МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. ЛЕНИНА

На правах рукописи

КРЫГИН Андрей Васильевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

01. 01. 01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ташкент—1991

Работа выполнена в Ташкентском государственном университете имени В. И. Ленина, Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта имени Акмаля Икрамова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент В. И. ЧИЛИН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Д. П. ЖЕЛОБЕНКО

кандидат физико-математических наук Ш. М. УСМАНОВ

Ведущая организация: Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится « 28 » ноября 1991 г. в 13⁰⁰ часов на заседании специализированного совета К 067. 02. 10 по присуждению степени кандидата физико-математических наук в Ташкентском государственном университете имени В. И. Ленина по адресу: 700095, Ташкент, 95, Вузгородок, ауд. А-205.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ташкентского государственного университета.

Автореферат разослан « 26 » октября 1991 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент **А. К. ВАРИСОВ**

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В работах Р.Шаттена, И.Ц. Гохберга и М.Г.Крейна было положено начало изучению симметрично-нормированных идеалов компактных операторов в алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, являющихся некоммутативным аналогом симметричных пространств числовых последовательностей.

Активное развитие некоммутативного интегрирования, основанного на теории алгебр фон Неймана, построение которой было заложено в работах Ф.Дж.Мюррея и Дж.фон Неймана, сделало естественным рассмотрение нового класса банаховых пространств - симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Такие пространства являются аналогом симметричных пространств измеримых функций на произвольном пространстве с мерой. Начало самой теории некоммутативного интегрирования было заложено в работах И.Сигала и Ф.Стайнспринга. Дальнейшее свое развитие эта теория нашла в работах А.Конна, Х.Косаки, Е.Нельсона, В.И.Овчинникова, Ф.Дж.Едона, М.А.Муратова, В.И.Чилина, Ф.А.Сукочева, Т.Фака. Ф.Хиаи, Б.де Пагтера, П.Г.Доддса, Т.К.Доддс, Н.В.Трунова, А.Н.Шерстнёва и других. Следует также указать на исследования Ш.А.Аюпова и Н.В.Трунова, связанные с построением теории неассоциативного интегрирования на йордановых алгебрах.

Впервые некоммутативные симметричные пространства на алгебрах фон Неймана, отличных от $B(H)$ рассматривались в работах В.И.Овчинникова. В случае алгебры $B(H)$ класс некоммутативных симметричных пространств совпадает с классом симметрично-нормированных идеалов компактных операторов. Таким образом, теория некоммутативного интегрирования явилась тем необходимым инструментом, который позволил продолжить соответствие между симметричными пространствами последовательностей и симметрично-нормированными идеалами в $B(H)$ на случай произвольных симметричных пространств функций и ассоциированных с ними некоммутативных симметричных пространств на алгебрах фон Неймана. Дальнейшему изучению свойств таких пространств посвящены работы Ф.Дж.Едона, А.М.Меджитова, Ф.А.Сукочева, В.И.Чилина, П.Г.Доддса, Т.К.Доддс, Б.деПагтера, К.Шу и других авторов. Отметим также предложенный А.М.Бикчентаевым метод построения некоммутативных F - нормированных идеальных пространств измеримых операторов.

Наиболее интересными и содержательными примерами симметричных пространств измеримых операторов являются некоммутативные L^p - пространства, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Свойства этих пространств подробно изучались в работах М.А.Муратова, О.Е.Тихонова, Н.В.Трунова, В.И.Чилина, А.Н.Шерстнёва, А.Катоволоса, Х.Косаки, Ф.Дж.Едона, А.М.Меджитова.

Одним из важных направлений в теории банаховых пространств является геометрический аспект этой теории. В связи с этим в развивающейся теории некоммутативных симметричных пространств возникает необходимость изучения геометрических свойств этих пространств. Эти исследования, как в случае симметрично-нормированных идеалов, так и в случае некоммутативных симметричных пространств на произвольных алгебрах фон Неймана уже получили отражение в серии работ Н.Томчак-Ёгерманн, К.Маккарти, Дж.Арази, С.Кваленя, А.Пелчинского, В.И.Чилина, Ф.А.Сукочева, Т.Фака, К.Шу.

Цель работы. Цель исследований, представленных в диссертации, заключается в изучении геометрических свойств некоммутативных симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к полуконечным алгебрам фон Неймана.

Общая методика выполнения исследований. В работе используются методы теории некоммутативного интегрирования, теории симметричных функциональных пространств, теории банаховых решеток, теории некоммутативных симметричных пространств, а также обычная техника функционального анализа.

Научная новизна. В работе исследованы различные геометрические свойства некоммутативных симметричных пространств. Предложено обобщение понятия оператора блочного проектирования в пространстве всех локально интегрируемых операторов, присоединенных к произвольной полуконечной алгебре фон Неймана. Изучены свойства этого оператора. Описано множество крайних точек выпуклого вполне симметричного множества локально интегрируемых операторов, присоединенных к непрерывной полуконечной алгебре фон Неймана. Получен общий вид крайних точек единичного шара некоммутативного пространства Лоренца. Получены условия для локальной равномерной выпуклости и равномерной выпуклости некоммутативных симметричных пространств и симметрично-нормированных идеалов компактных операторов. В частности, получено решение задачи о равномерной выпуклости симметрично-нормированного идеала компактных операторов, сформулированной Дж.Арази. Установлен критерий p - выпуклости и q - вогнутости некоммутативного симметричного пространства.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты и методы диссертации можно использовать для развития теории банаховых пространств измеримых операторов, а также для изучения различных геометрических свойств некоммутативных симметричных пространств.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на ХУ школе по теории операторов в функциональных пространствах (Ульяновск, 1990 г.), на городском семинаре по функциональному анализу при кафедре функционального анализа ТашГУ им.В.И.Ленина (1987-1989 гг.), на конференциях молодых ученых ТашГУ им.В.И.Ленина (1988-1989 гг.), на конференции молодых ученых Института математики АН УзССР (1988 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликованы статьи [1 - 10] . Работа [5] выполнена автором совместно с А.М.Меджитовым, работы [6 - 8] - совместно с Ф.А.Сукочевым, работы [9,10] - совместно с Ф.А.Сукочевым и научным руководителем В.И.Чилиным.

Структура и обьем работы. Диссертация состоит из введения, предварительных сведений (§ 1), двух глав, разбитых на восемь параграфов и списка литературы из 106 наименований. Общий обьем работы 150 страниц машинописного текста.

П. СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается тема исследования, приводится обзор содержания диссертации и кратко излагаются основные результаты работы.

В § I, содержащем предварительные сведения, приведены определения измеримых и интегрируемых операторов, некоммутативных симметричных пространств, а также необходимые сведения из теории некоммутативного интегрирования, теории симметричных пространств и теории банаховых решеток. Здесь же вводятся основные обозначения; приведем некоторые из них.

Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, μ – точный нормальный полуконечный след на M, $\mathbb{1}$ – единица в M, $\mathcal{P}(M)$ – решетка всех проекторов из M, $\mathcal{K}(M,\mu)$ – пространство всех μ – измеримых операторов, присоединенных к M, $L^1(M,\mu)$ – пространство всех μ – интегрируемых операторов из $\mathcal{K}(M,\mu)$. Перестановкой оператора $x\in\mathcal{K}(M,\mu)$ называется функция $\mu_t(x): t\in(0,\mu(\mathbb{1}))\longrightarrow[0,\infty)$, определенная равенством

$$\mu_t(x)=\inf\left\{\|xp\|_\infty : p\in\mathcal{P}(M),\ \mu(\mathbb{1}-p)\leq t\right\},\ t\geqslant 0,$$

$\|\cdot\|_\infty$ – норма в M.

Положим $\mu_\infty(x)$ равным $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_t(x)$, если $\mu(\mathbb{1})=\infty$ и равным 0, если $\mu(\mathbb{1})<\infty$. Для операторов $x,y\in\mathcal{K}(M,\mu)$ запись $x\prec y$ обозначает, что $\int\limits_0^t\mu_s(x)ds\leq$ $\leq\int\limits_0^t\mu_s(y)ds$ для любого $t\in(0,\mu(\mathbb{1}))$. Если $x\prec y$ и $y\prec x$ одновременно, то применяется обозначение $x\approx y$.

Орбитой оператора $x\in\mathcal{K}(M,\mu)$ называется множество $\Omega(x)=\{y\in\mathcal{K}(M,\mu): y\prec x\}$. Подмножество $W\subseteq\mathcal{K}(M,\mu)$

называется вполне симметричным, если из $x \in W$ вытекает, что $\Omega(x) \subseteq W$. Линейный оператор T на $L^1(M,\mu)+M$ называется допустимым, если он является сжатием в обеих нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ пространств $L^1(M,\mu)$ и M .Если W - выпуклое вполне симметричное множество из $L^1(M,\mu)+ + M$, то через $\widetilde{W}$ обозначается множество $\{f \in L^1(0,\mu(\mathbb{1}))+ + L^\infty(0,\mu(\mathbb{1})) : \tilde{f}(t) = \mu_t(x)$ для некоторого $x \in W$ и всех $t \in (0,\mu(\mathbb{1}))\}$, где $\tilde{f}$ - невозрастающая перестановка функции $|f|$. Банахово пространство $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)}) \subseteq L^1(M,\mu)+M$ называется симметричным пространством на алгебре M , если из $x \in E(M,\mu)$, $y \in L^1(M,\mu)+M$, $\mu_t(y) \le \mu_t(x)$ при всех $t \in (0,\mu(\mathbb{1}))$ следует $y \in E(M,\mu)$ и $\|y\|_{E(M,\mu)} \le \|x\|_{E(M,\mu)}$.

В случае, когда $M = L^\infty(0,\alpha)$, $0 < \alpha \le +\infty$, приведенное определение совпадает с определением симметричного пространства функций на $(0,\alpha)$. Нормированное пространство $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)}) \subseteq L^1(M,\mu)+M$ называется ассоциированным с симметричным пространством функций $(E, \|\cdot\|_E) \subseteq L^1(0,\alpha)+L^\infty(0,\alpha)$, $\alpha = \mu(\mathbb{1})$, если

$$E(M,\mu) = \{x \in L^1(M,\mu)+M : \mu_t(x) \in E\}, \quad \|x\|_{E(M,\mu)} = \|\mu_t(x)\|_E .$$

Если симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E) \subseteq L^1(0,\alpha)+L^\infty(0,\alpha)$, $\alpha = \mu(\mathbb{1})$ - правильное (т.е. его норма порядково непрерывна), то ассоциированное с ним пространство $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ на алгебре M является правильным симметричным пространством на алгебре M. Если W - выпуклое подмножество банахова пространства X, то через $ex\,W$ обозначается множество всех крайних точек из W. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ называется локально равномерно выпуклым, если из условий $x_n,\ x \in X$, $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$, $\|x_n+x\|_X \to 2\|x\|_X$ при $n\to\infty$ вытекает, что $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$, и равномерно выпуклым, если из условий $x_n, y_n \in X$, $\|x_n\|_X$, $\|y_n\|_X \leq 1$, $\|x_n + y_n\|_X \longrightarrow 2$ при $n \longrightarrow \infty$ вытекает, что $\|x_n - y_n\|_X \longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. Если симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E) \subseteq L^1(0,\alpha) + L^\infty(0,\alpha)$, $0<\alpha\leq+\infty$ локально равномерно выпукло или равномерно выпукло, то оно правильно.

Первая глава (§§ 2-6) посвящена описанию крайних точек выпуклых вполне симметричных множеств, в частности, единичных шаров в некоммутативных пространствах Лоренца.

В § 2 строится допустимый оператор в $L^1(M,\mu)+M$, являющийся аналогом оператора блочного проектирования в симметрично-нормированных идеалах в $B(H)$. Основным результатом § 2 является

Предложение 2.3. Пусть $p_n \in \mathcal{P}(M)$, $p_n \neq p_m$, $n\neq m$; $n, m = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $x \in L^1(M,\mu)+M$ существует единственный элемент

$\Phi(x)\in L^1(M,\mu)+M$ такой, что $r(\Phi(x))\le \sup\limits_n p_n$, где $r(\Phi(x))$ – правый носитель $\Phi(x)$, и $\Phi(x)p_n = p_n\Phi(x) = p_n x p_n$ для любого $n=1,2,\dots$. Отображение $\Phi: L^1(M,\mu)+M \longrightarrow L^1(M,\mu)+M$ линейно, положительно, $\Phi(x)\prec x$ для любого $x\in L^1(M,\mu)+M$, и, кроме того, если $x\in L^1(M,\mu)$ (соответственно, $x\in M$), то $\Phi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n x p_n$ с рядом, сходящимся по норме пространства $L^1(M,\mu)$ (соответственно, в сильной операторной топологии в M).

Построенное в предложении 2.3 линейное отображение Φ называется оператором блочного проектирования в $L^1(M,\mu)+M$ порожденным проекторами p_n, $n=1,2,\dots$. Этот оператор может быть записан в силу доказанного в виде $\Phi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n z p_n$, $z\in L^1(M,\mu)+M$. Из предложения 2.3 вытекает следующее свойство предпорядка $\prec$:

Следствие 2.4. Пусть $p_n\in\mathcal{P}(M)$, $n=1,2,\dots,m$; $x\in L^1(M,\mu)+M$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{m} p_n x p_n \prec x$.

Еще одно свойство оператора блочного проектирования получено в следствии 5.20.

§ 3 посвящен доказательству свойств перестановок измеримых операторов, которые будут использованы при доказательстве основной теоремы § 5. Эти свойства, представляющие также и самостоятельный интерес, содержатся в следующих двух предложениях.

Предложение 3.I. Пусть $x, y \in \mathcal{K}_+(M,\mu)$, $x \geqslant \mu_\infty(x)\mathbb{1}$, $y \neq 0$. Тогда существует такое число $s > 0$, что $\mu_s(x+y) > \mu_s(x)$.

Предложение 3.5. Пусть $x, y \in L^1(M,\mu) + M$, $x \geqslant \mu_\infty(x)\mathbb{1}$, $y = y^*$, $x + iy \approx x$. Тогда $y = 0$.

В § 4 описываются крайние точки выпуклых вполне симметричных множеств функций из $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$, где (Ω, Σ, τ) – пространство с непрерывной σ – конечной мерой τ. Для обозначения перестановки функции $x \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ наряду с $\mu_t(x)$ и $\mu_\infty(x)$ используются обозначения $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}(\infty)$.

Теорема 4.9. Пусть W – выпуклое вполне симметричное множество из $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Тогда $x \in ex\, W$ в том и только в том случае, когда $\tilde{x} \in ex\, \tilde{W}$ и $|x| \geqslant \tilde{x}(\infty)$ п.в.

С помощью этой теоремы доказывается теорема о крайних точках орбиты локально интегрируемой функции.

Теорема 4.I0. Пусть $x, y \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Тогда $x \in ex\, \Omega(y)$ в том и только в том случае, когда $\tilde{x} = \tilde{y}$ и $|x| \geqslant \tilde{x}(\infty)$ п.в.

§ 5 посвящен описанию крайних точек выпуклых вполне симметричных множеств измеримых операторов. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 5.I6. Пусть M – непрерывная полуконечная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный полуконечный след на M, W - непустое выпуклое вполне симметричное подмножество в $L^1(M,\mu)+M$. Тогда $x\in ex\,W$ в том и только в том случае, когда $\mu_t(x)\in ex\,\widetilde{W}$ и выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mu_\infty(x)=0$; (ii) $z(1-r(x))\,z(1-l(x))=0$ и $|x|\geqslant\mu_\infty(x)\,r(x)$, где $l(x)$, $r(x)$ - соответственно левый, правый носители x, $z(p)$ - центральный носитель проектора p, $|x|$ - модуль x.

Приведем некоторые следствия из теоремы 5.16.

С л е д с т в и е 5.18. Пусть $x\in L^1(M,\mu)+M$. Если $\mu_\infty(x)=0$, то $y\in\Omega(x)$ в том и только в том случае, когда $x\approx y$. Если $\mu_\infty(x)>0$, то $y\in ex\,\Omega(x)$ в том и только в том случае, когда $x\approx y$, $z(r^\perp(y))\,z(l^\perp(y))=0$ и $|y|\geqslant\mu_\infty(x)\,r(y)$.

С л е д с т в и е 5.20. Пусть $p_n\in\mathcal{P}(M)$, $p_n\neq p_m$, $n\neq m$, $n,m=1,2,\dots$, Φ - оператор блочного проектирования в $L^1(M,\mu)+M$, порожденный $\{p_n\}$, $x\in L^1(M,\mu)+M$, $\mu_\infty(x)=0$. Тогда $\Phi(x)\approx x$ в том и только в том случае, когда $\Phi(x)=x$.

§ 6 посвящен описанию крайних точек пространств Лоренца. Сначала исследуется коммутативная ситуация. Пространство Лоренца $\Lambda_\psi(\Omega)$ на пространстве (Ω,Σ,τ) с σ - конечной мерой τ, построенное по непрерывной возрастающей вогнутой функции $\psi(t)$ на $[0,\infty)$, $\psi(0)=0$ состоит из всех τ - измеримых функций на Ω, для которых $\|x\|_{\Lambda_\psi}=\int_0^{\tau(\Omega)}\tilde{x}(t)\,d\psi(t)<\infty$. Будем обозначать через $\Lambda^1_\psi(\Omega)$

единичный шар пространства Лоренца. Положим $t^* = \min\{\gamma : \psi(t)$ постоянна на $(\gamma, \infty)\}$ и $t^* = \infty$, если $\psi(t)$ строго возрастает; $t^{**} = \max\{\gamma : \frac{\psi(t)}{t}$ постоянна на $(0, \gamma]\}$.

Т е о р е м а 6.I. $x \in ex\, \Lambda^1_\psi(\Omega)$ тогда и только тогда, когда x имеет вид $x(\omega) = \dfrac{u(\omega)}{\psi(\tau(A))}$, где $|u(\omega)| = \chi_A(\omega)$, а множество $A \in \Sigma$ удовлетворяет одному из следующих условий:

а) $t^{**} < \tau(A) < t^*$;

б) A – атом и $\tau(A) < t^*$;

в) $A = \Omega$, в случае $\psi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) < \infty$.

Т е о р е м ы 5.I6 и 6.I позволяют дать описание множества крайних точек единичного шара $\Lambda^1_\psi(M, \mu)$ некоммутативного пространства Лоренца $\Lambda_\psi(M, \mu) = \{x \in L^1(M, \mu) + M :$ $\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^{\mu(\mathbb{1})} \mu_t(x)\, d\psi(t) < \infty\}$ в случае, когда алгебра M является непрерывной.

Т е о р е м а 6.2. Пусть M – непрерывная полуконечная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный полуконечный след на M.

а) Если $\psi(\infty) = \infty$ или $\mu(\mathbb{1}) < \infty$, то

$$ex\, \Lambda^1_\psi(M, \mu) = \left\{ \frac{1}{\psi(\mu(|u|))} u : u \in M \text{ – частичная изометрия, удовлетворяющая условию } t^{**} < \mu(|u|) < t^* \right\}.$$

б) Если $\psi(\infty) = a < \infty$ и $\mu(\mathbb{1}) = \infty$, то

$ex\, \Lambda^1_\psi(M, \mu) = \left\{ \dfrac{1}{\psi(\mu(|u|))} u : u \in M \right.$ – частичная изометрия, удовлетворяющая одному из условий:

$$t^{**} < \mu(|u|) < t^{*}, \quad (1 - u^{*}u)M(1 - uu^{*}) = \{0\}\}.$$

В случае, когда функция Ψ строго вогнута, получено описание крайних точек единичного шара пространства Лоренца на произвольной полуконечной алгебре фон Неймана.

Т е о р е м а 6.6. Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный полуконечный след на M, Ψ – строго вогнутая возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $\Psi(0) = 0$.

а) Если $\Psi(\infty) = \infty$ или $\mu(1) < \infty$, то

$ex\, \Lambda^{1}_{\Psi}(M, \mu) = \left\{ \frac{1}{\Psi(\mu(|u|))} u : u \in M \right.$ – частичная изометрия, удовлетворяющая условию $\mu(|u|) < \infty \}$.

б) Если $\Psi(\infty) < \infty$ и $\mu(1) = \infty$, то

$ex\, \Lambda^{1}_{\Psi}(M, \mu) = \left\{ \frac{1}{\Psi(\mu(|u|))} u : u \in M \right.$ – частичная изометрия, удовлетворяющая одному из условий:

$$\mu(|u|) < \infty, \quad (1 - u^{*}u)\, M\, (1 - uu^{*}) = \{0\}\}.$$

В т о р а я г л а в а (§§ 7–9) посвящена исследованию таких геометрических свойств некоммутативных симметричных пространств как локальная равномерная выпуклость, равномерная выпуклость, p – выпуклость и q – вогнутость.

Основные результаты § 7 и § 8 могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а (теоремы 7.I и 8.2). Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный полуконечный след на M, 1 – единица в M, $(E(M, \mu), \|\cdot\|_{E(M, \mu)})$ –

симметричное пространство на алгебре M, ассоциированное с локально равномерно выпуклым (равномерно выпуклым) симметричным пространством $(E, \|\cdot\|_E)$ функций на $[0, \alpha)$, $\alpha = \mu(\mathbf{1})$. Тогда $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ – локально равномерно выпукло (соответственно, равномерно выпукло).

Получены также варианты этих теорем для атомических алгебр фон Неймана.

Т е о р е м а (теоремы 7.I2 и 8.4). Пусть E – сепарабельное симметричное пространство последовательностей действительных чисел, C_E – симметрично-нормированный идеал компактных операторов в $B(H)$, ассоциированный с E. Следующие условия эквивалентны:

I. C_E локально равномерно выпукло (равномерно выпукло).

2. E локально равномерно выпукло (соответственно, равномерно выпукло).

В § 9 исследуются p – выпуклость и p –вогнутость некоммутативных симметричных пространств. Симметричное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ на алгебре M или на интервале $(0,\alpha)$, $0 < \alpha \leq +\infty$, называется p – выпуклым (p – вогнутым), $1 \leq p < +\infty$, если существует такая константа M, $0 < M < +\infty$, что для любого конечного множества $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X выполнено

$$\Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_X \leq M \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

(соответственно,

$$M \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_X \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big).$$

Наименьшая из таких констант M - называется константой p - выпуклости (p - вогнутости) пространства X и обозначается через $M^{(p)}(X)$ (соответственно, $M_{(p)}(X)$).

Теорема 9.I. Пусть M - полуконечная алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный полуконечный след на M , $\mathbb{1}$ - единица в M , $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ - симметричное пространство на (M,μ), ассоциированное с правильным симметричным пространством $(E, \|\cdot\|_E)$ функций на $[0,\alpha)$, $\alpha = \mu(\mathbb{1})$, $1 \leq p < +\infty$. Тогда

(i) Если $(E, \|\cdot\|_E)$ - p - выпукло, то $(E(M,\mu)$, $\|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ p - выпукло. Более того $M^{(p)}(E(M,\mu)) \leq M^{(p)}(E)$.

(ii) Если $(E, \|\cdot\|_E)$ - p - вогнуто,то $(E(M,\mu)$, $\|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ - p - вогнуто.Более того, $M_{(p)}(E(M,\mu)) \leq M_{(p)}(E)$.

В качестве следствия (следствие 9.8) установлено, что в случае, когда алгебра M непрерывна, p - выпуклость (p -вогнутость) правильного симметричного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ функций на $[0,\alpha)$, $\alpha = \mu(\mathbb{1})$, равносильна p - выпуклости (соответственно, p - вогнутости) ассоциированного с ним симметричного пространства $(E(M,\mu), \|\cdot\|_{E(M,\mu)})$ на алгебре M . Более того, в этом случае $M^{(p)}(E(M,\mu)) = M^{(p)}(E)$ (соответственно, $M_{(p)}(E(M,\mu)) = M_{(p)}(E)$).

Завершая обзор диссертации, перечислим основные результаты, выносящиеся на защиту.

I. Описаны крайние точки выпуклых вполне симметричных множеств локально интегрируемых операторов, присоединенных к непрерывной полуконечной алгебре фон Неймана.

2. Описаны крайние точки единичных шаров пространств Лоренца на произвольных полуконечных алгебрах фон Неймана.

3. Получены условия для локальной равномерной выпуклости, равномерной выпуклости, p - выпуклости и q - вогнутости некоммутативных симметричных пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана.

Автор выражает искреннюю признательность и глубокую благодарность своему научному руководителю Владимиру Ивановичу Чилину за постоянное внимание и большую помощь в работе над диссертацией.

III. РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Крыгин А.В. Крайние точки вполне симметричных подмножеств в $L_1 + L_\infty$ // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 1. С.15-22.

2. Крыгин А.В. p - выпуклость и q - вогнутость некоммутативных симметричных пространств // Докл. АН УзССР. 1990. № 2. С. 7-8.

3. Крыгин А.В. p - выпуклость и q - вогнутость некоммутативных симметричных пространств. Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 2027-В90. М.: ВИНИТИ. 1990. - 15 с.

4. Крыгин А.В. Крайние точки единичного шара некоммутативного пространства Лоренца. Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 4982-В90. М.: ВИНИТИ. 1990. - 13 с.

5. Крыгин А.В., Меджитов А.М. Изометрии пространств Лоренца. В кн.: "Математический анализ и теория вероятностей". Сб. научных трудов ТашГУ. 1988. С.52-62.

6. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А. Крайние точки выпуклых вполне симметричных множеств измеримых операторов // Докл. АН УзССР. 1989. № 1. С.5-6.

7. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А. Равномерная выпуклость некоммутативных симметричных пространств. Рукоп. деп. в ВИНИТИ. № 2812-В90. М.: ВИНИТИ. I990. – 5 с.

8. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А. Локальная равномерная выпуклость некоммутативных симметричных пространств. В кн.: "ХУ-школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тез. докл." Ульяновск. I990. Ч.I. С.I35.

9. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Крайние точки выпуклых вполне симметричных подмножеств измеримых операторов. Рукоп. деп. в ВИНИТИ. № 4028-В89. М.: ВИНИТИ, I989. – 49 с.

I0. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Равномерная выпуклость и локальная равномерная выпуклость симметричных пространств измеримых операторов. Рукоп. деп. в ВИНИТИ. № 5620-В90. М.: ВИНИТИ. I990. – 23 с.