УДК 517.98

А.К.Каримов

О свойствах сходимости по мере в йордановых алгебрах

Сигал [1] ввел понятия измеримости оператора относительно алгебры фон Неймана и сходимости почти всюду для измеримых операторов. Кроме того им были введены понятия интегрируемости и квадратичной интегрируемости для таких операторов и аналоги пространств L_1 и L_2.

Затем Стайнспринг [2] рассмотрел понятие сходимости по мере для измеримых операторов и изучил свойства этой сходимости. Аналоги этих результатов для йордановых алгебр с конечным следом были получены Ш.А.Аюповым [3].

Падманабхан [4 - 5] доказал, что сходимость по мере инвариантна относительно действительных непрерывных функций.

Нашей задачей является получение аналога результатов Падманабхана для йордановых алгебр. Будем придерживаться терминологии работы [3].

Пусть $\mathcal{A}$ - OJ - алгебра и A - JBW - алгебра ограниченных элементов $\mathcal{A}$ с точным нормальным конечным следом τ и пусть ∇ - логика идемпотентов A.

Определение. Последовательность элементов $\{a_n\}$ из $\mathcal{A}$ сходится по мере к элементу a из $\mathcal{A}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{e_n\} \subset \nabla$ такая, что $U_{e_n}(a_n - a) \in A$ и $\| U_{e_n}(a_n - a)\| < \varepsilon$ и $\tau(e_n) \to 1$.

Замечание. Легко видеть, что это определение сходимости по мере эквивалентно определению сходимости по мере, введенному в [3].

Лемма 1. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\} \subset \mathcal{A}$ сходилась к элементу a из $\mathcal{A}$ по мере необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной функции φ с компактным носителем на действительной прямой R последовательность $\{\varphi(a_n)\}$ сходилась в смысле L_2 к $\varphi(a)$.

Доказательство. Пусть $a_n \to a$ по мере и φ - непрерывная действительная функция с компактным носителем $M \subset R$. И пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как φ можно равномерно апроксимировать полиномами на M, то существует полином $P(x)$ на M такой, что $|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon/3$ для любого $x \in M$. Тогда очевидно $\|\varphi(a_n) - P(a_n)\| < \varepsilon/3$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $\|\varphi(a) - P(a)\| < \varepsilon/3$. Из непрерывности алгебраических операций относительно сходимости по мере следует, что $P(a_n) \to P(a)$ по мере, то есть существует последовательность $\{e_n\} \subset \nabla$ такая, что $\| U_{e_n}(P(a_n)-P(a)\| < \varepsilon/3$ и $\tau(e_n) \to 1$. Тогда $\| U_{e_n}(\varphi(a_n)-\varphi(a))\| \le \| U_{e_n}(\varphi(a_n)-P(a_n))\| + \| U_{e_n}(P(a_n)-P(a))\| + \| U_{e_n}(P(a)-\varphi(a))\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

Следовательно, $\varphi(a_n)$ сходится по мере к $\varphi(a)$. Так как последовательность $\{\varphi(a_n)\}$ ограничена по норме, то можно показать, что $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по L_2 - норме. Достаточность леммы доказывается по той же схеме, что и в [2] . С помощью этой леммы легко доказать следующий аналог теоремы 2.2 из [4] .

Теорема I. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится по мере к элементу $a \in \mathcal{A}$. Тогда для любой действительной непрерывной функции φ , представимой в виде суммы конечного числа монотонных непрерывных функций, $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по мере.

Для элемента OJ - алгебры $\mathcal{A}$ определим следующие понятия.

Определение. Пусть P_E - спектральный идемпотент элемента a, соответствующий борелевскому множеству E из R. Меру $\mu^\tau(E) = \tau(P_E)$ назовем вероятностной мерой, порожденной элементом a относительно τ . Функцию $F(\lambda) = \mu^\tau\{(-\infty, \lambda]\}$, определенную для всех λ , назовем функцией распределения a относительно τ . Ясно, что вероятностную меру и функцию распределения a можно определить относительно любого точного нормального состояния σ .

Определение. Последовательность элементов $\{a_n\}$ OJ - алгебры $\mathcal{A}$ сходится по распределению к элементу $a \in \mathcal{A}$, относительно точного нормального состояния τ , если последовательность мер μ_n^σ сходится слабо к мере μ^σ $(\mu_n^\sigma \Rightarrow \mu^\sigma)$.

Теорема 2. Пусть $\{a_n\}$ - последовательность элементов OJ - алгебры $\mathcal{A}$ с функциями распределения $\{F_n\}$ сходится по мере к элементу $a \in \mathcal{A}$ с функцией распределения F . Тогда для любой точки λ , в которой F непрерывна, $F_n(\lambda) \to F(\lambda)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть F непрерывна в точке λ, мы покажем, что $\tau(P_\lambda^n) \to \tau(P_\lambda)$. Допустим, что $\tau(P_\lambda^n) \to L$ и что $L < \tau(P_\lambda)$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ $L = \tau(P_\lambda) - 2\delta$. Так как F непрерывна в точке λ , то существует $\varepsilon > 0$ и число $\lambda - \varepsilon$, такие, что $F(\lambda) - F(\lambda-\varepsilon) < \delta/2$. Тогда $L < \tau(P_{\lambda-\varepsilon})$. Поскольку $\tau(P_\lambda^n) \to L$, то существует натуральное число N_1 такое, что при $n \ge N_1$ $\tau(P_\lambda^n) < L + \delta/4 < \tau(P_\lambda) - \delta$. Пусть $A_\lambda^n = I - P_\lambda^n$, тогда $\tau(A_\lambda^n \wedge P_{\lambda-\varepsilon}) \ge \delta$ при $n \ge N_1$. И пусть S_n означает спектральный идемпотент элемента $|a_n - a|$, соответствующий интервалу $[0, \varepsilon/2)$. Так как $a_n \to a$ по мере, то $\tau(S_n) \to 1$ при $n \to \infty$. [6]. Следовательно, существует натуральное N_2, что $\tau(S_n) > 1 - \delta/2$ при $n > N_2$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ $K_n = S_n \wedge A_\lambda^n \wedge P_{\lambda-\varepsilon}$ ненулевой идемпотент, и легко видеть, что

$$U_{K_n} a = U_{K_n} U_{P_{\lambda-\varepsilon}} a \leq U_{K_n}(\lambda-\varepsilon) K_n = (\lambda-\varepsilon) K_n$$

$$U_{K_n} a_n = U_{K_n} U_{A_\lambda^n} a_n \geq U_{K_n} \lambda K_n = \lambda K_n$$

$$0 \leq U_{K_n} |a_n - a| = U_{K_n} U_{S_n} |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} K_n .$$

Отсюда следует $\frac{\varepsilon}{2}\tau(K_n) \geq \tau(U_{K_n}|a_n-a|) \geq \tau(U_{K_n}(a_n-a)) =$
$= \tau(U_{K_n} a_n) - \tau(U_{K_n} a) \geq \tau(\lambda K_n) - \tau((\lambda-\varepsilon)K_n) = \varepsilon\tau(K_n)$.

Предположив, что $\tau(P_\lambda) < L$ аналогичным образом приходим к противоречию. Теорема доказана.

Следствие. Пусть последовательность элементов $\{a_n\} \subset \mathcal{A}$ с функциями распределения $\{F_n\}$ сходится по мере к элементу $a \in \mathcal{A}$ с функцией распределения F, и пусть λ_1 и λ_2 - точки непрерывности F $(\lambda_1 < \lambda_2)$ и R_n и R - спектральные идемпотенты a_n и a, соответствующие интервалу $(\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда $\tau(R_n) \to \tau(R)$.

Следующая теорема с помощью этого следствия доказывается по той же схеме, что и теорема 4.4 в [4].

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}$ и a элементы OJ - алгебры $\mathcal{A}$ с функциями распределений $\{F_n\}$ и F и со спектральными идемпотентами $\{P_\lambda^n\}$ и P_λ соответственно. Допустим, что F непрерывна в точке λ. Тогда $a_n \to a$ по мере тогда и только тогда, когда $P_\lambda^n \to P_\lambda$ по мере.

Теорема 4. Пусть $\{P_\lambda^n\}$ и P_λ те же, что и в теореме 3. Тогда $a_n \to a$ по мере тогда и только тогда, когда для любого точного нормального состояния σ, $\sigma(P_\lambda^n) \to \sigma(P_\lambda)$.

Доказательство. Пусть $a_n \to a$ по мере, тогда $P_\lambda^n \to P_\lambda$ по мере. Так как $\{P_\lambda^n\}$ ограничена по норме, то можно показать, что $P_\lambda^n \to P_\lambda$ слабо, то есть для любого нормального состояния σ на $\mathcal{A}$ $\sigma(P_\lambda^n) \to \sigma(P_\lambda)$.

С другой стороны, если σ - любое нормальное состояние, то его можно написать в виде: $\sigma = 2\sigma^1 - \tau$, где $\sigma^1 = (\sigma+\tau)/2$ и τ - точные нормальные состояния, отсюда следует $\sigma(P_\lambda^n) \to \sigma(P_\lambda)$, то есть $P_\lambda^n \to P_\lambda$ слабо и также L_2 - норма P_λ^n сходится к L_2 - норме P_λ.

Следовательно, $P_\lambda^n \to P_\lambda$ по L_2 - норме, отсюда $P_\lambda^n \to P_\lambda$ по мере и по теореме 3 $a_n \to a$ по мере.

Теорема 5. Пусть последовательность элементов $\{a_n\}$ OJ- алгебры $\mathcal{A}$ сходится по мере к элементу a из $\mathcal{A}$. Тогда для любой непрерывной функции φ на R $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по мере.

Доказательство. Пусть σ – точное нормальное состояние и пусть $\{\mu_n^\sigma\}$ и μ^σ – вероятностные меры, порожденные $\{a_n\}$ и a соответственно. Так как $a_n \to a$ по мере, то $\mu_n^\sigma \Rightarrow \mu^\sigma$. Ясно, что вероятностные меры $\{\mu_n^\sigma \varphi^{-1}\}$ и $\mu^\sigma \varphi^{-1}$ порождены $\varphi(a_n)$ и $\varphi(a)$ соответственно. Поскольку функция φ непрерывна, то $\mu_n^\sigma \varphi^{-1} \Rightarrow \mu^\sigma \varphi^{-1}$, то есть $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по распределению относительно σ. Отсюда следует, что $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по мере.

Список
использованных источников и литературы

1. Segal I.E. A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math 57 (1953), 401-457.
2. Stinespring W.F. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 15-56.
3. Аюпов Ш.А. Йордановы алгебры измеримых элементов. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 5, с. 3-6.
4. Padmanabhan A.R. Convergence in measure and related results in finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 3, 128 1967, 359-378.
5. Padmanabhan A.R. Probablistic aspects of von Neumann algebras. J. of Functional Analysis. 31 (1979), 139-149.
6. Аюпов Ш.А., Усманов Ш.М. Порядок и топология в йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ № 4232-80 Деп. РЖ.МАТ. 1981, 1А 291.