{\Phi,p} < 1 = \liminf_{n\to\infty} \|y_n\|_{\Phi,p}$$

如果 $n_0 > j_n$，类似可证仍有上式成立。所以 $l_{\Phi,p}$ 没有 Opial 性质。

如果 $a_\Phi > 0$，将自然数集 $\mathbb{N}$ 划分成一族互不相交的无限子集 $\{N_n\}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\inf_n N_n \to \infty$. 定义

$$x = \sum_{i\in N_1} a_\Phi e_i, \quad x_n = \sum_{i\in N_{n+1}} a_\Phi e_i \quad (n \in \mathbb{N})$$

则 $\{x_n\}$ 是弱收敛于零的. 对任意 $k > 1$，我们有

$$I_\Phi(kx_n) = I_\Phi(kx) = I_\Phi(k(x_n + x)) = \infty$$

且对任意 $k \in (0, 1]$

$$\frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx_n))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(k(x_n + x)))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}$$

所以

$$\|x_n\|_{\Phi,p} = \|x\|_{\Phi,p} = \|x_n + x\|_{\Phi,p} = 1$$

因此，$l_{\Phi,p}$ 没有 Opial 性质。 □

推论 2.2 设 Φ 是 Orlicz 函数，满足 $\lim_{u\to\infty} \Phi(u)/u = \infty$，则 $l_{\Phi,p}$ 具有正规结构当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(0)$.

推论 2.3 $l_{\Phi,p}$ 具有 (L) 性质当且仅当 $l_{\Phi,p}$ 是自反的，即 $\Phi \in \Delta_2(0)$ 且 $\Psi \in \Delta_2(0)$.

2.4 本章小结

在本章，我们首先讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的 Opial 模的计算公式。其次，给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间具有 Opial 性质、一致 Opial 性质、局部一致 Opial 性质、正 Opial 性质的充分必要条件；进而得到 $l_{\Phi,p}$ 具有（L）性质的充要条件。

第 3 章 Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数

1997 年，王廷辅、崔云安[83]给出了赋 Luxemburg 范数及赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数的准确表达式。1998 年，崔云安[84] 讨论了具有有界完备基的 Köthe 序列空间的弱收敛序列系数的等价定义，并进一步讨论了 Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数。1998 年及1999 年，崔云安、H. Hudzik等[80, 85] 继续讨论了 Musielak-Orlicz 序列空间，分别给出了赋 Orlicz 范数和赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间弱收敛序列系数在某种条件下的表达式。2005 年，姚慧丽、王廷辅[86]去掉了文献[80, 85] 中的条件限制，给出了一般情况下赋 Luxemburg 范数及赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数的准确表达式。

在本章，我们将考虑赋 p-Ameimiya 范数的 Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数，寻求其准确表达式；并进一步讨论赋 p-Ameimiya 范数的 Orlicz 序列空间的不动点的存在性问题。

设

$$A(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty}\{\sup\{\|x_i - x_j\| : i, j \geq n, i \neq j\}$$

$$A_1(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty}\{\inf\{\|x_i - x_j\| : i, j \geq n, i \neq j\}$$

若 $A(\{x_n\}) = A_1(\{x_n\})$，则称 $\{x_n\}$ 为渐近等距序列。

$$\mathrm{WCS}(X) = \inf\{A(\{x_n\}) : \{x_n\} \text{ 是 } S(X) \text{ 的渐近等距序列,}$$

$$\text{且 } \{x_n\} \text{ 弱收敛于零}\}$$

这是张广禄 [87] 给出的 WCS(X) 的又一等价定义。

3.1 $l_{\Phi,p}$ 的弱收敛序列系数

定理 3.1 设 Φ 是 Orlicz 函数。

(1)如果 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则 $\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p}) = 1$.

(2)如果 $\Phi \in \Delta_2(0)$，且 $a_\Phi = 0$, 则

$$\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p}) = \inf\left\{\inf_{k>1}\left\{c_{xk} : I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right) = \frac{k^p - 1}{2^p}\right\} : x \in S(l_{\Phi,p})\right\}$$

证明： (1)如果 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < u < \varepsilon$ 使得

$$\Phi((1+\varepsilon)u) > \frac{1}{\varepsilon}\Phi(u)$$

并且存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$1 - \Phi(2\varepsilon) < m\Phi((1+\varepsilon)u) \le 1$$

取 $c > 0$ 满足 $m\Phi((1+\varepsilon)u) + \Phi(c) = 1$. 于是 $\Phi(c) < \Phi(2\varepsilon)$. 定义

$$x_1 = (c, \overbrace{(1+\varepsilon)u, \ldots, (1+\varepsilon)u}^{m}, 0, 0, \ldots)$$

$$x_2 = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{m+1}, c, \overbrace{(1+\varepsilon)u, \ldots, (1+\varepsilon)u}^{m}, 0, 0, \ldots)$$

$$x_3 = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{2m+2}, c, \overbrace{(1+\varepsilon)u, \ldots, (1+\varepsilon)u}^{m}, 0, 0, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

则 $\frac{x_n}{\|x_n\|_{\Phi,p}} \in S(l_{\Phi,p})$ 且 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\right\}$是渐近等距序列。因为 $\limsup\limits_{l\to 0}\frac{I_\Phi(lx_n)}{l} = 0$, 所以 $\{x_n\}$ 弱收敛于零。而 $\|x_n\|_{\Phi,p} = \|x_1\|_{\Phi,p} \ge \|x_1\|_{\Phi,\infty} = 1$，于是

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right)\right\|_{\Phi,p}^p \\
\le& \left\|\frac{x_n - x_m}{1+\varepsilon}\right\|_{\Phi,p}^p \le 1 + I_\Phi^p\left(\frac{x_n - x_m}{1+\varepsilon}\right) \\
=& 1 + \left(2m\Phi(u) + 2\Phi\left(\frac{c}{1+\varepsilon}\right)\right)^p \\
\le& 1 + (2m\varepsilon\Phi((1+\varepsilon)u) + 2\Phi(c))^p \\
\le& 1 + (2\varepsilon + 2\Phi(2\varepsilon))^p
\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{dian}_a(x_n) \le (1+\varepsilon)(1 + (2\varepsilon + 2\Phi(2\varepsilon))^p)$$

因此 $\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p}) = 1$.

(2)记 $d = \inf\left\{\inf\limits_{k>1}\left\{c_{xk} : I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right) = \frac{k^p - 1}{2^p}\right\} : x \in S(l_{\Phi,p})\right\}$.

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in S(l_{\Phi,p})$, 使得

$$\inf\left\{\inf_{k>1}\left\{c_{xk} : I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right) = \frac{k^p - 1}{2^p}\right\} : x \in S(l_{\Phi,p})\right\} < d + \varepsilon$$

则存在 $k > 1$ 及 $c_{xk} < d + \varepsilon$, 满足 $I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right) = \frac{k^p - 1}{2^p}$. 定义

$$x_1 = (x(1), 0, x(2), 0, x(3), 0, x(4), 0, x(5), 0, x(6), 0, \ldots)$$

$$x_2 = (0, x(1), 0, 0, 0, x(2), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x(3), 0, 0, 0, \ldots)$$

$$x_3 = (0, 0, 0, x(1), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x(2), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

......

其中 $\{x_n\}$ 的支集互不相交。对任意 $n \neq m$ 及任意 $k > 1$, 有 $\|x_n\|_{\Phi,p} = \|x\|_{\Phi,p} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$。利用在证明定理 2.1 时同样的方法，可证 $\{x_n\}$ 弱收敛于零。由于

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_n - x_m}{d+\varepsilon}\right\|_{\Phi,p} &\leq \frac{1}{k}\left(1 + I_\Phi^p\left(k\frac{x_n - x_m}{d-\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{k}\left(1 + 2^p I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d+\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \frac{1}{k}\left(1 + 2^p I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{k}(1 + k^p - 1)^{\frac{1}{p}} = 1\end{aligned}$$

则 $\|x^n - x^m\|_{\Phi,p} \leq d + \varepsilon$，从而 $A(\{x_n\}) \leq d + \varepsilon$，由 ε 的任意性可得，$\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p}) \leq d$.

另一方面，令 $\{x_n\}$ 是 $S(l_{\Phi,p})$ 的任意渐进等距序列且满足 x_n 弱收敛于零。

因为 $\Phi \in \Delta_2(0)$，则对 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \varepsilon$ 使得

$$I_\Phi(x) \leq 1, k \leq \frac{1}{\varepsilon},\ 且\ I_\Phi(y) \leq \delta \Rightarrow \left|I_\Phi\Big(\frac{k(x+y)}{d}\Big) - I_\Phi\Big(\frac{kx}{d}\Big)\right| < \varepsilon$$

令 $n_1 = 1$ 并取自然数 m_1 使得$\sum_{j>m_1} \Phi\left(\frac{x_{n_1}(j)}{\varepsilon d}\right) < \delta$；选取 $n_2 > n_1$ 使得$\sum_{j\leq m_1} \Phi\left(\frac{x_{n_2}(j)}{\varepsilon d}\right) < \delta$. 由 $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = 0$ ($\forall\, i = 1,2,\ldots$)，有存在自然数 m_2 满足 $m_2 > m_1$ 且 $\sum_{j>m_2} \Phi\left(\frac{x_{n_2}(j)}{\varepsilon d}\right) < \delta$. 如此下去，根据归纳法，我们可以得到自然数集中的两个子序列 $\{n_i\}$ 及 $\{m_i\}$，满足 $n_1 < n_2 < \ldots$, $m_1 < m_2 < \ldots$ 且

$$\sum_{j>m_i} \Phi\left(\frac{x_{n_i}(j)}{\varepsilon d}\right) < \delta,\ \sum_{j\leq m_i} \Phi\left(\frac{x_{n_i}(j)}{\varepsilon d}\right) < \delta$$

取 $k_{ij} \in K_p\left(\frac{x_{n_i} - x_{n_j}}{d}\right)$.

i)如果 $k_{ij} \leq 1$，则 $\left\|\frac{x_{n_i} - x_{n_j}}{d}\right\|_{\Phi,p} \geq \frac{1}{k_{ij}} \geq 1$，所以$\|x_{n_i} - x_{n_j}\| \geq d$.

ii)如果 $1 < k_{ij} \leq \frac{1}{\varepsilon}$，则

$$\left\|\frac{x_{n_i} - x_{n_j}}{d}\right\|_{\Phi,p}^p$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_{ij}^p}\left(1+\left(\sum_{l\le m_i}\Phi\left(\frac{k_{ij}(x_{n_i}(l)-x_{n_j}(l))}{d}\right)+\sum_{l>m_i}\Phi\left(\frac{k_{ij}(x_{n_i}(l)-x_{n_j}(l))}{d}\right)\right)^p\right)\\
&\ge \frac{1}{k_{ij}^p}\left(1+\left(\sum_{l\le m_i}\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_i}(l)}{d}\right)-\varepsilon+\sum_{l>m_i}\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_j}(l)}{d}\right)-\varepsilon\right)^p\right)\\
&\ge \frac{1}{k_{ij}^p}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_i}}{d}\right)-\delta-\varepsilon+I_\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_j}}{d}\right)-\delta-\varepsilon\right)^p\right)\\
&\ge \frac{1}{k_{ij}^p}\left(1+\left(I_\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_i}}{c_{x_{n_i}k_{ij}}}\right)+I_\Phi\left(\frac{k_{ij}x_{n_j}}{c_{x_{n_j}k_{ij}}}\right)-4\varepsilon\right)^p\right)\\
&= \frac{1}{k_{ij}^p}\left(1+((k_{ij}^p-1)^{\frac{1}{p}}-4\varepsilon)^p\right)\\
&> 1-o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

因此 $\|x_{n_i}-x_{n_j}\|_{\Phi,p}\ge d.$

iii)如果 $k_{ij}\ge\dfrac{1}{\varepsilon}$，则

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{x_{n_i}-x_{n_j}}{d}\right\|_{\Phi,p} &> \frac{1}{k_{ij}}I_\Phi\left(k_{ij}\frac{x_{n_i}-x_{n_j}}{d}\right)\\
&\ge \varepsilon I_\Phi\left(\frac{x_{n_i}-x_{n_j}}{\varepsilon d}\right)\\
&\ge \varepsilon\left(I_\Phi\left(\frac{x_{n_i}}{\varepsilon d}\right)+I_\Phi\left(\frac{x_{n_j}}{\varepsilon d}\right)-4\varepsilon\right)\\
&\ge \varepsilon\left(I_\Phi\left(\frac{x_{n_i}}{\varepsilon c_{x_{n_i}\frac{1}{\varepsilon}}}\right)+I_\Phi\left(\frac{x_{n_j}}{\varepsilon c_{x_{n_j}\frac{1}{\varepsilon}}}\right)-4\varepsilon\right)\\
&= \varepsilon((\varepsilon^{-p}-1)^{\frac{1}{p}}-4\varepsilon)\\
&= (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}-4\varepsilon^2\to 0,\ (\ \varepsilon\to 0\ )
\end{aligned}
$$

从而 $\|x_{n_i}-x_{n_j}\|_{\Phi,p}\ge d$. 所以 $A(\{x_n\})\ge d$. 由 $\{x_n\}$ 的任意性可得，$\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})\ge d$. □

推论 3.1 当 Φ 是 N-函数，且 $p=1$ 时，上述定理可以得到赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的弱收敛序列系数的计算公式。(可参阅文献[83, 84])

推论 3.2 $\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})>1$ 当且仅当 $\Phi\in\Delta_2(0)$ 且 $a_\Phi=0$.

证明： 充分性. 如果 $\Phi\in\Delta_2(0)$ 且 $a_\Phi=0$，则由定理 3.1 有，

$$
\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})=\inf\left\{\inf_{k>1}\left\{c_{xk}:I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right)=\frac{k^p-1}{2^p}\right\}:x\in S(l_{\Phi,p})\right\}
$$

假设 $\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})=1$，则对任意 $0<\varepsilon<1$，存在 $x\in S(l_{\Phi,p})$ 及 $k>1$，使得 $c_{xk}<1+\varepsilon$. 由于 $\|x\|_{\Phi,p}=1$ 且 $\Phi\in\Delta_2(0)$，于是存在 $\delta>0$ 使得 $I_\Phi\left(\dfrac{x}{2}\right)\ge\delta$.

所以，

$$
\begin{aligned}
1 &\geq \frac{1}{k^p}\left(2^p I_\Phi^p\left(\frac{kx}{c_{xk}}\right)+1\right)\\
&\geq \frac{1}{k^p}\left(1+I_\Phi^p\left(\frac{kx}{1+\varepsilon}\right)\right)+\frac{2^p-1}{k^p}I_\Phi^p\left(\frac{kx}{1+\varepsilon}\right)\\
&\geq \left\|\frac{x}{1+\varepsilon}\right\|_{\Phi,p}^p+(2^p-1)I_\Phi^p\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\\
&\geq \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^p+(2^p-1)I_\Phi^p\left(\frac{x}{2}\right)\\
&\geq \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^p+(2^p-1)\delta^p\\
&\to 1+(2^p-1)\delta^p \quad (\varepsilon\to 0)
\end{aligned}
$$

显然矛盾。

必要性. 如果 $\Phi\notin\Delta_2(0)$，则由定理3.1可得 $\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})=1$.

如果 $a_\Phi>0$, 将自然数集 $\mathbb{N}$ 划分成一族互不相交的无限子集 $\{N_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\inf_n N_n\to\infty$. 定义$x_n=\sum_{i\in N_{n+1}}a_\Phi e_i$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 是弱收敛于零的。对任意 $k\in\mathbb{R}$, $k>1$ 及 i, $j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$，我们有$I_\Phi(k(x_i-x_j))=\infty$. 对任意 $k\in(0,1]$ $\frac{1}{k}(1+I_\Phi^p(k(x_i-x_j)))^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k}$. 所以 $\|x_i-x_j\|_{\Phi,p}=1$. 因此，$\mathrm{WCS}(l_{\Phi,p})=1$. □

推论 3.3 Maluta 系数 $\mathrm{M}(l_{\Phi,p})<1$ 当且仅当 $l_{\Phi,p}$ 是自反的且 $a_\Phi=0$.

推论 3.4 $l_{\Phi,p}$ 具有弱一致正规结构当且仅当 $\Phi\in\Delta_2(0)$且 $a_\Phi=0$.

推论 3.5 $\mathrm{WCS}(l^p)=\begin{cases}\frac{1}{2^p}, & 1\leq p<\infty\\ 1, & p=\infty\end{cases}$

3.2 $l_{\Phi,p}$ 的不动点性质

接下来，我们将考虑 $l_{\Phi,p}$ 的不动点性质。

引理 3.1 设 Φ 是 Orlicz 函数，$a_\Phi=0$.

(1)如果 $\Phi\notin\Delta_2(0)$，则 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0 渐近等距同构。

(2)如果 $\Psi\notin\Delta_2(0)$，则 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 l^1 渐近等距同构。

证明： (1) 如果 $\Phi\notin\Delta_2(0)$，则存在 $\{u_k\}\downarrow 0$ 及 $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ 使得

$$
\Phi(u_k)\leq\frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}+1}},\quad \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}+1}}\leq n_k\Phi(u_k)\leq\frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}}
$$

$$
\Phi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right)>2^{k+\frac{1}{p}+1}\Phi(u_k)\quad (k\in\mathbb{N})
$$

定义

$$x_1 = (\overbrace{u_1, \dots, u_1}^{n_1}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$
$$x_2 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n_1}, \overbrace{u_2, \dots, u_2}^{n_2}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$
$$x_3 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n_1+n_2}, \overbrace{u_3, \dots, u_3}^{n_3}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

定义映射 $P : c_0 \to l_{\Phi,p}$ 为

$$Pt = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \quad (t = (t_1, t_2, \dots) \in c_0)$$

显然 P 是线性映射。

对任意 $\lambda > 0$，因为 $t_n \to 0$，则存在 $j_0 \in \mathbb{N}$，使得对任意 $i \geq j_0$ 有 $\lambda|t_i| < 1$，所以

$$\begin{aligned} I_\Phi(\lambda Pt) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i \Phi(\lambda t_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{j_0} n_i \Phi(\lambda t_i u_i) + \sum_{i=j_0+1}^{\infty} n_i \Phi(\lambda t_i u_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{j_0} n_i \Phi(\lambda t_i u_i) + \sum_{i=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{p}+i}} \\ &< \sum_{i=1}^{j_0} n_i \Phi(\lambda t_i u_i) + 1 < \infty \end{aligned}$$

从而 $Pt \in l_{\Phi,p}$. 进一步，对任意 $t = (t_1, t_2, \dots) \in c_0$，我们有

$$I_\Phi\left(\frac{Pt}{\|t\|_\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \Phi\left(\frac{t_i}{\|t\|_\infty} u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{p}+i}} = 2^{-\frac{1}{p}}$$

则 $\|Pt\|_{\Phi,p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|Pt\|_{\Phi,\infty} \leq \|t\|_\infty$.

另一方面，对任意 $\lambda \in (0,1)$，存在 $j_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{(1-\varepsilon_{j_1})|t_{j_1}|}{\lambda \sup\{(1-\varepsilon_i)|t_i| : i \in \mathbb{N}\}} > 1,$$

其中 $\varepsilon_i = \dfrac{1}{i+1} \quad (i \in \mathbb{N})$，则

$$\frac{|t_{j_1}|}{\lambda \sup\{(1-\varepsilon_i)|t_i| : i \in \mathbb{N}\}} > \frac{1}{1-\varepsilon_{j_1}} = 1 + \frac{1}{j_1}$$

并且

$$I_\Phi\left(\frac{Pt}{\lambda \sup\{(1-\varepsilon_i)|t_i| : i \in \mathbb{N}\}}\right) > n_{j_1} \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{j_1}\right) u_{j_1}\right) > 2^{j_1+\frac{1}{p}+1} n_{j_1} \Phi(u_{j_1}) > 1$$

因此，

$$\|Pt\|_{\Phi,p} \geq \|Pt\|_{\Phi,\infty} \geq \sup\{(1-\varepsilon_i)|t_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

于是 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0 渐近等距。

(2) 如果 $\Psi \notin \Delta_2(0)$, 则存在 $y \in S(l_{\Psi,q})$，使得对任意 $l > 1$ 有 $I_\Psi(ly) = \infty$，并且对任意下降趋于0 的序列 $\{\varepsilon_n\}$，存在 $0 = i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ 满足

$$\Big\|\sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} y(i)e_i\Big\|_{\Psi,q} > 1-\varepsilon_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

定义 $y_n = \sum\limits_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} y(i)e_i$，则存在 $x_n \in S(l_{\Phi,p})$，使得 $< y_n, x_n >= \|y_n\|_{\Psi,q}$. 所以对任意 $\alpha = (\alpha(n)) \in l^1$，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(n)| &= \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(n)|\|x_n\|_{\Phi,p} \geq \|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)x_n\|_{\Phi,p} \\
&\geq \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)x_n, \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sign}(\alpha(n))y_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(n)| < x_n, y_n > \\
&\geq (1-\varepsilon_n)\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(n)|
\end{aligned}$$

所以 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 l^1 渐近等距同构 □

定理 3.2 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质当且仅当 $l_{\Phi,p}$ 是自反的且 $a_\Phi = 0$。

证明： 因为对于自反的 Banach 空间，当其弱收敛序列系数大于 1 时，具有不动点性质，所以我们仅需要证明必要性。

假设 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则由引理 3.1，$l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0 渐近等距同构，所以 $l_{\Phi,p}$ 没有不动点性质。

另一方面，假设$\Psi \notin \Delta_2(0)$, 根据引理 3.1 及文献 [88] 中的定理 2 知，$l_{\Phi,p}$ 没有不动点性质。

如果 $a_\Phi > 0$，则对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义 $x_n = (\overbrace{0,\ldots,0}^{(n-1)}, a_\Phi, 0, \ldots)$，则

$$1 + I_\Phi(x_n) = 1$$

$$\frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx_n))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k} > 1, (\forall\, k \in (0,1))$$

$$\frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx_n))^{\frac{1}{p}} > 1, (\forall\, k > 1)$$

因此，$\|x_n\|_{\Phi,p} = 1$（$n \in \mathbb{N}$）. 进一步，易证 $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_{\Phi,p} = 1$.

定义映射 $P : l^\infty \to l_{\Phi,p}$ 为

$$Py = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n, \ \forall\ y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l^\infty$$

显然算子 P 是线性算子. 因为

$$\begin{aligned}\|y\|_\infty = \sup_n |y_n| = \sup_n |y_n| \|x_n\|_{\Phi,p} &\le \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \Big\|_{\Phi,p} \\ &= \|Py\|_{\Phi,p} \le \sup_n |y_n| \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Big\|_{\Phi,p} = \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty\end{aligned}$$

所以 $\|Py\|_{\Phi,p} = \|y\|_\infty$，从而 P 是由 l^∞ 到闭子空间 $P(l^\infty)$ 的序等距算子，从而 $l_{\Phi,p}$ 没有不动点性质。 □

3.3 本章小结

弱收敛序列系数是与正规结构有关的重要几何常数。本章首先讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间弱收敛序列系数的计算公式，进而给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有弱一致正规结构的充分必要条件。其次，我们得到 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0 渐进等距同构、$l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 l^1 渐近等距同构的充分条件，由此给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质的充要判据。

第 4 章 Orlicz 序列空间的装球常数

1976年，C. E. Cleaver[29] 在较强的条件下讨论了赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的装球常数的取值范围。1983年，叶以宁[89] 研究了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 序列空间，得到了 Kottman 常数的准确表达式。1987 年，王廷辅[90] 研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间，类似得到了 l_Φ 的装球常数的表达式。1990年，王廷辅等[91]讨论了一类序列空间的装球问题。1994 年，H. Hudzik、吴从炘等[92] 讨论了赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的装球常数。同年，叶以宁[93]等给出了 Lorentz 空间的装球常数的值。1995年，H. Hudzik等[94]讨论了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 函数空间的装球常数。2001年，崔云安、H. Hudzik[95]讨论了 Cesaro 序列空间的装球问题。 2001年，任重道等[96]给出了装球常数在某些条件下的估计。严亚强[97, 98]得到了一类 Orlicz 空间的 Kottman 常数的另一种计算方法。2011年，严亚强[99] 进一步讨论了 Orlicz-Lorentz 空间的装球常数的取值范围。

在本章，我们将讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的装球问题，寻求装球常数和 Kottman 常数的表达式；进一步讨论 Orlicz 空间的装球常数与空间自反性的关系。

设 $\Phi \in \Delta_2(0)$，$1 \le p < \infty$. 对任意 $x \in S(l_{\Phi,p})$ 及 $k > 1$，存在唯一的 $d_{x,k} > 0$ 满足

$$I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right) = \frac{k^p - 1}{2^p}$$

设

$$d_x = \inf\{d_{x,k} : k > 1\}$$

$$d = \sup\{d_x : x \in S(l_{\Phi,p})\}$$

则 $d_x > 1$，且 $1 < d \le 2$.

4.1 $l_{\Phi,p}$ 的装球常数

接下来，我们来讨论 $l_{\Phi,p}$ 的装球常数。

定理 4.1 设 $\Phi \in \Delta_2(0)$，则 $K(l_{\Phi,p}) = d$，且 $P(l_{\Phi,p}) = \dfrac{d}{d+2}$.

证明： 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in S(l_{\Phi,p})$ 使得 $d_x > d - \varepsilon$，则对任意 $k > 1$，有 $d_{x,k} > d - \varepsilon$. 定义

$$x^n = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) e_{2^{n-1}(2i-1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

则 $\{x^n\}$ 的支集是互不相交的，且 $\|x^n\|_{\Phi,p} = \|x\|_{\Phi,p} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. 对任意 $n \neq m$ 及任意 $k > 1$，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k}\left(1 + I_\Phi^p\left(k\frac{x^n - x^m}{d - \varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ = & \frac{1}{k}\left(1 + 2^p I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d - \varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ > & \frac{1}{k}\left(1 + 2^p I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ = & \frac{1}{k}\left(1 + 2^p \cdot \frac{k^p - 1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \end{aligned}$$

故

$$\|x^n - x^m\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + I_\Phi^p(k(x^n - x^m))\right)^{\frac{1}{p}} \geq d - \varepsilon$$

所以由 ε 的任意性有, $K(l_{\Phi,p}) \geq d$.

接下来，我们来证明 $K(l_{\Phi,p}) \leq d$.

对任意序列 $\{x_n\} \subset S(l_{\Phi,p})$，有 $x_n = (x_n(i))_i, \|x_n\|_{\Phi,p} = \|\sum_{i=1}^{\infty} x_n(i)e_i\|_{\Phi,p} = 1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$，于是 $\{\|x_n(i)e_i\|_{\Phi,p}\}_n$ 是有界序列 $(\forall\, i \in \mathbb{N})$.

因为 $\{\|x_n(1)e_1\|_{\Phi,p}\}_n$ 是有界的，故存在子列 $\{x_{1_n}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $\{\|x_{1_n}(1)e_1\|_{\Phi,p}\}_n$ 是收敛的；又 $\{\|x_{1_n}(2)e_2\|_{\Phi,p}\}_n$ 是有界的，则存在子列 $\{x_{2_n}\} \subset \{x_{1_n}\}$ 满足 $\{\|x_{2_n}(2)e_2\|_{\Phi,p}\}_n$ 是收敛序列。如此下去，用对角线法，我们可以找到一个子列 $\{x_{n_n}\} \subset \{x_n\}$，使得对任意 $i \in \mathbb{N}$，$\{\|x_{n_n}(i)e_i\|_{\Phi,p}\}_{n \geq i}$ 都是收敛序列。记 $\|e_i\|_{\Phi,p} = s_i$，并设 $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_n}(i)e_i\|_{\Phi,p} = b_i$，则 $\lim_{n\to\infty} |x_{n_n}(i)| = \dfrac{b_i}{s_i}$ $(\forall\ i \in \mathbb{N})$.

设 $x = \left(\dfrac{b_i}{s_i}\right)_i$，$|x_{n_n}| = (|x_{n_n}(i)|)_i$，$z_n = |x_{n_n}| - x$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} z_n(i) = 0 \quad (\forall\, i \in \mathbb{N})$$

$$\operatorname{sep}(z_n) = \operatorname{sep}(|x_{n_n}|) \geq \operatorname{sep}(x_n)$$

由 $\Phi \in \Delta_2$，有 $x \in S(l_{\Phi,p})$. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\|\sum_{i=i_0+1}^{\infty} x(i)e_i\|_{\Phi,p} < \varepsilon$. 又因为 $\lim_{n\to\infty} |x_{n_n}(i)| = x(i)$，$(i = 1, \ldots, i_0)$. 所以

$$
\begin{aligned}
\|z_n\|_{\Phi,p} &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (|x_{n_n}(i)| - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
&\le \left\| \sum_{i=1}^{i_0} (|x_{n_n}(i)| - x(i)) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |x_{n_n}(i)| e_i \right\|_{\Phi,p} + \varepsilon
\end{aligned}
$$

从而 $\limsup_n \|z_n\|_{\Phi,p} \le 1 + \varepsilon$.

由于 $l_{\Phi,p}$ 是序连续的，对上述 $\varepsilon > 0$ 及 $n_1 = 1$，存在 $i_1 \in \mathbb{N}$，满足 $\| \sum_{i=i_1+1}^{\infty} z_{n_1}(i) e_i \|_{\Phi,p} < \varepsilon$. 取 $n_2 > n_1$ 使得 $\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_2}(i) e_i \|_{\Phi,p} < \varepsilon$. 对 n_2，存在 $i_2 > i_1$ 满足 $\| \sum_{i=i_2+1}^{\infty} z_{n_2}(i) e_i \|_{\Phi,p} < \varepsilon$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sep}(z_n) \le \|z_{n_1} - z_{n_2}\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_1}(i) e_i - \sum_{i=i_1+1}^{i_2} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_1+1}^{\infty} z_{n_1}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
&+ \left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_2+1}^{\infty} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_1}(i) e_i - \sum_{i=i_1+1}^{i_2} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

取 $n_3 > n_2$，使得 $\| \sum_{i=1}^{i_2} z_{n_3}(i) e_i \|_{\Phi,p} < \varepsilon$，且对 n_3，存在 $i_3 > i_2$ 满足 $\| \sum_{i=i_3+1}^{\infty} z_{n_3}(i) e_i \|_{\Phi,p} < \varepsilon$. 所以

$$
\begin{aligned}
&\|z_{n_1} - z_{n_3}\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_1}(i) e_i - \sum_{i=i_2+1}^{i_3} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_1+1}^{\infty} z_{n_1}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
&+ \left\| \sum_{i=1}^{i_2} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_3+1}^{\infty} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_1}(i) e_i - \sum_{i=i_2+1}^{i_3} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
&\|z_{n_2} - z_{n_3}\|_{\Phi,p} \\
\le &\left\| \sum_{i=i_1+1}^{i_2} z_{n_2}(i) e_i - \sum_{i=i_2+1}^{i_3} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} \\
&+ \left\| \sum_{i=i_2+1}^{\infty} z_{n_2}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=1}^{i_2} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p} + \left\| \sum_{i=i_3+1}^{\infty} z_{n_3}(i) e_i \right\|_{\Phi,p}
\end{aligned}
$$

$$\leq \left\| \sum_{i=i_1+1}^{i_2} z_{n_2}(i)e_i - \sum_{i=i_2+1}^{i_3} z_{n_3}(i)e_i \right\|_{\Phi,p} + 4\varepsilon$$

类似的，我们按归纳法可以找到 $\{z_n\}$ 的一个子列 $\{z_{n_k}\}$ 及 $\{i_k\} \subset \mathbb{N}$，满足

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$$

且对任意 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_{k-1}} z_{n_k}(i)e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon, \quad \left\| \sum_{i=i_k+1}^{\infty} z_{n_k}(i)e_i \right\|_{\Phi,p} < \varepsilon$$

$$\|z_{n_1} - z_{n_k}\|_{\Phi,p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{i_1} z_{n_1}(i)e_i - \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i \right\|_{\Phi,p} + 3\varepsilon$$

$$\|z_{n_l} - z_{n_k}\|_{\Phi,p} \leq \left\| \sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l} z_{n_l}(i)e_i - \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i \right\|_{\Phi,p} + 4\varepsilon, \quad (\forall l,k \in \mathbb{N},\ 1 < l < k)$$

注意到 $\|\sum_{i=1}^{\infty} z_n(i)e_i\|_{\Phi,p} \leq 1+\varepsilon$，所以

$$\frac{\|\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i\|_{\Phi,p}}{1+\varepsilon} \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

因此，对任意 $l,k \in \mathbb{N}$，有

$$\|z_{n_l} - z_{n_k}\|_{\Phi,p} \leq (1+\varepsilon) \left\| \frac{\sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l} z_{n_l}(i)e_i}{\|\sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l} z_{n_l}(i)e_i\|_{\Phi,p}} - \frac{\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i}{\|\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i\|_{\Phi,p}} \right\|_{\Phi,p} + 4\varepsilon$$

令 $y_k = \dfrac{\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i}{\|\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} z_{n_k}(i)e_i\|_{\Phi,p}}$ $(k \in \mathbb{N})$，于是

$$\{y_m\} \subset S(l_{\Phi,p}),\ \operatorname{supp}(y_l) \cap \operatorname{supp}(y_m) = \emptyset \quad (l \neq m)$$

从而

$$K(l_{\Phi,p}) \leq \operatorname{sep}(x_n) \leq \operatorname{sep}(z_n) \leq \operatorname{sep}(z_{n_i}) \leq (1+\varepsilon)\|y_m - y_l\|_{\Phi,p} + 4\varepsilon$$

对任意 $\varepsilon > 0$，由 d 的定义，存在 $k_m > 1$ 使得 $d_{y_m,k_m} < d+\varepsilon$，其中 d_{y_m,k_m} 满足

$$I_\Phi^p\left(\frac{k_m y_m}{d_{y_m,k_m}}\right) = \frac{k_m^p - 1}{2^p} \ (m \in \mathbb{N})$$

令 $\|y_m - y_l\| = \lambda_{ml}$，取 $k_{ml} \in K_p\left(\dfrac{y_m - y_l}{\lambda}\right)$，则有

$$\begin{aligned} 1 &= \left\| \frac{y_m - y_l}{\lambda_{ml}} \right\|_{\Phi,p} \\ &= \frac{1}{k_{ml}}\left(1 + I_\Phi^p\left(k_{ml}\left(\frac{y_m - y_l}{\lambda_{ml}}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k_{ml}}\left(1+\left(I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_m}{\lambda_{ml}}\right)\right)+I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_l}{\lambda_{ml}}\right)\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

于是

$$(k_{ml}^p-1)^{\frac{1}{p}} = I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_m}{\lambda_{ml}}\right)\right)+I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_l}{\lambda_{ml}}\right)\right)$$

下证 $\lambda_{ml} \le \max\{d_{y_m,k_{ml}}, d_{y_l,k_{ml}}\}$. 若不然，$\lambda_{ml} > \max\{d_{y_m,k_{ml}}, d_{y_l,k_{ml}}\}$，则

$$I_\Phi^p\left(k_{ml}\left(\frac{y_m}{\lambda_{ml}}\right)\right) < \frac{k_{ml}^p-1}{2^p},\ I_\Phi^p\left(k_{ml}\left(\frac{y_l}{\lambda_{ml}}\right)\right) < \frac{k_{ml}^p-1}{2^p}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left(I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_m}{\lambda_{ml}}\right)\right)+I_\Phi\left(k_{ml}\left(\frac{y_l}{\lambda_{ml}}\right)\right)\right)^p\\ &<\left(\left(\frac{k_{ml}^p-1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{k_{ml}^p-1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\\ &=k_{ml}^p-1\end{aligned}$$

这与上述证明矛盾。所以，

$$\|y_m-y_l\|_{\Phi,p} = \lambda_{ml} \le \max\{d_{y_m,k_{ml}}, d_{y_l,k_{ml}}\} \le d$$

从而，$K(l_{\Phi,p}) \le (1+\varepsilon)d+4\varepsilon$，由 ε 的任意性可得，$K(l_{\Phi,p}) \le d$. □

定理 4.2 设 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则 $K(l_{\Phi,p}) = 2$.

证明： 记

$$l_\alpha = \{x \in l_{\Phi,p} : \lim_{n\to\infty} \|(0,\ldots,0,x(n+1),x(n+2),\ldots)\|_{\Phi,p} = 0\}$$

由于 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则 $l_\alpha \ne l_{\Phi,p}$，于是对 $\varepsilon > 0$，根据 Riesz 引理，存在 $x_\varepsilon \in S(l_{\Phi,p})$ 满足 $\mathrm{dist}(x_\varepsilon, l_\alpha) > 1-\varepsilon$. 所以

$$\|(0,\ldots,0,x_\varepsilon(n+1),x_\varepsilon(n+2),\ldots)\|_{\Phi,p} > 1-\varepsilon$$

又因为

$$\lim_{m\to\infty}\|(0,\ldots,0,x_\varepsilon(n+1),\ldots,x_\varepsilon(m),0,\ldots)\|_{\Phi,p} > 1-\varepsilon$$

则存在子列 $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 且

$$\|0,\ldots,0,x_\varepsilon(n_i+1),\ldots,x_\varepsilon(n_{i+1}),0,\ldots)\|_{\Phi,p} > 1-\varepsilon$$

定义

$$x_1 = (-x_\varepsilon(1),\ldots,-x_\varepsilon(n_1),x_\varepsilon(n_1+1),\ldots,x_\varepsilon(n_2),x_\varepsilon(n_2+1),\ldots)$$

$$x_2 = (x_\varepsilon(1),\ldots,x_\varepsilon(n_1),-x_\varepsilon(n_1+1),\ldots,-x_\varepsilon(n_2),x_\varepsilon(n_2+1),\ldots)$$

$$\cdots\cdots$$

则对任意 $m, l \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
&\|x_m - x_l\|_{\Phi,p} \\
&= 2\|(\ldots, 0, x_\varepsilon(n_{m-1}+1), \ldots, x_\varepsilon(n_m), 0, \ldots, 0, x_\varepsilon(n_{l-1}+1), \ldots, x_\varepsilon(n_l), 0, \ldots)\|_{\Phi,p} \\
&\geq 2\|(0, \ldots, 0, x_\varepsilon(n_{m-1}+1), \ldots, x_\varepsilon(n_m), 0, \ldots)\|_{\Phi,p} \geq 2(1-\varepsilon)
\end{aligned}$$

这样，由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，我们有 $K(l_{\Phi,p}) = 2.$ □

推论 4.1 $K(l^{p_1}) = 2^{\frac{1}{p_1}}$，$P(l^{p_1}) = \dfrac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p_1}}}.$

证明： 我们首先证明对任意 $x \in l^{p_1}$，

$$\|x\|_{\Phi,p} = (p_1-1)^{-\frac{1}{pq_1}} p_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \|x\|_{l^{p_1}} = (p_1-1)^{-\frac{1}{pq_1}} p_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \Phi^{-1}(I_\Phi(x))$$

其中 $\Phi(u) = \dfrac{|u|^{p_1}}{p_1}$，$1/p + 1/q = 1$，$1/p_1 + 1/q_1 = 1.$

事实上，因为 $\Phi(u) = \dfrac{|u|^{p_1}}{p_1}$，则 $\Phi(\|x\|_{l^{p_1}}) = I_\Phi(x)$ 且 $\Phi^{-1}(u) = (p_1 u)^{\frac{1}{p_1}}$. 设

$$f(k) = \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx)) = \frac{1}{k^p}\left(1 + \left(\frac{k^{p_1}\|x\|_{l^{p_1}}^{p_1}}{p_1}\right)^p\right)$$

由于 $f'(k) = 0$，于是 $k_0 = (p_1-1)^{-\frac{1}{pp_1}} p_1^{\frac{1}{p_1}} \dfrac{1}{\|x\|_{l^{p_1}}}$. 又因为 $f''(k_0) < 0$，所以

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} = (f(k_0))^{\frac{1}{p}} = (p_1-1)^{-\frac{1}{pq_1}} p_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \|x\|_{l^{p_1}}$$

令 $\alpha = (p_1-1)^{-\frac{1}{pq_1}} p_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}$. 因为

$$\frac{k^p-1}{2^p} = I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right) = \Phi^p\left(\frac{1}{\alpha}\left\|\frac{kx}{d_{x,k}}\right\|_{\Phi,p}\right) = \Phi^p\left(\frac{k}{\alpha d_{x,k}}\right)$$

所以 $d_{x,k} = \dfrac{k}{\alpha}\left(\Phi^{-1}\left(\left(\dfrac{k^p-1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{-1}$. 于是，

$$\begin{aligned}
K(l^{p_1}) = d &= \sup_{\|x\|_{\Phi,p}=1} \inf_{k>1} d_{x,k} = \frac{1}{\alpha} \inf_{k>1} \left\{ k\left(\Phi^{-1}\left(\left(\frac{k^p-1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{-1} \right\} \\
&= (p_1-1)^{\frac{1}{pq_1}} p_1^{-\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p_1}} \inf_{k>1} \frac{k}{(k^p-1)^{\frac{1}{pp_1}}} \\
&= 2^{\frac{1}{p_1}}
\end{aligned}$$

即 $K(l^{p_1}) = 2^{\frac{1}{p_1}}$. 所以对任意 $1 < p_1 < \infty$，有 $P(l^{p_1}) = \dfrac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p_1}}}.$ □

4.2　$l_{\Phi,p}$ 的自反性与装球常数

定义 4.1 [28] 称 Banach 空间 X 是 P-凸的，是指如果存在 $n\in\mathbb{N}$，$n\geq 2$，使得 $P(n,X)<1/2$，其中

$$P(n,X)=\sup\{\, r>0:\ \text{存在}\{x_i\}_{i=1}^{n}, \|x_i\|\leq 1-r \ \text{且}\|x_i-x_j\|\geq 2r,\ \ i\neq j\}$$

易知，$P(X)\leq P(n,X)\quad(\forall\, n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$.

Kottman[28] 证明了 P-凸的 Banach 空间是自反的。叶以宁[100] 等证明了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 函数空间及序列空间是 P-凸的当且仅当空间自反。下面我们将在空间 $l_{\Phi,p}$ 中证明类似的结果。

记

$$k'=\inf\{k: k\in K_p(x), \|x\|_{\Phi,p}=1\}$$

$$k''=\sup\{k: k\in K_p(x), \|x\|_{\Phi,p}=1\}$$

引理 4.1 设 $\Phi\in\Delta_2(0)$ 且 $\Psi\in\Delta_2(0)$，则

$$1<k'\leq k''<\infty$$

证明： (1)若 $\Phi\in\Delta_2(0)$，则范数收敛与模收敛是等价的，从而存在 $c>0$ 使得

$$\inf_{\|x\|_{\Phi,p}=1} I_\Phi(x)=c>0$$

对任意 $x\in S(l_{\Phi,p})$ 及 $k\in K_p(x)$，

$$1=\|x\|_{\Phi,p}=\frac{1}{k}(1+I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}$$

所以 $k=(1+I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}\geq 1$，且

$$k'=\inf_{\|x\|_{\Phi,p}=1} k=\inf_{\|x\|_{\Phi,p}=1}(1+I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}\geq \inf_{\|x\|_{\Phi,p}=1}(1+I_\Phi^p(x))^{\frac{1}{p}}\geq (1+c^p)^{\frac{1}{p}}>1$$

(2)因为 $\Psi\in\Delta_2(0)$，则存在 $\alpha>1$ 使得

$$up_+(u)\geq \alpha\Phi(u)\qquad \left(|u|\leq q_+\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{c^{p-1}}\right)\right)\right)$$

对任意 $x\in S(l_{\Phi,p})$ 及 $k\in K_p(x)$，有$1<k'\leq k\leq k_p^{**}(x)$, 则对任意 $\varepsilon\in(0,k'-1)$，

$$\begin{aligned}1&\geq I_\Phi^{p-1}((k-\varepsilon)x)I_\Psi(p_+(|(k-\varepsilon)x|))\\&\geq I_\Phi^{p-1}(x)I_\Psi(p_+(|(k-\varepsilon)x|))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq c^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\Psi(p_+(|(k-\varepsilon)x(i)|))\\&\geq c^{p-1}\Psi(p_+(|(k-\varepsilon)x(i)|))\quad(\forall\, i\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

所以 $|(k-\varepsilon)x(i)|\leq q_+\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{c^{p-1}}\right)\right)$. 进一步，由 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}1&\geq I_{\Phi}^{p-1}((k-\varepsilon)x)I_{\Psi}(p_+(|(k-\varepsilon)x|))\\&\geq c^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\Psi(p_+(|(k-\varepsilon)x(i)|))\\&\geq c^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\{|(k-\varepsilon)x(i)|p_+(|(k-\varepsilon)x(i)|)-\Phi((k-\varepsilon)x(i))\}\\&\geq c^{p-1}(\alpha-1)I_{\Phi}((k-\varepsilon)x)\\&\geq c^{p-1}(\alpha-1)(k-\varepsilon)I_{\Phi}(x)\\&\geq c^{p}(\alpha-1)(k-\varepsilon)\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以 $k\leq\dfrac{1}{(\alpha-1)c^p}<\infty$. □

引理 4.2 [55] 设 X 是非自反的 Banach 格，则 $P(X)=\dfrac{1}{2}$.

定理 4.3 下列命题等价：

(1) $l_{\Phi,p}$ 自反;

(2) $\Phi\in\Delta_2(0)$ 且 $\Psi\in\Delta_2(0)$;

(3) $P(l_{\Phi,p})<\dfrac{1}{2}$.

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) (见 [82]).

(2) $\Rightarrow$ (3). 如果 $\Phi\in\Delta_2(0)$，则由引理 2.3，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$(I_{\Phi}(x)\leq 1)\wedge(I_{\Phi}(y)<\frac{\delta k''}{2(2-\delta)})\Rightarrow I_{\Phi}^{p}(x+y)\leq I_{\Phi}^{p}(x)+\varepsilon((k')^p-1)$$

根据引理 4.1，有 $k''<\infty$. 记 $\inf\limits_{\|x\|_{\Phi,p}=1}I_{\Phi}(x)=c>0$.

假设 $K(l_{\Phi,p})=2$，则存在 $x\in S(l_{\Phi,p})$ 使得 $d_x>2-\delta$，从而对任意 $k\in K_p(x)$，有$d_{x,k}>2-\delta$. 又因为 $\Psi\in\Delta_2(0)$，于是存在 $\theta>1$ 使得

$$\Phi\left(\frac{u}{2}\right)\leq\frac{1}{2\theta}\Phi(u)\quad\left(|u|\leq q_+\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{c^{p-1}}\right)\right)\right)$$

注意到

$$I_{\Phi}\left(\frac{\delta k}{2(2-\delta)}x\right)\leq\left\|\frac{\delta k}{2(2-\delta)}x\right\|_{\Phi,p}=\frac{\delta k}{2(2-\delta)}\leq\frac{\delta k''}{2(2-\delta)}$$

所以，

$$\begin{aligned}
\frac{k^p-1}{2^p} &= I_\Phi^p\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right) < I_\Phi^p\left(\frac{kx}{2-\delta}\right) \\
&= I_\Phi^p\left(\frac{kx}{2}+\frac{\delta kx}{2(2-\delta)}\right) \\
&\le I_\Phi^p\left(\frac{kx}{2}\right)+\varepsilon((k')^p-1) \\
&\le \frac{1}{(2\theta)^p} I_\Phi^p(kx)+\varepsilon(k^p-1) \\
&= \frac{1}{(2\theta)^p}(k^p-1)+\varepsilon(k^p-1) \\
&= \left(\frac{1}{(2\theta)^p}+\varepsilon\right)(k^p-1)
\end{aligned}$$

我们有，$\frac{1}{2^p} \le \frac{1}{(2\theta)^p}+\varepsilon$. 由 ε 的任意性，有 $\theta < 1$，这与 $\theta > 1$矛盾。故 $K(l_{\Phi,p}) < 2$，进而 $P(l_{\Phi,p}) < \frac{1}{2}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 由引理 4.2直接可得。 □

4.3 本章小结

在本章，我们计算了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间装球常数及 Kottman 常数，并利用此结果计算了经典了 l^p 空间的装球常数，与前人所得结果是一致的；进一步讨论了集合 $\{k : k \in K_p(x), \|x\|_{\Phi,p} = 1\}$ 的上下界，得到 $l_{\Phi,p}$ 是自反的充分必要条件是 $P(l_{\Phi,p}) < \frac{1}{2}$，这也从另一方面刻画了 $l_{\Phi,p}$ 的自反性。

第 5 章 Orlicz 序列空间的单调系数

本章我们将讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的单调性，给出严格单调性、一致单调性、上（下）局部一致单调性的判据；进一步，计算赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的单调系数与单位球面上点的局部单调系数。

5.1 预备知识

1992 年，W. Kurc [2]讨论了赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 函数空间的严格单调性与一致单调性。1995 年，H. Hudzik，A. Kaminska[101]讨论了 Lorentz 空间的单调性。1998 年, H. Hudzik 和 W. Kurc [62] 给出了赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 函数空间具有上局部一致单调性的条件以及赋 Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 空间的严格单调性、一致单调性和上(下) 局部一致单调性的条件。1997 年，崔云安、王廷辅[102]给出了 Orlicz 序列空间的一致单调系数值，以及具有一致单调性的判据。1999 年，刘延明等[103]给出了 Orlicz 函数空间的一致单调性与严格单调性的判据，并计算了单调系数。 2001 年及 2002 年，王廷辅、刘新波[104, 105] 分别讨论了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的单调点。2004 年，H. Hudzik，刘新波[106]等讨论了赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 函数空间的单调点。2005 年，崔云安、H. Hudzik等[107]给出了赋 Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 空间具有严格单调性、一致单调性、上（下）局部一致单调性的判据。陈述涛、贺鑫[108, 109]分别于 2007 年及 2008 年讨论了赋 Luxemburg 范数及赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Sobolev 函数空间单调性及在最佳逼近问题的应用。文献 [68–70] 等继续讨论了 Banach 函数及序列空间的单调模与单调系数。

我们首先给出几个引理。

$l_{\Phi,p}$ 是 Köthe 序列空间，显然是 Banach 序列格，其中

$$x \geq y \Leftrightarrow x(i) \geq y(i) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

引理 5.1 [26] 设 $\Phi \in \Delta_2(0)$，$a_\Phi = 0, u \in l_\Phi$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $\|u\|_\Phi \geq \varepsilon$ 蕴含 $I_\Phi(u) \geq \delta$.

引理 5.2 [75]

(1)对任意序列 $\{\xi_k\}$，$\{\eta_k\}$，我们有

$$(\sum_k |\xi_k+\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_k |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_k |\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall\ 1\le p<\infty)$$

(2)$(1+(u+v)^p)^{\frac{1}{p}} \le (1+u^p)^{\frac{1}{p}}+v \quad (\forall\ u,\ v\ge 0,\ \ 1\le p<\infty)$.

(3)$\max\{1,(u+v)\}\le \max\{1,u\}+v \quad (\forall\, u,\ v\ge 0)$.

(4)对任意支集互不相交的可测函数 x，y，有 $s_{\Phi,p}(x+y)\le s_{\Phi,p}(x)+I_\Phi(y)$.

引理 5.3 [74] 设 $1\le p<\infty$，对任意 $x\in l_{\Phi,p}\backslash 0$，有下列命题成立：

(i) 函数 $k\to\alpha_p(kx)$在区间 $[0,\infty)$ 上非降;

(ii) $(0,\theta^{-1}(x))\subset\{k>0:\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)<\infty\}$;

(iii) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(0,\theta^{-1}(x))$ 上连续;

(iv) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(0,k_p^*(x))$ 上是减函数;

(v) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(0,k_p^{**}(x))$ 上非增;

(vi) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(k_P^{**}(x),\theta^{-1}(x))$ 上是增函数;

(vii) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(k_p^*(x),\theta^{-1}(x))$ 上非降.

引理 5.4 [107] 设 X 是 Banach 序列格。X 是严格单调的当且仅当对任意 $x=(x(1),x(2),\ldots)\in S(X)$ 及任意 $i\in\ \mathrm{supp}(x)=\{i\in\mathbb{N}:x(i)\ne 0\}$，有 $\|x\chi_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}\|<\|x\|$.

引理 5.5 [107] 设 X 是 Banach 格。X 是一致单调的当且仅当对任意 $x\in S(X)$ 及任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $A\subset\ \mathrm{supp}(x)$，满足 $\|x\chi_A\|\ge\varepsilon$，都有 $\|x\chi_{\mathbb{N}\backslash A}\|<\|x\|-\delta$.

引理 5.6 设 $x\in l_{\Phi,p}$. 如果 $K_p(x)=\emptyset$，则

$$\|x\|_{\Phi,p}=r_\Phi\sum_{i=1}^{\infty}|x(i)|$$

其中 $r_\Phi=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}<\infty$.

证明: 令 $f(k)=\dfrac{1}{k}(1+I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}$. 因为 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$，则 $\lim\limits_{k\to 0^+}f(k)=+\infty$. 又由于 $f(k)$是 $(0,\infty)$ 上的连续函数，$K_p(x)=\emptyset$，所以

$$\|x\|_{\Phi,p}=\lim_{k\to\infty}f(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{I_\Phi(kx)}{k}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|x(i)|\frac{\Phi(kx(i))}{k|x(i)|}=r_\Phi\sum_{i=1}^{\infty}|x(i)|$$

□

引理 5.7 设 Φ 是 Orlicz 函数，对任意 $A \subset \mathbb{N}$，下列两个条件等价：

(1) 对任意 $x \in l_{\Phi,p}$，$\mathrm{supp}(x) \subset A$, 有 $K_p(x) = \emptyset$.

(2) (a) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) < 1$, 或

(b) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$ 且 $I_\Phi(q_-(r_\Phi\chi_A)) = \infty$.

其中 $\chi_A = \sum_{i\in A} e_i$.

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) > 1$. 取 $\mathbb{N}$的子集列 $\{N_n\}$，使得

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots, \quad \cup_{n=1}^\infty N_n = \mathbb{N}$$

且 $\chi_{N_n} \in l_{\Phi,p}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} I_\Phi^{p-1}(q_-(n\chi_{N_n\cap A}))I_\Psi(p_+(n\chi_{N_n\cap A})) = I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A)$$

则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $I_\Phi^{p-1}(q_-(n_0\chi_{N_{n_0}\cap A}))I_\Psi(p_+(n_0\chi_{N_{n_0}\cap A})) > 1$, 从而 $K_p(n_0\chi_{N_{n_0}\cap A}) \neq \emptyset$. 故 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) \le 1$.

若 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$，但 $I_\Phi(q_-(r_\Phi\chi_A)) < \infty$. 定义 $y = q_-(r_\Phi\chi_A)$. 则 $I_\Phi(y) < \infty$，即 $y \in l_{\Phi,p}$.

对任意 $k \ge 1$,有

$$I_\Phi^{p-1}(ky)I_\Psi(p_+(ky)) \le I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$$

且

$$\begin{aligned} I_\Phi^{p-1}(ky)I_\Psi(p_+(ky)) &\ge I_\Phi^{p-1}(y)I_\Psi(p_+(y)) \\ &= I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(p_+(q_-(r_\Phi\chi_A))) \\ &\ge I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1 \end{aligned}$$

故 $[1,\infty) \subset K_p(y) \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) < 1$，则对任意 $x \in l_{\Phi,p}$, $\mathrm{supp}(x) \subset A$, 任意 $k > 0$, 有

$$I_\Phi^{p-1}(kx)I_\Psi(p_+(kx)) \le I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) < 1$$

故 $k_x^*(x) = \infty$, 即 $K_p(x) = \emptyset$.

如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$, 且 $I_\Phi(q_-(r_\Phi\chi_A)) = \infty$，假设存在 $x \in l_{\Phi,p}$，$K_p(x) \neq \emptyset$. 不失一般性，设 $x \ge 0$. 因为对任意 $k \ge 0$,

$$I_\Phi^{p-1}(kx)I_\Psi(p_+(kx)) \le I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$$

则存在 $k_0 > 0$, 使得 $I_\Phi^{p-1}(k_0x)I_\Psi(p_+(k_0x)) = 1$. 于是 $k_0 \in K_p(x)$, $I_\Phi(k_0x) < \infty$, 且 $\Psi(p_+(k_0x)) = \Psi(r_\Phi\chi_A)$.

若 $\Psi(r_\Phi) = 0$, 则 $q_-(r_\Phi) = 0$, 所以 $k_0x \geq q_-(r_\Phi)$. 若 $\Psi(r_\Phi) > 0$, 由 Ψ 是严格单调的，则 $p_+(k_0x) = r_\Phi$, 从而 $k_0x \geq q_-(r_\Phi)$. 于是 $I_\Phi(q_-(r_\Phi\chi_A)) \leq I_\Phi(k_0x) < \infty$, 此为矛盾。 □

5.2 $l_{\Phi,p}$ 的单调性

首先我们来讨论 $l_{\Phi,p}$ 的严格单调性、局部一致单调性及一致单调性。

定理 5.1 $l_{\Phi,p}$ 是严格单调的充要条件是

(1) $a_\Phi = 0$ 或

(2) (a) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) < 1$, 或

(b) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) = 1$ 且 $I_\Phi(q_-(r_\Phi)) = \infty$.

证明: 必要性. 如果 $a_\Phi > 0$, 将自然数集 $\mathbb{N}$ 划分成无穷多个互不相交的子集，记做 N_n，满足当 $n \to \infty$ 时，$\inf_n N_n \to \infty$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$x_n = \sum_{i \in N_{n+1}} a_\Phi e_i, \quad x = \sum_{i \in N_1} a_\Phi e_i$$

对任意 $k > 1$，我们有

$$I_\Phi(kx_n) = I_\Phi(kx) = I_\Phi(k(x_n + x)) = \infty$$

对任意 $k \in (0, 1]$，有

$$\frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx_n))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(k(x_n + x)))^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{k}$$

所以 $\|x_n\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \dfrac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx_n))^{\frac{1}{p}} = 1$. 同理，$\|x\|_{\Phi,p} = \|x_n + x\|_{\Phi,p} = 1$. 因此，$l_{\Phi,p}$ 不是严格单调的。

如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) > 1$，取 $\mathbb{N}$的子集列 $\{N_n\}$，使得 $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$，$\cup_{n=1}^\infty N_n = \mathbb{N}$，且 $\chi_{N_n} \in l_{\Phi,p}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. 由于 $\lim_{n\to\infty} I_\Phi^{p-1}(q_-(n\chi_{N_n}))I_\Psi(p_+(n\chi_{N_n})) = I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi)$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $I_\Phi^{p-1}(q_-(n_0\chi_{N_{n_0}}))I_\Psi(p_+(n_0\chi_{N_{n_0}})) > 1$, 从而由引理 5.7 知，$K_p(n_0\chi_{N_{n_0}}) \neq \emptyset$.

定义 $x = n_0\chi_{N_0}$. 则 $x \in l_{\Phi,p}$ 且 $K_p(x) \neq \emptyset$. 设 $h \in K_p(x)$. 定义 $y = x + \dfrac{a_\Phi}{h}\chi_{\mathbb{N}\setminus N_0}$. 于是 $x \leq y$，$x \neq y$, 且

$$\begin{aligned}\|y\|_{\Phi,p} &\leq \frac{1}{h}(1 + I_\Phi^p(hy))^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{h}(1 + I_\Phi(hx) + (I_\Phi(a_\Phi\chi_{\mathbb{N}\setminus N_0}))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{h}(1 + I_\Phi^p(hx))^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\Phi,p}\end{aligned}$$

所以 $\|x\|_{\Phi,p} = \|y\|_{\Phi,p}$. 这说明 $l_{\phi,p}$ 不是严格单调的。

充分性. 设 $a_\Phi = 0$. 对任意 $x, y \in (l_{\Phi,p})^+$ 满足 $\|x\|_{\Phi,p} = 1$，$y \neq 0$.

1. $K_p(x) \neq \emptyset$. 则易知 $K_p(x+y) \neq \emptyset$，于是取 $k \in K_p(x+y)$, 有

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\Phi,p}^p - \|x\|_{\Phi,p}^p &= \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(k(x+y))) - \|x\|_{\Phi,p}^p \\
&\geq \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(k(x+y))) - \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx)) \\
&\geq \frac{1}{k^p}((I_\Phi(kx) + I_\Phi(ky))^p - I_\Phi^p(kx)) \\
&\geq \frac{1}{k^p} I_\Phi^p(ky) > 0
\end{aligned}$$

2. $K_p(x) = \emptyset$. 如果 $K_p(x+y) = \emptyset$，由引理 5.6 有

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\Phi,p} &= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) + y(i)| \\
&= r_\Phi \left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} y(i) \right) \\
&= \|x\|_{\Phi,p} + \|y\|_{\Phi,p} \\
&= \|x\|_{\Phi,p} > 1
\end{aligned}$$

如果 $K_p(x+y) \neq \emptyset$，则取 $k \in K_p(x+y)$，接下来的讨论与 Case 1 相同。综上可得，$l_{\Phi,p}$ 是严格单调的。

下面设(2)成立。任取 $x \in S(l_{\Phi,p})$, 任取 $j \in \mathrm{supp}(x)$, 则 $\|x\chi_j\|_{\Phi,p} > 0$. 根据引理 5.7 知, $K_p(x\chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}) = \emptyset$.

1. 若 $K_p(x) = \emptyset$, 则

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Phi,p} &= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| \\
&= r_\Phi |x(j)| + r_\Phi \sum_{i \neq j} |x(i)| \\
&\geq \|x\chi_{\{j\}}\|_{\Phi,p} + \|x\chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}\|_{\Phi,p} \\
&> \|x\chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}\|_{\Phi,p}
\end{aligned}$$

2. 若 $K_p(x) \neq \emptyset$, 取 $h \in K_p(x)$, 则

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Phi,p} &= \frac{1}{h}(1 + I_\Phi^p(hx))^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{h}(1 + I_\Phi^p(hx\chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}))^{\frac{1}{p}} \\
&> \|x\chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}\|_{\Phi,p}
\end{aligned}$$

所以由引理 5.4 知 $l_{\Phi,p}$ 是严格单调的。 □

引理 5.8 设 $x \in S(l_{\Phi,p})$，$x \geq 0$，且 $K_p(x) = \emptyset$，则 x 既是上局部一致单调点，也是下局部一致单调点。

证明： 由引理 5.6 我们有，$\|x\|_{\Phi,p} = r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} x(i)$. 对任意 $y \in (l_{\Phi,p})^+$ 满足 $\|y\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon$，易知 $K_{\Phi,p}(x-y) = \emptyset$，所以

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_{\Phi,p} &= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} (x(i) - y(i)) \\
&= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} x(i) - r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} y(i) \\
&= \|x\|_{\Phi,p} - \|y\|_{\phi,p} \\
&\leq 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

这说明 x 是下局部一致单调点。

假设 x 不是上局部一致单调点，则存在 $(l_{\Phi,p})^+$ 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon > 0$ 且 $\|x + x_n\|_{\Phi,p} \to 1$. 我们来自考虑下面两种情况:

1. 存在无穷多个 n 使得 $K_p(x_n + x) = \emptyset$. 由引理 5.6 我们有

$$\begin{aligned}
\|x + x_n\|_{\Phi,p} &= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} (x(i) + x_n(i)) \\
&= r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} x(i) + r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) \\
&\geq \|x\|_{\Phi,p} + \|x_n\|_{\Phi,p} \\
&\geq 1 + \varepsilon
\end{aligned}$$

该不等式对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，这是矛盾的。

2.存在无穷多个 n 使得 $K_p(x_n + x) \neq \emptyset$. 在这种情况下，不是一般性，我们可以设 $K_p(x_n + x) \neq \emptyset$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。设 $k_n \in K_p(x_n + x)$，$n = 1, 2, \ldots$. 考虑两种可能:

(1)如果 $k_n \to k_0 < \infty$，则

$$\|x + x_n\|_{\Phi,p} = \frac{1}{k_n}(1 + I_\Phi^p(k_n(x_n + x)))^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{k_n}(1 + I_\Phi^p(k_n x))^{\frac{1}{p}}$$

于是由于 $K_p(x) = \emptyset$，$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\|_{\Phi,p} = 1$，根据 Fatou 引理我们有，

$$1 = \lim_{n\to\infty} \|x_n + x\|_{\Phi,p} \geq \frac{1}{k_0}(1 + I_\Phi^p(k_0 x))^{\frac{1}{p}} > \|x\|_{\Phi,p} = 1$$

这显然矛盾。

(2)如果 $k_n \to \infty$，我们有

$$1 = \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|^p$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n(x_n + x))) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x_n) + I_\Phi^p(k_n x)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x_n)) + \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x))\Big) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty}(\|x_n\|_{\Phi,p}^p + \|x\|_{\Phi,p}^p) \\
&\geq 1 + \varepsilon
\end{aligned}
$$

这也矛盾，因此命题结论成立。 □

定理 5.2 下列命题等价：

(1) $l_{\Phi,p}$ 是一致单调的。

(2) $l_{\Phi,p}$ 是上局部一致单调的。

(3) $l_{\Phi,p}$ 是下局部一致单调的。

(4) $l_{\Phi,p}$ 是严格单调的，且 $\Phi \in \Delta_2(0)$.

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) 及 (1) $\Rightarrow$ (3) 是显然的。

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 $\Phi \in \Delta_2(0)$. 如果 $a_\Phi = 0$, 而 $l_{\Phi,p}$ 不是一致单调的，则存在 $\varepsilon > 0$ 及 $x_n, y_n \in l_{\Phi,p}^+$ 满足 $\|x_n\|_{\Phi,p} = 1$，$\|y_n\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon$，且 $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\|_{\Phi,p} = 1$. 则 $\|y_n/2\|_\Phi \geq 2^{-\frac{1}{p}-1}\varepsilon$. 由于 $\Phi \in \Delta_2(0)$，根据引理 5.1，存在 $\delta > 0$ 使得 $I_\Phi(y_n/2) \geq \delta$.

取 $k_n \in K_p(x_n + y_n)$，由于 $\|x_n + y_n\|_{\Phi,p} \leq 2$，故 $k_n > 1/2$. 因此

$$
\begin{aligned}
\|x_n + y_n\|_{\Phi,p}^p - 1 &= \|x_n + y_n\|_{\Phi,p}^p - \|x_n\|_{\Phi,p}^p \\
&\geq \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n(x_n + y_n))) - \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x_n)) \\
&\geq \frac{1}{k_n^p}((I_\Phi(k_n x_n) + I_\Phi(k_n y_n))^p - I_\Phi^p(k_n x_n)) \\
&\geq \frac{1}{k_n^p} I_\Phi^p(k_n y_n) \\
&\geq 2^p I_\Phi^p\Big(\frac{y_n}{2}\Big) \\
&\geq 2^p \delta^p
\end{aligned}
$$

这与 $\|x_n + y_n\|_{\Phi,p} \to 1$ 矛盾。

如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \leq 1$, 则对任意 $x \in l_{\Phi,p}$ 及任意 $k > 0$, 有

$$
I_\Phi^{p-1}(p_+(kx))I_\Psi(kx) \leq I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \leq 1
$$

所以 $k_x^* = \infty$, 从而 $K_p(x) = \emptyset$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 及任意 $A \subset \mathrm{supp}(x)$, 满足

$\|x\chi_A\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon$, 易知 $K_p(x\chi_A) = \emptyset$, $K_p(x\chi_{\mathbb{N}\setminus A}) = \emptyset$. 所以

$$\begin{aligned}\|x\|_{\Phi,p} = r_\Phi \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| &= r_\Phi \sum_{i\in A} |x(i)| + r_\Phi \sum_{i\in\mathbb{N}\setminus A} |x(i)| \\ &> \|x\chi_A\|_{\Phi,p} + \|x\chi_{\mathbb{N}\setminus A}\|_{\Phi,p} \\ &\geq \|x\chi_{\mathbb{N}\setminus A}\|_{\Phi,p} + \varepsilon\end{aligned}$$

由引理 5.5 知， $l_{\Phi,p}$ 是一致单调的。

(2) $\Rightarrow$ (4). 由于上局部一致单调蕴含严格单调，故只需证 $\Phi \in \Delta_2(0)$. 假设 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则对任意 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，存在 $\{u_n\} \downarrow 0$，满足

$$\Phi(u_n) < \varepsilon u_n p_+(u_n), \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(p_+(u_n))\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\right)^{p-1} = 1$$

令 $k = (1 + (\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n))^p)^{\frac{1}{p}}$，定义

$$x = \frac{1}{k}(u_1, 0, u_2, 0, u_3, 0, \cdots)$$

则有

$$\begin{aligned}\alpha_p(kx) &= I_\Phi^{p-1}(kx) I_\Psi(p_+(k|x|)) - 1 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(p_+(u_n))\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\right)^{p-1} - 1 = 0\end{aligned}$$

于是 $k \in K_p(x)$，且 $\|x\|_{\Phi,p} = \dfrac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} = 1$.

由于 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则对任意 $\eta \in (0, \varepsilon)$，存在充分小的 $v > 0$ 使得 $\Phi((1+\eta)v) > \dfrac{\Phi(v)}{\eta}$. 取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\eta < m\Phi(v) \leq 2\eta$. 定义

$$y = \frac{1}{k}(\overbrace{0, v, 0, v, \ldots, 0, v}^{2m}, 0, 0, 0, \cdots)$$

注意到，

$$I_\Phi((1+\eta)ky) = m\Phi((1+\eta)v) > \frac{m\Phi(v)}{\eta} > 1$$

于是我们有，$\|y\|_{\Phi,p} \geq \|y\|_\Phi \geq \dfrac{1}{(1+\eta)k} > \dfrac{1}{(1+\varepsilon)k}$. 又因为

$$\begin{aligned}k &= \left(1 + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \left(1 + \varepsilon^p \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n p_+(u_n)\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$= \left(1 + \varepsilon^p \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(p_+(u_n)) \Big)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(1 + \varepsilon^p \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n))^{1-p} \Big)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $k^p < 1 + \varepsilon^p((k^p-1)^{\frac{1}{p}} + (k^p-1)^{-\frac{1}{q}})^p$，所以 $k < \Big(\dfrac{1}{1-\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{p}}$ 且

$$\|y\|_{\Phi,p} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)k} > \frac{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{1+\varepsilon}$$

由于 $k > 1$，根据引理 5.2，可得

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\Phi,p} - 1 &= \|x+y\|_{\Phi,p} - \|x\|_{\Phi,p} \\
&\leq \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(k(x+y))^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{k} I_\Phi(ky) < I_\Phi(ky) \\
&= m\Phi(v) \leq 2\eta
\end{aligned}$$

则 $l_{\Phi,p}$ 不是上局部一致单调的。

(3) $\Rightarrow$ (4). 只需证 $\Phi \in \Delta_2(0)$. 若不然，则存在非负序列 $\{u_k\} \downarrow 0$ 满足

$$\Phi\Big((1+\frac{1}{k})u_k\Big) > 2^{k+1}\Phi(u_k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

取 $m_n \in \mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leq m_n\Phi(u_n) < \dfrac{1}{2^n}$. 定义

$$x = (\overbrace{u_1, \cdots, u_1}^{m_1}, \overbrace{u_2, \cdots, u_2}^{m_2} \overbrace{u_3, \cdots, u_3}^{m_3}, \cdots),$$

$$x_n = \sum_{n=(m_1+m_2+\cdots+m_n)+1}^{\infty} x(i)e_i \quad (n \in \mathbb{N})$$

则 $0 \leq x_n \leq x$，且

$$I_\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\Phi(u_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

$$\begin{aligned}
I_\Phi\Big((1+\frac{1}{n})x_n\Big) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_i\Big) \geq \sum_{i=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{i})u_i\Big) \\
&> \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{i+1}m_i\Phi(u_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} 1 = \infty
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{n}{n+1} \leq \|x_n\|_\Phi \leq \|x_n\|_{\Phi,p}, \quad 1 = \|x\|_\Phi \leq \|x\|_{\Phi,p} \leq 2^{\frac{1}{p}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,p}=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)}x(i)e_i\right\|_{\Phi,p}=\|x\|_{\Phi,p}$$

此为矛盾。 □

引理 5.9 [110] Köthe 序列空间 X 是弱正交的当且仅当 X 是序连续的。

引理 5.10 [67] 如果 Banach 格 X 是弱正交的且是一致单调的，则 X 满足（DL）-条件，进而蕴含弱不动点性质，即任意非空弱紧凸子集上的集值非扩张自映射都具有不动点。

推论 5.1 $l_{\Phi,p}$ 是弱正交的当且仅当 $\Phi\in\Delta_2(0)$.

推论 5.2 如果 $a_\Phi=0,\Phi\in\Delta_2(0)$，则 $l_{\Phi,p}$ 有弱集值不动点性质。

5.3 $l_{\Phi,p}$ 的单调系数

接下来我们讨论 $l_{\Phi,p}$ 的单调系数以及 $l_{\Phi,p}$ 的单位球面上点的局部单调系数。

引理 5.11 [68] 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}\delta_X(\varepsilon)&=\inf\{1-\|x-y\|:0\le y\le x,\|X\|=1,\|y\|\ge\varepsilon\}\\&=\inf\{1-\|x-y\|:0\le y\le x,\|X\|=1,\|y\|=\varepsilon\}\\&=\inf\{1-\|x-y\|:0\le y\le x,\|X\|\le1,\|y\|\ge\varepsilon\}\\&=\inf\{1-\|x-y\|:0\le y\le x,\|X\|\le1,\|y\|=\varepsilon\}\end{aligned}$$

定理 5.3 (1)如果 $\Phi\notin\Delta_2(0)$，则 $\widetilde{\varepsilon}_m(l_{\Phi,p})=\varepsilon_m(l_{\Phi,p})=1$.

(2)如果 $\Phi\in\Delta_2(0)$，且

(i)$a_\Phi=0$, 或 (ii) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi)\le1$,

则 $\widetilde{\varepsilon}_m(l_{\Phi,p})=\varepsilon_m(l_{\Phi,p})=0$.

证明由定理 5.2 直接可得。

定理 5.4 设 $x\in S(l^+_{\Phi,p})$，则有

(1)如果 $\Phi\notin\Delta_2(0)$，则 $\varepsilon_m(x)=\dfrac{1}{k_p^*(x)}$.

(2)如果 $\Phi\in\Delta_2(0)$，且

(i)$a_\Phi=0$, 或 (ii) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi)\le1$,

则 $\varepsilon_m(x)=0$.

证明： 如果 (2)成立，则由定理 5.2 知，$l_{\Phi,p}$ 是上局部一致单调的，故 $\varepsilon_m(x)=0$.

如果 $\Phi \notin \Delta_2(0)$，则对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ 及 $\delta > 0$，存在 $u > 0$ 使得

$$\Phi(u) < \delta,\ \ \Phi((1+\varepsilon)u) > \frac{1}{\delta}\Phi(u)$$

取 $m \in \mathbb{N}$, 满足 $\delta < m\Phi(u) \le 2\delta$. 取 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得当 $i > i_0$ 时， $k_p^*(x)x(i) < \varepsilon u$.

定义 $y = \sum_{i=i_0+1}^{i_0+m}\Big(\frac{u}{k_p^*(x)} - x(i)\Big)e_i$. 于是，

$$I_\Phi((1+3\varepsilon)k_p^*(x)y) > \sum_{i=i_0+1}^{i_0+m}\Phi((1+3\varepsilon)(1-\varepsilon)u) > m\Phi((1+\varepsilon)u) > 1$$

从而 $\|y\|_{\Phi,p} \ge \|y\|_\Phi > \dfrac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}$.

另一方面，根据引理 5.2，有

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|_{\Phi,p}\\
&\le \frac{1}{k_p^*(x)}(1 + I_\Phi^p(k_p^*(x)(x+y)))^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{k_p^*(x)}\left[1 + \left(\sum_{i=i_0+1}^{i_0+m}\Phi(u) + \sum_{i=1}^{i_0}\Phi(k_p^*(x)x(i)) + \sum_{i=i_0+m+1}^{\infty}\Phi(k_p^*(x)x(i))\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&< \frac{1}{k_p^*(x)}\Big(1 + (m\Phi(u) + I_\Phi(k_p^*(x)x))^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \frac{1}{k_p^*(x)}\Big((1 + I_\Phi^p(k_p^*(x)x))^{\frac{1}{p}} + m\Phi(u)\Big)\\
&= \|x\|_{\Phi,p} + \frac{1}{k_p^*(x)}m\Phi(u)\\
&\le \|x\|_{\Phi,p} + 2\delta
\end{aligned}$$

所以，

$$\eta_x\Big(\frac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}\Big) \le 2\delta \to 0,\ (\text{当 } \delta \to 0 \text{ 时})$$

因此，$\varepsilon_m(x) \ge \dfrac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}$. 由 ε 的任意性可得，$\varepsilon_m(x) \ge \dfrac{1}{k_p^*(x)}$.

假设 $\varepsilon_m(x) > \dfrac{1}{k_p^*(x)}$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 满足 $\varepsilon_m(x) > \dfrac{1}{k_p^*(x)} + \varepsilon_0$，从而存在序列 $\{y_n\} \subset l_{\Phi,p}^+$， 使得$\|y_n\|_{\Phi,p} \ge \dfrac{1}{k_p^*(x)} + \varepsilon_0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|x+y_n\|_{\Phi,p} = 1$.

记 $k_n = k_p^*(x+y_n)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. 显然 $k_n \le k_p^*(x)$，不是一般性，我们可设 $\lim_{n\to\infty} k_n = k_0$，则 $k_0 \le k_p^*(x)$.

如果 $k_0 < k_p^*(x)$，根据引理 5.3，函数 $k \to \dfrac{1}{k}s_{\Phi,p}(kx)$ 在区间 $(0, k_p^*(x))$ 是减函数，所以存在 $\sigma > 0$， 使得

$$\frac{1}{k_n}s_{\Phi,p}(k_nx) \geq \frac{1}{k_p^*(x)}s_{\Phi,p}(k_p^*(x)) + \sigma$$

因此，

$$\|x + y_n\|_{\Phi,p} - 1 = \|x + y_n\|_{\Phi,p} - \|x\|_{\Phi,p} \geq \sigma$$

这与 $\lim_{n\to\infty}\|x + y_n\|_{\Phi,p} = 1$ 是矛盾的。

如果 $k_0 = k_p^*(x)$, 由 Fatou 引理有，

$$\liminf_{n\to\infty} I_\Phi(k_nx) \geq I_\Phi(k_0x) = (k_0^p - 1)^{\frac{1}{p}}$$

则

$$\begin{aligned}
k_0^p &= \lim_{n\to\infty} k_n^p\|x + y_n\|_{\Phi,p}^p \\
&= \lim_{n\to\infty}(1 + I_\Phi^p(k_n(x + y_n))) \\
&\geq \lim_{n\to\infty}(1 + (I_\Phi(k_nx) + I_\Phi(k_ny_n))^p) \\
&\geq \lim_{n\to\infty}(1 + I_\Phi^p(k_nx) + I_\Phi^p(k_ny_n)) \\
&\geq \lim_{n\to\infty}(I_\Phi^p(k_nx) + \|k_ny\|_{\Phi,p}^p) \\
&\geq \left(k_0(\frac{1}{k_0} + \varepsilon_0)\right)^p + k_0^p - 1 \\
&= k_0^p + (1 + k_0\varepsilon_0)^p - 1 \\
&> k_0^p
\end{aligned}$$

此为矛盾。所以，$\varepsilon_m(x) = \dfrac{1}{k_p^*(x)}$. □

定理 5.5 设 $x \in S(l_{\Phi,p}^+)$，则 $\widetilde{\varepsilon}_m(x) = \theta(x)$.

证明: 设 $x \in l_{\Phi,p}$，令 $[x]_n = \sum_{i=1}^n x(i)e_i$. 因为

$$\theta(x) = \lim_{n\to\infty}\|x - [x]_n\|_\Phi = \lim_{n\to\infty}\|x - [x]_n\|_\Phi^\circ$$

所以 $\theta(x) = \lim_{n\to\infty}\|x - [x]_n\|_{\Phi,p}$.

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\|[x]_{i_0}\|_{\Phi,p} > 1 - \varepsilon_0$，所以 $\|x - (x - [x]_{i_0})\|_{\Phi,p} > 1 - \varepsilon_0$.

进一步，由于

$$\|x - [x]_{i_0}\|_{\Phi,p} \geq \|x - [x]_{i_0}\|_\Phi \geq \theta(x)$$

则 $\delta_x(\theta(x)) < \varepsilon$，由 ε 的任意性有，$\delta_x(\theta(x)) = 0$，进而 $\widetilde{\varepsilon}_m(x) \geq \theta(x)$.

假设 $\widetilde{\varepsilon}_m(x) > \theta(x)$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\widetilde{\varepsilon}_m(x) > \theta(x) + \varepsilon_0$. 于是存在序列 $\{y_n\} \subset l_{\Phi,p}$， 满足 $y_n \leq x$ 且

$$\|y_n\|_{\Phi,p} \geq \theta(x) + \varepsilon_0,\ \lim_{n\to\infty}\|x - y_n\|_{\Phi,p} = 1$$

取充分大的 i_0，使得 $\|x-[x]_{i_0}\|_{\Phi,p}<\theta(x)+\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，则

$$\begin{aligned}\|y_n\|_{\Phi,p}&\le\|[y_n]_{i_0}\|_{\Phi,p}+\|y_n-[y_n]_{i_0}\|_{\Phi,p}\\&\le\|[y_n]_{i_0}\|+\|x-[x]_{i_0}\|_{\Phi,p}\\&<\|[y_n]_{i_0}\|_{\Phi,p}+\theta(x)+\frac{\varepsilon_0}{2}\end{aligned}$$

因此 $\|[y_n]_{i_0}\|_{\Phi,p}>\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，从而 $\|[y_n]_{i_0}\|_{\Phi}>\dfrac{\varepsilon_0}{2^{\frac{1}{p}+1}}$，于是存在 $\delta>0$，满足 $I_\Phi([y_n]_{i_0})>\delta$. 取 $k\in K_p(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\|x-y_n\|_{\Phi,p}^p&\le\frac{1}{k^p}(1+I_\Phi^p(k(x-y_n)))\\&\le\frac{1}{k^p}(1+(I_\Phi(kx)-I_\Phi(ky_n))^p)\\&\le\frac{1}{k^p}(1+(I_\Phi^p(kx)-I_\Phi^p(ky_n)))\\&\le\|x\|_{\Phi,p}-I_\Phi^p(y_n))\\&\le1-\delta^p\end{aligned}$$

这与 $\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|_{\Phi,p}=1$ 是矛盾的。所以，$\widetilde{\varepsilon}_m(x)=\theta(x)$. □

5.4 本章小结

本章主要讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的单调性，得到了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件，进一步给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有弱集值不动点性质的充分条件；其次，讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的单调系数与单位球面上的点的上、下局部单调系数，给出其准确值。

第 6 章 Orlicz 函数空间的单调系数

在本章，我们将讨论赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调性及单调模，并讨论其在最佳逼近、不动点问题中的应用。

6.1 $L_{\Phi,p}$ 的单调性

设 $(T,\sum,\mu)$ 是无原子有限测度空间。$L_{\Phi,p}$ 是 Köthe 空间，显然是 Banach 格，其中

$$x \geq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t) \quad (\mu-\text{a.e. } t \in T)$$

本节我们讨论 $L_{\Phi,p}$ 的严格单调性、局部一致单调性及一致单调性。

引理 6.1 设 $x \in L_{\Phi,p}$. 如果 $K_p(x) = \emptyset$, 则 $\|x\|_{\Phi,p} = r_\Phi \int_T |x(t)|\mathrm{d}t$, 其中 $r_\Phi = \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\Phi(u)}{u}$.

证明: 令 $f(k) = \dfrac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}$. 则 $\lim\limits_{k\to 0^+} f(k) = +\infty$. 由于 $f(k)$ 是连续函数，且 $K_p(x) = \emptyset$, 则

$$\|x\|_{\Phi,p} = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{I_\Phi(kx)}{k} = \lim_{k\to\infty} \int_T |x(t)| \frac{\Phi(kx(t))}{k|x(t)|}\mathrm{d}t = r_\Phi \int_T |x(t)|\mathrm{d}t.$$

□

引理 6.2 设 Φ 是 Orlicz 函数，对任意 $A \subset T$，下列两个条件等价:

(1) 对任意 $x \in L_{\Phi,p}$，$\operatorname{supp}(x) \subset A$, 有 $K_p(x) = \emptyset$.

(2) (a) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) < 1$, 或

(b) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi\chi_A))I_\Psi(r_\Phi\chi_A) = 1$ 且 $I_\Phi(q_-(r_\Phi\chi_A)) = \infty$.

证明仿引理 5.7 可得。

引理 6.3 [107] 设 X 是 Banach 函数格。X 是严格单调的当且仅当对任意 $x \in S(X)$ 及任意 $C \subset \operatorname{supp}(x)$，且 $\mu(C) > 0$，有 $\|x\chi_{T\setminus C}\| < \|x\|$.

定理 6.1 $L_{\Phi,p}$ 是严格单调的充要条件是

(1) $a_\Phi = 0$ 或

(2) (a) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) < 1$, 或

(b) $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) = 1$ 且 $I_\Phi(q_-(r_\Phi)) = \infty$.

证明: 充分性. 对任意 $x \in (L_{\Phi,p})^+$, 任意 $C \subset \operatorname{supp}(x)$, 有 $\|x\chi_C\|_{\Phi,p} > 0$.

如果 $a_\Phi = 0$, 则 $I_\Phi(x\chi_C) > 0$. 任取 $k \geq 1$, 有

$$
\begin{aligned}
\|x - x\chi_C\|_{\Phi,p}^p &\le \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(k(x - x\chi_C))) \\
&\le \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx) - I_\Phi^p(kx\chi_C)) \\
&\le \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx)) - I_\Phi^p(x\chi_C)
\end{aligned}
$$

因此 $\|x - x\chi_C\|_{\Phi,p}^p \le \|x\|_{\Phi,p}^p - I_\Phi^p(x\chi_C) < \|x\|_{\Phi,p}^p$. 所以 $L_{\Phi,p}$ 是严格单调的。

如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \le 1$, 则对任意 $k > 0$, 有

$$I_\Phi^{p-1}(p_+(kx))I_\Psi(kx) \le I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \le 1$$

所以 $K_p(x) = \emptyset$，则 $\|x\|_{\Phi,p} = r_\Phi \int_T |x(t)|dt \ge r_\Phi \int_{T\setminus C} |x(t)|dt > \|x\chi_{T\setminus C}\|_{\Phi,p}$, 由引理 6.3 有， $L_{\Phi,p}$ 是严格单调的。

必要性证明类似定理 5.1. □

注解 6.1 若 $\mu(T) = \infty$，$a_\Phi > 0$，则 $L_{\Phi,p}$ 不是严格单调的。

事实上， 选取集合 $A \subset T$, 使得 $\mu A = \mu(T \setminus A) = \infty$. 定义

$$x(t) = a_\Phi \chi_T(t), \quad y(t) = a_\Phi \chi_{T\setminus A}(t) \quad (t \in T)$$

则 $0 \le y \le x$.

对任意 $k \in (0, 1)$, 有 $\frac{1}{k}(1+I_\Phi(kx)) = \frac{1}{k} > 1$. 对任意 $k > 1$, 有 $I_\Phi(kx) = \infty$. 所以

$$\|x\|_\Phi^\circ = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} = 1$$

同理 $\|y\|_\Phi^\circ = \|x - y\|_\Phi^\circ = 1$. 因此，$L_{\Phi,p}$ 不是严格单调的。

引理 6.4 如果 $x \in S((L_{\Phi,p})^+)$，且 $K_p(x) = \emptyset$, 则 x 既是上局部一致单调点，也是下局部一致单调点。

证明类似定理 5.8.

定理 6.2 下列命题等价：

(1) $L_{\Phi,p}$ 是一致单调的。

(2) $L_{\Phi,p}$ 是上局部一致单调的。

(3) $L_{\Phi,p}$ 是下局部一致单调的。

(4) $L_{\Phi,p}$ 是严格单调的且 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

证明： (4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$。如果 $L_{\Phi,p}$ 不是一致单调的，则存在 $\varepsilon > 0$，及 $x_n, y_n \in L_{\Phi,p}^+$，满足

$$\|x_n\|_{\Phi,p} = 1, \ \|y_n\|_{\Phi,p} \ge \varepsilon, \ \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\|_{\Phi,p} = 1$$

则 $\|y_n/2\|_\Phi \ge 2^{-\frac{1}{p}-1}\varepsilon$，从而由 $a_\Phi = 0$ 及引理 5.1，存在 $\delta > 0$，使得

$I_\Phi(y_n/2) \geq \delta$.

取 $k_n \in K_p(x_n + y_n)$，由 $\|x_n + y_n\|_{\Phi,p} \leq 2$ 知，$k_n > 1/2$. 所以

$$\begin{aligned}
\|x_n + y_n\|_{\Phi,p}^p - 1 &= \|x_n + y_n\|_{\Phi,p}^p - \|x_n\|_{\Phi,p}^p \\
&\geq \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n(x_n + y_n))) - \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x_n)) \\
&\geq \frac{1}{k_n^p}((I_\Phi(k_n x_n) + I_\Phi(k_n y_n))^p - I_\Phi^p(k_n x_n)) \\
&\geq \frac{1}{k_n^p} I_\Phi^p(k_n y_n) \\
&\geq 2^p I_\Phi^p\Big(\frac{y_n}{2}\Big) \geq 2^p \delta^p
\end{aligned}$$

这与 $\|x_n + y_n\|_{\Phi,p} \to 1$ 矛盾。

如果 $I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \leq 1$, 则对任意 $x \in L_{\Phi,p}$ 及任意 $k > 0$, 有

$$I_\Phi^{p-1}(p_+(kx))I_\Psi(kx) \leq I_\Phi^{p-1}(q_-(r_\Phi))I_\Psi(r_\Phi) \leq 1$$

所以 $k_x^* = \infty$, 从而 $K_p(x) = \emptyset$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 及任意 $A \subset \mathrm{supp}(x)$, 满足 $\|x\chi_A\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon$, 易知 $K_p(x\chi_A) = \emptyset$, $K_p(x\chi_{T\setminus A}) = \emptyset$. 所以

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Phi,p} = r_\Phi \int_T |x(t)|dt &= r_\Phi \int_A |x(t)|dt + r_\Phi \int_{T\setminus A} |x(t)|dt \\
&> \|x\chi_A\|_{\Phi,p} + \|x\chi_{T\setminus A}\|_{\Phi,p} \\
&\geq \|x\chi_{T\setminus A}\|_{\Phi,p} + \varepsilon
\end{aligned}$$

由引理 5.5 知， $L_{\Phi,p}$ 是一致单调的。

(2) ⇒ (4)　设 $L_{\Phi,p}$ 是上局部一致单调的，则显然蕴含严格单调，所以 $a_\Phi = 0$，故只需证 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$. 若不然，则存在序列 $\{u_n\}$ 满足 $u_n \uparrow \infty$ 且 $\Phi(2u_n) > 2^n\Phi(u_n)$　$(\forall\, n \in \mathbb{N})$.

设 $x \in S(L_{\Phi,p})$. 取 $a > 0$ 使得 $T_0 = \{t \in T : |x(t)| \leq a\}$ 的测度大于零。取 T_0 的子集列 $\{T_n\}$，满足 $\Phi(u_n)\mu(T_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

取 $k \in K_p(x)$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$y_n(t) = \frac{u_n}{k}\chi_{T_n}(t) \quad (t \in T)$$

则 $I_\Phi(2ky_n) = \Phi(2u_n)\mu T_n > 2^n\Phi(u_n)\mu T_n = 1$，从而$\|y_n\|_{\Phi,p} \geq \|y_n\|_{\Phi,\infty} \geq \dfrac{1}{2k}$.

由于 $\lim_{n\to\infty} \mu T_n = 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \|x\chi_{T_n}\|_{\Phi,p} \leq \lim_{n\to\infty} \|x\chi_{T_n}\|_{\Phi,1} \leq a \lim_{n\to\infty} \|\chi_{T_n}\|_{\Phi,1} = 0$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + y_n\|_{\Phi,p} = \limsup_{n\to\infty} \Big\|x\chi_{T\setminus T_n} + \Big(x + \frac{u_n}{k}\Big)\chi_{T_n}\Big\|_{\Phi,p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{n\to\infty} \left\| x\chi_{T\setminus T_n} + \frac{u_n}{k}\chi_{T_n} \right\|_{\Phi,p} \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k} s_{\Phi,p}(kx\chi_{T\setminus T_n} + u_n\chi_{T_n}) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{k} s_{\Phi,p}(kx) + \frac{1}{k}\Phi(u_n)\mu(T_n) \Big) \\
&= 1 + \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n)\mu(T_n) = 1
\end{aligned}
$$

又因为

$$\liminf_{n\to\infty} \|x + y_n\|_{\Phi,p} \ge \lim_{n\to\infty} \|x\chi_{T\setminus T_n}\|_{\Phi,p} = \|x\|_{\Phi,p} = 1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + y_n\|_{\Phi,p} = 1$. 这与 $L_{\Phi,p}$ 是上局部一致单调矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (4)　显然有 $a_\Phi = 0$. 假设 Φ 不满足 $\Delta_2(\infty)$ 条件，取 T 的子集 E 使得 $0 < \mu E < \mu T$. 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一列非负序列 $\{u_k\} \uparrow \infty$ 满足

$$\Phi(u)\mu E > \varepsilon,\ \ \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_n\Big) > 2^n\Phi(u_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

取 E 的子集列 $\{E_n\}$, 使得 $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ 且 $\mu E_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n\Phi(u_n)}$ $(\forall\, n)$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\chi_{E_n}(t),\ \ x_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\chi_{E_k}(t) \quad (t \in T)$$

则 $0 \le x_n \le x$ 且

$$I_\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\mu E_n = \varepsilon < 1$$

$$
\begin{aligned}
I_\Phi\Big((1+\frac{1}{n})x_n\Big) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_i\Big) \ge \sum_{i=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{i})u_i\Big) \\
&> \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^i\Phi(u_i)\mu E_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon = \infty
\end{aligned}
$$

因此，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \le \|x_n\|_\Phi \le \|x_n\|_{\Phi,p},\ \ 1 = \|x\|_\Phi \le \|x\|_{\Phi,p} \le 2^{\frac{1}{p}}$$

进而，

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{\Phi,p} = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k\chi_{E_k}(t) \right\|_{\Phi,p} = \|x\|_{\Phi,p}$$

令 $y(t) = \dfrac{x(t)}{\|x\|_{\Phi,p}}$，$y_n(t) = \dfrac{x_n(t)}{\|x\|_{\Phi,p}}$ $(t \in T)$. 于是

$$\|y\|_{\Phi,p} = 1,\ \ \|y_n\|_{\Phi,p} \ge \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}(1+\frac{1}{n})},\quad 且 \lim_{n\to\infty} \|y - y_n\|_{\Phi,p} = 1$$

这与 $L_{\Phi,p}$ 是下局部一致单调的矛盾。

而 (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) 是显然的，所以我们证明了结论。 □

引理 6.5 $L_{\Phi,p}$ 是序连续的当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

证明： 若 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$，取 $E \subset T$ 使得 $0 < \mu E < \mu T$. 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $u_n \uparrow \infty$ 满足

$$\Phi(u_1)\mu E > \varepsilon,\ \ \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_n\Big) > 2^n\Phi(u_n)$$

取 E 的一列互不相交的子集列 $\{E_k\}$, 满足 $\Phi(u_n)\mu E_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. 定义

$$x_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \chi_{E_k}(t) \quad (t \in T)$$

则 $0 \le x_n \downarrow 0$，$I_\Phi(x_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mu E_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} I_\Phi\Big((1+\frac{1}{n})x_n\Big) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_k\Big)\mu E_k \\ &> \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi\Big((1+\frac{1}{k})u_k\Big)\mu E_k \\ &> \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k\Phi(u_k)\mu E_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 = \infty \end{aligned}$$

于是 $\|x_n\|_{\Phi,\infty} = 1$，从而 $\|x_n\|_{\Phi,p} \ge \|x_n\|_{\Phi,\infty} = 1$. 这与 $L_{\Phi,p}$ 是序连续的矛盾。

如果 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$，则对任意 $\{x_n\} \subset L_{\Phi,p}$，如果 $0 \le x_n \downarrow 0$，则$I_\Phi(x_n) \to 0$，于是 $\|x_n\|_{\Phi,p} \to 0$. □

推论 6.1 $L_{\Phi,p}$ 是弱正交的当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

推论 6.2 如果 $a_\Phi = 0, \Phi \in \Delta_2(\infty)$，则 $L_{\Phi,p}$ 具有弱集值不动点性质。

6.2 $L_{\Phi,p}$ 的单调性与最佳逼近

本节我们设 Φ 是 N- 函数，$a_\Phi = 0$. 下面利用单调性来讨论 $L_{\Phi,p}$ 的最佳逼近问题。

称 $\{x_n\} \subset K$ 为 K 的极小化序列, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| = \mathrm{dist}(x,\ K)$$

如果对任意 $y \in K$ 都有 $y \ge x$，则记做 $K \ge x$.

引理 6.6 [108] 设 X 是 Banach 格，则 X 是严格单调的当且仅当对 X 的任

意定向子集 K 及 $x \in X, K \geq x$, 有 $\mathrm{Card}(P_K(x)) \leq 1$.

引理 6.7 [108] 设 X 是序连续的 Banach 格，则对 X 的任意闭定向子集 K 及 $x \in X, K \geq x$, 有 $P_K(x) \neq \emptyset$.

定理 6.3 对 $L_{\Phi,p}$ 的任意定向子集 K 及 $x \in L_{\Phi,p}, K \geq x$, 有 $\mathrm{Card}(P_K(x)) \leq 1$.

证明由定理 6.2 及引理 6.6 直接可得。

定理 6.4 设K 为 $L_{\Phi,p}$ 的定向子集，$x \in L_{\Phi,p}$，$K \geq x$, 则 $\mathrm{Card}(P_K(x)) = 1$ 当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

证明： 如果 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$，则 $L_{\Phi,p}$ 不是序连续的，从而存在序列 $\{x_n\} \subset L_{\Phi,p}$，满足 $0 \leq x_n \downarrow 0$, 但 $\inf_n \|x\|_{\Phi,p} > 0$.

令 $K = \left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, 则 K 是闭定向集，$K \geq 0$, 但 $P_K(0) = \emptyset$. 这与已知矛盾。

当 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ 时， $L_{\Phi,p}$ 是序连续的，从而由引理 6.6 及引理 6.7 即得。 □

定理 6.5 下列等价：

(1)$\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

(2)对 $L_{\Phi,p}$ 的任意定向集 K，K 有极小化 Cauchy 列。

(3)对 $L_{\Phi,p}$ 的任意凸定向集 K，K 有极小化 Cauchy 列。

证明： (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{x_n\}$ 是 K 的极小化序列，则

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\Phi,p} = \inf_{x\in K} \|x_n\|_{\Phi,p} = d$$

令 $y_1 = x_1$. 对 y_1 和 x_2，选取 $y_2 \in K$ 使得 $y_2 \leq y_1$ 且 $y_2 \leq x_2$，. . . 对 y_n 和 x_{n+1}，选取 $y_{n+1} \in K$ 使得 $y_{n+1} \leq y_n$ 且 $y_{n+1} \leq x_{n+1}$.

于是我们找到了一列单调降序列 $\{y_n\}$ 且

$$d \leq \|y_n\|_{\Phi,p} \leq \|x_n\|_{\Phi,p} \to d \quad (n \to \infty)$$

即 $\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_{\Phi,p} = d$，所以 $\{y_n\}$也是 K 的极小化序列. 由 Zorn 引理，存在 $y_0 \in L_{\Phi,p}$ 使得 $y_0 = \inf_n y_n$.

因为 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$，故 $L_{\Phi,p}$ 是序连续的，故 $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y_0\|_{\Phi,p} = 0$，于是 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列。

(2) $\Rightarrow$ (3). 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1). 假设 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$，取 $E \subset T$ 使得 $0 < \mu E < \mu T$. 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在 $u_n \uparrow \infty$ 满足

$$\Phi(u_1)\mu E > \varepsilon, \ \ \Phi\Big(\big(1 + \frac{1}{n}\big)u_n\Big) > 2^n\Phi(u_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

选取 E 的互不相交子集列 $\{E_k\}$，使得 $\Phi(u_n)\mu E_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$x_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \chi_{E_k}(t) \quad (t \in T)$$

则 $0 \le x_n \downarrow 0$，且

$$1 = \|x\|_{\Phi,\infty} \le \|x\|_{\Phi,p} \le (1 + I_\Phi^p(x_n))^{\frac{1}{p}} = \Big(1 + \frac{1}{2^{np}}\Big)^{\frac{1}{p}} \to 1,\ (n \to \infty)$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\Phi,p} = 1$.

又因为

$$1 = \|u_n \chi_{E_n}\|_{\Phi,\infty} \le \|x_n - x_m\|_{\Phi,p} \le \|x_n\|_{\Phi,p} \to 1,\ (n \to \infty)$$

故 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\|_{\Phi,p} = 1$.

$E = \mathrm{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \forall\, n\Big\}$. 对任意 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in E$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ge \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) x_n = x_n$$

于是 E 是凸定向集。$\overline{E} = \Big\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i : \lambda_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1\Big\}$ 是 E 的闭包。

如果 E 存在 Cauchy 序列 $\{y_n\}$，则存在 $y_0 \in \overline{E}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. 定义

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^n x_i(t), \quad y_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i(t) \quad (\, t \in T)$$

其中 λ_i^n，$\lambda_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{m_n} \lambda_i^n = 1,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$.

由于

$$\|x_{m_n}\|_{\Phi,p} \le \|y_n\|_{\Phi,p} \le \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^n \|x_n\|_{\Phi,p} \le \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^n \|x_1\|_{\Phi,p} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

故 $\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_{\Phi,p} = 1$, 则 $\|y_0\|_{\Phi,p} = 1$.

如果 $K_p(y_0) = \emptyset$，则

$$\begin{aligned} 1 &= \|y_0\|_{\Phi,p} = r_\Phi \int_T y_0(t)\mathrm{d}t \\ &= r_\Phi \int_T \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i(t)\mathrm{d}t \\ &\ge r_\Phi \Big(\int_T \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_n(t)\mathrm{d}t + \int_T \lambda_1 u_2 \chi_{E_2}(t)\mathrm{d}t\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_n\right\|_{\Phi,p} + r_\Phi\lambda_1 u_2\mu E_2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right\| \|x_n\|_{\Phi,p} + r_\Phi\lambda_1 u_2\mu E_2 \\
&\to 1 + r_\Phi\lambda_1 u_2\mu E_2 > 1 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

如果 $K_p(y_0)\neq\emptyset$，取 $h\in K_p(y_0)$，则 $h>1$，且

$$
\begin{aligned}
1 &= \|y_0\|_{\Phi,p}^p = \frac{1}{h^p}(1+I_\Phi^p(hy_0)) \\
&= \frac{1}{h^p}\left(1+I_\Phi^p\Big(h\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\Big)\Big)\right) \\
&\geq \frac{1}{h^p}\left(1+I_\Phi^p\Big(h\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_n\Big)\Big)\right) + \frac{1}{h^p}(\Phi(h\lambda_1 u_2)\mu E_2)^p \\
&\geq \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_n\right\|_{\Phi,p}^p + (\Phi(\lambda_1 u_2)\mu E_2)^p \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^p \|x_n\|_{\Phi,p}^p + (\Phi(\lambda_1 u_2)\mu E_2)^p \\
&> \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^p + (\Phi(\lambda_1 u_2)\mu E_2)^p \\
&\to 1 + (\Phi(\lambda_1 u_2)\mu E_2)^p > 1 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

这显然矛盾，故$\Phi\in\Delta_2(\infty)$. □

定理 6.6 对 $L_{\Phi,p}$ 的任意凸定向集 K， K 的任意极小化序列都是 Cauchy 列当且仅当 $\Phi\in\Delta_2(\infty)$.

证明： 若 $\Phi\notin\Delta_2(\infty)$，则 $L_{\Phi,p}$ 不是上局部一致单调的，从而存在 x_0, $x_n\in L_{\Phi,p}$ 及 $\varepsilon_0>0$，满足 $x_n\geq x_0\geq 0$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Phi,p}=\|x_0\|_{\Phi,p}$，但 $\|x_n-x_0\|_{\Phi,p}\geq\varepsilon_0$.

记

$$
E=\operatorname{conv}\{x_i\}_{i=0}^{\infty}=\Big\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i:\ 0\leq\lambda_i\leq 1,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1,\forall\, n\Big\}
$$

则对任意 $x\in E$，有 $x=\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i x_i\geq x_0$，所以 E 是凸定向集。

由于 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Phi,p}=\|x_0\|_{\Phi,p}$，$\|x_n-x_0\|_{\Phi,p}\geq\varepsilon_0$，所以

$$
\{x_1,x_0,x_2,x_0,\ldots,x_n,x_0,\ldots\}
$$

是极小化序列，但不是 Cauchy 列。

若 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, 则 $L_{\Phi,p}$ 是一致单调的。任取 K 的极小化序列 $\{x_n\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\Phi,p} = \inf_{x\in K} \|x\|_{\Phi,p} := d.$$

若 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列, 则存在 $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{m_k}\} \subset \{x_n\}$ 及 $\varepsilon_0 > 0$ 满足 $\|x_{n_k} - x_{m_k}\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon_0$.

由 K 是定向集知, 存在 $z_k \in K$, 使得 $0 \leq z_k \leq x_{n_k}$, $0 \leq z_k \leq x_{m_k}$. 于是

$$d \leq \|z_k\|_{m,A}^{\circ} \leq \|x_{n_k}\|_{\Phi,p} \to d \quad (k \to \infty)$$

即 $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|_{m,A}^{\circ} - \|z_k\|_{\Phi,p} = 0$. 由于 X 是一致单调的, 则 $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z_k\|_{\Phi,p} = 0$. 同理可证 $\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - z_k\|_{\Phi,p} = 0$. 所以 $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_{m_k}\|_{\Phi,p} = 0$. 这与假设 $\|x_{n_k} - x_{m_k}\|_{\Phi,p} \geq \varepsilon_0$ 矛盾。 □

6.3 $L_{\Phi,p}$ 的单调系数

本节我们来讨论 $L_{\Phi,p}$ 的上、下单调系数，以及 $L_{\Phi,p}$ 的单位球面上点的上、下局部单调系数。

定义

$$\overline{\varepsilon}_m(X) = \sup\{\widetilde{\varepsilon}_m(x) : x \in S(X^+)\}$$

由于对任意 $x \in S(X^+)$ 及 $\varepsilon \in [0,1]$, 有 $\delta_x(\varepsilon) \geq \delta_X(\varepsilon)$，所以 $\overline{\varepsilon}_m(X) \leq \widetilde{\varepsilon}_m(X)$.

引理 6.8 [68] 设 X 是 Banach 格，则下列公式成立

$$\widetilde{\varepsilon}_m(X) = \sup\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \ : \ 0 \leq y_n \leq x_n,\ \|y_n\| \to 1,\ \|x_n\| = 1\}$$

$$\overline{\varepsilon}_m(X) = \sup\{\sup\{\limsup_{n\to\infty} \|x - x_n\| \ : \ 0 \leq x_n \leq x,\ \|x_n\| \to 1\} \ : \ \|x\| = 1\}$$

引理 6.9 [68, 70] $\overline{\varepsilon}_m(X) \geq 1 - \delta_X(1)$，$\widetilde{\varepsilon}_m(X) = 1 - \lim_{\varepsilon\to 1^-} \delta_X(\varepsilon)$.

引理 6.10 (1) $k' = \inf\{ k \ : \ k \in K_p(x),\ \|x\|_{\Phi,p} = 1\} > 1$ 当且仅当 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

(2) $k'' = \sup\{ k \ : \ k \in K_p(x),\ \|x\|_{\Phi,p} = 1\} < \infty$ 当且仅当 $\Psi \in \Delta_2(\infty)$.

证明: 如果 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$, 取 $E \subset T$ 使得 $0 < \mu E < \mu T$. 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $u_n \uparrow \infty$ 满足

$$\Phi(u_1)\mu E > \varepsilon,\ \ \Phi\Big((1+\frac{1}{n})u_n\Big) > 2^n\Phi(u_n)$$

选取 E 的互不相交子集列 $\{E_k\}$, 使得 $\Phi(u_n)\mu E_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. 定义

$$x_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \chi_{E_k}(t)$$

则 $I_\Phi(x_n) = \dfrac{1}{2^n} \to 0$, $\theta(x_n) = \inf\Big\{\lambda > 0 : I_\Phi\Big(\dfrac{x_n}{\lambda}\Big) < \infty\Big\} = 1$. 取 $k_n \in$

$K_p\Big(\dfrac{x_n}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\Big)$, 则 $k_n^p = 1 + I_\Phi^p\Big(\dfrac{k_n x_n}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\Big) < \infty$. 又因为 $\theta(x_n) = 1$, 所以

$$k_n \le \|x_n\|_{\Phi,p} \le (1 + I_\Phi^p(x_n))^{\frac{1}{p}} \to 1$$

如果 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, 讨论同引理4.1.

(2)如果 $\Psi \notin \Delta_2(\infty)$, 则存在 $l_n \uparrow \infty$，及 $u_n \uparrow \infty$，使得

$$l_1 > 4,\ \ \Phi(u_1)\mu T \ge \frac{1}{2},\ \ \Phi(l_n u_n) < \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) l_n \Phi(u_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$，选取 $E_n \subset T$, 使得 $\Phi(u_n)\mu E_n = \dfrac{1}{2}$.

定义 $x_n(t) = u_n \chi_{E_n}(t)$, 则

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_{\Phi,p}^p &\le \frac{1}{l_n^p}(1 + I_\Phi^p(l_n x_n)) \\
&= \frac{1}{l_n^p}(1 + (\Phi(l_n u_n)\mu E_n)^p) \\
&< \frac{1}{l_n^p} + \Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Phi(u_n)\mu E_n\Big)^p \\
&= \frac{1}{l_n^p} + \frac{1}{2^p}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p \\
&\to \frac{1}{2^p} < 1 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

取 $k_n \in K_p(x_n)$, 则由 $\|x_n\|_{\Phi,p} < 1\ \ (n \ge 2)$, 有 $k_n > 1$. 所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^p} \leftarrow \|x_n\|_{\Phi,p}^p &= \frac{1}{k_n^p}(1 + I_\Phi^p(k_n x_n)) \\
&> \frac{1}{k_n^p} + (\Phi(u_n)\mu E_n)^p \\
&= \frac{1}{k_n^p} + \frac{1}{2^p} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.

另一方面，取 u_0 满足 $\Phi(u_0)\mu T = \dfrac{1}{2}$，如果 $\Psi \in \Delta_2(\infty)$ ，则存在 $\delta > 1$，使得

$$\Phi(2u) > 2\delta(u) \quad (u \ge u_0)$$

对任意 $x \in S(L_{\Phi,p})$, 设 $H = \{t \in T : 2|x(t)| \ge u_0\}$, 则 $1 = \|x\|_{\Phi,p}^p \le \dfrac{1}{2}(1 + I_\Phi^p(2x))$. 从而 $I_\Phi(2x) \ge 1$, 于是

$$I_\Phi(2x\chi_H) \ge I_\Phi(2x) - \Phi(u_0)\mu T \ge \frac{1}{2}$$

对任意 $k \in K_p(x)$, 如果 $k > 4$, 则存在 n_0, 使得 $2^{n_0} \le \dfrac{k}{2} \le 2^{n_0+1}$. 于是

$$1 = \|x\|_{\Phi,p}^p = \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx))$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{k^p}\int_H \Phi\Big(\frac{k}{2}2x(t)\Big)\mathrm{d}t \geq \frac{1}{k^p}\int_H \Phi(2^{n_0+1}x(t))\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{k^p}\int_H 2^{n_0}\delta^{n_0}\Phi(2x(t))\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{k^p}2^{n_0-1}\delta^{n_0} \geq \frac{\delta^{n_0}}{8}
\end{aligned}
$$

所以 $\delta^{n_0} \leq 8$，则 $k \leq 2^{n_0+2} \leq 2^{2+\log_\delta 8}$. 因此

$$
\sup\{\, k \ :\ k \in K_p(x),\ \|x\|_{\Phi,p} = 1\} \leq \max\left\{4, 2^{2+\log_\delta 8}\right\}
$$

□

引理 6.11 (1)如果 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$, 则 $\delta_{L_{\Phi,p}}(1) = 0$.

(2) 如果 $a_\Phi > 0$, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ 且 $\Psi \in \Delta_2(\infty)$, 则

$$
1 - a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p} \leq \delta_{L_{\Phi,p}}(1) \leq 1 - \frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}
$$

证明： (1) 由定理 6.2 直接可得。

(2) 设 $x, y \in S(L_{\Phi,p})$, $0 \leq y \leq x$, 于是存在非负函数 $c(t)$，满足

$$
x(t) = y(t) + c(t) \quad (t \in T)
$$

则 $0 \leq c(t) \leq a_\Phi$ $(\mu - a.e.\ t \in T.)$ 事实上，若不然，存在 $A \in \Sigma$，使得 $\mu(A) > 0$，$c(t) > a_\Phi$ $(\forall\, t \in A)$. 取 $k \in K(x)$，由 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$，有 $k \geq 1$, 且

$$
\begin{aligned}
1 = \|y\|_{\Phi,p}^p &\leq \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(k(x-c))) \\
&\leq \frac{1}{k^p}(1 + (I_\Phi(kx) - I_\Phi(kc))^p) \\
&\leq \frac{1}{k^p}(1 + I_\Phi^p(kx)) - \frac{1}{k^p}I_\Phi^p(kc) \\
&= \|x\|_{\Phi,p}^p - \frac{1}{k^p}I_\Phi^p(kc) \\
&\leq \|x\|_{\Phi,p}^p - I_\Phi^p(c) < \|x\|_{\Phi,p}^p = 1
\end{aligned}
$$

这显然矛盾。因此,

$$
\sup\{\|x-y\|_{\Phi,p} : 0 \leq y \leq x,\ \|x\|_{\Phi,p} = \|y\|_{\Phi,p} = 1\} \leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}
$$

进一步, 选取子集列 $\{A_n\} \subset \Sigma$，使得 $0 < \mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$，且 $\mu(T\backslash A_n) > 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. 选取序列 $\{y_n\} \subset S((L_\Phi^\circ)^+)$，使得 $\mathrm{supp}(y_n) \subset A_n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. 取 $k_n \in K_p(y_n)$. 由引理 6.10 知，$\{k_n\}$ 是有界的，不失一般性，设 $\lim_{n\to\infty} k_n = k_0$. 定义

$$
x_n(t) = y_n(t) + \frac{a_\Phi}{k_n}\chi_{T\backslash A_n}(t) \quad (t \in T)
$$

则 $x_n \geq y_n \geq 0$，并且

$$\begin{aligned}\|x_n\|_{\Phi,p} &\leq \frac{1}{k_n}\left(1+I_\Phi^p\Big(k_n\Big(y_n+\frac{a_\Phi}{k_n}\chi_{T\setminus A}\Big)\Big)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\frac{1}{k_n}(1+(I_\Phi(k_ny_n)+\Phi(a_\Phi)\mu(T\setminus A))^p)^{\frac{1}{p}}\\ &=\frac{1}{k_n}(1+I_\Phi^p(k_n(y_n)))^{\frac{1}{p}}=\|y_n\|_{\Phi,p}\end{aligned}$$

因此，$\|y_n\|_{\Phi,p}=\|x_n\|_{\Phi,p}=1$. 由于 $\Phi\in\Delta_2(\infty)$，由 $L_{\Phi,p}$ 的范数绝对连续性，有 $\lim_{n\to\infty}\|a_\Phi\chi_{A_n}\|_{\Phi,p}=0$. 所以

$$\begin{aligned}&\sup\{\|x-y\|_{\Phi,p}\ :\ 0\leq y\leq x,\|x\|_{\Phi,p}=\|y\|_{\Phi,p}=1\}\\ \geq&\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|_{\Phi,p}=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_\Phi}{k_n}\chi_{T\setminus A_n}\right\|_{\Phi,p}\\ =&\frac{a_\Phi}{k_0}\|\chi_T\|_{\Phi,p}\geq\frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\delta_{L_{\Phi,p}}(1)&=\inf\{1-\|x-y\|_{\Phi,p}\ :\ 0\leq y\leq x,\|x\|_{\Phi,p}=\|y\|_{\Phi,p}=1\}\\ &\leq 1-\frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}\end{aligned}$$

□

注解 6.2 由注解 6.1 可得，如果 $\mu(T)=\infty$, $a_\Phi>0$, 则 $\delta_{L_{\Phi,p}}(1)=0$.

引理 6.12 设 $a_\Phi>0,\Phi\in\Delta_2(\infty)$ 且 $\Psi\in\Delta_2(\infty)$，则

$$\frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}\leq\overline{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p})\leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}$$

证明： 我们首先证明对任意 $x\in S(L_{\Phi,p})$，$\{x_n\}\subset L_{\Phi,p}$，满足 $0\leq x_n\leq x$ $(\forall\ n\in\mathbb{N})$，且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Phi,p}=1$，都有

$$\limsup_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,p}\leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}$$

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，记

$$A_n=\{t\in T\ :\ |x(t)-x_n(t)|\geq(1+\varepsilon)a_\Phi\}$$

下证 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$.

否则，存在 $\delta>0$ 及序列 $\{A_{n_k}\}\subset\{A_n\}$ 使得 $\mu(A_{n_k})\geq\delta$ $(\forall k\in\mathbb{N})$. 取 $k\in K_p(x)$，我们有

$$\begin{aligned}1=\|x\|_{\Phi,p}^p&=\frac{1}{k^p}(1+I_\Phi^p(kx))\\ &\geq\frac{1}{k^p}(1+(I_\Phi(k(x-x_n))+I_\Phi(kx_n))^p)\\ &\geq\frac{1}{k^p}(1+I_\Phi^p(k(x-x_n))+I_\Phi^p(kx_n))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \|x_n\|_{\Phi,p} + \frac{1}{k^p} I_\Phi^p(k(x - x_n)) \\
&\geq \|x_n\|_{\Phi,p} + \frac{1}{k^p} I_\Phi^p(k(x - x_n)\chi_{A_{n_k}}) \\
&\geq \|x_{n_k}\|_{\Phi,p} + \frac{1}{k^p} \Phi^p(k(1+\varepsilon)a_\Phi)\delta^p
\end{aligned}
$$

这与 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Phi,p} = 1$ 矛盾。由 $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ 知，$L_{\Phi,p}$ 具有绝对连续范数，因此

$$
\limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\chi_{A_{n_k}}\|_{\Phi,p} = 0
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\|_{\Phi,p} &\leq \limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\chi_{T\setminus A_{n_k}}\|_{\Phi,p} + \limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\chi_{A_{n_k}}\|_{\Phi,p} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\chi_{T\setminus A_{n_k}}\|_{\Phi,p} \\
&\leq (1+\varepsilon)\|a_\Phi\chi_T\|_{\Phi,p}
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性，有

$$
\limsup_{n\to\infty} \|(x - x_n)\|_{\Phi,p} \leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}
$$

故 $\overline{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}$.

注意到 $\overline{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \geq 1 - \delta_{L_{\Phi,p}}(1)$, 所以由引理 6.11，有 $\overline{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \geq \frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}$. □

定理 6.7 (1)若 $a_\Phi = 0$, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, 则 $\varepsilon_m(L_{\Phi,p}) = \widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) = 0$.

(2) 若 $a_\Phi > 0$, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ 且 $\Psi \in \Delta_2(\infty)$ 则

$$
\frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p} \leq \widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}
$$

(3)若 $\Phi \notin \Delta_2(\infty)$, 则 $\varepsilon_m(L_{\Phi,p}) = \widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) = 1$.

证明： 由定理 6.2 及引理 6.11 知，只需证 (2).

由于

$$
\widetilde{\varepsilon}_m(X) = \sup\{\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \ : \ 0 \leq y_n \leq x_n, \|x_n\| = 1, \|y_n\| \to 1\}
$$

将上述引理 6.12 证明过程中的 x 换成 x_n，x_n 换成 y_n, 即可证明 $\widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \leq a_\Phi\|\chi_T\|_{\Phi,p}$.

另一方面，显然有 $\widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \geq \overline{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p})$, 于是 $\widetilde{\varepsilon}_m(L_{\Phi,p}) \geq \frac{a_\Phi}{k''}\|\chi_T\|_{\Phi,p}$. □

下面我们来讨论单位球面上点的局部单调系数。

定理 6.8 对任意 $x \in S(L_{\Phi,p}^+)$, 有

$$(1)\ \varepsilon_m(x)=\begin{cases}0, & 如果\ \Phi\in\Delta_2(\infty),\ a_\Phi=0\\ \dfrac{1}{k_p^*(x)}, & 如果\ \Phi\notin\Delta_2(\infty)\end{cases}$$

$(2)\ \widetilde{\varepsilon}_m(x)=\theta(x).$

证明： (1) 如果 $\Phi\in\Delta_2(\infty)$，且 $a_\Phi=0$, 则由定理 6.2 直接可得。

如果 $\Phi\notin\Delta_2(\infty)$, 取 $c>0$ 使得 $E=\{t\in T: k_p^*(x)\le c\}$ 的测度大于零. 对任意 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 及 $\delta>0$，存在 $u>0$ 使得

$$u>\frac{c}{\varepsilon},\ \Phi((1+\varepsilon)u)>\frac{1}{\delta}\Phi(u)$$

不妨设 $\Phi(u)\mu E>\delta$，取 $E_0\subset E$ 满足 $\Phi(u)\mu E_0=\delta$. 定义

$$y(t)=\Big(\frac{u}{k_p^*(x)}-x(t)\Big)\chi_{E_0}(t)\quad (t\in T)$$

则我们有

$$\begin{aligned}I_\Phi((1+3\varepsilon)k_p^*(x)y)&>\int_{E_0}\Phi((1+3\varepsilon)(u-k_p^*(x)x(t)))\mathrm{d}t\\&>\Phi((1+3\varepsilon)(u-c))\mu E_0\\&>\Phi((1+\varepsilon)u)\mu E_0>1\end{aligned}$$

所以 $\|y\|_{\Phi,p}\ge\|y\|_\Phi>\dfrac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}$. 进一步，由引理 5.2，有

$$\begin{aligned}&\|x+y\|_{\Phi,p}\\\le&\frac{1}{k_p^*(x)}(1+I_\Phi^p(k_p^*(x)(x+y)))^{\frac{1}{p}}\\=&\frac{1}{k_p^*(x)}(1+I_\Phi^p(k_p^*(x)x\chi_{T\setminus E_0}+u\chi_{E_0}))^{\frac{1}{p}}\\\le&\frac{1}{k_p^*(x)}(1+(I_\Phi(k_p^*(x)x)+\Phi(u)\mu E_0)^p)^{\frac{1}{p}}\\\le&\frac{1}{k_p^*(x)}((1+I_\Phi^p(k_p^*(x)x))^{\frac{1}{p}}+\delta)\\=&\|x\|_{\Phi,p}+\frac{1}{k_p^*(x)}\delta\le\|x\|_{\Phi,p}+\delta\end{aligned}$$

于是

$$\eta_x\left(\frac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}\right)\le\delta\to0\quad(\delta\to0)$$

即 $\varepsilon_m(x)\ge\dfrac{1}{(1+3\varepsilon)k_p^*(x)}$，由 ε 的任意性，有 $\varepsilon_m(x)\ge\dfrac{1}{k_p^*(x)}$.

仿定理 5.4 可证 $\varepsilon_m(x)>\dfrac{1}{k_p^*(x)}$ 不成立，于是 $\varepsilon_m(x)=\dfrac{1}{k_p^*(x)}$.

（2）对任意 $x\in l_{\Phi,p}$，任意 $n\in\mathbb{N}$，定义

$$[x]_n(t) = x(t)\chi_{T_n}(t) \quad (t \in T)$$

其中 $T_n = \{t \in T : x(t) \geq n\}$.

仿定理 5.5 可证，$\widetilde{\varepsilon}_m(x) = \theta(x)$. □

6.4 本章小结

本章主要讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调性，得到了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件，得到 $L_{\Phi,p}$ 具有弱集值不动点性质的充分条件；利用单调性讨论了最佳逼近问题；讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调系数与单位球面上的点的上（下）局部单调系数；对于 $a_\Phi > 0$ 时 Orlicz 函数空间的单调系数，我们仅仅给出了估计，其准确值还有待进一步讨论。

结 论

自从 W. Kirk 证明了具有正规结构的自反 Banach 空间具有不动点性质以来，人们发现利用Banach 空间几何性质可以很好地讨论非扩张映射的不动点性质。而 Banach 空间几何性质通常是可由一些几何常数来描述，因此，研究 Banach 空间的几何常数及其在 Banach 空间不动点理论中的应用是有意义的。本论文总结了是作者在攻读博士学位期间的研究工作，主要讨论了 Orlicz 空间几何常数及其在不动点理论中的应用，主要结果有：

1. 给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的 Opial 模的准确表达式；进一步，给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间具有 Opial 性质、局部一致 Opial 性质、一致 Opial 性质、正 Opial 性质的充分必要条件，以及空间具有（L）性质的充要条件。

2. 讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间弱收敛序列系数的计算公式，给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有弱一致正规结构的充分必要条件；得到 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质充要条件。

3. 讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间装球常数及 Kottman 常数的值，并利用此结果计算了经典了 l^p 空间的装球常数，与前人所得结果是一致的；进一步讨论了集合 $\{k \in K_p(x) : \|x\|_{\Phi,p} = 1\}$ 的上下界，得到 $l_{\Phi,p}$ 是自反的充分必要条件是 $P(l_{\Phi,p}) < \dfrac{1}{2}$，这也从另一方面刻画了 $l_{\Phi,p}$ 的自反性。

4. 给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间及函数空间具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件；给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有弱集值不动点性质的充分条件；利用单调性讨论了最佳逼近问题；讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间及函数空间的单调系数与单位球面上的点的上（下）局部单调系数。

主要创新点有：

1. 给出由 Orlicz 函数生成的赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间的 Opial 模及弱收敛序列系数的准确表达式，进而完善了经典 Orlicz 空间相应的结果。

2.在不知赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的共轭空间的情况下，给出 $l_{\Phi,p}$ 包含子空间与 c_0、l^1 渐近等距同构的充分条件，进而得

到 $l_{\Phi,p}$ 具有不动点性质充要条件。

3. 给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间及函数空间在 $\sup\{u : \Phi(u) = 0\} > 0$ 及 $\sup\{u : \Psi(u) < \infty\} < \infty$ 的情况下具有一致单调性、局部一致单调性、严格单调性的充分必要条件；讨论了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间当 $\sup\{u : \Phi(u) = 0\} > 0$ 时的单调系数。

另外在研究过程中，作者发现还有许多问题需要进一步探讨和研究：

对于 Orlicz 函数空间，其 Opial 模、弱收敛序列系数、装球常数等均未得到解决。赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间当 $\sup\{u : \Phi(u) < \infty\} < \infty$ 时的单调模与单调系数未得到解决。赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间当 $\sup\{u : \Phi(u) = 0\} > 0$ 时的单调系数仅仅得到了估计，其准确值还有待进一步讨论。赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间及函数空间的一致凸性、光滑性等都还没有展开讨论。

参考文献

[1] Clarkson J A. Uniformly Convex Spaces[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1936, 40:396–414.

[2] Kirk W A. A Fixed Point Theorem for Mappings Which Do Not Increase Distances[J]. Amer. Math. Month., 1965, 72:1004–1006.

[3] Opial Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations of Nonexpansive Mappings[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73:591–597.

[4] Lim C T. Fixed Point Theorem for Multivalued Nonexpansive Mappings in a Uniformly Convex Banach Space[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80:1123–1126.

[5] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

[6] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[7] Goebel K. Convexity of Balls and Fixed Point Theorems for Mapping with Nonexpansive Square[J]. Composition Math., 1970, 22:269–274.

[8] Goebel K, Reich S. Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings[M]. New York and Basel: Marcel Dekker, 1984.

[9] Goebel K, Kirk W A. Topics in Metric Fixed Point Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[10] Dulst D V, B.Sims. Fixed Point of Nonexpansive Mappings and Chebyshev Centers in Banach Spaces with Norms of typc (KK) Banach Space Theory and Applications[J]. Lect. Notes Math., 1983, 991:35–43.

[11] Prus S. Banach Spaces with the Uniform Opial Property[J]. Nonlinear Anal., 1992, 18:697–704.

[12] Garcia-Falset J. Stability and Fixed Points For Nonexpansive Mappings[J]. Houston J. Math., 1994, 20:495–505.

[13] Lim T C. On the Normal Structure Coefficient and the Bounded Sequence Coefficient[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, 83(2):262–264.

[14] Benavides T D. Weak Uniform Normal Structure in Direction Sum Spaces[J]. Studia Math., 1992, 103(37):195–201.

[15] Kim T. Fixed Point Theorems for Non-Lipschitzian Self-Mappings and Geometric Properties of Banach Spaces[J]. Fixed Point Theory Appl., 2002, 3:125–135.

[16] Benavides T D, Ramírez P L. Fixed Point Theorems for Multivalued Nonexpansive Mappings without Uniform Convexity[J]. Abstr. Appl. Anal., 2003, 6:375–386.

[17] Mazcunán-Navarro E. Banach Space Properties Sufficient for Normal Structure[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 337(1):197–218.

[18] Dhompongsa S, Kaewcharoen A. A Fixed Point Theorems for Nonexpansive Mappings and Suzuki-Generalized Nonexpansive Mappings on a Banach Lattice[J]. Nonlinear Anal., 2009, 71:5344–5353.

[19] Orlicz W. Über Eine Gewisse Klasse Von Räumen Vom Typus B[J]. Bull. Intern. del′Acad. Pol. Ser., 1932, A:207–220.

[20] Nakano H. Modular Semi-Ordered Linear Spaces[M]. Tokyo: Maruzen Co., Ltd., 1950.

[21] Luxemburg W A J. Banach Function Space[D]. Netherlands: Delft University of Technology, 1955: 1–30.

[22] Luxemburg W A J. On the Measurability of a Function which Occurs in the Paper by A. C. Zaanen[J]. Indag. Math., 1958, 20:259–265.

[23] Krasnoselskii M A, Rutickii Y B. Convex Functions and Orlicz Spaces[M]. Goroningen: Noordhoff, 1961.

[24] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[25] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, et al. Orlicz 空间几何理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986.

[26] Chen S T. Geometry of Orlicz Spaces[M]. Warszawa: Dissertationes Mathematicae 356, 1996.

[27] Kirk W A, Sims B. Handbook of Metric Fixed Point Theory[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[28] Kottman C A. Packing and Reflexiving in Banach Spaces[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, 150:565–576.

[29] Cleaver C E. Packing Spheres in Orlicz Spaces[J]. Pacific J. Math., 1976, 65:325–335.

[30] Elton J, Odell E. The Uunit Ball of Every Infinite Dimansional Normed Linear Space Contain a $(1+\varepsilon)$-Sequence[J]. Colloq. Math., 1981, 44:105–109.

[31] Garcia-Falset J. The Fixed Point in Banach Spaces with NUS Property[J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, 215:532–542.

[32] Ayerbe J M, Benavides T D. Connections Between Some Banach Space Coefficients Concerning Normal Structure[J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, 172:53–61.

[33] Benavides T D, Rodriguez R J. Some Geometric Coefficients in Orlicz Sequence Spaces[J]. Nonlinear Anal., 1993, 20:349–358.

[34] Benavides T D. A Geometrical Coefficient Implying the Fixed Point Property and Stability Results[J]. Houston J. math., 1996, 22(4):835–849.

[35] Cui Y A, Hudzik H. On the Uniform Opial Property in Some Modular Sequence Spaces[J]. Funct. Approx., 1998, 26:93–102.

[36] Cui Y A, Huang W, Hudzik H, et al. Generalized Von Neumann-Jordan Constant and its Relationship to the Fxed Point Property[J]. Fixed Point Theory Appl., 2015, 40:1–11.

[37] Ayerbe J M, Benavides T D, Acedo G L. Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory[M]. Basel, Boston, Beilin: Advances and Applications 99, Birkhauser Verlag, 1997.

[38] Gornicki J. Some Remarks on Almost Convergence of the Picard Iterates for Nonexpansive Mappings in Banach Spaces Which Satisfy the Opial Condition[J]. Comment. Math., 1988, 29:59–68.

[39] Fetter H, Gamboa de Buen B. Locally Uniform Opial Conditions[J]. Nonlinear Anal., 2003, 53:743–750.

[40] Franchetti C. Duality Mapping and Homomorphisms in Banach Theory[M]. University of Iowa: Proceed of Research Workshop on Banach Space Theory, 1981.

[41] Lin P K, Tan K K, Xu H K. Demiclosedness Principle and Asymptotic Behavior for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Nonlinear Anal., 1995, 24:929–946.

[42] Benavides T D, Pinede M A J. Opial Modulus, Moduli of Noncompact Convexity and Fixed Points for Asymptotically Regular Mappings[J]. Nonlinear Anal., 2000, 41:617–630.

[43] Bynum W L. Normal Structure Coefficients for Banach Spaces[J]. Pacific J. Math., 1980, 86:427–436.

[44] Sims B, Smyth A. On Some Banach Space Properties Sufficient for Weak Normal Structure and their Permanence Properties[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1999, 351(2):497–513.

[45] Benavides T D, Xu H K. A New Geometrical Coefficient for Banach Spaces and its Applications in Fixed Point Theory[J]. Nonlinear Anal., 1995, 25:311–325.

[46] Maluta E. Uniformly Normal Structure and Related Coefficients for Banach Spaces[J]. Pacific J. Math., 1984, 111:357–369.

[47] 徐洪坤. 关于 Banach 空间的 Maluta 常数问题[J]. 科学通报, 1989, 34:725–726.

[48] Burlak J A, Rankin R A, Robertson A P. The Packing of Spheres in the Space l^p[J]. Proc. Clossgow Math. Assoc., 1958, 4:22–25.

[49] Webb J R, Zhao W. On Connections Between Set and Ball Measures of Noncompactness[J]. Bull. London Math. Soc., 1990, 22:471–477.

[50] Rankin R A. On Packing of Sphere in Hilbert space[J]. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1995, 2:145–146.

[51] Wells J H, Willians L R. Imbeddings and Extensions Problems in Analysis[M]. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verleg, 1975.

[52] Kottman C A. Subsets of the Unit Ball That Are Separated by More Than One[J]. Studia Math., 1975, 53:15–27.

[53] Naidu S, Sastry K. Convexity Conditions in Normed Linear Spaces[J]. J. Reine Angew. Math., 1978, 297:35–53.

[54] Kryczka A, Prus S. Separated Sequences in Nonreflexive Banach Spaces[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2001, 129:155–163.

[55] Hudzik H. Every Nonreflaxive Banach Lattice Has the Packing Constant Equal to $\frac{1}{2}$[J]. Colloq. Math., 1993, 44:131–135.

[56] Castillo J M F, Papini P L. On Kottman Constants in Banach Spaces[M]. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa: Function Spaces IX, Banach Center Publications, Volume 92, 2011.

[57] Birkhoff G. Lattice Theory[M]. Providence: Amer. Math. Soc., 1967.

[58] Akcoglu M A, Sucheston L. On Uniform Monotonicity of Norms and Ergodic Theorems in Function Spaces[J]. Rend. Circ. Mat., 1985, 2(8):325–335.

[59] Kurc W. Strictly and Uniformly Monotone Musielak-Orlicz Spaces and Applications to Best Approximation[J]. J. Approx. Theory, 1992, 69(2):173–187.

[60] Hudzik H, Kamińska A, Mastyło M. Monotonicity and Rotundity Properties in Banach Lattices[J]. Rocky Mountain J. Math., 2000, 30(3):933–950.

[61] Kurc W. A Dual Property to Uniform Monotonicity in Banach Lattices[J]. Collect. Math., 1993, 44:155–165.

[62] Hudzik H, Kurc W. Monotonicity Properties of Musielak-Orlicz Spaces and Dominated Best Approximation in Banach Lattices[J]. J. Approx. Theory, 1998, 95:353–368.

[63] Dominguez T, López G, Hudzik H, et al. Complete Characterizations of Kadec-Klee Properties in Orlicz Spaces[J]. Houston J. Math., 2003, 29(4):1027–1044.

[64] Hudzik H, Narloch A. Relationships Between Monotonicity and Complex Rotundity Properties with Some Consequences[J]. Math. Scandinavica, 2005, 96:289–306.

[65] Lee H J. Monotonicity and Complex Convexity in Banach Lattices[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 307(1):86–101.

[66] Chen S T, He X, Hudzik H. Monotonicity and Best Approximation in Banach Lattices[J]. Acta Math. Sin., 2009, 5(25):785–794.

[67] Betiuk-Pilarska A, Prus S. Banach Lattices which are Order Uniformly Noncreasy[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 342(2):1271–1279.

[68] Hudzik H, Kaczmarek R. Moduli and Characteristice of Monotonicity in General Banach Lattice and in Orlicz Spaces in Particular[J]. Nonlinear Anal., 2009, 70:3407–3423.

[69] Hudzik H, Wlaźlak K. Monotonicity Properties in Banach Sapces Via Sublinear Operators and Corrigendum to Rotundity Proerties in Banach Spaces Via Sublinear Operators, Nonlinear Analysis 64(2006) 1171-1188[J]. Nonlinear Anal., 2007, 67:2208–2216.

[70] Hudzik H, Kaczmarek R. Monotonicity Characteristic of Köthe-Bochner Spaces[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 349:459–468.

[71] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation[M]. Campinas: Seminars in Math., vol. 5. Universidade Estadual de Campinas, 1989.

[72] Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces[M]. Springer, Berlin: Lecture Notes in Math. 1034, 1983.

[73] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces I and II[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[74] Cui Y A, Duan L F, Hudzik H, et al. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces($1 \leq p \leq \infty$): Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms[J]. Nonlinear Anal., 2008, 69:1797–1816.

[75] Cui Y A, Hudzik H, Li J J, et al. Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Anal., 2009, 71:6343–6364.

[76] Cui Y A, Hudzik H, Wisla M, et al. Non-Squareness Properties of Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Anal., 2012, 75:3973–3993.

[77] Chen L L, Cui Y A. Complex Extreme Points and Complex Rotundity in Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Anal., 2010, 73:1389–1393.

[78] Chen L L, Cui Y A. Complex Rotundity of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. J. Math. Anal. Appl., 2011, 378:151—158.

[79] 王廷辅, 崔云安. Orlicz 序列空间的 Opial 性质[J]. 应用数学, 1996, 9(3):392–394.

[80] Cui Y A, Hudzik H. Maluta's Coefficient and Opial's Properties in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Nonlinear Anal., 1999, 35:475–485.

[81] Cui Y A, Hudzik H, Yu F F. On Opial Properties and Opial Modulus for Orlicz Sequence Spaces[J]. Nonlinear Anal., 2003, 55:335–350.

[82] 李小彦, 崔云安. 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的对偶空间[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16:110–112.

[83] 王廷辅, 崔云安. Orlicz 序列空间的弱收敛序列系数[J]. 系统科学与数学, 1997, 17(4):298–302.

[84] Cui Y A. Weakly Convergent Sequence Coefficient in Köthe Sequence Spaces[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, 126:195–201.

[85] Cui Y A, Hudzik H, Zhu H W. Maluta's Coefficient of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, 126:115–121.

[86] Yao H L, Wang T F. Maluta's Coefficient of Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Acta. Math. Sin., 2005, 21:699–704.

[87] Zhang G L. Weakly Convergent Sequence Coefficient of Product Space[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1992, 117(3):637–643.

[88] Dowling P N, Lennai C J, Turett B. Reflaxivity and Fixed Point Property for Nonexpansive Maps[J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, 200:653–662.

[89] 叶以宁. Orlicz 序列空间的装球问题[J]. 数学年刊, 1983, A4(4):487–493.

[90] 王廷辅. Orlicz 序列空间的装球常数[J]. 数学年刊, 1987, A8(4):508–513.

[91] Wang T F, Liu Y M . Packing Constant of a Type of Sequence Spaces[J]. Comment. Math. Prace Mat., 1990, 30:197–203.

[92] Hudzik H, Wu C X, Ye Y N. Packing Constant in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Revista Math. de la Universidad Comlutense de Madrid, 1994, 7(1):13–26.

[93] 叶以宁, 张波, Pluciennik R. Lorentz 序列空间的装球问题[J]. 数学学报, 1994, 37(5):611–620.

[94] Hudzik H, Landes T. Packing Constant in Orlicz Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Bull. Un. Mat. Ital., 1995, A9(7):225–237.

[95] Cui Y A, Hudzik H. Packing Constant for Cesaro Sequence Space[J]. Nonlinear Anal., 2001, 47:2695–2702.

[96] Rao M M, Ren Z D. Packing in Orlicz sequence spaces[J]. Studia Math., 1997, 126:235–251.

[97] Ya Y Q. Some Results on Packing in Orlicz Sequence Spaces[J]. Studia Math., 2001, 147(1):73–88.

[98] Ya Y Q. Exact Values of Some Geometric Constants of Orlicz Spaces[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2007, 23(5):827–846.

[99] Ya Y Q. Packing Constants in Orlicz-Lorentz Sequence Spaces[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2011, 15(6):2403–2428.

[100] Ye Y N, He M H, Pluciennik R. P-convexity and Reflexivity of Orlicz Spaces[J]. Comment. Math. (Prace Mat.), 1991, 31:203–216.

[101] Hudzik H, Kamińska A. Monotonicity Properties of Lorentz Spaces[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1995, 123(9):2715–2721.

[102] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 序列空间的一致单调系数及其应用[J]. 应用数学学报, 1997, 20(3):362–365.

[103] Lü Y M, Wang J M, Wang T F. Monotone Coefficients and Monotonicity of Orlicz Speces[J]. Rev. Mat. Complut., 1999, 12(1):105–114.

[104] 刘新波, 王廷辅. Musielak-Orlicz 序列空间的单调点[J]. 数学物理学报, 2001, 21A（增刊）:625–631.

[105] 王廷辅, 刘新波, 边淑蓉. 赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的单调点[J]. 数学学报, 2002, 45(2):261–270.

[106] Hudzik H, Liu X B, Wang T F. Points of Monotonicity in Musielak-Orlicz Function Spaces Endowed with the Luxemburg Norm[J]. Arch. Math., 2004, 82:534–545.

[107] Cui Y A, Hudzik H, Szymaszkiewicz L, et al. Criteria for Monotonicity Properties of Musielak-Orlicz Spaces equipped with the Amemiya Norm[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 303:376–390.

[108] 贺鑫, 陈述涛. Orlicz–Sobolev 空间单调性及其在最佳逼近中的应用[J]. 数学学报, 2007, 50(6):1311–1324.

[109] Chen S T, He X, Hudzik H, et al. Monotonicity and Best Approximation in Orlicz-Sobolev Spaces with the Luxemburg Norm[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 344(2):687–698.

[110] Cui Y A, Hudzik H, Pluciennik R. Weak Orthogonality and Weak Property (β) in Some Banach Sequence Spaces[J]. Czechoslovak Math. J., 1999, 49(124):303–316.

攻读博士学位期间发表的论文及其他成果

（一）发表的学术论文

[1] Xin He, Yunan Cui, The Fixed Point Property of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the *p*-Amemiya Norm [J], Fixed Point Theory and Applications, 2013:340, 18 pages.（SCI 收录，IDS 号为 V37QG，IF=2.486，对应论文第二章和第三章）

[2] Xin He, Yunan Cui, Packing Constant in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the *p*-Amemiya Norm [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, Article ID 626491, 7 pages （SCI 收录，IDS 号为 AJ6OG，IF=1.274，对应论文第四章）

[3] Xin He, Yunan Cui. Criteria for monotonicity properties of Orlicz sequence spaces equipped with the *p*-Amemiya norm [J]. (submitted to Journal of Mathematical Analysis and Applications，对应论文第五章).

[4] Xin He, Yunan Cui. Monotonicity and monotone coefficients in Orlicz function spaces equipped with the *p*-Amemiya norm [J]. (submitted to Nonlinear Analysis，对应论文第六章)

（二）参与的科研项目

[1] 贺鑫，季丹丹，赵宇华，广义 Orlicz 空间的几何性质，黑龙江省教育厅科学技术项目 （12531185）

[2] 陈建仁，贺鑫，孙玉丽，公共不动点理论及其相关问题研究，黑龙江省自然科学基金面上项目 （A201206）

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何常数及其应用》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

作者签名：贺鑫　　　　日期：2015 年 6 月 30 日

致 谢

值此论文完成之际，谨向给予我无私帮助的老师和同学们致以真诚的谢意!

首先感谢我的导师崔云安教授对我一直以来的教导。本文的选题、课题的研究以及论文的撰写都是在我的导师的悉心指导下完成的,导师渊博的知识、敏锐的思维、认真严谨的科学态度和精益求精的工作作风,深深地感染和激励着我，让我更加有信心将自己的全部精力投入到科学研究工作中去。崔老师的教学深入浅出的、严谨、细致、实事求是，使我受益匪浅，作为一个教育工作者，是我学习的榜样，将在今后的工作中一直激励着我。在此论文完成之际,谨向导师表示崇高的敬意和真诚的感谢!

其次，感谢哈尔滨师范大学数学系的领导和同事们对我多方面的关心、支持与帮助。

我还要感谢我的父母、爱人、我的公公婆婆，是他们的全力支持使得我能够求学至今。

感谢张敬信、商绍强、陈丽丽以及各位学长学弟们的真诚帮助!

个人简历

贺鑫，女，汉族，1983 年 02 月生，黑龙江省兰西县人。

2000 年 09 月考入 哈尔滨师范大学 数学科学学院 数学与应用数学专业，2004 年 07 月本科毕业并获得 理学学士 学位。

2004 年 09 月——2007 年 07 月在 哈尔滨师范大学 数学科学学院 基础数学 专业 学习并获得 理学硕士 学位。

2010 年 03 月——至今，在 哈尔滨工业大学 理学院 数学系 基础数学专业攻读博士学位。

主要研究方向：泛函分析

工作经历：

2007 年 07 月——至今，在哈尔滨师范大学数学科学学院数学系任教师。