理学博士学位论文

赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

李小彦

哈尔滨理工大学

2023 年 3 月

国内图书分类号：O177.2

理学博士学位论文

赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

博 士 研究生：李小彦

导 师：崔云安

申请学位级别：理学博士

学 科、专 业：数学

所 在 单 位：理学院

答 辩 日 期：2023 年 3 月

授予学位单位：哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.2

Dissertation for the Doctor Degree in Science

Some Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with the *p*-Amemiya norm

Candidate：	Li Xiaoyan
Supervisor：	Cui Yunan
Academic Degree Applied for：	Doctor of Science
Speciality：	Mathematics
Date of Oral Examination：	March, 2023
University：	Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间的若干几何性质》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：李小彦　　　　日期：　2023 年　3 月　30 日

哈尔滨理工大学学位论文使用授权书

《赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间的若干几何性质》系本人在哈尔滨理工大学攻读学位期间在导师指导下完成的学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保密 □，在　　年解密后适用授权书。

不保密 ☑。

(请在以上相应方框内打√)

作者签名：李小彦　　　　日期：2023 年 3 月 30 日

导师签名：崔云安　　　　日期：2023 年 3 月 30 日

赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间的若干几何性质

摘　要

Banach 空间几何理论是现代泛函分析的重要分支，Orlicz 空间是经典 Lebesgue 空间 (L_p) 的推广。作为一类具体的 Banach 空间，Orlicz 空间被广泛应用于方程理论、逼近论、不动点理论、预报算子及概率论等理论中。众所周知，*p*-Amemiya 范数公式实现了 Orlicz 范数公式和 Luxemburg 范数公式形式上的统一。赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间是赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数 Orlicz 空间的推广，赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间中许多几何性质获得了通用的判别准则。因此，研究赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间的几何性质具有重要的理论意义和应用价值。

本文主要对赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间的光滑性、严格凸性和暴露性进行研究。全文共分五章，具体内容如下：

1. 在赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间的对偶空间中定义一类新范数，新范数将实现 Orlicz 空间有界线性泛函 f 的 Orlicz 范数计算公式和 Luxemburg 范数计算公式形式上的统一。给出赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间中有界线性泛函 f 的范数计算公式，得到该空间单位球面上点的支撑泛函的具体表达式。利用支撑泛函的具体表达式彻底解决赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间光滑点的刻画问题，从点态性质的结果出发获得空间具有光滑性的判别准则。

2. 给出赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间中有界线性泛函 f 的范数计算公式，该范数公式是有界线性泛函 f 的 Orlicz 范数计算公式和 Luxemburg 范数计算公式的推广。利用有界线性泛函 f 的范数计算公式获得赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间单位球面上点的支撑泛函的具体表达式，解决该空间光滑点的刻画问题，并得到空间具有光滑性的判别准则。

3. 使用新的技巧给出赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间具有严格凸性的证明，该方法简化了赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数 Orlicz 序列空间中相应结论的证明。

4. 利用赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间单位球面上点的支撑泛函的具体表达式给出该空间暴露点的充要条件。结果表明，当 $1<p<\infty$ 时，赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间中暴露点的判据弱于赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数 Orlicz 空间暴露点的判据。利用单位球面上暴露点的刻画，获得赋 *p*-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有暴露性的判别准则。

关键词 Orlicz 空间；Orlicz 范数；Luxemburg 范数；*p*-Amemiya 范数；光滑点；严

格凸；暴露点

Some Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with the *p*-Amemiya Norm

Abstract

Geometric theory of Banach spaces is a great part of modern functional analysis. Orlicz space is a generalization of classical Lebesgue (L_p) space. As a kind of specific Banach space, it is widely used in equation theory, approximation theory, fixed point theory, operator theory, probability theory and other theories. It is well known that the p-Amemiya norm formula provides formal unity between the Orlicz norm formula and the Luxemburg norm formula, Orlicz space endowed with the p-Amemiya norm is an extension of Orlicz space endowed with the Orlicz and Luxemburg norm. In Orlicz spaces endowed with the p-Amemiya norm, a lot of geometric properties obtained general criteria. So, it is of great theoretical significance and practical value to research geometric properties of Orlicz spaces endowed with the p-Amemiya norm.

In this dissertation, smoothness, strict convexity and exposedness of Orlicz spaces endowed with the p-Amemiya norm are studied. Five chapters are consisted in this thesis, the main contents are as follows:

Firstly, we define a new sort of norms in the dual spaces of Orlicz function spaces endowed with the p-Amemiya norm. The new sort of norm formulas will realize unity formally about bounded linear functional f's norm calculation formulas. The norm calculation formulas of bounded linear functional in these spaces are provided. Furthermore, the precise form of support functional for the point on the unit sphere in Orlicz function spaces endowed with the p-Amemiya norm is presented. The characteristic of smooth points is given by using the explicit form of support functional of points on the unit sphere. Finally, general criteria for smoothness of Orlicz function spaces endowed with the p-Amemiya norm are obtained by using the results of pointwise property.

Secondly, the norm calculation formula about bounded linear functional f of Orlicz sequence spaces endowed with the p-Amemiya norm is given. By using the norm calculation formula of bounded linear functional, we obtain the specific form of supporting functional on unit spherical point in Orlicz sequence spaces endowed with the p-Amemiya norm, and the question of characteristic about smooth points is settled.

From the result of pointwise property, we got the criteria for smoothness of Orlicz sequence spaces endowed with the p-Amemiya norm.

Thirdly, we employ a new technique to obtain the criteria for strict convexity of Orlicz sequence spaces endowed with the p-Amemiya norm. This technique simplifies the corresponding conclusions of Orlicz sequence spaces endowed with the Orlicz and Luxemburg norm.

Finally, we take advantage of the specific form of supporting functional about a point on the unit sphere to gain the criteria for exposed points of Orlicz spaces endowed with the p-Amemiya norm. The criteria for exposed points have displayed that the criteria for exposed points of Orlicz spaces endowed with the p-Amemiya $(1<p<\infty)$ norm are weaker than that of Orlicz spaces endowed with the Orlicz and Luxemburg norm. We obtain criteria for exposedness of these spaces by the aid of characterization of exposed points.

Keywords Orlicz space; Orlicz norm; Luxemburg norm; p-Amemyia norm; smooth point; strict convexity; exposed point

目　　录

CONTENTS

第 1 章 绪 论

1.1 本课题的研究目的和意义

1.1.1 课题来源

本课题属于理论研究范畴，来源于指导教师的国家自然科学基金项目（项目编号：11871181）。

1.1.2 研究目的及意义

泛函分析是现代数学的一个重要分支，Banach 空间理论及应用作为泛函分析的研究内容之一，在现代数学中占有着重要的地位。1932 年，波兰著名数学家 Banach S 出版《线性算子理论》一书，从此数学工作者们开始对 Banach 空间进行研究。1936 年，Clarkson J A 在 Banach 空间中引入了一致凸空间的概念[1]，一致凸空间的引入开创了 Banach 空间几何理论研究的先河。半个多世纪来，数学工作者们对 Banach 空间的几何理论做了大量的研究工作，并取得很多漂亮的结果。例如：局部凸空间中紧凸集可以由其端点的凸包表示的 Krein-Milman 定理，利用有界线性泛函范数是否可达来判定空间自反的 James 定理，Bishop-Phelps 定理表明支撑点在边界上的稠密性及范数可达泛函在对偶空间的稠密性，关于定理的具体内容可参看文献[2,3]。Banach 空间理论被成功应用到了方程理论、控制论、逼近论、鞅理论等领域[4-9]。

随着 Banach 空间几何理论的应用和发展需要，对具体 Banach 空间进行研究越来越重要。对具体 Banach 空间的研究，使学者们能对一般 Banach 空间理论有更加清晰地认识。同时具体 Banach 空间为解决应用问题提供具体空间框架。1932 年，波兰著名数学家 Orlicz W 定义了 Orlicz 空间[10]。Orlicz 空间将经典的 Lebesgue 空间进行推广，由于 Orlicz 空间更具有一般性，使得 Orlicz 空间为 Banach 空间提供众多的实例，反例。例如：James 定义的 (一致) 非方性与 Schaeffer 定义的 (一致) 非方性等价，但两人所定义的局部一致非方性是否等价却成了 Banach 空间中的难题。直至 1988 年，陈述涛和王玉文用 Orlicz 空间提供的反例证明了两人定义的局部一致非方不等价[11]，该难题才得以解决。Orlicz 空间理论在方程理论、不动点理论、逼近论等众多学科有着广泛的应用[12-18]。

Orlicz 空间理论长期以来一直受到广大学者的关注。

1.2 Banach 空间几何理论

Banach 空间凸性的研究，从 1936 年 Clarkson J A 在研究向量测度的 RNP 定理时引入一致凸 Banach 空间的概念开始[1]。目前已知的最强凸性空间是一致凸空间，然而 Banach 空间是一致凸的例子却很少。于是人们开始对一致凸空间进行各种推广和弱化，推广和弱化了凸性在最佳逼近和不动点理论应用中起着重要的作用[6-9]。作为最弱凸性的严格凸性是研究其它几何问题的基础。Miles H W，崔云安，Hudzik H，劳炳元，朱熹平等分别给出了 Orlicz 空间端点的刻画和严格凸性的判据[19-20]。九十年代，崔云安，王廷辅，Hudzik H，Kurc W，Wisla M 等给出 Orlicz 空间强端点的判据[21-24]。强 U 点和端点都是刻画空间具有严格凸性的点态性质，在 Banach 空间中，强 U 点要强于端点[25]。例如在 l_∞^2 中 $x=(1,1)$ 和 $y=(1,-1)$ 是单位球面端点，但 x 和 y 都不是单位球面的强 U 点。强 U 点可以解决局部最佳逼近元的唯一性问题，而端点不能解决该问题。因此在解决局部最佳逼近问题时强 U 点比端点更为重要。Kamińska A，Cui Y，Hudzik H，Meng C 给出 Orlicz 空间具有严格凸的判据[26,27]。Musielak-Orlicz 空间中端点和强 U 点的刻画由 Hudzik H，崔云安和左明霞等于 2007 年在文献[28]中给出。

Banach 空间几何理论中，对偶关系的研究具有相当重要的地位。光滑性作为凸性的对偶性质被提出，一经提出便受到学者们的广泛关注。众所周知，在自反的 Banach 空间中，一致凸空间的对偶空间是一致光滑空间，对一致凸空间的各种弱化得到了对偶空间光滑性的各种弱化，如局部一致凸空间的对偶空间为强光滑空间，弱局部一致凸空间的对偶空间为很光滑空间，严格凸空间的对偶空间为光滑空间。光滑性与范数的各种可微性之间有对应关系。光滑性与不动点性质也有密切的联系。一致光滑空间由 Khamsi M 于 1992 年引入，他证明了一致光滑空间蕴含 NS 结构，故一致光滑空间具有不动点性质[29]。(弱) 接近一致光滑的空间由 Garcia-Falset J 于 1997 年引入，他证明了 (弱) 接近一致光滑的 Banach 空间具有不动点性质[30]。近几十年来，Orlicz 空间的光滑性得到学者们的广泛关注，王廷辅，陈述涛，Grzaslewicz R，石忠锐和 Hudzik H 分别给出 Orlicz 空间的各种光滑点和相应光滑性的判别准则[31-38]。Zbąszyniak Z，王廷辅，边淑荣，郝翠霞，刘莉芳，Vigelis R，Cavalcante C 给出 Musielak-Orlicz 空间各种光滑点刻画和相应光滑性的判据[39-45]。

暴露性是 Banach 空间理论的重要研究内容之一。1935 年，Straszewicz S 引

入暴露点的概念[46]。1963 年，Lindenstrauss J 引入了强暴露点的概念[47]。暴露点和强暴露点是研究 Banach 几何理论的重要工具。暴露点和强暴露点在分离定理和向量测度的 Radon-Nikodym 定理中有着重要的作用。1974 年，Phelps R 利用切片的概念证明了 Banach 空间具有 RNP 性质的充分条件是 Banach 空间 X 的每一个非空有界闭凸集都可以表示为强暴露点的闭凸包[48]。Banach 空间的暴露点一定是端点，但反之不对，严格凸的 Banach 空间端点是暴露点。Banach 空间的强暴露点一定是强端点，局部一致凸的 Banach 空间强端点是强暴露点。1990 年，Nan C 引入了弱强暴露点的概念，并且得到若 Banach 空间 X 是弱一致凸的且具有 Bishop-Phelps 性质，则 X 的任意有界闭凸子集可表示为其弱强暴露点的闭包[49]。1996 年，Cui Y，Hudzik H 等证明了在 Banach 空间中弱强暴露性质与非常光滑性具有对偶性质[50]。王廷辅，王保祥，Grzaslewicz R，Hudzik H 和 Pallaschke D，计东海，石忠锐等解决了赋 Orlicz 范数 Orlicz 空间暴露点和强暴露点的刻画问题[51-58]。2012 年，石忠锐，刘春燕利用正规光滑点给出了赋 Luxemburg 范数 Musielak-Orlicz 序列空间暴露点和强暴露点的判据[59-60]。

1.3 Orlicz 空间理论

1932 年，Orlicz 空间由波兰数学家 Orlicz W 引入，他对满足Δ_2条件的 N-函数生成的 Orlicz 空间进行了研究[10]。1955 年，与 Orlicz 范数等价的 Luxemburg 范数由 Luxemburg W 提出，Luxemburg 范数的提出极大地推动了 Orlicz 空间理论的形成和发展[61]。不满足Δ_2条件的 Orlicz 函数生成的 Orlicz 空间的性质由 Krasnoselskii M A 和 Rutickii Y B 进行了系统的研究，1958 年《凸函数与 Orlicz 空间》的出版标志着 Orlicz 空间理论基本形成[62]。之后的几十年，国内外的数学工作者致力于 Orlicz 空间理论的研究，做了大量细致入微的工作，主要结果有：Orlicz 空间对偶空间的结构为$\left(L_\Phi\right)^* = L_\Psi \oplus F$ [63,64]。有界线性泛函的范数计算公式由 Ando T 和 Rao M M 在文献[65,66]中给出。Orlicz 空间的基和同构问题学者们也进行了深入的研究[67-70]。随着《奥尔里奇空间及其应用》，《Orlicz 空间几何理论》，《Geometry of Orlicz Spaces》这三部专著的相继问世[71-73]。Orlicz 空间理论得到了极大地丰富。

在广大数学工作者的不懈努力下，Orlicz 空间理论得到了迅速的发展，在其内容不断完善的同时，学者们继续开拓新的方向，将 Orlicz 空间进行各种推广和深化，空间的推广有 Musielak-Orlicz 空间、Orlicz-Bochner 空间、Orlicz-Lorentz 空间等，对于范数的推广有 p-Amemyia 范数、F-范数、s-范数等[74-112]。

赋p-Amemyia 范数 Orlicz 空间是赋经典 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数 Orlicz 空间的重要推广。上世纪五十年代，Amemiya 在文献[63]中引入了如下范数公式：

$$\|x\|^{A}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_{\Phi}\left(kx\right)\right)$$

Krasnoslskii M A，Rutickii Y B，Nakano H，Luxemburg W A J 和 Zaanen A C 分别证明了在 Orlicz 函数满足某些假设条件的情况下 Orlicz 范数和 Amemiya 范数相等，即$\|x\|_{\Phi}^{o}=\|x\|^{A}$ [61-64]。在 2000 年，Hudzik H 和 Maligranda L 证明了在由任意 Orlicz 函数生成的 Orlicz 空间中以上结论成立[78]。不难证明，Luxemburg 范数也可以被写成 Amemiya 公式的形式[79]，即

$$\|x\|_{\Phi}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\max\left\{1,I_{\Phi}\left(kx\right)\right\}$$

2000 年，Hudzik H 和 Maligranda L 提议在 Orlicz 空间中引入由外函数生成的 p-Amemiya 范数[78]，其中外函数定义为：

$$s_{p}\left(u\right)=\begin{cases}\left(1+u^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \max\left\{1,u\right\}, & p=\infty\end{cases}$$

Orlicz 空间中的任意点 x 的 p-Amemiya 范数定义为：

$$\|x\|_{\Phi,p}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_{p}\left(I_{\Phi}(kx)\right)\ \left(1\le p\le\infty\right)$$

这样，我们得到了一族等价范数且满足下式：

$$\|x\|_{\Phi}=\|x\|_{\Phi,\infty}\le\|x\|_{\Phi,p}\le\|x\|_{\Phi,p'}\le\|x\|_{\Phi,1}=\|x\|_{\Phi}^{o}\ \left(1\le p'\le p\le\infty\right)$$

2008 年，崔云安，段丽芬，Hudzik H 和 Wisla M 深入的研究了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间，讨论了范数可达的条件，并给出该空间端点的刻画和严格凸的判据[79]。之后几年众多数学工作者致力于赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间理论的研究，该空间的各种凸性、各种非方性、各种单调性、最佳逼近问题、不动点问题、对偶空间结构等都得到解决[80-94]。2015 年，Wisla M 对赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的研究结果进行总结，并提出一些公开问题[95]。2019 年，Wisla M 将赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间进行推广得到更一般的赋 s-范数 Orlicz 空间[96]，崔云安及他的硕士和博士研究生们近年来给出了赋 s-范数 Orlicz 空间的端点、强端点、严格凸、中点局部一致凸、单调性、最佳逼近和 H 性质等的判据[97-100]。

p-Amemiya 范数公式将 Luxemburg 范数公式和 Orlicz 范数公式的形式进行

了统一，p-Amemiya 范数的引入了结束了几十年来将赋 Orlicz 范数 Orlicz 空间和赋 Luxemburg 范数 Orlicz 空间作为两类平行的 Orlicz 空间来研究的现状，将两类空间统一起来寻找空间几何性质的统一判别准则，这将激发更多学者对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间进行研究，得到更多几何性质的统一判别准则。

1.4 主要研究内容

本文主要内容和结构如下：

第一章绪论，简要概述了Orlicz空间研究背景及理论意义、发展历史和研究现状，介绍了论文所讨论内容、背景及意义。

第二章，研究赋p-Amemiya范数Orlicz函数空间 $L_{\Phi,p}$ 的光滑性。首先，在 $L_{\Phi,p}$ 的对偶空间 $\left(L_{\Phi,p}\right)^*$ 中引入一类新范数 $\|\cdot\|_{\Psi,q}^*$，并证明 $\|\cdot\|_{\Psi,q}^*$ 为赋p-Amemiya范数Orlicz函数空间有界线性泛函的范数计算公式。其次，通过有界线性泛函的范数公式给出 $L_{\Phi,p}$ 单位球面上点的支撑泛函的具体形式。再次，利用支撑泛函的具体形式研究单位球面上光滑点的刻画问题。最后，利用点态性质的结果获得 $L_{\Phi,p}$ 具有光滑性的充要条件。

第三章，研究赋p-Amemiya范数Orlicz序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的光滑性。在 $l_{\Phi,p}$ 的对偶空间 $\left(l_{\Phi,p}\right)^*$ 引入有界线性泛函 f 的范数计算公式 $\|f\|_{\Psi,q}^*$，该范数计算不仅实现了 $\|f\|_{\Psi}^o$ 和 $\|f\|_{\Psi}$ 形式上的统一，更将Orlicz空间的有界线性泛函的范数计算公式进行一般化。利用 $l_{\Phi,p}$ 上有界线性泛函范数计算公式研究单位球面上点的支撑泛函的具体形式，进一步探讨单位球面上光滑点的刻画问题，最后给出 $l_{\Phi,p}$ 具有光滑性的判据。

第四章，研究 $l_{\Phi,p}$ 的严格凸性。使用新的技巧给出 $l_{\Phi,p}$ 具有严格凸性的判据，

该技巧简化了赋Orlicz (1-Amemiya) 范数Orlicz序列空间 l_{Φ}^{o} 和赋Luxemburg (∞-Amemiya) 范数Orlicz序列空间 l_{Φ} 中相应结论的证明。

第五章，研究赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 的暴露性。利用单位球面上点的支撑泛函的具体形式，得到 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 暴露点的判据，结果表明，当 $1<p<\infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 暴露点的判据弱于 L_{Φ}^{o}，L_{Φ}，l_{Φ}^{o} 和 l_{Φ} 暴露点的判据。从暴露点的刻画出发获得 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 具有暴露性的判别准则。

1.5 预备知识

本小节主要介绍后面几章中需要用到的 Orlicz 空间中的相关概念、定理及常用不等式。

1.5.1 Orlicz 空间

$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示自然数集和实数集。

对于函数 $\Phi:\mathbb{R}\to[0,\infty]$，定义

$$a_{\Phi}=\sup\left\{u\geq 0:\Phi\left(u\right)=0\right\},\ b_{\Phi}=\sup\left\{u>0:\Phi\left(u\right)<\infty\right\}$$

函数 Φ 称为 Orlicz 函数是指 $\Phi\left(0\right)=0$，存在 $0<u<\infty$ 满足 $0<\Phi\left(u\right)<\infty$，它在 $\left(-b_{\Phi},b_{\Phi}\right)$ 是偶的凸函数，且在 b_{Φ} 处是左连续的。

用 $\left(G,\Sigma,\mu\right)$ 表示一个 σ-有限，无原子的完备测度空间。所有定义在 G 上的 Σ-可测函数构成的集合记为 $L^{0}(\mu)$。在其上定义凸模 $I_{\Phi}:L^{0}\left(\mu\right)\to\mathbb{R}^{+}=\left[0,+\infty\right]$

$$I_{\Phi}(x)=\int_{G}\Phi\left(x\left(t\right)\right)d\mu,$$

按照通常的线性运算，集合 $L_{\Phi}=\left\{x\in L^{0}\left(\mu\right):\exists\lambda>0,I_{\Phi}\left(\lambda x\right)<\infty\right\}$ 构成一个线性空间，称为 Orlicz 函数空间。$E_{\Phi}=\left\{x\in L^{0}\left(\mu\right):\forall\lambda>0,I_{\Phi}\left(\lambda x\right)<\infty\right\}$ 为 L_{Φ} 的序连续子空间。

在 Orlicz 空间定义如下等价范数：

$$\|x\|_{\Phi} = \inf\left\{\varepsilon > 0 : I_{\Phi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le 1\right\},$$

$$\|x\|_{\Phi}^{o} = \sup\left\{\int_{G} |x(t)v(t)| d\mu : v \in L_{\Psi}, I_{\Psi}(v) \le 1\right\}$$

和

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + I_{\Phi}^{p}(kx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

分别称为 Luxemburg 范数、Orlicz 范数和 p-Amemyia 范数，其中 $\Psi : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ 为 Φ 的 Young 不等式意义下的余函数：

$$\Psi(v) = \sup\{u|v| - \Phi(u) : u \ge 0\}$$

此时 Φ 也是 Ψ 的 Young 不等式意义下的余函数，二者是互余的 Orlicz 函数。

令 p_+, p_- (q_+, q_-) 分别代表 Φ (Ψ) 的左右导数。规定 $p_+(b_\Phi) = \infty$，对任意 $x > b_\Phi$，$p_-(x) = \infty$（$q_+(b_\Psi) = \infty$，对任意 $v > b_\Psi$，$q_-(v) = \infty$）。

p 和 q 表示取值为 $[1,+\infty]$ 的共轭数，i.e.，$1/p + 1/q = 1$。

为了叙述方便，赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间记为：$L_{\Phi,p} = \left(L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}\right)$，

$E_{\Phi,p} = \left(E_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}\right)$。

类似可定义赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间：$l_{\Phi,p} = \left(l_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}\right)$，

$h_{\Phi,p} = \left(h_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}\right)$。

定义 1.1[73] 称 Orlicz 函数 Φ 满足 Δ_2 (δ_2) 条件（记作 $\Phi \in \Delta_2$，$\Phi \in \delta_2$）是指存在 $u_0>0$，$K>2$ 使得当 $u \ge u_0$（$u \le u_0$）时，$\Phi(2u) \le K\Phi(u)$。

定义函数 $\alpha_p : L_{\Phi,p} \to [-1,\infty]$

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} I_{\Phi}^{p-1}(x) \cdot I_{\Psi}(p_+(x)) - 1, & 1 \le p < \infty \\ -1, & p = \infty, I_{\Phi}(x) \le 1 \\ I_{\Psi}(p_+(x)), & p = \infty, I_{\Phi}(x) > 1 \end{cases}$$

定义函数 $k_p^{*} : L_{\Phi,p} \to [0,\infty)$, $k_p^{**} : L_{\Phi,p} \to (0,\infty]$

$$k_p^*(x)=\inf\left\{k\ge 0:\alpha_p\left(kx\right)\ge 0\right\}\left(\inf\varnothing=\infty\right)$$
$$k_p^{**}(x)=\sup\left\{k\ge 0:\alpha_p\left(kx\right)\le 0\right\}$$

显然，$\forall\, x\in L_{\Phi,p}$，$k_p^*\left(x\right)\le k_p^{**}\left(x\right)$。定义 $K_p\left(x\right)=\left[k_p^*(x),\ k_p^{**}\left(x\right)\right]$。

引理 1.1[79] 设 $1\le p\le\infty$，$x\in L_{\Phi,p}\setminus\left\{0\right\}$，则下列结论成立：

(i) 若 $k_p^*\left(x\right)=k_p^{**}\left(x\right)=\infty$, i.e., $K_p\left(x\right)=\varnothing$，则 $\|x\|_{\Phi,p}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$；

(ii) 若 $k_p^*\left(x\right)<k_p^{**}\left(x\right)=\infty$，则 $\|x\|_{\Phi,p}=\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ 其中 $k\in\left[k_p^*\left(x\right),\infty\right)$；

(iii) 若 $k_p^{**}\left(x\right)<\infty$，则 $\|x\|_{\Phi,p}=\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ 其中 $k\in\left[k_p^*\left(x\right),\ k_p^{**}\left(x\right)\right]$。

引理 1.2[79] 任意 $x\in L_{\Phi,\infty}\setminus\left\{0\right\}$，$k_\infty^*(x)=1/\|x\|_{\Phi,\infty}$，即 $K_\infty\left(x\right)\ne\varnothing$。

引理 1.3[95] 令 $1\le p\le\infty$，设Φ、Ψ 是互余的 Orlicz 函数，若 p-Amemyia 范数是 k^*-有限的，则 $\left(E_{\Phi,p}\right)^*=L_{\Psi,q}$，其中 $1/p+1/q=1$。

定义 1.2[73] 称 $\varphi\in\left(L_\Phi\right)^*$ 为奇异泛函，是指 $\forall x\in E_\Phi$，有 $\varphi\left(x\right)=0$，记为 $\varphi\in F$。

引理 1.4[73] 对任意的 $\varphi\in F$，

$$\|\varphi\|_\Phi=\|\varphi\|_\Phi^o=\sup\left\{\varphi\left(x\right):I_\Phi\left(x\right)<\infty\right\}=\sup\left\{\frac{\varphi\left(x\right)}{\theta\left(x\right)}:x\in L_\Phi\setminus E_\Phi\right\}$$

其中 $\theta(x)=\inf\left\{\lambda>0,\ I_\Phi\left(x/\lambda\right)<\infty\right\}$。

以上引理结论对于 Orlicz 序列空间同样成立。

1.5.2 常用不等式

Young 不等式、Minkowski 不等式和 Hölder 不等式都是非常重要的不等式，在很多数学学科中都有着广泛的应用。本小节主要给出文章中涉及的三类不等式形式。

1) Young 不等式

对任意的 $u,v\in\mathbb{R}$，有下面的 Young 不等式

$$|uv| \le \Phi(u) + \Psi(v)$$

当 $v \in \left[p_-(u), p_+(u)\right]$ 或 $u \in \left[q_-(v), q_+(v)\right]$ 时等号成立。

2) Hölder 不等式

引理 1.5[96] Φ, Ψ 是互余的 Orlicz 函数，对 $(G, \sum, \mu)$ 上的任意可测函数 x, y，Hölder 不等式

$$\left|\int_G x(t) y(t) d\mu\right| \le \|x\|_{\Phi,p} \cdot \|y\|_{\Psi,q}$$

成立。

引理 1.6[96] 令 $1 < p, q < \infty$，设 $s_p(u) = \left(1 + u^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$s_q(v) = \left(1 + v^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 且满足 $1/p + 1/q = 1$，$\forall u, v \in (0, \infty)$ 则 Hölder 等式 $u + v = s_p(u) s_q(v) = \left(1 + u^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + v^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 成立，当且仅当 $u^{\frac{1}{q}} v^{\frac{1}{p}} = 1$ （$u^{p-1} v = 1$ 或 $uv^{q-1} = 1$）。

3) Minkowski 不等式

引理 1.7 (Minkowski 不等式) 令 $1 \le q < \infty$，对任意序列 $\{\xi_k\}, \{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$，有：

(i) $\left(\sum_k |\xi_k + \eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_k |\xi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_k |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$；

(ii) 对任意 $u, v \ge 0$，$\left(1 + (u+v)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(1 + u^q\right)^{\frac{1}{q}} + v$；

(iii) 对任意 $u, v \ge 0$，$\left(1 + \left(\frac{u+v}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{2}\left(1 + u^q\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{2}\left(1 + v^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

证明：结论 (i) 可由 Minkowski 公式直接得到。

(ii) 令 $\xi_1 = 1$，$\eta_1 = 0$，$\xi_2 = u$，$\eta_2 = v$ 我们得到结论 (ii)。

(iii) 令 $\xi_1 = \frac{1}{2}$，$\eta_1 = \frac{1}{2}$，$\xi_2 = \frac{u}{2}$，$\eta_2 = \frac{v}{2}$ 得到结论 (iii)，证毕。

第 2 章 赋 *p*-Amemyia 范数 Orlicz 函数空间的光滑性

2.1 引言

Banach 空间的光滑性是 Banach 空间几何理论的重要研究内容之一。Banach 空间 X 的光滑性与支撑映射的连续性、范数的可微性、对偶空间 X^* 的凸性都有着对应关系。赋 Orlicz 范数 Orlicz 函数空间 L_Φ^o 和赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 函数空间 L_Φ 的光滑性已经得到解决。由于赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 函数空间 $L_{\Phi,p}$ 的对偶空间比较复杂，对该空间光滑性的研究尚未展开。在本章，我们对 $L_{\Phi,p}$ 的光滑性进行研究。下面来介绍光滑性的相关定义。

设 X 是实 Banach 空间，$S(X)$ 和 $B(X)$ 分别表示 X 的单位球面和单位球，用 X^* 表示 X 的对偶空间。

定义 2.1[2] 设 $x\in X$，称 $f\in S\left(X^*\right)$ 为 x 的支撑泛函是指 $f\left(x\right)=\|x\|$。x 支撑泛函的全体记为 $Grad\left(x\right)$。

定义 2.2[2] 设 $x\in S\left(X\right)$，$f\in X^*$，若 $f\left(x\right)=\|f\|$，则 f 在点 x 处范数可达。

定义 2.3[2] 称 $x\in S\left(X\right)$ 为 $B\left(X\right)$ 的光滑点是指 x 存在唯一的支撑泛函。

定义 2.4[2] Banach 空间 X 具有光滑性，是指单位球面 $S\left(X\right)$ 的点都是光滑点。

2.2 对偶空间范数 $\|\cdot\|_{\Psi,q}^*$ 和范数可达性

Orlicz 空间 L_Φ 的对偶空间 $\left(L_\Phi\right)^*=L_\Psi\oplus F$ [63-66]，$f\in\left(L_\Phi\right)^*$ 可以唯一分解为 $f=v+\varphi$，$v\in L_\Psi$，$\varphi\in F$ 为奇异线性泛函。

令 $1\le p\le\infty$，$f=\left(v+\varphi\right)\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*$，定义

$$\rho^*\left(f\right)=I_\Psi\left(v\right)+\|\varphi\| \tag{2-1}$$

在文献[88]中，Cui Y，Hudzik H，Li J 已证明 $\rho^*\left(f\right)$ 是 $\left(L_{\Phi,p}\right)^*$ 中的凸模。在 $\left(L_{\Phi,p}\right)^*$

中引入新的泛函

$$\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\left(1+\left(\rho^*\left(kf\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 1\le q<\infty\\ \inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\left\{1,\rho^*\left(kf\right)\right\},\quad q=\infty\end{cases}$$

显然对于任意的 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*$，$\|f\|_{\Psi,1}^{*}=\|f\|_{\Psi}^{o}$。下面将给出 $\|f\|_{\Psi}=\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}$ 的证明，同时得到对于任意的 $1\le q\le\infty$，$\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 是 $\left(L_{\Phi,p}\right)^*$ 上有界线性泛函 f 的范数，且 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 与 $\|f\|_{\Psi}$ 等价。

定理 2.1 任给 $f\in\left(L_{\Phi,1}\right)^*$，$\|f\|_{\Psi}=\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\left\{1,\rho^*\left(kf\right)\right\}$。

证明 任给 $f\in\left(L_{\Phi,1}\right)^*$，若 $\rho^*\left(f\right)>1$ 则 $\rho^*\left(f\right)\ge\|f\|_{\Psi}$。若存在 $f\in\left(L_{\Phi,1}\right)^*$ 满足 $1<\rho^*\left(f\right)<\|f\|_{\Psi}$，则有 $1<\rho^*\left(\dfrac{f}{\rho^*(f)}\right)\le\dfrac{\rho^*(f)}{\rho^*(f)}=1$，矛盾。于是 $\rho^*\left(f/\lambda\right)>1$ 蕴含 $\lambda\rho^*\left(f/\lambda\right)\ge\|f\|_{\Psi}$，因此

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Psi}&=\inf_{\rho^*(f/\lambda)\le1}\lambda=\min\left\{\inf_{\rho^*(f/\lambda)\le1}\lambda,\inf_{\rho^*(f/\lambda)>1}\lambda\rho^*\left(\frac{f}{\lambda}\right)\right\}\\&=\min\left\{\inf_{\rho^*(kf)\le1}\frac{1}{k},\inf_{\rho^*(kf)>1}\frac{1}{k}\rho^*\left(kf\right)\right\}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\max\left\{1,\rho^*\left(kf\right)\right\}=\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}\end{aligned}$$

定理证毕。

定理 2.2 令 $1\le q\le\infty$，泛函 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)$ 是 $\left(L_{\Phi,p}\right)^*$ 上的范数，其中 $1/p+1/q=1$，$\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 与 $\|f\|_{\Psi}$ 等价且满足

$$\|f\|_{\Psi}\le\|f\|_{\Psi,q}^{*}\le2^{\frac{1}{q}}\|f\|_{\Psi}\tag{2-2}$$

证明 当 $q=\infty$ 时，结论已证。因此只讨论 $1\le q<\infty$ 的情况。

对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\|\lambda f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(k\lambda f\right)\right)=|\lambda|\cdot\inf_{k>0}\frac{1}{k|\lambda|}s_q\left(\rho^*\left(k\lambda f\right)\right)=|\lambda|\cdot\|\lambda f\|_{\Psi,q}^{*}$$

齐次性成立。

令 $f_1,f_2\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，$\forall\varepsilon>0$，存在 k，$l>0$ 使得 $\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf_1\right)\right)\le\|f_1\|_{\Psi,q}^{*}+\varepsilon$ 和 $\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*\left(lf_2\right)\right)\le\|f_2\|_{\Psi,q}^{*}+\varepsilon$ 成立。由 Ψ 和 s_q 的凸性，有

$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|_{\Psi,q}^{*}&\le\frac{k+l}{kl}s_q\left(\rho^*\left(\frac{kl}{k+l}(f_1+f_2)\right)\right)=\frac{k+l}{kl}s_q\left(\rho^*\left(\frac{l}{k+l}kf_1+\frac{k}{k+l}lf_2\right)\right)\\&\le\frac{k+l}{kl}s_q\left(\frac{l}{k+l}\rho^*\left(kf_1\right)+\frac{k}{k+l}\rho^*\left(lf_2\right)\right)\le\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf_1\right)\right)+\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*\left(lf_2\right)\right)\\&\le\|f_1\|_{\Psi,q}^{*}+\|f_2\|_{\Psi,q}^{*}+2\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$，三角不等式成立。

根据定理 2.1，知

$$\|f\|_{\Psi}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\max\left\{1,\rho^*\left(kf\right)\right\}\le\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\rho^*\left(kf\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_{\Psi,q}^{*}\le2^{\frac{1}{q}}\inf_{\rho^*(kf)\le1}\frac{1}{k}=2^{\frac{1}{q}}\|f\|_{\Psi}$$

于是，(2-2) 式成立，且 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=0\Leftrightarrow\|f\|_{\Psi}=0\Leftrightarrow f=0$，定理证毕。

下面定义函数 $\beta_q:\left(L_{\Phi,p}\right)^*\to[-1,\infty]$，

$$\beta_q\left(f\right)=\begin{cases}I_\Phi\left(q_+\left(|v|\right)\right)\cdot\left(\rho^*\left(f\right)\right)^{q-1}-1, & 1\le q<\infty\\-1, & q=\infty,\rho^*\left(f\right)\le1\\I_\Phi\left(q_+\left(|v|\right)\right), & q=\infty,\rho^*\left(f\right)>1\end{cases}$$

进一步，定义

$$\theta^*:\left(L_{\Phi,p}\right)^*\to[0,\infty),\ \theta^*\left(f\right)=\inf\left\{k>0:\rho^*\left(k^{-1}f\right)<\infty\right\}$$

$$k_q^*\left(f\right):\left(L_{\Phi,p}\right)^*\to[0,\infty),\ k_q^*\left(f\right)=\inf\left\{k\ge0:\beta_q\left(kf\right)\ge0\right\}\left(\inf\varnothing=\infty\right)$$

$$k_q^{**}\left(f\right):\left(L_{\Phi,p}\right)^*\to(0,\infty],\ k_q^{**}\left(f\right)=\sup\left\{k\ge0:\beta_q\left(kf\right)\le0\right\}$$

显然，$\forall f\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*$，$k_p^*\left(f\right)\le k_p^{**}\left(f\right)$。定义 $K_p\left(f\right)=\left[k_p^*(f),\ k_p^{**}\left(f\right)\right]$。

定义 $supp(v)=\{t\in G:v(t)\neq 0\}$ 为 $v\in L_{\Psi,q}$ 的支撑集。序列 (v_n) 定义为

$$v_n=v(t)\chi_{G_n\cap T_n} \tag{2-3}$$

其中 $n\in\mathbb{N}$，$G_n=\{t\in G:|v(t)|\leq n\}$，$T_n\nearrow G$，$0<\mu(T_n)<\infty$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n=G$ 。

定理 2.3 令 $f=v+\varphi$，若 f 支撑集的测度有限，则有 $\theta^*(f)=\theta_0^*(f)$ 其中 $\theta_0^*(f)=\inf\left\{k>0,\ I_\Phi\left(q_+(|v|/k)\right)<\infty\right\}$ 。

证明 假设 $(\theta^*)^{-1}(f)<k_0<(\theta_0^*)^{-1}(f)$，则有 $I_\Phi\left(q_+(k_0|v|)\right)<\infty$，于是得到 $k_0\|v\|_\infty<b_\Psi$（否则，当 $k_0>(\theta_0^*)^{-1}(f)$ 时，对于任意 $k>k_0$ 有 $I_\Phi\left(q_+(k_0|v|)\right)=\infty$，矛盾)。故 $I_\Psi(k_0v)+k_0\|\varphi\|\leq\Psi\left(k_0\|v\|_\infty\right)\cdot\mu(suppv)+k_0\|\varphi\|<\infty$ 。因此 $k_0<(\theta^*)^{-1}(f)$，得到矛盾。

类似，若 $(\theta_0^*)^{-1}(f)<k_0<(\theta^*)^{-1}(f)$，则 $I_\Psi(k_0v)+k_0\|\varphi\|<\infty$，故 $k_0\|v\|_\infty\leq b_\Psi$ 。因此 $I_\Phi\left(q_+(k_0|v|)\right)\leq\Phi\left(q_+\left(k_0\|v\|_\infty\right)\right)\cdot\mu(suppv)<\infty$ 。于是 $k_0<(\theta_0^*)^{-1}(f)$，得到矛盾。

引理 2.1[73] 令 $1\leq q<\infty$，对任意 $a>0$ 有 $\max_{x\geq 0}\dfrac{1+x^{q-1}a}{(1+x^q)^{\frac{1}{q}}}=(1+a^q)^{\frac{1}{q}}$ 。

定理 2.4 令 $1\leq q<\infty$，任意的 $f=(v+\varphi)\in(L_{\Phi,p})^*$，下面结论成立

(i) 函数 $k\to\beta_q(kf)$ 在区间 $[0,\infty)$ 是非降的；

(ii) $\left(0,(\theta^*)^{-1}(f)\right)\subset\left\{k>0:\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*(kf)\right)<\infty\right\}$；

(iii) 函数 $k\to\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*(kf)\right)$ 在 $\left(0,(\theta^*)^{-1}(f)\right)$ 连续；

(iv) 函数$k \to \frac{1}{k} s_q\left(\rho^*(kf)\right)$在$\left(0, k_q^*(f)\right)$是单调递减的；

(v) 函数$k \to \frac{1}{k} s_q\left(\rho^*(kf)\right)$在$\left(0, k_q^{**}(f)\right)$是非增的；

(vi) 函数$k \to \frac{1}{k} s_q\left(\rho^*(kf)\right)$在$\left(k_q^{**}(f), \left(\theta^*\right)^{-1}(f)\right)$是单调增加的；

(vii) 函数$k \to \frac{1}{k} s_q\left(\rho^*(kf)\right)$在$\left(k_q^*(f), \left(\theta^*\right)^{-1}(f)\right)$是非降的，其中$\rho^*(f)$的定义见 (2-1) 式。

证明 由于$k \to I_\Phi\left(q_+(k|v|)\right)$和$k \to \rho^*(kf)$在$[0, \infty)$非降，条件 (i) 成立。条件 (ii) 显然成立。由 Lebesgue 控制收敛定理，条件 (iii) 成立。

(iv) 令$0 < k_1 < k_2 < k_q^*(f)$，$f_n = v_n + \varphi$，其中v_n定义见 (2-3) 式。对于任意的$n \in \mathbb{N}$，$0 < k < k_q^*(f)$有

$$I_\Phi\left(q_+(k|v_n|)\right) \cdot \left(\rho^*(kf_n)\right)^{q-1} = I_\Phi\left(q_+(k|v_n|)\right) \cdot \left(I_\Psi(kv_n) + k\|\varphi\|\right)^{q-1} < 1$$

由定理 2.3，$I_\Phi\left(q_+(k_i|v_n|)\right)$和$I_\Psi(k_i v_n)$ $(i = 1, 2)$为有限值，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_2} s_q\left(\rho^*(k_2 f_n)\right) = \frac{1}{k_2} s_q\left(I_\Psi(k_2 v_n) + k_2\|\varphi\|\right) \\
&= \frac{1 + \left(\rho^*(k_2 f_n)\right)^{q-1}\left(I_\Psi(k_2 v_n) + k_2\|\varphi\|\right)}{k_2\left(1 + \left(I_\Psi(k_2 v_n) + k_2\|\varphi\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} \\
&= \frac{1 + \left(\rho^*(k_2 f_n)\right)^{q-1}\left(\int_G k_2|v_n(t)| q_+(k_2|v_n(t)|)dt - I_\Phi\left(q_+(k_2|v_n|)\right) + k_2\|\varphi\|\right)}{k_2\left(1 + \left(I_\Psi(k_2 v_n) + k_2\|\varphi\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} \\
&= \frac{\left(\rho^*(k_2 f_n)\right)^{q-1}\left(\int_G k_2|v_n(t)| q_+(k_2|v_n(t)|)dt + \|\varphi\|\right) - \frac{1}{k_2}\beta_q(k_2 f_n)}{\left(1 + \left(I_\Psi(k_2 v_n) + k_2\|\varphi\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon_n = \min\left\{1, \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\beta_q\left(k_2 f_n\right)\left(1 + \left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\right\}$，由于 $k_2 < k_q^*\left(f\right)$，我们有 $\beta_q\left(k_2 f_n\right) \le \beta_q\left(k_2 f\right) < 0$，所以 $\varepsilon_n > 0$，由 Young 不等式和引理 2.1，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k_2} s_q\left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right) \\
\le\ & \frac{\left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^{q-1}\left(\int_G \left|v_n\left(t\right)\right| q_+\left(k_2\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt + \left\|\varphi\right\|\right) - \frac{1}{k_1}\beta_q\left(k_2 f_n\right)}{\left(1 + \left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} - \varepsilon_n \\
=\ & \frac{1 + \left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^{q-1}\left(\int_G \left|v_n\left(t\right)\right| q_+\left(k_2\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt + k_1\left\|\varphi\right\| - I_\Phi\left(q_+\left(k_2\left|v_n\right|\right)\right)\right)}{k_1\left(1 + \left(I_\Psi\left(k_2 v_n\right) + k_2\left\|\varphi\right\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} - \varepsilon_n \\
\le\ & \frac{1 + \left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^{q-1}\left(I_\Psi\left(k_1 v_n\right) + k_1\left\|\varphi\right\|\right)}{k_1\left(1 + \left(I_\Psi\left(k_2 v_n\right) + k_2\left\|\varphi\right\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} - \varepsilon_n \\
\le\ & \frac{1}{k_1}\left(1 + \left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon_n = \frac{1}{k_1} s_q\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right) - \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，有 $\varepsilon_n \to \varepsilon_0 = \min\left\{1, \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\beta_q\left(k_2 f\right)\left(1 + \left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\right\} > 0$，故

$$\frac{1}{k_2} s_q\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right) \le \frac{1}{k_1} s_q\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right) - \varepsilon_0 < \frac{1}{k_1} s_q\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right)$$

i.e.，函数 $k \to \frac{1}{k} s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)$ 在 $\left(0, k_q^*\left(f\right)\right)$ 上是单调递减的。

(v) 令 $0 < k_1 < k_2 < k_q^{**}\left(f\right)$，$f_n = v_n + \varphi$，$v_n$ 定义见 (2-3) 式，则有

$$I_\Phi\left(q_+\left(k_2\left|v_n\right|\right)\right) \cdot \left(I_\Psi\left(k_2 v_n\right) + k_2\left\|\varphi\right\|\right)^{q-1} \le 1$$

重复 (iv) 的过程，令 $n \to \infty$，由 $\beta_q\left(k_2 f_n\right) \le 0$ 有 $\varepsilon_n = 0$，故

$$\frac{1}{k_2}s_q\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right)\le\frac{1}{k_1}s_q\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right)$$

故条件 (v) 成立。

(vi) 令 $k_q^{**}\left(f\right)<k_1<k_2<\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)$，$f_n=v_n+\varphi$，$v_n$ 定义见 (2-3) 式。由定理 2.3 知，$I_\Phi\left(q_+\left(k_i\left|v_n\right|\right)\right)$和$I_\Psi\left(k_i v_n\right)$（$i=1,2$）为有限值，由于$k_q^{**}\left(f\right)<k_1$，

$$0<\beta_q\left(k_1 f\right)=I_\Phi\left(q_+\left(k_1\left|v\right|\right)\right)\left(I_\Psi\left(k_1 v\right)+k_1\left\|\varphi\right\|\right)^{q-1}-1<\infty$$

因此，对足够大的 n，有$0<\beta_q\left(k_1 f_n\right)=I_\Phi\left(q_+\left(k_1\left|v_n\right|\right)\right)\left(I_\Psi\left(k_1 v_n\right)+k_1\left\|\varphi\right\|\right)^{q-1}-1<\infty$ 。

令 $\varepsilon_n=\min\left\{1,\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\beta_q\left(k_1 f_n\right)\left(1+\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\right\}$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_1}s_q\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)\\
\le&\frac{\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^{q-1}\left(\int_G\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_1\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt+\left\|\varphi\right\|\right)-\frac{1}{k_1}\beta_q\left(k_1 f_n\right)}{\left(1+\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}}\\
\le&\frac{\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^{q-1}\left(\int_G\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_1\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt+\left\|\varphi\right\|\right)-\frac{1}{k_2}\beta_q\left(k_1 f_n\right)}{\left(1+\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}}-\varepsilon_n\\
=&\frac{1+\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^{q-1}\left(\int_G k_2\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_1\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt+k_2\left\|\varphi\right\|-I_\Phi\left(q_+\left(k_1\left|v_n\right|\right)\right)\right)}{k_2\left(1+\left(I_\Psi\left(k_1 v_n\right)+k_1\left\|\varphi\right\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}}-\varepsilon_n\\
\le&\frac{1+\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)^{q-1}\left(I_\Psi\left(k_2 v_n\right)+k_2\left\|\varphi\right\|\right)}{k_2\left(1+\left(I_\Psi\left(k_1 v_n\right)+k_1\left\|\varphi\right\|\right)^q\right)^{1-\frac{1}{q}}}-\varepsilon_n\\
\le&\frac{1}{k_2}\left(1+\left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}-\varepsilon_n=\frac{1}{k_2}s_q\left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right)-\varepsilon_n
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，有 $\varepsilon_n\to\varepsilon_0=\min\left\{1,\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\beta_q\left(k_1f\right)\left(1+\rho^*\left(k_1f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\right\}>0$，于是

$$\frac{1}{k_1}s_q\left(\rho^*\left(k_1f\right)\right)\le\frac{1}{k_2}s_q\left(\rho^*\left(k_2f\right)\right)-\varepsilon_0<\frac{1}{k_2}s_q\left(\rho^*\left(k_2f\right)\right)$$

i.e.，函数 $k\to\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)$ 在 $\left(k_q^{**}\left(f\right),\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)\right)$ 是单调增加的。

(vii) 令 $k_q^*\left(f\right)<k_1<k_2<\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)$， $f_n=v_n+\varphi$， v_n 定义如 (2-3) 式。则 $\beta_q\left(k_2f\right)=I_\Phi\left(q_+\left(k\mid v_n\mid\right)\right)\cdot\left(I_\Psi\left(kv_n\right)+k\|\varphi\|\right)^{q-1}-1\ge0$。重复 (vi) 过程，令 $n\to\infty$，由 $\beta_q\left(k_1f_n\right)\ge0$ 有 $\varepsilon_n=0$，有 $\frac{1}{k_1}s_q\left(\rho^*\left(k_1f\right)\right)\le\frac{1}{k_2}\left(\rho^*\left(k_2f\right)\right)$，定理证毕。

定理 2.5 令 $q=\infty$，则定理 2.4 中结论对于任意 $f\in\left(L_{\Phi,1}\right)^*\setminus\{0\}$ 成立。

证明 仅需证明 (iv)-(vii)。

(iv) 令 $0<k_1<k_2<k_\infty^*\left(f\right)$，则 $\rho^*\left(k_1f\right)\le\rho^*\left(k_2f\right)\le1$ 由于 $\beta_\infty\left(k_2f\right)<0$。因此

$$\frac{1}{k_2}s_\infty\left(\rho^*\left(k_2f\right)\right)=\frac{1}{k_2}\max\left\{1,\rho^*\left(k_2f\right)\right\}<\frac{1}{k_1}\max\left\{1,\rho^*\left(k_1f\right)\right\}=\frac{1}{k_1}s_\infty\left(\rho^*\left(k_1f\right)\right)$$

故条件 (iv) 成立。

(v) 令 $0<k_1<k_2<k_\infty^{**}\left(f\right)$， $f_n=v_n+\varphi$， v_n 定义见 (2-3) 式，若 $\rho^*\left(k_2f_n\right)\le1$ 根据 (iv) 有

$$\frac{1}{k_2}s_\infty\left(\rho^*\left(k_2f\right)\right)<\frac{1}{k_1}s_\infty\left(\rho^*\left(k_1f\right)\right)$$

假设 $\rho^*\left(k_2f_n\right)>1$，由于 $\beta_\infty\left(k_2f_n\right)\le\beta_\infty\left(k_2f\right)\le0$，有 $I_\Phi\left(q_+\left(k_2\mid v_n\mid\right)\right)=0$。根据 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_2}\rho^*\left(k_2f_n\right)&=\frac{1}{k_2}\left(\int_G k_2\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_2\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt-I_\Phi\left(q_+\left(k_2\left|v_n\right|\right)\right)+k_2\|\varphi\|\right)\\&=\int_G\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_2\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt-\frac{1}{k_2}I_\Phi\left(q_+\left(k_2\left|v_n\right|\right)\right)+\|\varphi\|\\&=\int_G\left|v_n\left(t\right)\right|q_+\left(k_2\left|v_n\left(t\right)\right|\right)dt+\|\varphi\|\end{aligned}$$

$$= \int_G |v_n(t)| q_+\left(k_2 |v_n(t)|\right) dt - \frac{1}{k_1} I_\Phi\left(q_+\left(k_2 |v_n|\right)\right) + \|\varphi\|$$

$$< \frac{1}{k_1} I_\Psi\left(k_1 v_n\right) + \|\varphi\| = \frac{1}{k_1} \rho^*\left(k_1 f_n\right)$$

故有

$$\frac{1}{k_2} s_\infty\left(\rho^*\left(k_2 f_n\right)\right) = \frac{1}{k_2} \max\left\{1, \rho^*\left(k_2 f_n\right)\right\} \le \frac{1}{k_1} \max\left\{1, \rho^*\left(k_1 f_n\right)\right\} = \frac{1}{k_1} s_\infty\left(\rho^*\left(k_1 f_n\right)\right)$$

令 $n \to \infty$，有 $\frac{1}{k_2} s_\infty\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right) \le \frac{1}{k_1} s_\infty\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right)$。

(vi) 令 $k_\infty^{**}(f) < k_1 < k_2 < \left(\theta^*\right)^{-1}(f)$， $f_n = v_n + \varphi$， v_n 定义见 (2-3) 式。由 $\beta_\infty\left(k_1 f\right) > 0$，有 $\rho^*\left(k_1 f\right) > 1$ 和 $I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v|\right)\right) > 0$。令

$$\varepsilon_n = \min\left\{1, \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v_n|\right)\right)\right\}$$

根据 Young 不等式，有

$$\frac{1}{k_1} \rho^*\left(k_1 f_n\right) = \frac{1}{k_1}\left(\int_G k_1 |v_n(t)| q_+\left(k_1 |v_n(t)|\right) dt - I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v_n|\right)\right) + k_1 \|\varphi\|\right)$$

$$= \int_G |v_n(t)| q_+\left(k_1 |v_n(t)|\right) dt - \frac{1}{k_1} I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v_n|\right)\right) + \|\varphi\|$$

$$= \int_G |v_n(t)| q_+\left(k_1 |v_n(t)|\right) dt - \frac{1}{k_2} I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v_n|\right)\right) - \varepsilon_n + \|\varphi\|$$

$$\le \frac{1}{k_2}\left(I_\Psi\left(k_2 v_n\right)\right) - \varepsilon_n + \|\varphi\| = \frac{1}{k_2} \rho^*\left(k_2 f_n\right) - \varepsilon_n$$

令 $n \to \infty$，有 $\varepsilon_n \to \varepsilon_0 = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v|\right)\right) > 0$，于是

$$\frac{1}{k_1} s_\infty\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right) \le \frac{1}{k_2} s_\infty\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right) - \varepsilon_0 < \frac{1}{k_2} s_\infty\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right)。$$

(vii) 令 $k_\infty^*(f) < k_1 < k_2 < \left(\theta^*\right)^{-1}(f)$， $f_n = v_n + \varphi$， v_n 定义为 (2-3) 式，由 $\beta_\infty\left(k_1 f\right) \ge 0$，有 $\rho^*\left(k_1 f\right) > 1$ 和 $I_\Phi\left(q_+\left(k_1 |v|\right)\right) \ge 0$。重复 (vi) 的证明过程，$n \to \infty$ 时 $\varepsilon_n = 0$，有

$$\frac{1}{k_1} s_\infty\left(\rho^*\left(k_1 f\right)\right) \le \frac{1}{k_2} s_\infty\left(\rho^*\left(k_2 f\right)\right)$$

故条件 (vii) 成立，定理证毕。

结合定理 2.4 和定理 2.5 可得下面定理 2.6。

定理 2.6 令$1\le q\le\infty$， p,q 为共轭数，对任意的 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，下面结论成立

(i) 若 $k_q^*\left(f\right)=k_q^{**}\left(f\right)=\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^*=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(f\right)\right)$；

(ii) 若 $k_q^*\left(f\right)<k_q^{**}\left(f\right)=\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^*=\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)$ 其中 $k\in\left[k_q^*\left(f\right),\infty\right)$；

(iii) 若 $k_q^{**}\left(f\right)<\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^*=\dfrac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)$ 其中 $k\in\left[k_q^*\left(f\right),k_q^{**}\left(f\right)\right]$。

定理 2.7 对于任意 Orlicz 函数 Ψ，若 $b_\Psi<\infty$，则 $k_q^*\left(f\right)<\infty$。

证明 若 $b_\Psi<\infty$，则对任意 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$ 有 $\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)<\infty$，显然有

$$\|f\|_{\Psi,q}^*=\frac{1}{k_q^{**}\left(f\right)}s_q\left(\rho^*\left(k_q^{**}\left(f\right)f\right)\right)=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)<\infty$$

于是，$k_q^*\left(f\right)\le k_q^{**}\left(f\right)\le\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)$，故命题得证。

定理 2.8 令$1\le q\le\infty$， p,q 为共轭数，对任意的 $f\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，下面结论成立：

(i) 当 q=1 时，若 $I_\Phi\left(b_\Phi\chi_{supp(v)}\right)\ge1$，则 $K_1\left(f\right)\ne\varnothing$；

(ii) 当$1<q<\infty$时，若 $\varphi\ne0$，则对任意 Orlicz 函数 Ψ，$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$，若 φ=0，Ψ 在 $\left[0,\infty\right)$ 不是线性函数，则 $K_q\left(f\right)\ne\varnothing$；

(iii) 当 q=∞ 时，对于任意的 Orlicz 函数 Ψ，$K_\infty\left(f\right)\ne\varnothing$。

证明 (i) 当 q=1 时，$\beta_1\left(f\right)=I_\Phi\left(q_+\left(|v|\right)\right)-1$。若 $I_\Phi\left(b_\Phi\chi_{supp(v)}\right)\ge1$，存在 k>0 使得 $\beta_1\left(kf\right)\ge0$，由 $k_1^*\left(f\right)$ 定义，有 $k_1^*\left(f\right)<\infty$，即 $K_1\left(f\right)\ne\varnothing$。

(ii) 若$\varphi \neq 0$，则$\|\varphi\| > 0$，于是当$k \to \infty$时，$\rho^*(kf) = I_\Psi(kv) + k\|\varphi\| \to \infty$。故存在$k$>0使得$I_\Phi\left(q_+(k|v|)\right)\left(\rho^*(kf)\right)^{q-1} > 1$，因此$k_q^*(f) < \infty$，即$K_q(f) \neq \varnothing$。

φ=0的情况的证明与文献[79]中定理4.3的证明相仿，故在此省略。

(iii) 由$\rho^*\left(f/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right) \le 1$有$\beta_\infty\left(f/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right) = -1$，于是$1/\|f\|_{\Psi,\infty}^* \le k_\infty^*(f)$。假设存在$k$>0满足$1/\|f\|_{\Psi,\infty}^* < k < k_\infty^*(f)$，则$\beta_\infty(kf) < 0$，当$k < 1/\|f\|_{\Psi,\infty}^*$时得到$\rho^*(kf) \le 1$，矛盾。因此$0 < 1/\|f\|_{\Psi,\infty}^* = k_\infty^*(f)$，即$K_\infty(f) \neq \varnothing$。

2.3 有界线性泛函

定理2.9 令$1 \le p \le \infty$，Φ, Ψ为Young不等式意义下取有限值的互余的Orlicz函数，设p-Amemiya范数是k^*-有限的，令$f \in \left(L_{\Phi,p}\right)^*$，则$f$存在唯一分解式$f = v + \varphi$其中$v \in L_{\Psi,q}$，$\varphi \in F$，$1/p + 1/q = 1$且

$$\|f\| = \|f\|_{\Psi,q}^* = \inf_{l>0} \frac{1}{l} s_q\left(\rho^*(lf)\right) = \begin{cases} \inf\limits_{l>0} \dfrac{1}{l}\left(1 + \left(\rho^*(lf)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty \\ \inf\limits_{l>0} \dfrac{1}{l} \max\left\{1, \rho^*(lf)\right\}, & q = \infty \end{cases}$$

证明 由$\|f\|_{\Psi,q}^*$的定义，我们有

$$\|f\|_{\Psi,1}^* = \|f\|_\Psi^o = \|v\|_\Psi^o + \|\varphi\|_\Psi^o, \quad \|f\|_{\Psi,\infty}^* = \|f\|_\Psi = \inf_{l>0}\left\{\frac{1}{l}, I_\Psi(lv) + l\|\varphi\| \le 1\right\}$$

所以只需要证明$1 < q < \infty$的情形。

对于任意的$f \in \left(L_{\Phi,p}\right)^*$，若$\varphi = 0$则Orlicz函数空间是序连续的，即$L_{\Phi,p} = E_{\Phi,p}$。由引理1.3知$\left(E_{\Phi,p}\right)^* = L_{\Psi,q}$。故假设$\varphi \neq 0$，$\forall l > 0$，$x \in S\left(L_{\Phi,p}\right)$，

取 $k\in K_p\left(x\right)$，由引理 1.4 和 $I_\Phi\left(kx\right)=\left(k^p-1\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ 可得 $\varphi\left(kx\right)\le\|\varphi\|$。根据 Young 不等式和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned} lf\left(x\right)&=\frac{1}{k}\left(\left\langle kx,lv\right\rangle+l\varphi\left(kx\right)\right)=\frac{1}{k}\left(\int_G kx\left(t\right)lv\left(t\right)dt+l\varphi\left(kx\right)\right)\\ &\le\frac{1}{k}\left(I_\Phi\left(kx\right)+I_\Psi\left(lv\right)+l\|\varphi\|\right)\le\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi\left(kx\right)\right)\cdot s_q\left(\rho^*\left(lf\right)\right)=s_q\left(\rho^*\left(lf\right)\right)\end{aligned}$$

故 $f\left(x\right)\le\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*\left(lf\right)\right)$，由 x 和 l 的任意性，得到 $\|f\|\le\inf\limits_{l>0}\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*\left(lf\right)\right)=\|f\|_{\Psi,q}^*$。

由 $\varphi\ne0$ 和定理 2.8 知 $K_q\left(f\right)\ne\varnothing$。$\forall\varepsilon>0$，取 $l\in K_q\left(f\right)$，$k_0\in K_p\left(q_+\left(lv\right)\right)$，$y\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 使得 $\|\varphi\|-\varepsilon<\varphi\left(y/k_0\right)$。选取 $\delta>0$，使得

$$\mu\left(E\right)<\delta\Rightarrow\int_E l\left|q_+\left(lv\left(t\right)\right)\right|\cdot v\left(t\right)dt<\varepsilon$$

选 $k>0$ 使得 $\mu H=\mu\left\{t\in G:\left|y\left(t\right)\right|>k\right\}<\delta$，且

$$\int_H\frac{l}{k_0}\left|y\left(t\right)v\left(t\right)\right|dt<\varepsilon,\quad\int_H\Phi\left(y\left(t\right)\right)dt<\varepsilon$$

定义 $x\left(t\right)=q_+\left(lv\left(t\right)\right)\chi_{G\backslash H}+\frac{y\left(t\right)}{k_0}\chi_H$。由引理 1.7，有

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Phi,p}&=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(\int_{G\setminus H}\Phi\left(kq_+\left(lv\left(t\right)\right)\right)dt+\int_H\Phi\left(ky\left(t\right)/k_0\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le\frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_{G\setminus H}\Phi\left(k_0q_+\left(lv\left(t\right)\right)\right)dt+\int_H\Phi\left(k_0y\left(t\right)/k_0\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le\frac{1}{k_0}\left(1+\left(I_\Phi\left(k_0q_+\left(lv\right)\right)+\varepsilon\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{k_0}\left(1+I_\Phi^p\left(k_0q_+\left(lv\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{\varepsilon}{k_0}\\ &=\|q_+(lv)\|_{\Phi,p}+\frac{\varepsilon}{k_0}\end{aligned}$$

故有$\|x\|_{\Phi,p} \le \|q_+(lv)\|_{\Phi,p}$。

由$l \in K_q(f)$有$I_\Phi(q_+(lv))\cdot(\rho^*(lf))^{q-1}=1$。根据 Young 不等式和引理 1.4，有

$$
\begin{aligned}
\|f\| &\ge \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}} f(x) = \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\left(f\left(q_+(lv)\chi_{G\backslash H}\right)+f\left(yk_0^{-1}\cdot\chi_H\right)\right) \\
&= \frac{1}{l\|x\|_{\Phi,p}}\left(\left\langle lv,q_+(lv)\chi_{G\backslash H}\right\rangle+\left\langle lv,yk_0^{-1}\cdot\chi_H\right\rangle+l\varphi\left(q_+(lv)\chi_{G\backslash H}\right)+l\varphi\left(yk_0^{-1}\right)\right) \\
&\ge \frac{1}{l\|x\|_{\Phi,p}}\left(\left\langle lv,q_+(lv)\right\rangle-\left\langle lv,q_+(lv)\chi_H\right\rangle+\left\langle lv,yk_0^{-1}\cdot\chi_H\right\rangle+l\varphi\left(yk_0^{-1}\right)\right) \\
&> \frac{1}{l\|x\|_{\Phi,p}}\left(I_\Phi(q_+(lv))+I_\Psi(lv)-2\varepsilon+l(\|\varphi\|-\varepsilon)\right) \\
&= \frac{1}{l\|x\|_{\Phi,p}}\left(s_p\left(I_\Phi(q_+(lv))\right)\cdot s_q\left(\rho^*(lf)\right)-(l+2)\varepsilon\right) \\
&= \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\left(s_p\left(I_\Phi(q_+(lv))\right)\|f\|_{\Psi,q}^*-\left(1+2l^{-1}\right)\varepsilon\right) \\
&\ge \frac{\|q_+(lv)\|_{\Phi,p}}{\|x\|_{\Phi,p}}\|f\|_{\Psi,q}^*-\frac{\left(1+2l^{-1}\right)\varepsilon}{\|x\|_{\Phi,p}} \ge \|f\|_{\Psi,q}^*-\frac{\left(1+2l^{-1}\right)\varepsilon}{\|x\|_{\Phi,p}}
\end{aligned}
$$

令$\varepsilon \to 0$，有$\|f\| \ge \|f\|_{\Psi,q}^*$，结合$\|f\| \le \|f\|_{\Psi,q}^*$得$\|f\| = \|f\|_{\Psi,q}^*$，定理证毕。

定理 2.10 令$1 \le p < \infty$，则任意的奇异泛函φ在$S(L_{\Phi,p})$上是范数不可达的。

证明 $\forall x \in S(L_{\Phi,p})$，有

$$\varphi(x) \le \|\varphi\|\cdot\|x\|_\Phi < \|\varphi\|\cdot\|x\|_{\Phi,p} = \|\varphi\|$$

定理证毕。

定理 2.11 令$1 \le p \le \infty$，设$\|\cdot\|_{\Phi,p}$是k_p^*有限的，$f = v+\varphi \in (L_{\Phi,p})^* \backslash \{0\}$在

$x \in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 范数可达当且仅当

a) 当 $q=1$，$p=\infty$ 时

(i) $\|\varphi\|=\varphi(x)$；

(ii) $\int_G lv(t)x(t)dt = I_\Phi(x)+I_\Psi(lv)$ 其中 $l \in K_1(f)$；

(iii) $I_\Phi(x)=1$。

b) 当 $1<p,q<\infty$，$1/p+1/q=1$ 时

(i) $\|\varphi\|=\varphi(kx)$；

(ii) $\int_G klv(t)x(t)dt = I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)$ 其中 $k \in K_p(x),\ l \in K_q(f)$；

(iii) $I_\Phi^{p-1}(kx)\rho^*(lf) = I_\Phi(kx)\left(\rho^*(lf)\right)^{q-1}=1$。

c) 当 $q=\infty,\ p=1$ 时

(i) $\|\varphi\|=\varphi(kx)$；

(ii) $\int_G k\,x(t)v(t)\big/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\,dt = I_\Phi(kx)+I_\Psi\left(v\big/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right)$ 其中 $k \in K_p(x)$；

(iii) $\rho^*\left(f\big/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right)=1$。

证明 当 $q=1$ 和 ∞ 时，有 $\|f\|_{\Psi,1}^*=\|f\|_\Psi^o$，$\|f\|_{\Psi,\infty}^*=\|f\|_\Psi$，a) 和 c) 的结论在文献[73]中已经证明，故仅需证明 b) 的结论。

对任意的 $k \in K_p(x),\ l \in K_q(f)$，由引理 1.4 和 $I_\Phi(kx)=\left(k^p-1\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ 得到 $\varphi(kx)\le\|\varphi\|$。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{lk}\left(\langle lv,kx\rangle + l\varphi(kx)\right) \le \frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\varphi(kx)\right) \\ &\le \frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\right) = \frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+\rho^*(lf)\right) \\ &\le \frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi(kx)\right)\cdot\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right) = \|x\|_{\Phi,p}\cdot\|f\|_{\Psi,q}^* = \|f\|_{\Psi,q}^* \end{aligned}$$

若条件 (i)-(iii) 成立，则上面所有的不等式变为等式，因此 f 在 $x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 处范数可达。

反之，令 $f=(v+\varphi)\in\left(L_{\Phi,p}\right)^*$ 在 $x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 处范数可达，有

$$
\begin{aligned}
0&=f(x)-\|f\|_{\Psi,q}^*\cdot\|x\|_{\Phi,p}\\
&=\frac{1}{kl}\left(\langle lv,kx\rangle+l\varphi(kx)\right)-\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right)\cdot\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi(kx)\right)\\
&\le\frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\varphi(kx)\right)-\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right)\cdot\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi(kx)\right)\\
&\le\frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\varphi(kx)\right)-\frac{1}{lk}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\right)\\
&=\frac{1}{lk}\left(l\varphi(kx)-l\|\varphi\|\right)\le 0
\end{aligned}
$$

由 Young 不等式和由引理 1.6，条件 (i)，(ii) 和 (iii)成立，定理证毕。

定理 2.12 令 $1\le p\le\infty$， $x\in L_{\Phi,p}$， 设 p-Amemiya 范数是 $k_p^*<+\infty$， 则 $v\in S\left(L_{\Psi,q}\right)\bigcap Grad(x)$ 当且仅当

a) 当 $q=1,\ p=\infty$ 时

(i) $v=\dfrac{w}{\|w\|_{\Psi,1}}\cdot\operatorname{sgn}x$， w 满足 $p_-\left(x(t)/\|x\|_{\Phi,\infty}\right)\le w(t)\le p_+\left(x(t)/\|x\|_{\Phi,\infty}\right)$，$\mu-a.e.t\in G$；

(ii) $I_\Phi\left(x/\|x\|_{\Phi,\infty}\right)=1$。

b) 当 $1<p,\ q<\infty,\ 1/p+1/q=1$ 时

(i) $v=\dfrac{w}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\operatorname{sgn}x$，$w$ 满足 $p_-\left(kx(t)\right)\le w(t)\le p_+\left(kx(t)\right)$，$\mu-a.e.t\in G$，

其中 $k\in K_p(x)$；

(ii) $I_\Phi\left(kx\right)\cdot I_\Psi^{q-1}\left(w\right)=1$。

c) 当 $q=\infty,\ p=1$ 时

(i) $p_-\left(kx\left(t\right)\right)\le v\left(t\right)\le p_+\left(kx\left(t\right)\right)$，$\mu-a.e.t\in G$，其中 $k\in K_p\left(x\right)$；

(ii) $I_\Psi\left(v\right)=1$。

证明 已知 $\|f\|_{\Psi,1}^{*}=\|f\|_{\Psi}^{o}$，$\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}=\|f\|_{\Psi}$，a) 和 c) 的结论在文献[73]中已经证明，故仅需证明 b) 的结论。

充分性

设 $\langle v,x\rangle=\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|x\|_{\Phi,p}=\|x\|_{\Phi,p}$，则 $v\left(t\right)\cdot x\left(t\right)\ge 0$，$\mu-a.e.t\in G$，给定 v_0 在 x 处范数可达，取 $k\in K_p\left(x\right),l\in K_q\left(v_0\right)$，根据定理 2.11 b)-(ii) 和 Young 不等式，有 $p_-\left(kx\left(t\right)\right)\le l\left|v_0\left(t\right)\right|\le p_+\left(kx\left(t\right)\right)$，$\mu-a.e.t\in G$，根据定理 2.11 b)-(iii) 和 $\varphi=0$，有 $I_\Phi\left(kx\right)\cdot I_\Psi^{q-1}\left(lv_0\right)=1$。因此 lv_0 就是要找的 w，令

$$v=\frac{w}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\operatorname{sgn}x,\quad p_-\left(\quad\left(\ \right)\right)\le w\left(t\right)\le p_+\left(\ x\left(t\right)\right)$$

根据 Young 不等式和 $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ 定义，有

$$\begin{aligned}1\ge\left\langle v,\frac{x}{\|x\|_{\Phi,p}}\right\rangle&=\frac{1}{\|w\|_{\Psi,q}\cdot\|x\|_{\Phi,p}}\langle w,x\rangle\\&=\frac{1}{k\|w\|_{\Psi,q}\cdot\|x\|_{\Phi,p}}\left(I_\Phi\left(kx\right)+I_\Psi\left(w\right)\right)\\&=\frac{s_q\left(I_\Psi\left(w\right)\right)}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi\left(kx\right)\right)\ge\frac{\|w\|_{\Psi,q}}{\|w\|_{\Psi,q}}=1\end{aligned}$$

充分性得证。

必要性

若条件 (i) 不成立，即 $lv_0(t)=w(t)\notin\left[p_-\left(kx(t)\right),p_+\left(kx(t)\right)\right]$，$\mu-a.e.\,t\in G$，根据定理 2.11 b)-(ii)，$v_0$ 在 x 处是范数不可达的，因此 $v=w/\|w\|_{\Psi,q}\cdot\operatorname{sgn}x$ 不是 x 的支撑泛函。

若条件 (ii) 不成立，即 $I_\Phi\left(kx\right)\cdot I_\Psi^{q-1}\left(w\right)\neq 1$，根据定理 2.11 b)-(iii) 和 $\varphi=0$，v_0 在 x 处是范数不可达的，因此 $v=w/\|w\|_{\Psi,q}\cdot\operatorname{sgn}x$ 不是 x 的支撑泛函，必要性得证。

2.4 赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 函数空间的光滑点

令 $1\le p\le\infty$，对任意的 $x\in L_\Phi$ 定义

$$G(n)=\left\{t\in G:\left|x(t)\right|\le n\right\},\quad x_n\left(t\right)=x\left(t\right)\cdot\chi_{G_n}\left(t\right)\tag{2-4}$$

引理 2.2[73] 对任意 $x\in L_\Phi$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|_\Phi=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|_\Phi^o=\theta\left(x\right)$ 其中 x_n 定义见 (2-4) 式，$\theta\left(x\right)=\inf\left\{\lambda>0,I_\Phi\left(x/\lambda\right)<\infty\right\}$。

由引理 2.2 和 p-Amemiya 范数的等价性，有

$$\theta\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,p}=\inf\left\{\lambda>0,I_\Phi\left(x/\lambda\right)<\infty\right\}$$

引理 2.3[73] 令 $x\in L_\Phi$，若 $\theta\left(x\right)>0$，则存在两个不同的奇异泛函 $\varphi_i\in S\left(L_\Phi{}^*\right)$ 满足 $\varphi_i\left(x\right)=\theta\left(x\right),\ i=1,2$。

定理 2.13 令 $1\le p\le\infty$，$x\in L_\Phi$，对任意的奇异泛函 φ，有 $\theta\left(x\right)<\left(k^{**}\left(x\right)\right)^{-1}$ 和 $\varphi\left(x\right)\le\theta\left(x\right)\cdot\|\varphi\|$ 成立。

证明 定义 $x_n\left(t\right)=x\left(t\right)\cdot\chi_{G_n(t)}$，则 $x_n\in E_{\Phi,p}$，有

$$\|x-x_n\|_{\Phi,p}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi\left(k\left(x-x_n\right)\right)\right)\le\frac{1}{k^{**}\left(x\right)}s_p\left(I_\Phi\left(k\left(x-x_n\right)\right)\right)<\infty$$

令 $n\to\infty$，有 $\theta\left(x\right)<\left(k^{**}\left(x\right)\right)^{-1}$。由于 $\varphi\left(E_{\Phi,p}\right)=\{0\}$，有

$$\varphi\left(x\right)=\varphi\left(x-x_n\right)\le\|\varphi\|\cdot\|x-x_n\|_{\Phi,p}$$

令 $n\to\infty$，则 $\varphi(x)\le\theta(x)\cdot\|\varphi\|$，定理证毕。

定理 2.14 令 $1\le p\le\infty$， $x\in S(L_{\Phi,p})\backslash\{0\}$ 且 $\theta(x)<1/k$，其中 $k\in K_p(x)$，则 x 的支撑泛函一定在 $L_{\Psi,q}$ 中，其中 $1/p+1/q=1$， Ψ 是 Φ 的 Young 不等式意义下的余函数。

证明 当 p=1 和 ∞ 时，结论已经在文献[73]中给出证明，只需考虑 $p\in(1,\infty)$ 的情形。令 f 为 x 的支撑泛函，则 f 存在唯一分解 $f=v+\varphi$。若 $\varphi\ne0$，则 $f(x)=\int_G x(t)v(t)dt+\varphi(x)$。对任意 $k\in K_p(x), l\in K_q(f)$，根据定理 2.13 得到

$$\begin{aligned}kl&=kl\int_G x(t)v(t)dt+kl\varphi(x)\\&\le I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+kl\|\varphi\|\theta(x)\\&<I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\\&\le s_p(I_\Phi(kx))s_q(I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|)\\&=s_p(I_\Phi(kx))s_q(\rho^*(lf))=kl\end{aligned}$$

该矛盾说明 $\varphi=0$，定理证毕。

定理 2.15 令 $1\le p\le\infty$， $x\in L_{\Phi,p}\backslash\{0\}$，若 $p_-(x)$ 是连续的，则 x 是光滑点的充分必要条件是 $Grad(x)\subset L_{\Psi,q}$，其中 $1/p+1/q=1$， Ψ 是 Φ 的 Young 不等式意义下的余函数。

证明 当 p=1 和 ∞ 时，结论已经在文献[73]中给出证明，只需考虑 $p\in(1,\infty)$ 的情形。

充分性

令 $v_0\in S(L_{\Psi,q})$ 是 x 的支撑泛函，若存在 x 的另一个支撑泛函 $f=v+\varphi$，且 $\varphi\ne0$。则

$$\frac{f+v_0}{2}=\frac{v+v_0}{2}+\frac{\varphi}{2}$$

也是 x 的一个支撑泛函，且

$$\|v_0\|_{\Psi,q}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Psi^q\left(kv_0\right)\right)^{\frac{1}{q}}=1 \text{ 和 } \|f\|_{\Psi,q}^*=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(I_\Psi\left(kv\right)+k\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

根据 Ψ 的凸性和 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}1=\left\|\frac{f+v_0}{2}\right\|_{\Psi,q}^* &=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(I_\Psi\left(k\frac{v+v_0}{2}\right)+k\left\|\frac{\varphi}{2}\right\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(\left(\frac{I_\Psi\left(kv\right)}{2}\right)+\left(\frac{I_\Psi\left(kv_0\right)}{2}\right)+\frac{k}{2}\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\left(1+I_\Psi^q\left(kv_0\right)\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{2}\left(1+\left(I_\Psi\left(kv\right)+k\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\ &=\frac{\|v_0\|_{\Psi,q}}{2}+\frac{\|f\|_{\Psi,q}^*}{2}=1\end{aligned}$$

因此，

$$I_\Psi\left(k\frac{v+v_0}{2}\right)=\frac{I_\Psi\left(kv_0\right)}{2}+\frac{I_\Psi\left(kv\right)}{2}$$

由于 $p_-(x)$ 是连续的函数，所以 $v_0(t)=v(t)$， $\mu-a.e.\ t\in G$，因此 $\|\varphi\|=0$，即 $\varphi=0$。

必要性

设 $f=v+\varphi$ （$\varphi\neq 0$）是 x 的支撑泛函，则

$$1=\|f\|_{\Psi,q}^*=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(\rho^*\left(kf\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Psi^q\left(kv\right)\right)^{\frac{1}{q}}=\|v\|_{\Psi,q}$$

故 $x\notin E_{\Phi,p}$，根据引理 2.3，存在两个不同的奇异泛函 $\varphi_i,i=1,2$ 满足 $\|\varphi_i\|=1$，

$\varphi_i(x)=\theta(x)$。令 $f_i=v+\|\varphi\|\cdot\varphi_i$，则 $f_1\neq f_2$。根据定理 2.2 知 $\|f_1\|_{\Psi,q}^*=\|f_2\|_{\Psi,q}^*=1$。

根据定理 2.13，有

$$\begin{aligned}f_i(x)&=\int_G x(t)v(t)dt+\|\varphi\|\cdot\varphi_i(x)=\int_G x(t)v(t)dt+\|\varphi\|\theta(x)\\ &\ge\int_G x(t)v(t)dt+\varphi(x)=f(x)\end{aligned}$$

因此，f_1,f_2 都是 x 的支撑泛函，这说明 x 不是 $L_{\Phi,p}$ 的光滑点，定理证毕。

定理 2.16 $x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)\backslash\{0\}$ （$1\le p\le\infty$）是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的光滑点当且仅当

(i) $a_\Psi=0$；

(ii) 若 $1\le p<\infty$，则 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)=1$ 或 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(k|x|\right)\right)=1$ 且 $\theta(x)<1/k$；

(iii) 若 $p=\infty$，则 $\theta(x)<1$ 且 $G(x)=\left\{t\in G:p_-\left(\left|x(t)\right|\right)<p_+\left(\left|x(t)\right|\right)\right\}$ 的测度为零。

证明 必要性

若 (i) 不真，即 $a_\Psi>0$，设 $f=v+\varphi\,(v\neq0)$ 是 x 的一个支撑泛函。设 $E\subset G\backslash supp(x)$，且 $\mu(E)>0$，若 $v(t)\chi_E\neq0$，令

$$\overline{v}=\begin{cases}v, & t\in supp(x),\\ 0, & t\in E\end{cases}$$

于是，

$$\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\le\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi\left(l\overline{v}\right)+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi\left(lv\right)+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|v+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}=1$$

由 $(\overline{v}+\varphi)(x)=(v+\varphi)(x)=\|x\|_{\Phi,p}$，有 $\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\ge1$。所以 $\overline{v}+\varphi$ 也是 x 的一个支撑泛函，但 $\overline{v}+\varphi\neq v+\varphi$，故 x 不是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的光滑点。

若 $v(t)\chi_E(t)=0$，取 $l\in K_q(f)$，存在 c>0，使得 $lc\le a_\Psi$。令

$$\overline{v}=\begin{cases}v, & t\in supp(x),\\ lc, & t\in E\end{cases}$$

于是，

$$\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\le\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi\left(l\overline{v}\right)+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi\left(lv\right)+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|v+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}=1$$

由于 $(\overline{v}+\varphi)(x)=(v+\varphi)(x)=\|x\|_{\Phi,p}$，有 $\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\ge1$。所以 $\overline{v}+\varphi$ 也是 x 的一个支撑泛函，但 $\overline{v}+\varphi\neq v+\varphi$，故 x 不是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的光滑点。

(ii) 假设 $I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)\neq 1$，根据定理 2.12，有

$$I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)=\alpha<1$$

若 $\theta(x)<1/k$，根据定理 2.15 知 x 的所有的支撑泛函都在 $L_{\Psi,q}$ 中。因此若 $I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}(k|x|)\right)\neq 1$，必有 $I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}(k|x|)\right)>1$，则集合

$$V=\left\{v: p_{-}(k|x|)\leq lv\leq p_{+}(k|x|), I_{\Phi}^{p-1}(kx)I_{\Psi}(lv)=1\right\}$$

包含了无穷多个元素，根据定理 2.12 b)，每一个 $v\cdot\operatorname{sgn}x/\|v\|_{\Psi,q}$ 都是 x 的支撑泛函，这说明 x 不是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的光滑点。

现在，假设 $\theta(x)=1/k$，根据定理 2.14 知，x 的支撑泛函都在 $L_{\Psi,q}\oplus F$ 中，根据 Hahn-Banach 定理存在 $\varphi\in F$，满足 $I_{\Phi}^{p-1}(kx)\left(I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)+\|\varphi\|\right)=1$ 即 $\|\varphi\|=(1-\alpha)/I_{\Phi}^{p-1}(kx)$。根据引理 2.3 存在两个不同的奇异泛函 $\varphi_i, i=1,2$ 满足 $\|\varphi_i\|=1, \varphi_i(x)=\theta(x)$。定义 $f_i=p_{-}(k|x|)+\|\varphi\|\cdot\varphi_i\ (i=1,2)$，则 $f_1\neq f_2$，由定理 2.2 有 $\|f_1\|_{\Psi,q}^{*}=\|f_2\|_{\Psi,q}^{*}=1$。根据 Young 不等式，引理 1.6 和定理 2.13 有

$$\begin{aligned}
f_i(x)&=\int_G x(t)\,p_{-}(k|x(t)|)\,dt+\|\varphi\|\cdot\varphi_i(x)\\
&=\frac{1}{k}\left(I_{\Phi}(kx)+I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)\right)+\|\varphi\|\theta(x)\\
&=\frac{1}{k}\left(I_{\Phi}(kx)+I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)+\|\varphi\|\right)\\
&=\frac{1}{k}s_p\left(I_{\Phi}(kx)\right)\cdot s_q\left(I_{\Psi}\left(p_{-}(k|x|)\right)+\|\varphi\|\right)\\
&\geq\|x\|_{\Phi,p}\cdot\|f_i\|_{\Psi,q}^{*}
\end{aligned}$$

因此，f_1, f_2 都是 x 的支撑泛函，这说明 x 不是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的光滑点。

(iii) 文献[73]证明了条件 (iii) 的必要性，在此省略。

充分性

令 $f = v + \varphi$ （$v \in L_{\Psi,q}$, $\varphi \in F$）是 x 的一个支撑泛函。

当 $1 \le p < \infty$ 时，根据定理 2.11 b) 和 c) 的结论有 $p_-\left(k|x|\right) \le l|v| \le p_+\left(k|x|\right)$ 其中 $k \in K_p\left(x\right)$， $l \in K_q\left(f\right)$，若 $I_\Phi^{p-1}\left(kx\right) \cdot I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right) = 1$ 成立，根据定理 2.11 b) 和 c) 的结论得到 $\varphi = 0$，因此 $v = p_-\left(k|x|\right)\operatorname{sgn} x \Big/ \left\|p_-\left(k|x|\right)\right\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。若 $I_\Phi^{p-1}\left(kx\right) \cdot I_\Psi\left(p_+\left(k|x|\right)\right) = 1$，根据定理 2.11 b)和 c) 的结论得到 $\varphi = 0$，因此 $v = p_+\left(k|x|\right)\operatorname{sgn} x \Big/ \left\|p_+\left(k|x|\right)\right\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。

当 $p = \infty$ 时，根据定理 2.11 a) 和定理 2.14 知 x 的所有支撑泛函都在 $L_{\Psi,1}$ 中，根据定理 2.11 a) 知 $v = p_-\left(k|x|\right)\operatorname{sgn} x \Big/ \left\|p_-\left(k|x|\right)\right\|_{\Psi,1}$ 是 x 的唯一支撑泛函，证毕。

2.5　赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 函数空间的光滑性

定理 2.17 当 $1 \le p \le \infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 是光滑的当且仅当

(i)　$a_\Psi = 0$；

(ii)　$p_-\left(x\right)$ 是连续函数；

(iii)　$\Phi \in \Delta_2$。

证明 充分性

条件 (iii) 蕴含 $L_{\Phi,p} = E_{\Phi,p}$，对于任意 $x \in E_{\Phi,p}$，有 $\theta\left(x\right) = 0 < 1/k$。若条件 (ii) 成立，则有 $p_-\left(x\right) = p_+\left(x\right)$，即定理 2.16 中的 V 只含有一个元素，由条件 (i) 和定理 2.15 和 2.16 知，x 是 $L_{\Phi,p}$ 的一个光滑点。

必要性

条件 (i) 由定理 2.16 可得。

(ii) 若 $p_-(x)$ 不是连续函数，则存在常数 A，v_1，v_2，$\forall v\in[v_1,v_2]$ 有 $q_-(v)=A$。存在 $G_1\subset G$ 使得 $\left(\Phi(A)\mu(G_1)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_-(A)\right)\mu(G_1)<1$。选取 $a>0$ 使得 $\left(\Phi(A)\mu(G_1)+\Phi\left(q_-(a)\right)\mu(G\setminus G_1)\right)^{p-1}\left(\Psi\left(p_-(A)\right)\mu(G_1)+\Psi(a)\mu(G\setminus G_1)\right)>1$。选取 $G_2\subset G\setminus G_1$，满足

$$\left(\Phi(A)\mu(G_1)+\Phi\left(q_-(a)\right)\mu(G_2)\right)^{p-1}\left(\Psi\left(p_-(A)\right)\mu(G_1)+\Psi(a)\mu(G_2)\right)=1$$

设 $x(t)=A\chi_{G_1}(t)+q_-(a)\chi_{G_2}(t)$，则 $I_\Phi^{p-1}(x)\cdot I_\Psi\left(p_-(|x|)\right)=1$。将集合 G_1 分解成两个测度相等的集合 E 和 F，令

$$w_1(t)=v_1\chi_E(t)+v_2\chi_F(t)+a\chi_{G_2}(t) \tag{2-5}$$

$$w_2(t)=v_2\chi_E(t)+v_1\chi_F(t)+a\chi_{G_2}(t) \tag{2-6}$$

则 $q_-\left(w_i(t)\right)=A\chi_{G_1}(t)+q_-(a)\chi_{G_2}(t)=x(t)\ (i=1,2)$。

当 p=1 时，有 $I_\Psi(p_-(x))=I_\Psi(w_i)=1$，$\|w_i\|_{\Psi,\infty}=1\ (i=1,2)$，

$$\|x\|_{\Phi,1}=\|x\|_\Phi^o=\int_G x(t)p_-\left(x(t)\right)dt=\int_G x(t)w_i(t)dt$$

因此 w_1, w_2 都是 x 的支撑泛函，x 的支撑泛函不唯一，故 x 不是 $L_{\Phi,1}$ 的光滑点。

当 $1<p<\infty$ 时，令 $v_i=w_i/\|w_i\|_{\Psi,q}\ (i=1,2)$，根据引理 1.6 有

$$1 \ge \left\langle v_i, \frac{x}{\|x\|_{\Phi,p}} \right\rangle = \left\langle \frac{w_i}{\|w_i\|_{\Psi,q}}, \frac{x}{\|x\|_{\Phi,p}} \right\rangle = \frac{1}{\|w_i\|_{\Psi,q}} \cdot \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}} \int_G x(t) w_i(t) dt$$

$$= \frac{1}{\|w_i\|_{\Psi,q}} \cdot \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}} \left(I_\Phi(x) + I_\Psi(w_i) \right) = \frac{1}{\|w_i\|_{\Psi,q}} \cdot \frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}} s_p\left(I_\Phi(x)\right) \cdot s_q\left(I_\Psi(w_i)\right) \ge 1$$

因此，$v_i = w_i / \|w_i\|_{\Psi,q}\ (i = 1,2)$ 都是 $x/\|x\|_{\Phi,p}$ 的支撑泛函，$x/\|x\|_{\Phi,p}$ 不是 $B(L_{\Phi,p})$ 的光滑点。

当 $p = \infty$ 时，类似前面构造 $x(t) = A\chi_{G_1}(t) + q_-(a)\chi_{G_2}(t)$ 满足

$$\Phi(A)\mu(G_1) + \Phi(q_-(a))\mu(G_2) = 1$$

w_1, w_2 定义见 (2-5)，(2-6) 式，则 $x \in E_{\Phi,\infty}$，$\|x\|_{\Phi,\infty} = 1$ 且 $I_\Phi(x) = I_\Phi(q_-(w_i)) = 1$。因此

$$1 = \left\| \frac{w_i}{\|w_i\|_{\Psi,1}} \right\|_{\Psi,1} = \int_G \frac{w_i(t)}{\|w_i\|_{\Psi,1}} q_-(w_i(t)) dt = \int_G \frac{w_i(t)}{\|w_i\|_{\Psi,1}} x(t) dt$$

故 $w_i/\|w_i\|_{\Psi,1}$ 都是 x 的支撑泛函。因此，x 不是 $B(L_{\Phi,\infty})$ 的光滑点。

(iii) 令 $1 \le p < \infty$，假设 $\Phi \notin \Delta_2$，根据 Δ_2 条件的定义，存在 $x_n \nearrow \infty$ 使得 $\Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n\right) > n \cdot 2^{n+1}\Phi(x_n)\ (n \in \mathbb{N})$ (参见文献[73])，注意到

$$\Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n\right) = \int_0^{(1+\frac{1}{n})x_n} p_-(t) dt \quad (x_n > 0)$$

和

$$\Phi(x_n) \ge \int_{(1-\frac{1}{n})x_n}^{x_n} p_-(t) dt > \frac{1}{n} x_n p_-\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n\right) \quad (x_n > 0)$$

我们有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n p_-\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n\right) \ge \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n\right) > n \cdot 2^{n+1}\Phi(x_n) > 2^{n+1} x_n p_-\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n\right)$$

因此，$p_-\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right)>2^n p_-\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right)$。不失一般性，假设$\frac{x_2}{2}\cdot p_-\left(\frac{x_2}{2}\right)\mu G>1$，则存在不相交的集合族$\{G_n\}\subset\Sigma\,(n\geq 3)$使得$\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n p_-\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right)\mu G_n=\frac{1}{2^n}$和 $\Phi(x_n)\mu G_n=\frac{1}{2^{n+1}}$成立。定义$x=\sum_{n=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\chi_{G_n}$，则

$$I_\Phi(x)+I_\Psi(p_-(x))=\int_G x(t)p_-(x(t))dt$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n p_-\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right)\mu G_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}<1$$

故$I_\Phi(x)<1$，$I_\Psi(p_-(x))<1$。因此，有$I_\Phi^{p-1}(x)I_\Psi(p_-(x))<1$。对于任意 $l>1$，令 $m>2$ 满足$\left(1-\frac{1}{m}\right)l>1+\frac{1}{n}$，则

$$I_\Phi(x)+I_\Psi(p_-(lx))\geq\int_G x(t)p_-(lx(t))dt$$
$$\geq\sum_{n>m}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n p_-\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right)\mu G_n$$
$$\geq\sum_{n>m}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\cdot 2^n p_-\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right)\mu G_n=\infty$$

故$I_\Psi(p_-(lx))=\infty$，所以有$I_\Phi^{p-1}(lx)I_\Psi(p_-(lx))=\infty$，

$$I_\Phi(lx)>\sum_{n>m}^{\infty}\Phi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n\right)\mu G_n=\sum_{n>m}^{\infty}n\cdot 2^{n+1}\Phi(x_n)\mu G_n=\infty$$

因此$\theta(x)=1$，$K_p(x)=\{1\}$，由定理 2.15，2.16 知 x 不是$L_{\Phi,p}$光滑点。

当$p=\infty$时，文献[32,72]用不同方法给出了充分性的证明，故在此省略。

2.6 本章小结

本章对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间$L_{\Phi,p}$的光滑性进行研究。首先，在$L_{\Phi,p}$的对偶空间$(L_{\Phi,p})^*$引入一类能够实现$\|f\|_\Psi^o$和$\|f\|_\Psi$计算公式形式上统一的

新范数$\|f\|_{\Psi,q}^{*}$。其次，证明了$\|f\|_{\Psi,q}^{*}$为赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间中有界线性泛函的范数计算公式。再次，利用有界线性泛函的范数计算公式得到了 $L_{\Phi,p}$ 单位球面上点的支撑泛函的具体形式，并利用单位球面上点支撑泛函的具体形式得到 $L_{\Phi,p}$ 单位球面上的点为光滑点的充要条件。最后，从点态性质的结果出发获得了 $L_{\Phi,p}$ 具有光滑性的判据。

第 3 章 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间的光滑性

3.1 引言

赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 是赋 Orlicz 范数 Orlicz 序列空间 l_{Φ}^{o} 和赋 Luxemburg 范数 Orlicz 序列空间 l_{Φ} 的推广，由于 p-Amemyia 范数 $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ 的范数生成函数变化多样，对该空间的研究需要引入新的技巧。目前，该空间几何性质的研究尚不完备，很多点态性质和几何性质的判别准则尚未得到。在本章中，我们将解决赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 单位球面上光滑点的刻画问题，进而获得 $l_{\Phi,p}$ 具有光滑性的判据。

记

$$l^0=\left\{x=\left(x\left(i\right)\right)_{i=1}^{\infty}:x\left(i\right)\in\mathbb{R},i=1,2\cdots\right\}$$

对 $x\in l^0$， $supp(x)=\left\{i\in\mathbb{N}:x\left(i\right)\neq 0\right\}$ 表示 x 的支撑集。

3.2 有界线性泛函

引理 3.1 令 $1\leq p\leq\infty$， Φ 为有限值的 Orlicz 函数则下面条件成立

(i) 若 p=1 且 $card\left(supp\left(x\right)\right)\cdot\Psi\left(b_{\Psi}\right)\geq 1$，则 $K_1(x)\neq\varnothing$；

(ii) 若 $1<p<\infty$，且 Φ 在 $\left[0,\infty\right)$ 不是线性函数，则对任意的 x 有 $K_p\left(x\right)\neq\varnothing$；

(iii) 若 $p=\infty$，则对任意的 x 有 $K_{\infty}\left(x\right)\neq\varnothing$。

证明 (i) 对任意的 $x\in l_{\Phi,p}\setminus\left\{0\right\}$，文献[79]中已证明

$$\lim_{k\to\infty}p_{+}\left(kx\left(i\right)\right)=b_{\Psi},\ i\in supp\left(x\right)$$

若 $card\left(supp\left(x\right)\right)=\infty$ 或 $b_{\Psi}=\infty$，则

$$I_\Psi\left(p_+(kx)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\Psi\left(p_+\left(kx(i)\right)\right)\to\sum_{i=1}^{\infty}b_\Psi=\infty\ \ (k\to\infty)$$

根据$k_1^*(x)$的定义，有$k_1^*(x)<\infty$即$K_1(x)\neq\varnothing$。

若$card\left(supp(x)\right)<\infty$或$b_\Psi<\infty$，对任意$\varepsilon>0$，存在$k_0>0$使得

$$p_+\left(k_0x(i)\right)>b_\Psi-\varepsilon\quad\left(i\in supp(x)\right)$$

对任意$k>k_0$，有

$$\begin{aligned}I_\Psi\left(p_+(kx)\right)&=\sum_{i\in supp(x)}\left(p_+\left(kx(i)\right)\right)\geq card\left(supp(x)\right)\cdot\Psi\left(b_\Psi-\varepsilon\right)\\&=card\left(supp(x)\right)\cdot\Psi\left(b_\Psi\right)+o(\varepsilon)\end{aligned}$$

由$card\left(supp(x)\right)\cdot\Psi\left(b_\Psi\right)\geq1$和$\varepsilon$的任意性，有$I_\Psi\left(p_+(kx)\right)\geq1\ (\varepsilon\to0)$。根据$k_1^*(x)$的定义，有$k_1^*(x)<\infty$即$K_1(x)\neq\varnothing$。

(ii) 和 (iii) 的结论在文献[79]中已证，在此省略。

文献[83,95]指出 Orlicz 序列空间$l_{\Phi,p}$的对偶空间$\left(l_{\Phi,p}\right)^*=l_{\Psi,q}\oplus S$（$\Phi$, Ψ 是互余的 Orlicz 函数且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)。$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*$可以唯一分解为$f=v+\varphi$，$v\in L_{\Psi,q}$，$\varphi\in S$ (S 表示 Orlicz 序列空间中所有奇异线性泛函构成的集合)。

令$1\leq p\leq\infty$，$f=(v+\varphi)\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*$，定义

$$\rho^*(f)=I_\Psi(v)+\|\varphi\| \tag{3-1}$$

在$\left(l_{\Phi,p}\right)^*$中引入泛函

$$\|f\|_{\Psi,q}^*=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*(kf)\right)=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\left(1+\left(\rho^*(kf)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 1\leq q<\infty\\\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\left\{1,\rho^*(kf)\right\},\quad q=\infty\end{cases}$$

显然对于任意的$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*$，$\|f\|_{\Psi,1}^*=\|f\|_\Psi^o$。与函数空间类似可以证明$\|f\|_\Psi=\|f\|_{\Psi,\infty}^*$，并能得到对于任意的$1\leq q\leq\infty$，$\|f\|_{\Psi,q}^*$是$\left(l_{\Phi,p}\right)^*$上有界线性泛函$f$的范数。

定理 3.1 任给 $f\in\left(l_{\Phi,1}\right)^{*}$，则 $\|f\|_{\Psi}=\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}\max\left\{1,\rho^{*}\left(kf\right)\right\}$。

证明 证明过程可仿效定理 2.1 的证明，在此省略。

定理 3.2 令 $1\le q\le\infty$，泛函 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf\limits_{k>0}\frac{1}{k}s_{q}\left(\rho^{*}\left(kf\right)\right)$ 是 $\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}$ 上的范数，$\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 与 $\|f\|_{\Psi}$ 等价且满足：$\|f\|_{\Psi}\le\|f\|_{\Psi,q}^{*}\le 2^{\frac{1}{q}}\|f\|_{\Psi}$。

证明 证明过程与定理 2.2 的证明类似，在此省略。

定义函数 $\beta_{q}:\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}\to\left[-1,\infty\right]$，

$$\beta_{q}\left(f\right)=\begin{cases}I_{\Phi}\left(q_{+}\left(|v|\right)\right)\cdot\left(\rho^{*}\left(f\right)\right)^{q-1}-1, & 1\le q<\infty\\ -1, & q=\infty,\rho^{*}\left(f\right)\le 1\\ I_{\Phi}\left(q_{+}\left(|v|\right)\right), & q=\infty,\rho^{*}\left(f\right)>1\end{cases}$$

进一步，定义

$$\theta^{*}:\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}\to\left[0,\infty\right),\ \theta^{*}\left(f\right)=\inf\left\{k>0:\rho^{*}\left(k^{-1}f\right)<\infty\right\}$$

$$k_{q}^{*}\left(f\right):\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}\to\left[0,\infty\right),\ k_{q}^{*}\left(f\right)=\inf\left\{k\ge 0:\beta_{q}\left(kf\right)\ge 0\right\}\left(\inf\varnothing=\infty\right)$$

$$k_{q}^{**}\left(f\right):\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}\to\left(0,\infty\right],\ k_{q}^{**}\left(f\right)=\sup\left\{k\ge 0:\beta_{q}\left(kf\right)\le 0\right\}$$

显然，$\forall f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}$，$k_{q}^{*}\left(f\right)\le k_{q}^{**}\left(f\right)$。定义 $K_{q}\left(f\right)=\left[k_{q}^{*}(f),\ k_{q}^{**}\left(f\right)\right]$。

定理 3.3 令 $1\le q\le\infty$，$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^{*}\setminus\{0\}$，下面条件成立：

(i) 若 $k_{q}^{*}\left(f\right)=k_{q}^{**}\left(f\right)=\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}s_{q}\left(\rho^{*}\left(f\right)\right)$；

(ii) 若 $k_{q}^{*}\left(f\right)<k_{q}^{**}\left(f\right)=\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\frac{1}{k}s_{q}\left(\rho^{*}\left(kf\right)\right)$ 其中 $k\in\left[k_{q}^{*}\left(f\right),\infty\right)$；

(iii) 若 $k_{q}^{**}\left(f\right)<\infty$，则 $\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\frac{1}{k}s_{q}\left(\rho^{*}\left(kf\right)\right)$ 其中 $k\in\left[k_{q}^{*}\left(f\right),k_{q}^{**}\left(f\right)\right]$。

证明 证明过程可仿效定理 2.6 的证明，在此省略。

定理 3.4 令$1\le q\le\infty$，若$b_\Psi<\infty$，则k_q^*-有限，即$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$。

证明 由$b_\Psi<\infty$有$\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)<\infty$，显然对任意的$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，

$$\|f\|_{\Psi,q}^*=\frac{1}{k_q^{**}\left(f\right)}s_q\left(\rho^*\left(k_q^{**}\left(f\right)f\right)\right)=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_q\left(\rho^*\left(kf\right)\right)<\infty$$

因此，$k_q^*\left(f\right)\le k_q^{**}\left(f\right)\le\left(\theta^*\right)^{-1}\left(f\right)$，故有$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$。

定理 3.5 令$f=\left(v+\varphi\right)\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，其中$1\le p,q\le\infty$为共轭数，$\Phi,\Psi$是 Young 不等式意义下互余的 Orlicz 函数，则下列条件成立

a) 若$q=1$且$card\left(supp\left(v\right)\right)\cdot\Phi\left(b_\Phi\right)\ge1$，则$K_1\left(f\right)\ne\varnothing$；

b) 当$1<q<\infty$时

(i) 若$\varphi\ne0$，则对任意的$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，有$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$，

(ii) 若$\varphi=0$且Ψ在区间$[0,\infty)$不是线性函数，则任意的$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$有$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$；

c) 若$q=\infty$，则任意的$f\in\left(l_{\Phi,\infty}\right)^*\setminus\{0\}$，有$k_\infty^*\left(f\right)=\dfrac{1}{\|f\|_{\Psi,\infty}}$即 $K_\infty\left(f\right)\ne\varnothing$。

证明 a) 当$q=1$时，该结论的证明类似于引理 3.1，故在此省略。

b)-(i) 若$\varphi\ne0$，则$\|\varphi\|>0$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}k\|\varphi\|\to\infty$$

因此，存在$k>0$使得

$$I_\Phi\left(q_+\left(kv\right)\right)\left(I_\Psi\left(kv\right)+k\|\varphi\|\right)^{q-1}=I_\Phi\left(q_+\left(kv\right)\right)\left(\rho^*\left(kf\right)\right)^{q-1}>1$$

故$k_q^*\left(f\right)<\infty$即$K_q\left(f\right)\ne\varnothing$。

b)-(ii) 若$\varphi=0$，证明过程可仿效文献[79]中定理 4.3 的证明，在此省略。

c) 由于$\rho^*\left(f/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right)\le 1$，有$\beta_\infty\left(f/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\right)=-1$，因此$1/\|f\|_{\Psi,\infty}^*\le k_\infty^*(f)$。假设存在某个$k$满足$1/\|f\|_{\Psi,\infty}^*<k<k_\infty^*(f)$，则$\beta_\infty(kf)<0$，$\rho^*(kf)\le 1$。因此$k<1/\|f\|_{\Psi,\infty}^*$矛盾，故$0<1/\|f\|_{\Psi,\infty}^*=k_\infty^*(f)$，即$K_\infty(f)\ne\varnothing$。

定理 3.6 令Φ,Ψ是Young意义下取有限值的互余的Orlicz函数，$1\le p,q\le\infty$为共轭数，若p-Amemiya范数是k^*-有限的，则$f\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$存在唯一分解$f=v+\varphi$，其中$v\in l_{\Psi,q},\varphi\in S$且

$$\|f\|=\|f\|_{\Psi,q}^*=\inf_{l>0}\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right)=\begin{cases}\inf\limits_{l>0}\dfrac{1}{l}\left(1+\left(\rho^*(lf)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty\\ \inf\limits_{l>0}\dfrac{1}{l}\max\left\{1,\rho^*(lf)\right\}, & q=\infty\end{cases}$$

证明 当$q=1$和∞时，有$\|f\|_{\Psi,1}^*=\|f\|_\Psi^o=\|v\|_\Psi^o+\|\varphi\|_\Psi^o$和

$$\|f\|_{\Psi,\infty}^*=\|f\|_\Psi=\inf_{l>0}\left\{\frac{1}{l},I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\le 1\right\}$$

对于Orlicz范数和Luxemburg范数的情形已在文献[73]中证明，因此我们只需考虑$1<q<\infty$的情形。若$\varphi=0$，则$f\in\left(h_{\Phi,p}\right)^*$，根据引理1.3知$\left(h_{\Phi,p}\right)^*=l_{\Psi,q}$，该结论已经在文献[95]中证明过。故假设$\varphi\ne 0$。

$\forall l>0$，$x\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$，取$k\in K_p(x)$，根据Young不等式和Hölder不等式，有

$$\begin{aligned}lf(x)&=\frac{1}{k}\left(\langle kx,lv\rangle+l\varphi(kx)\right)\\&\le\frac{1}{k}\left(I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\right)\\&\le\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi(kx)\right)\cdot s_q\left(\rho^*(lf)\right)=s_q\left(\rho^*(lf)\right)\end{aligned}$$

其中$\varphi(kx)\le\|\varphi\|$由引理1.4和$I_\Phi(kx)=\left(k^p-1\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$可得。故$f(x)\le\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right)$，由$x$和$l$的任意性，我们得到

$$\|f\|\le\inf_{l>0}\frac{1}{l}s_q\left(\rho^*(lf)\right)=\|f\|_{\Psi,q}^*$$

假设$v\ne 0$，令$f=v_n+\varphi$其中$v_n=\left(v(1),v(2),\cdots,v(n),0,\cdots\right)$，则$|f_n|\nearrow|f|$，由$\left(l_{\Phi,p}\right)^*$具有法都性质有$\|f_n\|_{\Psi,q}^*\to\|f\|_{\Psi,q}^*\quad(n\to\infty)$。不失一般性，假设对任意的$n$，$f_n\ne 0$。根据定理3.5知$K_q(f_n)\ne\varnothing$，对任意的$n\in\mathbb{N}$，取$l_n\in K_q(f_n)$。由于$\Psi$取有限值，有$q_+(\cdot)$也取有限值，则对任意$k>0$，$I_\Phi\left(kq_+\left(l_n|v_n|\right)\right)<\infty$，即$q_+\left(l_n|v_n|\right)\in h_{\Phi,p}$。

对任意$\varepsilon>0$，取$k_0\in K_p\left(q_+(l_nv_n)\right)$，根据引理1.4能找到$y\in l_{\Phi,p}$使得$\|\varphi\|-\varepsilon<\varphi\left(k_0^{-1}y\right)$，根据Young不等式有

$$\sum_{i=1}^{\infty}l_n\left|q_+\left(l_nv_n(i)\right)\cdot v_n(i)\right|=I_\Phi\left(q_+\left(l_nv_n\right)\right)+I_\Psi\left(l_nv_n\right)<\infty$$

正项级数$\sum_{i=1}^{\infty}l_n\left|q_+\left(l_nv_n(i)\right)\cdot v_n(i)\right|$收敛，故存在$n_1>0$使得

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty}l_n\left|q_+\left(l_nv_n(i)\right)\cdot v_n(i)\right|<\varepsilon$$

由$I_\Phi(k_0^{-1}y)<\infty$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{l_n}{k_0}\left|y(i)\cdot v_n(i)\right|\le I_\Phi\left(\frac{y}{k_0}\right)+I_\Psi\left(l_nv_n\right)<\infty$$

选取$n_2>0$使得

$$\sum_{i=n_2+1}^{\infty}\Phi\left(\frac{y(i)}{k_0}\right)<\varepsilon,\quad\sum_{i=n_2+1}^{\infty}\frac{l_n}{k_0}\left|y(i)v_n(i)\right|dt<\varepsilon$$

取 $N_1=\max\{n_1,n_2\}$，定义

$$x_n(i)=\begin{cases} q_+\left(l_n v_n(i)\right), & i\le N_1 \\ k_0^{-1}y(i), & i>N_1 \end{cases}$$

因此，有

$$I_\Phi(x_n)=\sum_{i=1}^{N_1}\Phi\left(q_+\left(l_n v_n(i)\right)\right)+\sum_{i=N_1+1}^{\infty}\Phi\left(\frac{y(i)}{k_0}\right)\le I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)+\varepsilon$$

根据 Minkowski 不等式有

$$\|x_n\|_{\Phi,p}\le\left(1+I_\Phi^p(x_n)\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(1+\left(I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)+\varepsilon\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon$$

根据 Young 不等式，引理 1.6，$\|x_n\|_{\Phi,p}\le\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon$ 及 p-Amemiya 范数的定义有

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &\ge\frac{1}{\|x_n\|_{\Phi,p}}f_n(x_n)\\
&=\frac{1}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\left(\sum_{i=1}^{N_1}q_+\left(l_n v_n(i)\right)v_n(i)+\sum_{i=N_1+1}^{\infty}\frac{y(i)}{k_0}v_n(i)+\varphi\left(\frac{y}{k_0}\right)\right)\\
&=\frac{1}{l_n\|x_n\|_{\Phi,p}}\left(\sum_{i=1}^{N_1}l_n q_+\left(l_n v_n(i)\right)v_n(i)+\sum_{i=N_1+1}^{\infty}\frac{l_n}{k_0}y(i)v_n(i)+l_n\varphi\left(\frac{y}{k_0}\right)\right)\\
&=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}l_n q_+\left(l_n v_n(i)\right)v_n(i)-\sum_{i=N_1+1}^{\infty}l_n q_+\left(l_n v_n(i)\right)v_n(i)+\sum_{i=N_1+1}^{\infty}\frac{l_n y(i)v_n(i)}{k_0}+l_n\varphi\left(\frac{y}{k_0}\right)}{l_n\|x_n\|_{\Phi,p}}\\
&>\frac{1}{l_n\|x_n\|_{\Phi,p}}\left(I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)+I_\Psi\left(l_n v_n\right)-2\varepsilon+l_n\left(\|\varphi\|-\varepsilon\right)\right)\\
&=\frac{1}{l_n\|x_n\|_{\Phi,p}}\left(s_p\left(I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)\cdot s_q\left(\rho^*\left(l_n f_n\right)\right)-\left(l_n+2\right)\varepsilon\right)\\
&=\frac{1}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\left(s_p\left(I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)\|f_n\|_{\Psi,q}^{*}-\left(1+\frac{2}{l_n}\right)\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{s_p\left(I_\Phi\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)}{\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon}\left\|f_n\right\|_{\Psi,q}^* - \frac{\left(1+\dfrac{2}{l_n}\right)\varepsilon}{\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon}$$

$$= \frac{\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon}\left\|f_n\right\|_{\Psi,q}^* - \frac{\left(1+\dfrac{2}{l_n}\right)\varepsilon}{\left(1+I_\Phi^p\left(q_+\left(l_n v_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon}$$

进一步有

$$\|f\| \geq \limsup_{n\to\infty}\|f_n\| = \limsup_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_{\Phi,p}}\right) \geq \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{\Psi,q}^* = \|f\|_{\Psi,q}^*$$

结合$\|f\|\leq\|f\|_{\Psi,q}^*$，得到$\|f\|=\|f\|_{\Psi,q}^*$，定理证毕。

定理 3.7 令$1\leq p\leq\infty$， $f=(v+\varphi)\in\left(l_{\Phi,p}\right)^*\setminus\{0\}$，若 p-Amemiya 范数是 k^*-有限的，则 f 在 $x\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$ 处是范数可达的当且仅当下面条件成立

a) 当 $p=\infty,\ q=1$ 时， $\forall l\in K_1(f)$

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} lv(i)x(i)=I_\Phi(x)+I_\Psi(lv)$；

(ii) $\|\varphi\|=\varphi(x)$；

(iii) $I_\Phi(x)=1$。

b) 当$1<p,q<\infty$， $1/p+1/q=1$时， $\forall k\in K_p(x),\ l\in K_q(f)$

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} kx(i)lv(i)=I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)$；

(ii) $\|\varphi\|=\varphi(kx)$；

(iii) $I_\Phi(kx)\left(I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\right)^{q-1}=1$。

c) 当 $p=1,\ q=\infty$ 时， $\forall k\in K_1(x)$

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} kx(i)\dfrac{v(i)}{\|f\|_{\Psi,\infty}^*}=I_\Phi(kx)+I_\Psi\left(\dfrac{v}{\|f\|_{\Psi,\infty}^*}\right)$；

(ii) $\|\varphi\|=\varphi(kx)$；

(iii) $I_{\Psi}\left(\dfrac{v}{\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}}\right)+\dfrac{\|\varphi\|}{\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}}=1$。

证明 当$q=1$和∞时，$\|f\|_{\Psi,1}^{*}=\|f\|_{\Psi}^{o}$，$\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}=\|f\|_{\Psi}$，a) 和 c) 的结论在文献[73]中已经证明，只需要证明 b) 的结论。

若$\varphi\neq 0$，根据引理 3.5 有$K_q(f)\neq\varnothing$，取$k\in K_p(x), l\in K_q(v)$，于是有

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Psi,q}^{*}&=f(x)=\frac{1}{k}\left(\langle kx,v\rangle+\varphi(kx)\right)=\frac{1}{kl}\left(\langle kx,lv\rangle+l\varphi(kx)\right)\\&\leq\frac{1}{kl}\left(I_{\Phi}(kx)+I_{\Psi}(lv)+l\varphi(kx)\right)\leq\frac{1}{kl}\left(I_{\Phi}(kx)+I_{\Psi}(lv)+l\|\varphi\|\right)\\&\leq\frac{1}{k}s_p\left(I_{\Phi}(kx)\right)\cdot\frac{1}{l}s_q\left(\rho^{*}(lf)\right)=\|x\|_{\Phi,p}\cdot\|f\|_{\Psi,q}^{*}\end{aligned}$$

上面的证明过程是等价证明过程，三个条件任何一条不成立，“$\leq$”将变成“$<$”，上面的等式将不成立，则$f=v+\varphi$在x处是范数不可达的。

定理 3.8 令$1\leq p\leq\infty$，p-Amemiya 范数是k^{*}-有限的，Φ,Ψ是 Young 意义下非线性的互余的 Orlicz 函数，设$x\in l_{\Phi,p}$，则$v\in S(l_{\Psi,q})\bigcap Grad(x)$充要条件

a) 当$p=1,q=\infty$时

(i) $p_{-}\left(k|x(i)|\right)\leq v(i)\leq p_{+}\left(k|x(i)|\right)$，$i\in\mathbb{N},\quad k\in K_1(x)$；

(ii) $I_{\Psi}(v)=1$。

b) 当$1<p,q<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$时

(i) $v(i)=\dfrac{w(i)}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot sgnx(i)$，其中$w$满足$p_{-}\left(k|x(i)|\right)\leq w(i)\leq p_{+}\left(k|x(i)|\right)$，

$i\in\mathbb{N},\quad k\in K_p(x)$；

(ii) $I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}(w)=1$。

c) 当 $p=\infty, q=1$ 时

(i) $I_{\Phi}\left(x/\|x\|_{\Phi,\infty}\right)=1$；

(ii) $v(i)=\dfrac{w(i)}{\|w\|_{\Psi,1}}\cdot sgnx(i)$，其中 w 满足 $p_{-}\left(\dfrac{|x(i)|}{\|x\|_{\Phi,\infty}}\right)\le w(i)\le p_{+}\left(\dfrac{|x(i)|}{\|x\|_{\Phi,\infty}}\right)$，$i\in\mathbb{N}$。

证明 已知 $\|f\|_{\Psi,1}^{*}=\|f\|_{\Psi}^{o}$，$\|f\|_{\Psi,\infty}^{*}=\|f\|_{\Psi}$，a) 和 c) 的结论在文献[73]中已经证明，故仅需证明 b) 的结论。

充分性

设 $\langle v,x\rangle=\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|x\|_{\Phi,p}=\|x\|_{\Phi,p}$，则有 $v(i)\cdot x(i)\ge 0\ (i\in\mathbb{N})$。假设 v_0 在 x 处范数可达，由于 Φ,Ψ 是 Young 不等式意义下互余的非线性的 Orlicz 函数，有 $K_p(x)\ne\varnothing$，$K_q(v_0)\ne\varnothing$，取 $k\in K_p(x)$ 和 $l\in K_q(v_0)$，根据定理 3.7 b)-(i) 和 Young 不等式，有 $p_{-}\left(k|x(i)|\right)\le l|v_0(i)|\le p_{+}\left(k|x(i)|\right)\ (i\in\mathbb{N})$。根据定理 3.7 b)-(iii) 和 $\varphi=0$，有 $I_{\Phi}(kx)\cdot I_{\Psi}^{q-1}(w)=1$，因此 $w=l|v_0|$ 为所求。令

$$v=\frac{w}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot sgn(x),\quad p_{-}\left(k|x(i)|\right)\le w(i)\le p_{+}\left(k|x(i)|\right)\quad (i\in\mathbb{N})$$

根据 Young 不等式，引理 1.5 和 p-Amemiya 范数的定义有

$$\begin{aligned}1\ge\left\langle v,\frac{x}{\|x\|_{\Phi,p}}\right\rangle&=\frac{1}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\sum_{i=1}^{\infty}w(i)x(i)\\&=\frac{1}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\frac{1}{k}\left(I_{\Phi}(kx)+I_{\Psi}(w)\right)\\&=\frac{1}{\|w\|_{\Psi,q}}\cdot\frac{1}{\|x\|_{\Phi,p}}\frac{1}{k}s_p\left(I_{\Phi}(kx)\right)s_q\left(I_{\Psi}(w)\right)\ge\frac{\|w\|_{\Psi,q}}{\|w\|_{\Psi,q}}=1\end{aligned}$$

必要性

若条件 (i) 不成立，即 $lv_0(i)=w(i)\notin\left[p_-\left(k\left|x(i)\right|\right),p_+\left(k\left|x(i)\right|\right)\right]$，根据定理3.7 b)-(i)，$v_0$ 在 x 处是范数不可达的，因此 $v=w/\|w\|_{\Psi,q}\cdot\operatorname{sgn}x$ 不是 x 的支撑泛函。若条件 (ii) 不成立，即 $I_\Phi(kx)\cdot I_\Psi^{q-1}(w)\neq 1$，根据定理 3.3.7 b)-(iii) 和 $\varphi=0$，v_0 在 x 处是范数不可达的，因此 $v=w/\|w\|_{\Psi,q}\cdot\operatorname{sgn}x$ 不是 x 的支撑泛函，定理证毕。

3.3 赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 序列空间的光滑点

在文献[43]中已经对赋 Orlicz 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点的判据进行了讨论 (包含 $K_1(x)=\varnothing$ 的情况)。对任意 $1<p<\infty$，若 $K_p(x)=\varnothing$ 根据定理 3.1 知 Orlicz 函数 Φ 为线性函数，此时 Orlicz 序列空间等距同构于 l_1，已知 l_1 的对偶空间为 l_∞。因此，对任意 $1\le p\le\infty$，$\forall x\in l_{\Phi,p}$ 只考虑 $K_p(x)\neq\varnothing$ 的情况下的光滑点的判据。

记

$$J_x=\left\{j\in\mathbb{N}:p_-\left(k\left|x(j)\right|\right)<p_+\left(k\left|x(j)\right|\right)\right\},$$

$$\pi_{\Phi,p}(c)=\inf_{u>0}\left\{0\le u<b_\Phi:\left(\Phi(u)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_+(u)\right)\ge c\right\}$$

对于任意的 $x\in l_\Phi\setminus\{0\}$，任意 $n\in\mathbb{N}$，记

$$x_n=\left(x(1),x(2),\cdots,x(n),0,\cdots\right) \tag{3-2}$$

引理 3.2[73] 对任意 $x\in l_\Phi$，

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_\Phi=\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_\Phi^o=\theta(x)$$

其中 x_n 定义见 (3-2) 式。

根据 p-Amemiya 范数的等价性和引理 3.2，有

$$\theta(x)=\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{\Phi,p}=\inf\{\lambda>0, I_\Phi(x/\lambda)<\infty\}$$

引理 3.3[73] 令 $x\in l_\Phi$ 且 $\theta(x)\neq 0$，则存在两个不同的奇异泛函 $\varphi_i\in S((l_\Phi)^*)$ 使得 $\varphi_i(x)=\theta(x)$，$(i=1,2)$。

定理 3.9 令 $1\le p\le\infty$，$x\in l_{\Phi,p}\setminus\{0\}$，对任意奇异泛函 φ 有 $\theta(x)\le 1/k_p^{**}(x)$ 和 $\varphi(x)\le\theta(x)\cdot\|\varphi\|$。

证明 已知

$$\|x-x_n\|_{\Phi,p}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p\left(k\left(x-x_n\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{k^{**}(x)}\left(1+I_\Phi^p\left(k^{**}(x)(x-x_n)\right)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

其中 x_n 定义见 (3-2)，令 $n\to\infty$，有 $\theta(x)\le 1/k_p^{**}(x)$。由于 $x_n\in h_{\Phi,p}$，故有 $\varphi(x)=\varphi(x-x_n)\le\|\varphi\|\cdot\|x-x_n\|_{\Phi,p}$，令 $n\to\infty$ 有 $\varphi(x)\le\theta(x)\cdot\|\varphi\|$。

定理 3.10 令 $1\le p\le\infty$，$x\in l_\Phi\setminus\{0\}$，若 $\theta(x)<1/k$ 其中 $k\in K_p(x)$，则 x 的所有支撑泛函都在 $l_{\Psi,q}$ 中，其中 $1/p+1/q=1$。

证明 设 f 是 x 的支撑泛函，根据定理 3.6，f 存在唯一分解式 $f=v+\varphi$。若 $\varphi=0$ 则结论成立。若 $\varphi\neq 0$，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)v(i)+\varphi(x)$$

根据定理 3.1 知 $K_q(f)\neq\varnothing$，取 $l\in K_q(f)$，根据引理 1.4，定理 3.9，Young 不等式和 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}kl&=kl\sum_{i=1}^{\infty}x(i)v(i)+kl\varphi(x)\le I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+kl\|\varphi\|\theta(x)\\&<I_\Phi(kx)+I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\le s_p(I_\Phi(kx))s_q(I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|)\\&=s_p(I_\Phi(kx))s_q(\rho^*(lf))=kl\end{aligned}$$

该矛盾说明$\varphi=0$，定理证毕。

定理 3.11 令$1\le p\le\infty$，$x\in l_{\Phi,p}\setminus\{0\}$，若$p_{-}(\cdot)$是连续函数，$x$是光滑点的充分必要条件$x$的支撑泛函都在$l_{\Psi,q}$中。

证明 充分性

设$v_0\in S\left(l_{\Psi,q}\right)$是$x$的一个支撑泛函，若存在$x$的另一个支撑泛函$f=v+\varphi$，且$\varphi\neq 0$，则$\dfrac{f+v_0}{2}=\dfrac{v+v_0}{2}+\dfrac{\varphi}{2}$也是$x$的支撑泛函，已知

$$\|v_0\|_{\Psi,q}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_{\Psi}^{q}\left(kv_0\right)\right)^{\frac{1}{q}}=1 \text{ 和 } \|f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(I_{\Psi}\left(kv\right)+k\|\varphi\|\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

根据Ψ的凸性和 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}1=\left\|\frac{f+v_0}{2}\right\|_{\Psi,q}^{*}&=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(I_{\Psi}\left(k\frac{v+v_0}{2}\right)+k\left\|\frac{\varphi}{2}\right\|\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\left(\left(\frac{I_{\Psi}(kv)}{2}\right)+\left(\frac{I_{\Psi}(kv_0)}{2}\right)+\frac{k}{2}\|\varphi\|\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\left(1+I_{\Psi}^{q}\left(kv_0\right)\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{2}\left(1+\left(I_{\Psi}\left(kv\right)+k\|\varphi\|\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\&=\frac{\|v_0\|_{\Psi,q}}{2}+\frac{\|f\|_{\Psi,q}^{*}}{2}=1\end{aligned}$$

因此，

$$I_{\Psi}\left(k\frac{v+v_0}{2}\right)=\frac{I_{\Psi}\left(kv_0\right)}{2}+\frac{I_{\Psi}\left(kv\right)}{2}$$

即

$$\Psi\left(k\frac{v(i)+v_0(i)}{2}\right)=\frac{\Psi\left(kv(i)\right)}{2}+\frac{\Psi\left(kv_0(i)\right)}{2}\quad\left(i\in\mathbb{N}\right)$$

由于$p_{-}(x)$是连续的，所以$v_0(i)=v(i), i\in\mathbb{N}$，故$\|\varphi\|=0$，即$\varphi=0$。

必要性

设 $f = v + \varphi\ (\varphi \neq 0)$ 是 x 的支撑泛函，则

$$1 = \|f\|_{\Psi,q}^{*} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \left(\rho^{*}\left(kf\right)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + I_{\Psi}^{q}\left(kv\right)\right)^{\frac{1}{q}} = \|v\|_{\Psi,q}$$

故 $x \notin h_{\Phi,p}$，根据 $\theta(x) = \lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|_{\Phi,p}$，选择自然数 m_n 满足：

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\theta(x) < \lim_{n\to\infty}\left\|x_{m_n} - x_{m_{n-1}}\right\|_{\Phi,p} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)\theta(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

定义

$$x' = \left(\overbrace{x(1), \cdots, x(m_1)}^{m_1}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m_2 - m_1}, \overbrace{x(m_2 + 1), \cdots, x(m_3)}^{m_3 - m_2}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m_4 - m_3}, \cdots\right) \tag{3-3}$$

$$x'' = x - x' \tag{3-4}$$

则有 $\theta(x') = \theta(x'') = \theta(x)$，根据引理 3.3，存在两个不同的奇异泛函 $\varphi_i, i = 1, 2$ 满足 $\|\varphi_i\| = 1, \varphi_1(x) = \theta(x')$，$\varphi_2(x) = \theta(x'')$ 且 $\varphi_1(x'') = 0, \varphi_2(x') = 0$。令 $f_i = v + \|\varphi\| \cdot \varphi_i$，则 $f_1 \neq f_2$。根据定理 3.2，有 $\|f_1\|_{\Psi,q}^{*} = \|f_2\|_{\Psi,q}^{*} = 1$。根据定理 3.9 有

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} x(i)v(i) + \|\varphi\| \cdot \varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)v(i) + \|\varphi\| \cdot \varphi_1(x' + x'') \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x(i)v(i) + \|\varphi\| \cdot \varphi_1(x') = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)v(i) + \|\varphi\|\theta(x) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} x(i)v(i) + \varphi(x) = f(x) \end{aligned}$$

故 f_1 也是 x 的一个支撑泛函，说明 x 不是 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点，定理证毕。

定理 3.12 令 $1 \leq p \leq \infty$，$x \in l_{\Phi,p} \setminus \{0\}$ 且 $K_p(x) \neq \varnothing$，则 x 是光滑点当且仅当

(i) $a_{\Psi} = 0$；

(ii) 当 $1 \leq p < \infty$ 时，$I_{\Phi}^{p-1}(kx) \cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(k|x|\right)\right) = 1$，或 $\theta(x) < 1/k$ 与 $I_{\Phi}^{p-1}(kx) \cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(k|x|\right)\right) = 1$ 同时成立，或 $card\, J_x \leq 1$ 成立；

(iii) 当 $p = \infty$ 时，$\theta(x) < 1$ 且 $card\left\{i \in N : p_{-}\left(|x(i)|\right) < p_{+}\left(|x(i)|\right)\right\} = 0$。

证明 必要性

若 (i) 不真，对任意 $f=(v+\varphi)\in Grad(x)$，存在 $i_0\notin supp(x)$。若 $v(i_0)>0$，设

$$\overline{v}=\begin{cases} v(i), & i\neq i_0 \\ 0, & i=i_0 \end{cases}$$

$\overline{v}+\varphi\neq v+\varphi$，显然 $\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\leq\|v+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}=1$。由 $(\overline{v}+\varphi)(x)=(v+\varphi)(x)=\|x\|_{\Phi,p}$，有 $\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\geq 1$，因此 $(\overline{v}+\varphi)\in Grad(x)$，说明 x 不是 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点。

若 $v(i_0)=0$，取 $l\in K_q(f)$，存在 $c>0$ 使得 $lc\leq a_\Psi$，设

$$\overline{v}=\begin{cases} v(i), & i\neq i_0 \\ c, & i=i_0 \end{cases}$$

故，$\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\leq\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi(l\overline{v})+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{l}\left(1+\left(I_\Psi(lv)+l\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|v+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}=1$ 由于 $(\overline{v}+\varphi)(x)=(v+\varphi)(x)=\|x\|_{\Phi,p}$，有 $\|\overline{v}+\varphi\|_{\Psi,q}^{*}\geq 1$，因此，$\overline{v}+\varphi\in Grad(x)$，说明 x 不是 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点。

(ii) 设 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)\neq 1$，根据定理 3.8，有

$$I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)=\alpha<1$$

若 $\theta(x)<1/k$，根据定理 3.10 知 x 的所有的支撑泛函都在 $l_{\Psi,q}$ 中。因此若 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(k|x|\right)\right)\neq 1$，我们必有 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(k|x|\right)\right)>1$，则集合

$$V=\left\{v\operatorname{sgn}x:\ p_-\left(k|x|\right)\leq lv\leq p_+\left(k|x|\right),\ I_\Phi^{p-1}(kx)I_\Psi(lv)=1\right\}$$

包含了无穷多个元素，根据定理 3.8，每一个 $v\cdot\operatorname{sgn}x/\|v\|_{\Psi,q}$ 都是 x 的支撑泛函，

这说明 x 不是 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点。

现在，假设 $\theta(x)=1/k$ （$I_\Phi(kx)=\left(\left(k\|x\|_{\Phi,p}\right)^p-1\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ 蕴含 $\theta(x)\le 1/k$），$f=v+\varphi$ 为 x 的支撑泛函且 $I_\Phi^{p-1}(kx)\left(I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)+\|\varphi\|\right)=1$ 即 $\|\varphi\|=\dfrac{1-\alpha}{I_\Phi^{p-1}(kx)}$。设 $x=x'+x''$，x',x'' 的定义见式 (3-3)，(3-4)。根据引理 3.3，存在两个不同的奇异泛函 φ_i $(i=1,2)$ 满足 $\|\varphi_i\|=1,\varphi_1(x)=\theta(x')$，$\varphi_2(x)=\theta(x'')$ 且 $\varphi_1(x'')=0$，$\varphi_2(x')=0$。令 $f_i=p_-\left(k|u|\right)+\|\varphi\|\cdot\varphi_i$ $(i=1,2)$，则 $f_1\ne f_2$。根据定理 3.2，有 $\|f_1\|_{\Psi,q}^*=\|f_2\|_{\Psi,q}^*=1$。根据 Young 不等式和 p-Amemiya 范数定义，有

$$
\begin{aligned}
f_1(x)&=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)\,p_-\left(k|x(i)|\right)+\|\varphi\|\cdot\varphi_1(x)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)\,p_-\left(k|x(i)|\right)+\|\varphi\|\cdot\varphi_1(x'+x'')\\
&=\frac{1}{k}\Big(I_\Phi(kx)+I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)\Big)+\|\varphi\|\theta(x)\\
&=\frac{1}{k}\Big(I_\Phi(kx)+I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)+\|\varphi\|\Big)\\
&=\frac{1}{k}s_p\left(I_\Phi(kx)\right)\cdot s_q\Big(I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)+\|\varphi\|\Big)\ge\|x\|_{\Phi,p}\cdot\|f_1\|_{\Psi,q}^*
\end{aligned}
$$

类似有 $f_2(x)\ge\|x\|_{\Phi,p}\cdot\|f_2\|_{\Psi,q}^*$，因此 f_1，f_2 都是 x 的支撑泛函，x 不是 $l_{\Phi,p}$ 的光滑点。

(iii) 文献[73]中已经给出条件 (iii) 的证明，在此省略。

充分性

若 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k|x|\right)\right)=1$，显然 $v=p_-(kx)\operatorname{sgn}x$ 在 x 处范数可达且 φ=0，因此 $p_-(kx)\operatorname{sgn}x\big/\|p_-(kx)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。

若$\theta(x)<1/k$，根据定理3.3，有φ=0。由于$I_{\Phi}^{p-1}(kx)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(k|x|\right)\right)=1$，显然有$v=p_{+}(kx)\operatorname{sgn}x$在$x$处范数可达且$\varphi$=0，因此$p_{+}(kx)\operatorname{sgn}x\Big/\left\|p_{+}(kx)\right\|_{\Psi,q}$是$x$的唯一支撑泛函。

假设$\theta(x)<1/k$，$card\,J_{x}\le 1$且$J_{x}=\{i\}$，令v'在x点处范数可达，则$v=v'\big/\|v'\|_{\Psi,q}$是x的支撑泛函，显然对所有的$j\ne i$

$$v(j)=\frac{p_{+}\left(k\left|x(j)\right|\right)}{\left\|v'\right\|_{\Psi,q}}\cdot\operatorname{sgn}x(j)$$

取$l\in K_{q}(v)$，有

$$1=\|v\|_{\Psi,q}=\frac{1}{l}\left(1+I_{\Psi}^{q}(lv)\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{l}\left(1+\left(\sum_{j\ne i}\Psi\left(lv(j)\right)+\Psi\left(lv(i)\right)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

推出

$$\Psi\left(lv(i)\right)=\left(l^{q}-1\right)^{\frac{1}{q}}-\sum_{j\ne i}\Psi\left(lv(j)\right)$$

即

$$v(i)=\frac{1}{l}\Psi^{-1}\left(\left(l^{q}-1\right)^{\frac{1}{q}}-\sum_{j\ne i}\Psi\left(lv(j)\right)\right)$$

因此，v是唯一确定的，定理证毕。

$p=\infty$时的情况已在文献[73]中证明，在此省略。

3.4 赋p-Amemyia范数Orlicz序列空间的光滑性

定理3.13 令$1\le p\le\infty$，下面叙述等价：

(i) $h_{\Phi,p}$是光滑的；

(ii) $a_{\Psi}=0$，当$1\le p<\infty$时，$p_{-}(x)$在$\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)$连续且

$$\left(\Phi\left(\pi_{\Phi,p}\left(1/2\right)\right)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_-\left(\pi_{\Phi,p}\left(1/2\right)\right)\right)=\frac{1}{2^p},$$

当 $p=\infty$ 时，$p_-\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,\infty}\left(1\right)\right)$ 连续；

(iii) $a_\Psi=0$，当 $1\le p<\infty$ 时，$q_-\left(v\right)$ 在 $\left[0,p_-\left(\pi_{\Phi,p}\left(1/2\right)\right)\right)$ 严格增加，当 $p=\infty$ 时，$q_-\left(v\right)$ 在 $\left[0,p_-\left(\pi_{\Phi,\infty}\left(1\right)\right)\right)$ 严格增加。

证明 $p=\infty$ 的情况已经在文献[73]中证明，在此省略。

(i) $\Rightarrow$ (ii)

由定理 3.12 知 $a_\Psi=0$，若 $p_-\left(x\right)$ 在 $\left[0,p_-\left(\pi_{\Phi,p}\left(1/2\right)\right)\right)$ 不连续，则存在 $\alpha\in\left(0,\pi_{\Phi,p}\left(1/2\right)\right)$ 使得 $p_-\left(\alpha\right)<p_+\left(\alpha\right)$，定义

$$\beta_1=\inf\left\{b>0:\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(b\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_-\left(b\right)\right)\right)\ge 1\right\}$$

$$\beta_2=\sup\left\{b>0:\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(b\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(b\right)\right)\right)\le 1\right\}$$

根据 β_1,β_2 的定义，有 $\beta_1\le\beta_2$，设 $x=\left(\alpha,\alpha,\beta,0,\cdots\right)$ 其中 $\beta\in\left[\beta_1,\beta_2\right]$，则有

$$\begin{aligned}I_\Phi^{p-1}\left(x\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(x\right)\right)&=\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(\beta\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_-\left(\beta\right)\right)\right)\\&\le\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(\beta\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(\beta\right)\right)\right)=1\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}I_\Phi^{p-1}\left(x\right)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(x\right)\right)&=\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(\beta\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_+\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(\beta\right)\right)\right)\\&\ge\left(2\Phi\left(\alpha\right)+\Phi\left(\beta\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\alpha\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(\beta\right)\right)\right)=1\end{aligned}$$

有 $1\in K_p\left(x\right)$，由于 $card\,J_x=2$，根据定理 3.12，x 不是 $h_{\Phi,p}$ 的光滑点。

若

$$\left(\Phi\left(\pi_{\Phi,p}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_-\left(\pi_{\Phi,p}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)<\frac{1}{2^p}\le\left(\Phi\left(\pi_{\Phi,p}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_+\left(\pi_{\Phi,p}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

取$0<s<\pi_{\Phi,p}$使得

$$\left(2\Phi\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)+\Phi(s)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)+\Psi\left(p_-(s)\right)\right)<1$$

设$x=\left(\pi_{\Phi,p},\pi_{\Phi,p},s,0,\cdots\right)$，有

$$I_\Phi^{p-1}(x)I_\Psi\left(p_-(x)\right)=\left(2\Phi\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)+\Phi(s)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_-\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)+\Psi\left(p_-(s)\right)\right)<1$$

和

$$\begin{aligned}I_\Phi^{p-1}(x)I_\Psi\left(p_+(x)\right)&=\left(2\Phi\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)+\Phi(s)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_+\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)+\Psi\left(p_+(s)\right)\right)\\&\geq\left(2\Phi\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)^{p-1}\cdot\left(2\Psi\left(p_+\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)+\Psi\left(p_+(s)\right)\right)\\&\geq1+\left(2\Phi\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)^{p-1}\Psi\left(p_+(s)\right)>1\end{aligned}$$

得到$1\in K_p(x)$，由于$card\,J_x=2$，根据定理3.12，x不是$h_{\Phi,p}$的光滑点。

(ii)$\Rightarrow$(iii) 显然。

(iii)$\Rightarrow$(i) 若$a_\Psi\neq0$，根据定理3.12，$h_{\Phi,p}$不是光滑的。

$\forall x\in h_{\Phi,p}$，若$I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-(kx)\right)=1$，则$v=p_-(kx)\operatorname{sgn}x\big/\left\|p_-(kx)\right\|_{\Psi,q}$是$x$的唯一支撑泛函。若$I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-(kx)\right)<1$，从下面不等式

$$1>I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi\left(p_-(kx)\right)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\Phi\left(kx(j)\right)\right)^{p-1}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\Psi\left(p_-\left(kx(j)\right)\right)$$

可推出至多存在一个j'满足$\left(\Phi\left(kx(j')\right)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_-\left(kx(j')\right)\right)\geq1/2^p$由于$q_-(v)$在$\left[0,p_-\left(\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)\right)$严格增加，知道对每一个$i\in\mathbb{N}$，$kx(i)$是$p_-(x)$的连续点且$\left(\Phi\left(kx(i)\right)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_-\left(kx(i)\right)\right)\leq1/2^p$。因此$p_-\left(kx(i)\right)=p_+\left(kx(i)\right)$，由于$card\,J_x<1$

且$\theta(x)=0<1/k$，根据定理 3.10，x 是$h_{\Phi,p}$的一个光滑点，由 x 的任意性，$h_{\Phi,p}$是光滑的。

定理 3.14 令$1\le p\le\infty$，下面叙述等价：

(i) $l_{\Phi,p}$是光滑的；

(ii) $a_\Psi=0$，$\Phi\in\delta_2$，当$1\le p<\infty$时，$p_-(x)$在$\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)$连续，当$p=\infty$时，$p_-(x)$在$\left[0,\pi_{\Phi,\infty}(1)\right)$连续；

(iii) $a_\Psi=0$，$\Phi\in\delta_2$，当$1\le p<\infty$时，$q_-(v)$在$\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right)$严格增加，当$p=\infty$时，$q_-(v)$在$\left[0,\pi_{\Phi,\infty}(1)\right)$严格增加。

证明 只需证明$\Phi\in\delta_2$，假设$\Phi\notin\delta_2$，则存在$a_n\searrow 0$使得

$$a_n p_-(a_n)<\frac{1}{2^n},\quad p_-\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n\right)>2^n p_-(a_n)$$

选取自然数m_n满足

$$\frac{1}{2^{n+1}}\le m_n a_n p_-(a_n)<\frac{1}{2^n}\quad (n=1,2\cdots)$$

定义

$$x=\left(\overbrace{a_1,\cdots,a_1}^{m_1},\overbrace{a_2,\cdots,a_2}^{m_2},\overbrace{a_3,\cdots,a_3}^{m_3},\cdots\right)$$

则有

$$\langle x,p_-(x)\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}m_n a_n p_-(a_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

因此根据$\langle x,p_-(x)\rangle=I_\Phi(x)+I_\Psi(p_-(x))$，有$I_\Psi(p_-(x))<1$和$I_\Phi(x)<1$。注意到对任意$\lambda>0$

$$
\begin{aligned}
&I_\Psi\left(p_-\left(\left(1+\lambda\right)x\right)\right)+I_\Phi\left(x\right)\geq\left\langle x,p_-\left(\left(1+\lambda\right)x\right)\right\rangle\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}m_na_np_-\left(\left(1+\lambda\right)a_n\right)\geq\sum_{n\geq\frac{1}{\lambda}}m_na_np_-\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n\right)\\
&\geq\sum_{n\geq\frac{1}{\lambda}}m_na_n2^np_-\left(a_n\right)\geq\sum_{n\geq\frac{1}{\lambda}}\frac{1}{2}=\infty
\end{aligned}
$$

得到$I_\Psi\left(p_-\left(1+\lambda\right)x\right)=\infty$，对任意$\lambda>0$也有

$$
\begin{aligned}
I_\Phi\left(\left(1+2\lambda\right)x\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}m_n\Phi\left(\left(1+2\lambda\right)a_n\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}m_n\int_{(1+\lambda)a_n}^{(1+2\lambda)a_n}p_-\left(s\right)ds\\
&\geq\sum_{n=1}^{\infty}m_n\lambda a_np_-\left(\left(1+\lambda\right)a_n\right)=\frac{\lambda}{1+\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}m_n\left(1+\lambda\right)a_np_-\left(\left(1+\lambda\right)a_n\right)\\
&=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left\langle\left(1+\lambda\right)x,p_-\left(\left(1+\lambda\right)x\right)\right\rangle\geq\frac{\lambda}{1+\lambda}I_\Psi\left(p_-\left(1+\lambda\right)x\right)=\infty
\end{aligned}
$$

故$I_\Phi^{p-1}\left(\left(1+\lambda\right)x\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(\left(1+\lambda\right)x\right)\right)=\infty$这说明$K_p\left(x\right)=\{1\}$，$\theta\left(x\right)=1$，根据定理3.12，$x$不是$l_{\Phi,p}$的光滑点，定理证毕。

3.5 本章小结

本章对赋p-Amemyia 范数 Orlicz 序列空间$l_{\Phi,p}$的光滑性进行了研究。首先，在$l_{\Phi,p}$的对偶空间$\left(l_{\Phi,p}\right)^*$引入一类新范数$\|\cdot\|_{\Psi,q}^*$，并证明了$\|\cdot\|_{\Psi,q}^*$是$l_{\Phi,p}$上有界线性泛函的范数计算公式。其次，利用有界线性泛函范数计算公式给出了空间单位球面上点的支撑泛函的具体形式。最后，利用单位球面上点支撑泛函的具体形式，解决了$l_{\Phi,p}$单位球面光滑点的刻画问题并得到了$l_{\Phi,p}$具有光滑性的充要条件。

第 4 章 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间的严格凸性

4.1 引言

严格凸性是 Banach 空间几何理论的重要研究内容之一。Banach 空间的严格凸性是研究其它几何性质的基础。赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的 Orlicz 序列空间的严格凸性已经得到解决 (参看文献[26,27])。本章对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 的严格凸性进行研究。下面介绍严格凸性的相关知识。

定义 4.1[2] 称 $x\in S(X)$ 为 $B(X)$ 的端点是指若存在 $y,z\in S(X)$，使得 $x=(y+z)/2$ ，则 y=z。

定义 4.2[2] 如果单位球面 $S(X)$ 上的点都是端点，则 Banach 空间 X 是严格凸的。

定义 4.3[73] 设 Φ 为 Orlicz 函数，称 $w\in R$ 为 Φ 的严格凸点是指若 $w=\dfrac{u+v}{2}$ 且 $u\neq v$，则 $\Phi\left(\dfrac{u+v}{2}\right)<\dfrac{\Phi(u)+\Phi(v)}{2}$，记为 $w\in SC_{\Phi}$。

记 $\sigma_p=\max\{u\geq 0: s_p(u)=1\}$， $\varepsilon_p=1-[1/p]$，其中 $[1/p]$ 表示不超过 $1/p$ 的最大整数，显然

$$\sigma_p=\begin{cases}0, & 1\leq p<\infty\\ 1, & p=\infty\end{cases}\qquad \varepsilon_p=\begin{cases}0, & p=1\\ 1, & 1<p\leq\infty\end{cases}$$

4.2 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间的严格凸性

引理 4.1[87] 令 $1\leq p\leq\infty$，点 $x=(x(i))\in S(l_{\Phi,p})$ 是端点当且仅当：

(i) 若 $card(supp\,x)\geq 2$，则 $K_p(x)\neq\varnothing$；

(ii) 或$card\left(supp\ x\right)=1$或对任意$k\in K_p\left(x\right)$，$card\left\{i\in\mathbb{N}:kx\left(i\right)\notin SC_\Phi\right\}\le\varepsilon_p$；

(iii) 对任意$k\in K_p\left(x\right)$，$I_\Phi\left(kx\right)\ge\sigma_p$或$\left|x\left(i\right)\right|=b_\Phi<\infty\ \left(i\in\mathbb{N}\right)$。

引理 4.2[26] 令$d=\sup\left\{0\le v\le b_\Psi:\Psi\left(v\right)<1\right\}$，$l_\Phi^o$是严格凸的当且仅当下面条件成立：

a) $\Psi\left(d\right)>1/2$；

b) $q_-\left(\cdot\right)$在$\left[0,d\right)$上连续；

c) 若$\Psi\left(d\right)<1$则$q_-\left(d\right)=\lim\limits_{v\to d^-}q_-\left(v\right)=\infty$。

定理 4.1 令$1\le p\le\infty$，对任意 Orlicz 函数Φ，任意 c>0 有

$$\pi_{\Phi,p}\left(c\right)=\sup\left\{0\le u<b_\Phi:\Phi^{\frac{1}{q}}\left(u\right)\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_+\left(u\right)\right)<c\right\}>0\ \left(\frac{1}{\infty}=0\right)$$

证明 若对任意$x\in\left(0,b_\Phi\right)$有$\Phi^{\frac{1}{q}}\left(x\right)\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_+\left(x\right)\right)\ge c$，由$\Phi^{\frac{1}{q}}\left(x\right)\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_+\left(x\right)\right)$在 0 点是右连续的，有

$$0=\Phi^{\frac{1}{q}}\left(0\right)\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_+\left(0\right)\right)=\lim_{x\to0^+}\Phi^{\frac{1}{q}}\left(x\right)\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_+\left(x\right)\right)\ge c>0$$

矛盾。

定理 4.2 令$1\le p<\infty$，若$a_\Phi>0$，则$l_{\Phi,p}$包含l_∞的等距同构子空间。

证明 为了构造从l_∞到$l_{\Phi,p}$的闭子集上保持序关系的等距映射 P，需要找到支撑集两两不交的点列$\left\{x_n\right\}\subset S\left(l_{\Phi,p}\right)$满足

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right\|_{\Phi,p}=1$$

从l_∞到$l_{\Phi,p}$的算子 P 定义为

$$Py=\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

其中 $y=(y_n)\in l_\infty$。将自然数集 $\mathbb{N}$ 分成两两不交的无限子序列 $(N_n)_{n=1}^{\infty}$，定义 $x_n=(x_n(i))_{i=1}^{\infty}$，其中

$$x_n(i)=\begin{cases} a_\Phi, & i\in N_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\left(1+I_\Phi^p(x_n)\right)^{1/p}=1$，进而，对任意 $k\in(0,1)$ 有

$$\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p(kx_n)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k}>1$$

由于集合 N_n 是无限集合，且对任意 $k>1$ 有 $\Phi(ka)>0$，对任意 $k>1$ 有

$$\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p(kx_n)\right)^{\frac{1}{p}}=\infty$$

故

$$\|x_n\|_{\Phi,p}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+I_\Phi^p(kx_n)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(1+I_\Phi^p(x_n)\right)^{\frac{1}{p}}=1\ (n\in\mathbb{N})$$

同样方法可证明

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|_{\Phi,p}=1$$

定理得证。

定理 4.3 赋 1-Amemiya (Orlicz) 范数 Orlicz 序列空间是严格凸的当且仅当

(i) $a_\Phi=0$；

(ii) 存在 $x_0>0$ 使得 $\Psi(p_+(x_0))>1/2$；

(iii) Φ 在 $[0,\pi_{\Phi,1}(1)]$ 上是严格凸的。

证明 由定理 4.1 知 $\pi_{\Phi,1}(1)>0$。

充分性

令 $x\in S(l_{\Phi,1})$，只需满足引理 4.1 的条件，即 x 是 $B(l_{\Phi,1})$ 的端点。

设 $card(supp\, x)\geq 2$，存在指标 i,j 满足 $i\neq j$，且 $0<|x(i)|<|x(j)|$，设 $0<x_0<\infty$ 满足

$$\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)>\frac{1}{2}$$

由于 $x_0<\infty$，故存在 $k\in(0,\infty)$ 使得 $kx(i)>x_0$，因此

$$\Psi\left(p_+\left(k\left|x(i)\right|\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(k\left|x(j)\right|\right)\right)\geq 2\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)>1$$

于是 $k_1^*(x)<\infty$，引理 4.1 的条件 (i) 满足。

令 $k_0\in K_1(x)$，有 $\Psi\left(p_+\left(k_0\left|x(i)\right|\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(k_0\left|x(j)\right|\right)\right)\leq I_\Psi\left(p_+\left(k_0\left|x\right|\right)\right)\leq 1$ 由条件 (iii)，Φ 在 0 点的右邻域是严格凸的，对任意 $x>0$ 有 $\Psi\left(p_+(x)\right)>0$，因此 $\Psi\left(p_+\left(k_0\left|x(i)\right|\right)\right)\leq 1-\Psi\left(p_+\left(k_0\left|x(j)\right|\right)\right)<1$。故 $k_0\left|x(i)\right|\leq\pi_{\Phi,1}(1)$，$k_0x(i)$ 是 Φ 的严格凸点，由 i 的任意性，对任意 $i\geq 1$，$0\neq k_0x(i)\in SC_\Phi$。进一步，由 a_Φ=0，有 $0\in SC_\Phi$，故对任意 $i\geq 1$，$k_0x(i)\in SC_\Phi$，引理 4.1 的条件 (ii) 满足。

由 a_Φ=0 有 $I_\Phi\left(k_0x\right)\geq\Phi\left(k_0x(i)\right)>0$，引理 4.1 的条件 (iii) 也成立，因此 x 是 $B\left(l_{\Phi,1}\right)$ 的端点，由 x 的任意性 $l_{\Phi,1}$ 是严格凸的。

必要性 设 $l_{\Phi,1}$ 是严格凸的。

(i) 若 a_Φ>0，根据定理 4.1 知，$l_{\Phi,1}$ 含有 l_∞ 的等距同构子空间，故 $l_{\Phi,1}$ 不是严格凸的，故条件 (i) 成立。

(ii) 假设条件 (ii) 不成立，即对任意 $x>0$ 都有 $\Psi\left(p_+(x)\right)\leq 1/2$，由 $0<c=\lim p_+(x)<\infty$，取 $a\in(0,1/c)$，令 $b=1/c-a$，显然 $0<b<\infty$，设 $x=(a,b,0,\cdots)$，则对任意 $k>0$ 有 $I_\Psi\left(p_+(kx)\right)=\Psi\left(p_+(ka)\right)+\Psi\left(p_+(kb)\right)\leq 1$，因此

$$\|x\|_{\Phi,1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(1+\Phi(ka)+\Phi(kb)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\Phi(ka)}{ka}a+\frac{\Phi(kb)}{kb}b\right)=c\left(a+b\right)=1$$

令 $y=(b,a,0,\cdots)$，则 $\|y\|_{\Phi,1}$=1，且 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\Phi,1}=1$，但是 $x\neq y$，故 x 不是 $B\left(l_{\Phi,1}\right)$ 的

端点，这与 $l_{\Phi,1}$ 是严格凸的矛盾，故条件 (ii) 成立。

(iii) 首先，说明能找到 $x_0\in\left(0,b_\Phi\right)$ 满足 $0<\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)<\infty$，否则，对任意 $0\le x<a_\Phi=b_\Phi<\infty$ 有 $\Psi\left(p_+\left(x\right)\right)=0$，由此推出对任意 $0<v\le a_\Psi=b_\Psi<\infty$ 有 $\Psi(v)=0$，则 Φ 在 R 上为线性函数 ($\Phi(u)=b_\Psi u$)，于是 $l_{\Phi,1}$ 等距同构于 l_1，因此 $l_{\Phi,1}$ 不是严格凸的，该矛盾说明存在 $x_0\in\left(0,b_\Phi\right)$ 满足 $0<\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)<\infty$。

设 Φ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,1}\right]$ 上不是严格凸的，即 Φ 在某个 $\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)\subset\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right]$ 是仿射函数，则

$$\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)\le\Psi\left(p_+\left(a+\varepsilon\right)\right)<1$$

选取 $u_0\in\left(0,b_\Phi\right)$ 使得 $0<\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)<\infty$，令

$$m=\max\left\{n\in\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}:\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+n\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)<1\right\}$$

$$b=\sup\left\{0\le u<u_0:\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(u\right)\right)\le 1\right\}$$

显然 $b<\infty$，证明 $b>0$，否则设 $b=0$，即对任意 $u\in\left(0,u_0\right)$

$$\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(u\right)\right)>1$$

因为 0 是 $\Psi\left(p_+\left(\cdot\right)\right)$ 的右连续点且 $\Psi\left(p_+\left(0\right)\right)=0$，有

$$\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)=\lim_{u\to 0^+}\left(\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(u\right)\right)\right)\ge 1$$

矛盾，因此 $b>0$。定义 $k_0=1+\Phi\left(a\right)+m\Phi\left(u_0\right)+\Phi\left(b\right)$，令

$$x=\frac{1}{k_0}\left(a,u_0,\cdots,u_0,b,0,\cdots\right)\ \ (u_0\text{ 重复 } m \text{ 次})$$

则 $k_0\in K_1\left(x\right)$ 且 $I_\Psi\left(p_+\left(k_0|x|\right)\right)\le 1$，对任意 $\gamma>1$，

$$\begin{aligned}I_\Psi\left(p_+\left(\gamma k_0|x|\right)\right)&=\Psi\left(p_+\left(\gamma a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(\gamma u_0\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(\gamma b\right)\right)\\&\ge\Psi\left(p_+\left(a\right)\right)+m\Psi\left(p_+\left(u_0\right)\right)+\Psi\left(p_+\left(\gamma b\right)\right)>1\end{aligned}$$

因此，

$$\|x\|_{\Phi,1}=\frac{1}{k_0}\left(1+I_\Phi\left(k_0x\right)\right)=\frac{1+\Phi\left(a\right)+m\Phi\left(u_0\right)+\Phi\left(b\right)}{1+\Phi\left(a\right)+m\Phi\left(u_0\right)+\Phi\left(b\right)}=1$$

由于$k_0x\left(1\right)=a\notin SC_\Phi$，故 x 不是$B\left(l_{\Phi,1}\right)$的端点，因此$l_{\Phi,1}$不是严格凸的，定理得证。

定理 4.4 引理 4.2 的 a)，b) 条件与定理 4.3 的 (i)，(ii)和(iii) 条件等价。

证明 b) $\Rightarrow$ (i) 设$a_\Phi>0$，则$\lim\limits_{v\to0^+}q_-\left(v\right)=\lim\limits_{v\to0^+}q_+\left(v\right)\geq a_\Phi>0=q_-\left(0\right)$

因此 0 不是q_-的右连续点，得到矛盾，故$a_\Phi=0$。

a) $\Rightarrow$ (ii) 假设$\Psi\left(d\right)>1/2$，由Ψ的连续性，能找到$\delta>0$使得$\Psi\left(d-\delta\right)>1/2$。下面证明对某个 $x>0$ 有 $p_+\left(x\right)\geq d-\delta$，若对任意的$x\geq0$都有$p_+\left(x\right)<d-\delta$，得到

$$b_\Psi=\sup_{x\geq0}p_+\left(x\right)\leq d-\delta<d\leq b_\Psi$$

矛盾。因此存在某个 $x>0$ 使得$p_+\left(x\right)\geq d-\delta$，于是条件 (ii) 成立。

b) $\Rightarrow$ (iii) 首先证明对任意 $x\in\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$ 有 $p_+\left(x\right)\leq d$，若对某个 $x\in\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$ 有 $p_+\left(x\right)>d$，则当 $d=b_\Psi$ 有 $\Psi\left(d\right)\leq\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)<1$。因此 $b_\Psi=d<p_+\left(x_0\right)\leq b_\Psi$ 矛盾。故$v_0=\sup\left\{p_+\left(x\right):0\leq x\leq\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right\}\leq d$，由于$q_-$在$\left[0,d\right)$上是连续函数，$p_+\left(\cdot\right)=q_-^{-1}\left(\cdot\right)$在$\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$是严格增加的，所以$\Phi$在$\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$上是严格凸的。

(ii) $\Rightarrow$a) 假设对某个$x_0\in\left(0,\infty\right)$有$\Psi\left(p_+\left(x_0\right)\right)>1/2$，若$p_+\left(x_0\right)=\infty$，则$b_\Phi<\infty$，因此当$\Psi\left(d\right)=1>1/2$时$b_\Psi=\infty$。进一步若$p_+\left(x_0\right)<\infty$则能找到$\delta>0$使得$\Psi\left(p_+\left(x_0\right)-\delta\right)\geq1/2$，因此当$\Psi\left(d\right)>\Psi\left(p_+\left(x_0\right)-\delta\right)>1/2$时$p_+\left(x_0\right)-\delta<b_\Psi$。

(iii) $\Rightarrow$b) Orlicz 函数Φ在区间$\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$上是严格凸的，则函数$p_+\left(\cdot\right)$在区间$\left[0,\pi_{\Phi,1}\left(1\right)\right)$是严格增加的，因此$q_-\left(\cdot\right)=p_+^{-1}\left(\cdot\right)$在$\left(0,v\right)$上是连续的其中

$v=\lim\limits_{x\to\pi_{\Phi,1}^{-}(1)}p_{+}(x)=p_{-}\left(\pi_{\Phi,1}(1)\right)$。由于对任意 $x\geq\pi_{\Phi,1}(1)$ 有 $\Psi\left(p_{+}(x)\right)\geq1$，根据 p_{+} 的右连续性，$\Psi\left(p_{+}\left(\pi_{\Phi,1}(1)\right)\right)\geq1$，因此 $p_{-}\left(\pi_{\Phi,1}(1)\right)\leq d\leq p_{+}\left(\pi_{\Phi,1}(1)\right)$，由于 $q_{-}(\cdot)$ 在区间 $\left(p_{-}(x),p_{+}(x)\right)$ 是常数，$q_{-}(\cdot)$ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,1}(1)\right)$ 连续，在 $[0,d)$ 也连续。

(iii) $\Rightarrow$ c) 若 $\Psi(d)<1$ 则 $d=b_{\Psi}=\lim\limits_{x\to\infty}p_{+}(x)<\infty$，由于对于任意 $x\in(0,\infty)$ 有 $b_{\Phi}=\infty$ 和 $\Psi\left(p_{+}(x)\right)\leq\Psi(d)<1$，因此 $\pi_{\Phi,1}=\infty$。根据 (iii)，Φ 在 $(0,\infty)$ 上是严格凸，于是当 $q_{-}(d)=q_{-}(b_{\Psi})=\infty$ 时 $p_{+}(\cdot)$ 在 $(0,\infty)$ 严格增加，定理证毕。

由定理 4.1 知 $\pi_{\Phi,p}\left(\frac{1}{2}\right)=\sup\left\{t>0:\left(\Phi(t)\right)^{p-1}\cdot\Psi\left(p_{+}(t)\right)\leq\frac{1}{2^{p}}\right\}>0\left(1\leq p<\infty\right)$。

定理 4.5 赋 p-Amemiya ($1<p<\infty$) 范数 Orlicz 序列空间是严格凸的当且仅当

(i) $a_{\Phi}=0$；

(ii) Φ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right]$ 上是严格凸的。

证明 充分性

令 $x\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$，证明 x 是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的端点，若 $card\left(supp\ x\right)=1$，结论显然，我们只需要证明 $card\left(supp\ x\right)>1$ 的情况。

由定理 4.1 知 $\pi_{\Phi,p}(1/2)>0$，Φ 在包含 0 的开区间是严格凸的，因此对任意 $x>0$ 有 $\Psi\left(p_{+}(x)\right)>\Psi\left(p_{+}(0)\right)=0$，因为 Φ 在 $\mathbb{R}$ 上不是线性函数，由引理 3.1 知对任意 $z\in l_{\Phi,p}\setminus\{0\}$，$K_{p}(z)\neq\varnothing$。令 $k\in K_{p}(x)$，证明至多有一个指标 $i\geq1$ 满足不等式 $\Phi^{p-1}\left(kx(i)\right)\Psi\left(p_{+}\left(k\left|x(i)\right|\right)\right)>1/2^{p}$ 否则，若存在 $i,j\geq1$，$i\neq j$，$kx(i)\neq0$，

$kx(j)\neq 0$使得反向不等式成立，不失一般性，设$|x(i)|\leq|x(j)|$，则得到

$$
\begin{aligned}
1&<2\left[\Phi^{p-1}\left(kx(i)\right)\Psi\left(p_{+}\left(k|x(i)|\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=2^{\frac{1}{q}}\Phi^{\frac{1}{q}}\left(kx(i)\right)\cdot 2^{\frac{1}{p}}\Psi^{\frac{1}{p}}\left(p_{+}\left(k|x(i)|\right)\right)\\
&\leq\left[\Phi\left(kx(i)\right)+\Phi\left(kx(j)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\cdot\left[\Psi\left(p_{+}\left(k|x(i)|\right)\right)+\Psi\left(p_{+}\left(k|x(j)|\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq I_{\Phi}^{\frac{1}{q}}(kx)\cdot I_{\Psi}^{\frac{1}{p}}\left(p_{+}\left(k|x|\right)\right)=\left[I_{\Phi}^{p-1}(kx)I_{\Psi}\left(p_{+}\left(k|x|\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leq 1
\end{aligned}
$$

矛盾。因此，由 (iii) 知Φ至多存在一个不连续的点。由引理 4.1 知 x 是$B\left(l_{\Phi,p}\right)$的端点，由 x 的任意性，$l_{\Phi,p}$是严格凸的。

必要性 设$l_{\Phi,p}$是严格凸的。

(i) 若$a_{\Phi}>0$，根据定理 4.2，$l_{\Phi,p}$含有l_{∞}的等距同构子空间，故不是严格凸的，故条件 (i) 成立。

(ii) 假设 Φ 在区间$\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right]$上不是严格凸的，即 Φ 在某个$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right]$是仿射函数，则

$$0\leq\Phi^{p-1}(a)\Psi\left(p_{+}(a)\right)\leq\Phi^{p-1}(a+\varepsilon)\Psi\left(p_{+}(a+\varepsilon)\right)<\frac{1}{2^{p}}$$

令

$$b=\sup\left\{0\leq x<b_{\Phi}:\left(2\Phi(a)+\Phi(x)\right)^{p-1}\left(2\Psi\left(p_{+}(a)\right)+\Psi\left(p_{+}(x)\right)\right)\leq 1\right\}$$

显然$b>0$，否则设 b=0，即对任意 x>0，有

$$\left(2\Phi(a)+\Phi(x)\right)^{p-1}\left(2\Psi\left(p_{+}(a)\right)+\Psi\left(p_{+}(x)\right)\right)>1$$

由于 0 是$\Psi\left(p_{+}(\cdot)\right)$的连续点，且$\Psi\left(p_{+}(0)\right)=0$，得到

$$2^{p}\Phi^{p-1}(a)\Psi\left(p_{+}(a)\right)=\lim_{x\to 0^{+}}\left(2\Phi(a)+\Phi(x)\right)^{p-1}\left(2\Psi\left(p_{+}(a)\right)+\Psi\left(p_{+}(x)\right)\right)\geq 1$$

矛盾，因此 $b>0$。若 $\lim\limits_{x\to b_\Phi^-}\Phi(x)=\Phi(b_\Phi)=\infty$，有 $b<b_\Phi$，当 $\Phi(b_\Phi)<\infty$ 时，有 $b\le b_\Phi<\infty$，因此无论何种情况的 Φ，都有 $0<b<\infty$ 和 $0<\Phi(b)<\infty$ 成立。定义 $k_0=\left(1+\left(2\Phi(a)+\Phi(b)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$，令 $x=\frac{1}{k_0}(a,a,b,0,\cdots)$ 则 $I_\Phi^{p-1}(k_0x)I_\Psi\left(p_+\left(k_0|x|\right)\right)\le 1$ 且 $k_0\in K_p(x)$，对任意 $\gamma>1$，有

$$\begin{aligned}&I_\Phi^{p-1}(\gamma k_0x)I_\Psi\left(p_+\left(\gamma k_0|x|\right)\right)\\&=\left(2\Phi(\gamma a)+\Phi(\gamma b)\right)^{p-1}\left(2\Psi\left(p_+(\gamma a)\right)+\Psi\left(p_+(\gamma b)\right)\right)\\&\ge\left(2\Phi(a)+\Phi(\gamma b)\right)^{p-1}\left(2\Psi\left(p_+(a)\right)+\Psi\left(p_+(\gamma b)\right)\right)>1\end{aligned}$$

因此

$$\|x\|_{\Phi,p}=\frac{1}{k_0}s_p\left(I_\Phi(k_0x)\right)=\frac{\left(1+\left(2\Phi(a)+\Phi(b)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(1+\left(2\Phi(a)+\Phi(b)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}=1$$

因为 $k_0x(1)=k_0x(2)=a\notin SC_\Phi$，故 x 不是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的端点，因此，$l_{\Phi,p}$ 不是严格凸的，得到矛盾，定理得证。

根据定理 4.1 得 $\pi_{\Phi,\infty}(1/2)=\sup\left\{0\le u<b_\Phi:\Phi(u)<1/2\right\}>0$。

定理 4.6 赋 ∞-Amemiya 范数的 Orlicz 序列空间是严格凸的当且仅当下面条件成立：

(i) 存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\Phi(x_0)=1$；

(ii) $\Phi\in\delta_2$；

(iii) Φ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,\infty}(1/2)\right]$ 上严格凸。

证明 充分性

令 $x\in S\left(l_{\Phi,\infty}\right)$，证明 x 是 $B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$ 的端点，若 $card\left(supp\ x\right)=1$，结论显然成

立。我们只需要证明$card\left(supp\ x\right)>1$的情况。

Φ在包含 0 点的开区间是严格凸的，因此Φ在$\mathbb{R}$上不是线性函数，根据引理 4.1，对任意$z\in l_{\Phi,\infty}\setminus\{0\}$有$K_\infty\left(z\right)\neq\varnothing$。令$k\in K_\infty\left(x\right)$，证明至多存在一个指标$i\geq 1$使得$\Phi\left(k\left|x\left(i\right)\right|\right)>1/2$。若存在$i,j\geq 1,\ i\neq j$使得$kx\left(i\right)\neq 0$，$kx\left(j\right)\neq 0$，且$\Phi\left(k\left|x\left(i\right)\right|\right)>1/2$，$\Phi\left(k\left|x\left(j\right)\right|\right)>1/2$，不失一般性设$\left|x\left(i\right)\right|\leq\left|x\left(j\right)\right|$，得到$1<2\Phi\left(kx\left(i\right)\right)\leq\Phi\left(kx\left(i\right)\right)+\Phi\left(kx\left(j\right)\right)\leq I_\Phi\left(kx\right)\leq\|x\|_\infty=1$矛盾。因此，根据条件(iii)，$\Phi$至多有一个不连续的点$k\left|x\left(i\right)\right|$。

下面证明$I_\Phi\left(x\right)=1$，若$I_\Phi\left(x\right)<1$，根据δ_2条件，存在$n\in\mathbb{N}$和常数$K>1$使得

$$\sum_{i=n}^{\infty}\Phi\left(2x\left(i\right)\right)\leq K\sum_{i=n}^{\infty}\Phi\left(x\left(i\right)\right)$$

由于$supp\ x\geq 2$，$\Phi\left(x_0\right)=1$，因此$\left|x\left(i\right)\right|<x_0/2\ \left(i\in\mathbb{N}\right)$。于是

$$I_\Phi\left(2x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi\left(2x\left(i\right)\right)\leq K\sum_{i=n}^{\infty}\Phi\left(x\left(i\right)\right)+(n-1)\Phi\left(x_0\right)<\infty$$

类似的，对任意$k\geq 1$有$I_\Phi\left(kx\right)<\infty$，但是函数$k\to I_\Phi\left(kx\right)$在$\left(0,\infty\right)$上连续有

$$\lim_{k\to\infty}I_\Phi\left(kx\right)\geq\lim_{k\to\infty}\Phi\left(k\left|x\left(i\right)\right|\right)=\infty$$

因此，存在$k>1$使得$I_\Phi\left(kx\right)=1$，得到

$$1=\|x\|_{\Phi,\infty}=\frac{1}{k}s_\infty\left(I_\Phi\left(kx\right)\right)=\frac{1}{k}\max\left\{1,I_\Phi\left(kx\right)\right\}=\frac{1}{k}<1$$

矛盾，故$I_\Phi\left(x\right)=1$。根据引理 4.1 知x是$B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$的端点，由$x$的任意性，有$l_{\Phi,\infty}$是严格凸的。

必要性

设$l_{\Phi,\infty}$是严格凸的。

(i) 假设对任意的$u\geq 0$，$\Phi\left(u\right)<1$或$\Phi\left(u\right)=\infty$，则$b_\Phi<\infty$，由$\Phi$的左连续性$\Phi\left(b_\Phi\right)<1$。根据$\Phi$的连续性，能找到$0<a<b_\Phi$使得$\Phi\left(a\right)+\Phi\left(b_\Phi\right)<1$。令$x=\left(a,b_\Phi,0,\cdots\right)$，则$I_\Phi\left(x\right)<1$且对任意$\gamma>1$，$I_\Phi\left(\gamma x\right)=\infty$。因此$1\in K_\infty(x)$，

$$\|x\|_{\Phi,\infty}=\max\left\{1,I_\Phi\left(x\right)\right\}=1$$

由 $I_\Phi\left(x\right)<1$，$x\left(1\right)=a<b_\Phi$ 知 x 不是 $B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$ 的端点，因此条件 (i) 成立。

(ii) 若 Φ 不满足 δ_2 条件，则 $l_{\Phi,\infty}$ 含有 l_∞ 的等距同构子空间，故 $l_{\Phi,\infty}$ 不是严格凸的，故条件 (ii) 成立。

(iii) 设 Φ 在区间 $\left[0,\pi_{\Phi,\infty}\left(1/2\right)\right]$ 上不是严格凸的，即 Φ 在某个区间 $\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)\subset\left[0,\pi_{\Phi,\infty}\left(1/2\right)\right]$ 是仿射函数，则 $0<\Phi\left(a\right)<\Phi\left(a+\varepsilon\right)<1/2$。令 $b=\sup\left\{0\le x\le x_0:2\Phi\left(a\right)+\Phi\left(x\right)\le 1\right\}$，显然 $0<b<\infty$，$0<\Phi\left(b\right)<\infty$。进而根据 (i) 和 Φ 的连续性，$2\Phi\left(a\right)+\Phi\left(b\right)=1$。定义 $x=\left(a,a,b,0,\cdots\right)$，则 $I_\Phi\left(x\right)=1$，于是 $1\in K_\infty\left(x\right)$，即

$$\|x\|_{\Phi,\infty}=s_\infty\left(I_\Phi\left(x\right)\right)=\max\left\{1,2\Phi\left(a\right)+\Phi\left(b\right)\right\}=1$$

因为 $k_0x\left(1\right)=k_0x\left(2\right)=a\notin SC_\Phi$，$x$ 不是 $B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$ 的端点，得到矛盾，因此条件 (iii) 成立。

说明 由定理 4.5 和定理 4.6 知，当 $1<p<\infty$ 时，赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 严格凸不蕴含 $l_{\Phi,1}$ 或 $l_{\Phi,\infty}$ 是严格凸的。下面的例子将说明此情况。

例 4.1 令 $\Phi(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-\frac{1}{3x}} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$，证明当 $1<p<\infty$ 时，$l_{\Phi,p}$ 是严格凸的，当 $p=1$ 和 $p=\infty$ 时，$l_{\Phi,1}$ 和 $l_{\Phi,\infty}$ 都不是严格凸的。

证明 容易验证 Φ 在 $\left[0,\infty\right)$ 上是严格凸的，由引理 3.1 知当 $1<p<\infty$ 时，$K_p\left(x\right)\ne\varnothing$，因此对任意 $1<p<\infty$，$l_{\Phi,p}$ 是严格凸的。对任意 $x>0$，

$$\Psi\left(p_+\left(x\right)\right)=x\cdot p_+\left(x\right)-\Phi\left(x\right)=x\left(1+\frac{1}{3x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{3x}}-x\cdot e^{-\frac{1}{3x}}=\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3x}}\nearrow\frac{1}{3}\quad\left(x\to\infty\right)$$

取 $e_1=\left(1,0,\cdots\right)$， $e_2=\left(0,1,0,\cdots\right)$，则对于任意 $k>0$，

$$I_\Psi\left(p_+\left(ke_i\right)\right)=\Psi\left(p_+\left(k\right)\right)<1/3<1\quad\left(i=1,2\right)$$

因此， $k_1^*\left(e_i\right)=\infty$ $\left(i=1,2\right)$，即 $K_1\left(e_i\right)=\varnothing$，且

$$\left\|e_i\right\|_{\Phi,1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+ke^{-\frac{1}{3k}}}{k}=1$$

设 $x=e_1+e_2$，对任意 $k>0$，$I_\Psi\left(p_+\left(kx\right)\right)=2\Psi\left(p_+\left(k\right)\right)<2/3<1$，推出 $K_1\left(x\right)=\varnothing$，

$$\left\|e_1+e_2\right\|_{\Phi,1}=\left\|x\right\|_{\Phi,1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+2ke^{-\frac{1}{3k}}}{k}=2$$

故 $l_{\Phi,1}$ 不是严格凸的。

进一步，对任意 $x>0$，

$$\frac{\Phi\left(2x\right)}{\Phi\left(x\right)}=\frac{2x\cdot e^{-\frac{1}{6x}}}{x\cdot e^{-\frac{1}{3x}}}=2e^{\frac{1}{6x}}\to\infty\quad\left(x\to0\right)$$

于是 Orlicz 函数 Φ 不满足 δ_2 条件，根据定理 4.6 知 $l_{\Phi,\infty}$ 不是严格凸的。

例 4.2 令 $\Phi\left(x\right)=\begin{cases}0, & x=0\\ xe^{-\frac{1}{x}}, & x\in\left(0,1\right]\\ \frac{1}{e}x^2, & x\in\left(1,\infty\right)\end{cases}$，证明对任意 $p\in\left[1,\infty\right)$，$l_{\Phi,p}$ 是严格凸的，但 $l_{\Phi,\infty}$ 不是严格凸的。

证明 容易验证

$$p_+(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & x\in(0,1]\\ \dfrac{2}{e}x, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

因此 $p_+(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上是有限连续的，由引理 3.1 有 $K_p(x)\neq\varnothing$，且对任意 $p\in[1,\infty)$，Φ 在区间 $\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right]$ 是严格凸的，因此 $l_{\Phi,p}$ 是严格凸的。但是

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)}=\lim_{x\to0^+}2e^{\frac{1}{2x}}=\infty$$

故 Orlicz 函数 Φ 不满足 δ_2 条件，根据定理 4.6 知 $l_{\Phi,\infty}$ 不是严格凸的。

例 4.3 令 $\Phi(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\in\left[0,\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]\\ \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right), & x\in\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right),\infty\right)\end{cases}$，证明对任意 $p\in(1,\infty]$，$l_{\Phi,p}$ 是严格凸的，但 $l_{\Phi,1}$ 不是严格凸的。

证明 容易计算 $p_-(x),q_-(v)$，于是得

$$\Psi(v)=\begin{cases}0, & v\in[0,1]\\ v\ln(v)+1-v, & v\in(1,3/2]\\ \infty, & v\in(3/2,\infty)\end{cases}$$

有 $b_\Psi=3/2$，$\Psi(b_\Psi)=3/2\ln(3/2)-1/2<1/2$，根据定理 4.5，$l_{\Phi,1}$ 不是严格凸的。

由于 $b_\Psi=3/2$，有 $b_\Phi=\infty$，对任意 $p\in(1,\infty)$，有 $\Phi^{p-1}\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)\Psi\left(p_+\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)\right)<\dfrac{1}{2^p}$ 且对任意 $x>\ln\dfrac{3}{2}$，有 $\Phi^{p-1}(x)\Psi(p_+(x))=\infty$，故 $\pi_{\Phi,p}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{3}{2}$。$\Phi$ 在 $\left[0,\pi_{\Phi,p}(1/2)\right]$ 上严格凸，由定理 4.5 知 $l_{\Phi,p}\ (1<p<\infty)$ 是严格凸的。

对于任意$x>0$，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)}=2<\infty$$

故 Orlicz 函数 Φ 满足 δ_2 条件，进一步 Φ 在 $\mathbb{R}^+$ 为有限值，且在集合 $\left\{x\in\mathbb{R}^+ : x\le \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^+ : \Phi(x)\le\frac{1}{2}\right\}$ 上严格凸，因此 $l_{\Phi,\infty}$ 是严格凸的。

4.3 本章小结

本章给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间 $l_{\Phi,p}$ 具有严格凸性的判别准则，使用新的技巧简化了 l_{Φ}^{o} 和 l_{Φ} 具有严格凸性的证明。举例说明，$l_{\Phi,p}$ 具有严格凸性不蕴含 l_{Φ}^{o} 和 l_{Φ} 具有严格凸性。

第 5 章　赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的暴露性

5.1　引言

暴露点是Banach空间几何理论的研究工具，暴露性与空间的严格凸性有关，暴露点在分离定理，向量测度的 Radon-Nikodym 定理等理论中都有着重要应用。赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数 Orlicz 空间中暴露点的刻画已经得到解决，参看文献[51-52,54,57]。关于赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间具有暴露性的研究尚未展开。在本章，我们给出了赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 单位球面上暴露点的刻画，获得了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 具有暴露性的判据。下面介绍暴露性的相关知识。

定义 5.1[2]　称 $x \in S(X)$ 为 $B(X)$ 的暴露点是指存在 x 的支撑泛函 $f \in S(X^*)$，对任意的 $y \in S(X)\backslash\{x\}$ 都有 $f(y) < f(x)$。

定义 5.2[2]　Banach 空间 X 具有暴露性，是指单位球面 $S(X)$ 上的点都是暴露点。

定义 5.3[2]　f 称为 x 的暴露泛函，是指对任意 $y \in S(X)\backslash\{x\}$ 都有 $f(y) < f(x) = 1$。

$\Phi(u)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的仿射函数，是指 Φ 在 $[a-\varepsilon,b]$ 和 $[a,b+\varepsilon]$ 上都不是仿射函数其中 $\varepsilon > 0$ 是任意小的数，$[a,b]$ 称为 Φ 的仿射区间，记为 AI。令 Φ 的所有仿射区间为 $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{\infty}$，显然 $SC_\Phi = R \backslash \cup_i (a_i,b_i)$。记

$$A' = \bigcup\{a_i : AI(a_i,b_i),\ p_-(a_i) = p_+(a_i)\}$$
$$B' = \bigcup\{b_i : AI(a_i,b_i),\ p_-(b_i) = p_+(b_i)\}$$
$$A = \bigcup\{a_i : AI(a_i,b_i),\ p_-(a_i) < p_+(a_i)\}$$
$$B = \bigcup\{b_i : AI(a_i,b_i),\ p_-(b_i) < p_+(b_i)\}$$

$\chi_{\{\infty\}}(p)$ 表示定义在 $1 \le p \le \infty$ 上的特征函数，该函数取 1 当且仅当 $p = \infty$。

5.2 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 函数空间的暴露点

引理 5.1[79] 令$1\le p\le\infty$，点$x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$是$B\left(L_{\Phi,p}\right)$端点当且仅当

(i) $k_p^*\left(x\right)=k_p^{**}\left(x\right)<\infty$；

(ii) $k_p^*\left(x\right)x\left(t\right)\in SC_\Phi,\mu-a.e.t\in G$；

(iii) $I_\Phi\left(k_p^*\left(x\right)x\right)>\chi_{\{\infty\}}\left(p\right)$或$\left|x\left(t\right)\right|=b_\Phi<\infty,\mu-a\,e.t\in G$ 。

引理 5.2[79] 令$1\le p\le\infty,x\in L_{\Phi,p}\setminus\{0\}$， $K_p\left(x\right)\ne\varnothing$当且仅当

(i) p=1，Φ 在无穷远处无渐近线;

(ii) $1<p\le\infty$， Φ 在区间$\left[0,\infty\right)$是非线性函数;

(iii) Φ 取有限值。

说明 若$a_\Phi>0$空间$L_{\Phi,p}$包含L_∞的等距同构子空间。在L_∞中，单位球的端点也为暴露点。因此在下面的讨论中，我们将不考虑$a_\Phi>0$的情况。

下面定理将给出赋p-Amemyia ($1\le p\le\infty$) 范数 Orlicz 函数空间$L_{\Phi,p}$单位球面上暴露点的刻画，由于$L_\Phi^o\left(L_{\Phi,1}\right)$的暴露点在文献[52]中已经给出证明，故在此省略$p=1$情况的讨论。

定理 5.1 $x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ ($1\le p\le\infty$) 是$B\left(L_{\Phi,p}\right)$的暴露点当且仅当

a) $K_p\left(x\right)=\left\{k\right\}$， $\mu\left\{t\in G:kx\left(t\right)\notin SC_\Phi\right\}=0$；

b) $I_\Phi(kx)>\chi_{\{\infty\}}\left(p\right)$或$\left|x\left(t\right)\right|=b_\Phi<\infty,\mu-a.e.t\in G$；

c) 当 p =1 时

(i) $\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A'\right\}=\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}=0$；

(ii) 若 $I_{\Psi}\left(p_{-}\left(kx\right)\right)=1$，则 $\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B\right\}=0$，若 $\theta\left(kx\right)<1$ 且 $I_{\Psi}\left(p_{+}\left(kx\right)\right)=1$，则 $\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A\right\}=0$；

d) 当$1<p<\infty$时

(i) $\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A'\right\}\cdot\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}=0$；

(ii) 若$I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(kx\right)\right)=1$，则

$$\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A'\right\}\cdot\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B\right\}=0,$$

若$\theta\left(kx\right)<1$且$I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(kx\right)\right)=1$，则

$$\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A\right\}\cdot\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}=0;$$

e) 当$p=\infty$时

(i) $\mu\left\{t\in G:\left|x\left(t\right)\right|\in A'\right\}\cdot\mu\left\{t\in G:\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}=0$；

(ii) $I_{\Psi}\left(p_{-}\left(x\right)\right)<\infty$。

证明 由于暴露点一定是端点，根据引理 5.1 知条件 a) 和 b) 成立。

必要性

假设 d)-(i) 不成立，即$\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A'\right\}>0$，$\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}>0$，不妨设$A_1'=\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|=a'\in A'\right\}$，$B_1'=\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|=b'\in B'\right\}$，且$\mu\left(A_1'\right)>0$，$\mu\left(B_1'\right)>0$。选取$c_1>a'$，$c_2<b'$，$E_1\subseteq A_1'$，$F_1\subseteq B_1'$满足$0<\mu\left(A_1'\setminus E_1\right)<\mu\left(A_1'\right)$，$0<\mu\left(B_1'\setminus F_1\right)<\mu\left(B_1'\right)$，$\Phi\left(c_1\right)\mu\left(E_1\right)+\Phi\left(c_2\right)\mu\left(F_1\right)=\Phi\left(a'\right)\mu\left(E_1\right)+\Phi\left(b'\right)\mu\left(F_1\right)$，$p_{-}\left(a'\right)=p_{+}\left(a'\right)=p_{-}\left(c_1\right)=p_{+}\left(c_1\right)$和$p_{-}\left(b'\right)=p_{+}\left(b'\right)=p_{-}\left(c_2\right)=p_{+}\left(c_2\right)$。设

$$y\left(t\right)=x\left(t\right)\chi_{G\setminus\left(E_1\cup F_1\right)}+\frac{c_1}{k}\chi_{E_1}+\frac{c_2}{k}\chi_{F_1}$$

显然有$I_{\Phi}\left(ky\right)=I_{\Phi}\left(kx\right)$。若$x\in E_{\Phi,p}$，设

$$w(t)=p_+(a')\chi_{E_1}+p_+(b')\chi_{F_1}+w'(t)\chi_{G\setminus(E_1\cup F_1)} \tag{5-1}$$

其中 $w'(t)\in\left[p_-(kx(t)),p_+(kx(t))\right]$，且满足 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi(w)=1$。根据定理 2.12 知 $v=w/\|w\|_{\Psi,q}$ 是 x 的支撑泛函。由 y 的定义知 $y\in E_{\Phi,p}$，$p_-(kx)=p_-(ky)$，$p_+(kx)=p_+(ky)$，μ-a.e. $t\in G$。由 $I_\Phi(ky)=I_\Phi(kx)$ 有 $I_\Phi^{p-1}(ky)\cdot I_\Psi(w)=1$。根据定理 2.12 知，$v=w/\|w\|_{\Psi,q}$ 也是 y 的支撑泛函，考虑到 $y/\|y\|_{\Phi,p}\neq x$，故 x 不是 $B(L_{\Phi,p})$ 的暴露点，从而有 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in A'\}\cdot\mu\{t\in G:k|x(t)|\in B'\}=0$。

若 $x\in L_{\Phi,p}\setminus E_{\Phi,p}$，则 $y\in L_{\Phi,p}\setminus E_{\Phi,p}$。根据定理 2.9 知，$x$ 的支撑泛函在 $L_{\Psi,q}\oplus F$。根据 Hahn-Banach 定理，存在 $\varphi\in F$，满足 $\varphi(kx)=\|\varphi\|$ 且 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot\left(I_\Psi(w)+\|w\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)=1$ 其中 w 的定义见 (5-1) 式。令 $f=w/\|w\|_{\Psi,q}+\varphi$，根据定理 2.11 知，$f/\|f\|_{\Psi,q}^*\in Grad(x)$。由 y 的定义有 $\varphi(ky)=\varphi(kx)=\|\varphi\|$，$w(t)\in\left[p_-(ky(t)),p_+(ky(t))\right]$ 和 $I_\Phi^{p-1}(ky)\cdot\left(I_\Psi(w)+\|w\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)=1$ 成立，故 $f/\|f\|_{\Psi,q}^*$ 也是 y 的支撑泛函，考虑到 $y/\|y\|_{\Phi,p}\neq x$，这与 x 是 $B(L_{\Phi,p})$ 暴露点矛盾，从而有 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in A'\}\cdot\mu\{t\in G:k|x(t)|\in B'\}=0$。

下面证明 d)-(ii) 的必要性。假设 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi(p_-(kx))=1$，且存在 $A_1'=\{t\in G:k|x(t)|=a'\in A'\}$，$\mu(A_1')>0$，$B_1=\{t\in G:k|x(t)|=b\in B\}$，$\mu(B_1)>0$。由定理 2.12 知 $v=p_-(kx)/\|p_-(kx)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。选取 $c_1>a'$，$c_2<b$，

$E_1 \subseteq A_1'$，$F_1 \subseteq B_1$，满足 $p_-(c_1)=p_+(c_1)=p_-(a')=p_+(a')$，$p_-(c_2)=p_+(c_2)=p_-(b)$，$0<\mu\left(A_1' \setminus E_1\right)<\mu\left(A_1'\right)$，$0<\mu(B_1 \setminus F_1)<\mu(B_1)$ 和

$$\Phi(c_1)\mu(E_1)+\Phi(c_2)\mu(F_1)=\Phi(a')\mu(E_1)+\Phi(b)\mu(F_1)$$

设

$$y(t)=x(t)\chi_{G\setminus(E_1\cup F_1)}+\frac{c_1}{k}\chi_{E_1}+\frac{c_2}{k}\chi_{F_1}$$

显然有 $I_\Phi(ky)=I_\Phi(kx)$。由 y 的定义有 $p_-(kx(t))=p_-(ky(t))$，$\mu-a.e.t\in G$，得 $v=p_-(kx)/\|p_-(kx)\|_{\Psi,q}=p_-(ky)/\|p_-(ky)\|_{\Psi,q}$ 也是 y 的支撑泛函。由于 $y/\|y\|_{\Phi,p}\neq x$，这与 x 是 $B(L_{\Phi,p})$ 的暴露点矛盾。故 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi(p_-(kx))=1$，必有 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in A'\}\cdot\mu\{t\in G:k|x(t)|\in B\}=0$。

若 $\theta(kx)<1$，根据定理 2.14 知 x 的支撑泛函都在 $L_{\Psi,q}$ 中。类似可得，若 $I_\Phi^{p-1}(kx)\cdot I_\Psi(p_+(kx))=1$，必有 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in A'\}\cdot\mu\{t\in G:k|x(t)|\in B\}=0$ 成立。

接下来证明 e) 的必要性

若 e)-(i) 不成立,则有 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in A'\}>0$ 和 $\mu\{t\in G:k|x(t)|\in B'\}>0$ 同时成立，这种情况在文献[73]中已经讨论过，在此省略。

若 e)-(ii) 不成立，即 $I_\Psi(p_-(x))=\infty$，则 $x\in L_{\Phi,\infty}$，x 的支撑泛函在 $L_{\Psi,1}\oplus F$ 中。设 $f=v+\varphi$ 是 x 的一个支撑泛函，由于 $\varphi\neq 0$，知 $K_q(f)\neq\varnothing$。由定理 2.12 知，$p_-(x(t))\le lv(t)\le p_+(x(t)),\mu-a.e.t\in G$ 其中 $l\in K_1(f)$。于是得到

$$\infty = I_{\Psi}\left(p_{-}(x)\right) \le I_{\Psi}\left(lv\right) = l\left(\|f\|_{\Psi,1}^{*} - \|\varphi\|\right) - 1 < \infty$$

矛盾，因此 $I_{\Psi}\left(p_{-}\left(x\right)\right) < \infty$ 是必要的。

充分性

(I) $x\left(t\right) = b_{\Phi} < \infty, \mu - a.e.t \in G$

设 $f = v + \varphi$ 为 x 的一个支撑泛函，则有 $f\left(x\right) = b_{\Phi}\int_{G} v\left(t\right)dt + \varphi\left(x\right) = \|x\|_{\Phi,p}$。

对任意的 $y \in S\left(L_{\Phi,p}\right)\backslash\{x\}$，存在某个 $E \subset supp\,x \cap supp\,y$ 使得 $\left|y\left(t\right)\right| < b_{\Phi}$，$\mu - a.e.t \in E$ (若 $\mu\left(E\right) = 0$，则 x=y)。于是有

$$f\left(y\right) = \int_{E} v\left(t\right)y\left(t\right)dt + \int_{G\backslash E} v\left(t\right)y\left(t\right)dt + \varphi\left(y\right) < b_{\Phi}\int_{G} v\left(t\right)dt + \varphi\left(x\right)$$

因此，x 是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的暴露点。

(II) $1 < p < \infty$，分下面四种情况讨论

① $I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(kx\right)\right) = 1$，$\mu\left\{t \in G : k\left|x\left(t\right)\right| \in A'\right\}\cdot\mu\left\{t \in G : k\left|x\left(t\right)\right| \in B\right\} = 0$。

由定理 2.12 知 $v = p_{-}(kx)/\|p_{-}(kx)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。事实上，若 v 也是 $y \in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的支撑泛函，由 $K_{p}\left(x\right) \ne \varnothing$ 知 $K_{p}\left(y\right) \ne \varnothing$，取 $k_{y} \in K_{p}\left(y\right)$。由 $I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(kx\right)\right) = 1$ 知 $1 \in K_{q}\left(p_{-}\left(kx\right)\right)$。有

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{k_{y}}\left(1 + I_{\Phi}^{p}\left(k_{y}y\right)\right)^{\frac{1}{p}} - \int_{G}\frac{p_{-}\left(kx\right)}{\left\|p_{-}\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q}}y\left(t\right)dt \\
&= \frac{1}{k_{y}\left\|p_{-}\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q}}\left(\left(1 + I_{\Phi}^{p}\left(k_{y}y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\|p_{-}\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q} - \int_{G}p_{-}\left(kx\left(t\right)\right)k_{y}y\left(t\right)dt\right) \\
&= \frac{1}{k_{y}\left\|p_{-}\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q}}\left(\left(1 + I_{\Phi}^{p}\left(k_{y}y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(1 + I_{\Psi}^{q}\left(p_{-}\left(kx\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}} - \int_{G}p_{-}\left(kx\left(t\right)\right)k_{y}y\left(t\right)dt\right)
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{k_y \left\| p_-\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi\left(k_y y\right)+I_\Psi\left(p_-\left(kx\right)\right)-\int_G p_-\left(kx\left(t\right)\right)k_y y\left(t\right)dt\right)$$

$$\geq \frac{1}{k_y \left\| p_-\left(kx\right)\right\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi\left(k_y y\right)+I_\Psi\left(p_-\left(kx\right)\right)-I_\Phi\left(k_y y\right)-I_\Psi\left(p_-\left(kx\right)\right)\right)=0$$

根据 Young 等式知 $p_-\left(k_y y\left(t\right)\right)\leq p_-\left(kx\left(t\right)\right)\leq p_+\left(k_y y\left(t\right)\right),\ \mu-a.e.t\in G$ 成立，由引理 1.6 知，$I_\Phi^{p-1}\left(k_y y\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(kx\right)\right)=1$。当 $kx\left(t\right)\in SC_\Phi$ 或 $kx\left(t\right)\in A$ 或 $kx\left(t\right)\in B$ 都有 $k_y y\left(t\right)=kx\left(t\right),\ \mu-a.e.t\in G$ 成立。又 $x,y\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$，则有 $k_y=\left\|k_y y\right\|_{\Phi,p}=\left\|kx\right\|_{\Phi,p}=k$，故得 $y(t)=x(t)$，$\mu-a.e.t\in G$，因此 x 是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

② $I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(kx\right)\right)<1$，$\theta\left(kx\right)=1$，

令 $p_+(\cdot)$ 的所有不连续点为 $\left\{r_i\right\}$，记 $e_i=\left\{t\in G:kx\left(t\right)=r_i\right\}$，选取 $\varepsilon_i>0$ 满足 $p_-\left(kx\left(t\right)\right)+\varepsilon_i\leq p_+\left(kx\left(t\right)\right)$，$\mu-a.e.t\in e_i$，和

$$I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot\left(\int_{G\setminus\cup_i e_i}\Psi\left(p_-\left(kx\left(t\right)\right)\right)dt+\int_{\cup_i e_i}\Psi\left(p_-\left(kx\left(t\right)\right)+\varepsilon_i\right)dt\right)<1$$

令

$$v(t)=\begin{cases} p_-\left(kx\left(t\right)\right), & t\in G\setminus\bigcup_i e_i, \\ p_-\left(kx\left(t\right)\right)+\varepsilon_i, & t\in\bigcup_i e_i, \end{cases} \tag{5-2}$$

则 $I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_\Psi\left(v\right)<1$，已知 $\theta\left(kx\right)=1$ 根据定理 2.14 知 x 的支撑泛函在 $L_{\Psi,q}\oplus F$ 中，根据 Hahn-Banach 定理，存在 $\varphi\in F$，满足 $\left\|\varphi\right\|=\varphi\left(kx\right)$ 和

$$I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot\left(I_\Psi\left(v\right)+\left\|v\right\|_{\Psi,q}\cdot\left\|\varphi\right\|\right)=1$$

令 $f=v/\left\|v\right\|_{\Psi,q}+\varphi$，根据定理 2.12 知 f 在 x 处范数可达，且 $\left\|v\right\|_{\Psi,q}\in K_q\left(f\right)$，i.e.,

$$\left\|f\right\|_{\Psi,q}^*=\frac{1}{\left\|v\right\|_{\Psi,q}}\left(1+\left(I_\Psi\left(v\right)+\left\|v\right\|_{\Psi,q}\cdot\left\|\varphi\right\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$f/\|f\|_{\Psi,q}^*$ 是 x 的暴露泛函。若存在 $y\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$，且 $f/\|f\|_{\Psi,q}^*\in Grad\left(y\right)$。则有

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{1}{k_y}\left(1+I_\Phi^p\left(k_y y\right)\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{f}{\|f\|_{\Psi,q}^*}\left(y\right)\\
&=\frac{1}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*}\left(\left(1+I_\Phi^p\left(k_y y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{\Psi,q}^*-f\left(k_y y\right)\right)\\
&=\frac{\left(1+I_\Phi^p\left(k_y y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{\|v\|_{\Psi,q}}\left(1+\left(I_\Psi\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}-\int_G\frac{v\left(t\right)k_y y\left(t\right)}{\|v\|_{\Psi,q}}dt-\varphi\left(k_y y\right)}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*}\\
&\geq\frac{I_\Phi\left(k_y y\right)+I_\Psi\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|-\int_G v\left(t\right)k_y y\left(t\right)dt-\|v\|_{\Psi,q}\varphi\left(k_y y\right)}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*\|v\|_{\Psi,q}}\\
&\geq\frac{I_\Phi\left(k_y y\right)+I_\Psi\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|-I_\Psi\left(v\right)-I_\Phi\left(k_y y\right)-\|v\|_{\Psi,q}\varphi\left(k_y y\right)}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*\|v\|_{\Psi,q}}\\
&=\frac{1}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*}\left(\|\varphi\|-\varphi\left(k_y y\right)\right)\geq\frac{1}{k_y\|f\|_{\Psi,q}^*}\left(\|\varphi\|-\|\varphi\|\right)=0
\end{aligned}
$$

因此，有 $\|\varphi\|=\varphi\left(k_y y\right)=\varphi\left(kx\right)$，$p_-\left(k_y y\left(t\right)\right)\leq p_-\left(kx\left(t\right)\right)\leq p_+\left(k_y y\left(t\right)\right)$，$\mu-a.e.t\in G$ 和

$$I_\Phi^{p-1}\left(k_y y\right)\cdot\left(I_\Psi\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|\varphi\|\right)=I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot\left(I_\Psi\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|\varphi\|\right)=1$$

成立。类似的，不论 $kx\in SC_\Phi$ 还是 $kx\in\bigcup_i r_i$，我们都有 $k_y y\left(t\right)=kx\left(t\right)$，$\mu-a.e.t\in G$

成立，又由 $k_y=\|k_y y\|_{\Phi,p}=\|kx\|_{\Phi,p}=k$ 得 $y=x$，因此 x 是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的暴露点。

③ $I_\Phi^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(kx\right)\right)=1$，$\theta\left(kx\right)<1$ 且

$$\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in A\right\}\cdot\mu\left\{t\in G:k\left|x\left(t\right)\right|\in B'\right\}=0\text{ 。}$$

由定理 2.12 知 $v=p_+\left(kx\right)/\|p_+\left(kx\right)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。类似于①中所

用方法可得 x 是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

④ $I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(kx\right)\right)<1<I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(kx\right)\right)$ 且 $\theta\left(kx\right)<1$

设 $v\left(t\right)\in L_{\Psi,q}$ 其定义见 (5-2) 式，满足 $I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(v\right)=1$，则 $1\in K_{q}\left(v\right)$。由定理 2.13 知，$v/\|v\|_{\Psi,q}$ 是 x 的支撑泛函，也是 x 的暴露泛函。若存在 $y\in S\left(L_{\Phi,p}\right)$ 满足 $\int_{G}\frac{v\left(t\right)}{\|v\|_{\Psi,q}}y\left(t\right)dt=1$，取 $k_{y}\in K_{p}\left(y\right)$，有

$$\begin{aligned}\|v\|_{\Psi,q}&=\int_{G}v\left(t\right)y\left(t\right)dt=\frac{1}{k_{y}}\int_{G}v\left(t\right)k_{y}y\left(t\right)dt\\&\le\frac{1}{k_{y}}\left(I_{\Psi}\left(v\right)+I_{\Phi}\left(k_{y}y\right)\right)\\&\le\frac{1}{k_{y}}s_{p}\left(I_{\Phi}\left(k_{y}y\right)\right)\cdot s_{q}\left(I_{\Psi}\left(v\right)\right)=\|v\|_{\Psi,q}\end{aligned}$$

由引理 1.6 知，有 $I_{\Phi}^{p-1}\left(k_{y}y\right)\cdot I_{\Psi}\left(v\right)=I_{\Phi}^{p-1}\left(kx\right)\cdot I_{\Psi}\left(v\right)=1$，根据 Young 等式成立条件知 $p_{-}\left(k_{y}y\left(t\right)\right)\le p_{-}\left(kx\left(t\right)\right)\le p_{+}\left(k_{y}y\left(t\right)\right),\mu-a.e.t\in G$ 成立。类似可得 $y=x$，因此 x 是 $B\left(L_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

（III） $p=\infty, I_{\Psi}\left(p_{-}(x)\right)<\infty$

① $\theta\left(x\right)<1$

由 $\theta\left(x\right)<1$ 知 x 的支撑泛函在 $L_{\Psi,1}$ 中。令 $p_{+}(\cdot)$ 的所有不连续点为 $\{r_{i}\}$，记 $e_{i}=\left\{t\in G:x\left(t\right)=r_{i}\right\}$，选取 $\varepsilon_{i}>0$ 满足 $p_{-}\left(x\left(t\right)\right)+\varepsilon_{i}\le p_{+}\left(x\left(t\right)\right)$，$\mu-a.e.t\in e_{i}$，令

$$v\left(t\right)=\begin{cases}p_{-}\left(x\left(t\right)\right), & t\in G\setminus\bigcup_{i}e_{i},\\ p_{-}\left(x\left(t\right)\right)+\varepsilon_{i}, & t\in\bigcup_{i}e_{i},\end{cases}\tag{5-3}$$

由定理 2.13 知 $v_{0}=v/\|v\|_{\Psi,1}$ 是 x 的支撑泛函。于是有

$$\|v\|_{\Psi,1}=\langle v,x\rangle=\int_G v(t)x(t)dt=I_\Phi(x)+I_\Psi(v)=1+I_\Psi(v)$$

其中$I_\Phi(x)=1$由x是$B(L_{\Phi,\infty})$的端点可得。因此，$1\in K_1(v)$。若$v_0=v/\|v\|_{\Psi,1}$也是$y\in S(L_{\Phi,\infty})\setminus\{0\}$的支撑泛函，则有

$$\|v\|_{\Psi,1}=\langle v,y\rangle=\int_T v(t)y(t)dt\le I_\Phi(y)+I_\Psi(v)\le 1+I_\Psi(v)=\|v\|_{\Psi,1}$$

于是，$p_-(y(t))\le p_-(x(t))\le p_+(y(t)),\mu-a.e.t\in G$和$I_\Phi(x)=I_\Phi(y)=1$成立。根据$\mu\{t\in T:x(t)\notin SC_\Phi\}=0$，有$x=y$。因此，$x$是$B(L_{\Phi,\infty})$的暴露点。

② $\theta(x)$=1

由定理2.9知x的支撑泛函在$L_{\Psi,1}\bigoplus F$中。根据Hahn-Banach定理存在$\varphi\in F$使得$\|\varphi\|=\varphi(x)$。令$f=v+\varphi$其中v的定义见 (5-3) 式。则f在x处是范数可达的且$1\in K_1(f)$。若f在$y\in S(L_{\Phi,\infty})\setminus\{0\}$也是范数可达的，于是有

$$\begin{aligned}\|f\|^*_{\Psi,1}&=\langle v,y\rangle+\varphi(y)\le I_\Phi(y)+I_\Psi(v)+\varphi(y)\\&\le 1+I_\Psi(v)+\|\varphi\|=\|v\|_{\Psi,1}+\|\varphi\|=\|f\|^*_{\Psi,1}\end{aligned}$$

故有$p_-(y(t))\le p_-(x(t))\le p_+(y(t)),\mu-a.e.t\in G$，$\varphi(y)=\varphi(x)=\|\varphi\|$和$I_\Phi(y)=1$同时成立，根据$\mu\{t\in T:x(t)\notin SC_\Phi\}=0$，有$x=y$。因此，$x$是$B(L_{\Phi,\infty})$的暴露点。

5.3 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 序列空间的暴露点

定理 5.2 令$1\le p<\infty$，$x\in l_{\Phi,p}$且$K_p(x)\ne\varnothing$，$v\in S(l_{\Psi,q})$是x的支撑泛函，若v也是$y\in l_{\Phi,p}$的支撑泛函，则$K_p(y)\ne\varnothing$。

证明 若$K_p(y)=\varnothing$，则有

$$1=\langle v,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}v(i)y(i)=b_\Psi\sum_{i=1}^{\infty}|y(i)|=b_\Psi\|y\|_1$$

有 $v(i)=b_\Psi \cdot sgny(i), i\in\mathbb{N}$。假设 $K_q(v)\neq\varnothing$，取 $l\in K_q(v)$ 则有

$$1=\|v\|_{\Psi,q}=\inf_{l>0}\frac{1}{l}\left(1+I_\Psi^q(lv)\right)^{\frac{1}{q}}$$

若 $l>1$，根据 b_Ψ 的定义，有 $\|v\|_{\Psi,q}=\infty$；若 $l\leq 1$，有 $\|v\|_{\Psi,q}>1$，这与 $\|v\|_{\Psi,q}=1$ 矛盾。因此 $K_q(v)=\varnothing$，此时必有 $x(i)=b_\Phi \operatorname{sgn} v(i), i\in\mathbb{N}$，由于 b_Φ, b_Ψ 两者中只能有一个为有限值，得到矛盾，因此 $K_p(y)\neq\varnothing$。

定理 5.3 令 $1\leq p<\infty$，$x\in l_{\Phi,p}$ 且 $K_p(x)=\varnothing$，$x\in l_{\Phi,p}$ 是暴露点当且仅当 *card*(*supp x*)=1。

证明 必要性

若 *card*(*supp x*)>1，根据引理 4.1 知 x 不是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的端点，故不是暴露点。

充分性

不失一般性，设 $x=\left(x(1),0,\cdots\right)$ 且 $x(1)>0$。证明 $v=\left(b_\Psi,0,\cdots\right)\in l_{\Psi,q}$ 是 x 的暴露泛函，若 v 也是 $x'\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的支撑泛函，则

$$\left\langle v,x'\right\rangle=b_\Psi\cdot x'(1)=1$$

则有 $x(1)=x'(1), K_p(x')=\varnothing$。若 $K_p(x')\neq\varnothing$，取 $k_0\in K_p(x')$，有

$$\begin{aligned}1=\|x'\|_{\Phi,p}&=\frac{1}{k_0}\left(1+I_\Phi^p(k_0x')\right)^{\frac{1}{p}}\geq\frac{1}{k_0}\left(1+I_\Phi^p\left(k_0x'(1)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{k_0}\left(1+I_\Phi^p\left(k_0x(1)\right)\right)^{\frac{1}{p}}>\|x\|_{\Phi,p}=1\end{aligned}$$

矛盾，说明 $K_p(x')=\varnothing$。根据 $b_\Psi x'(1)=\|x'\|_{\Phi,p}=1$，推出 $x'(i)=0\,(i>1)$，于是 $x=x'$，v 是 x 的暴露泛函。

定理 5.4 令$1\le p\le\infty$，$x\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$且$K_p\left(x\right)\ne\varnothing$，$x$是$B\left(l_{\Phi,p}\right)$的暴露点当且仅当：

a) $K_p\left(x\right)=\left\{k_x\right\}$；

b) $card\,(supp\ x)$=1 或$card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in\left(R\setminus SC_\Phi\right)\right\}\le\varepsilon_p$；

c) $I_\Phi\left(k_x x\right)\ge\chi_{\{\infty\}}\left(p\right)$或$\left|x\left(i\right)\right|=b_\Phi<\infty, i\in\mathbb{N}$；

d) 当$p=1$时

(i) $card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A'\cup B'\right\}=0$；

(ii) 若 $I_\Psi\left(p_-\left(k_x x\right)\right)=1$ 则 $\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in B\right\}=\varnothing$ ， 若 $\theta\left(k_x x\right)<1$ ，

$I_\Psi\left(p_+\left(k_x x\right)\right)=1$，则$\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A\right\}=\varnothing$；

e) 当$1<p<\infty$时

(i) $card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A'\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in B'\right\}=0$；

(ii) 若$I_\Phi^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k_x x\right)\right)=1$，则

$card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A'\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in B\right\}=0$，

若$\theta\left(k_x x\right)<1$，$I_\Phi^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_\Psi\left(p_+\left(k_x x\right)\right)=1$，则

$card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in B'\right\}=0$；

f) 当$p=\infty$时

(i) $I_\Psi(p_-(x))<\infty$；

(ii) $card\left\{i\in\mathbb{N}:x\left(i\right)\in A'\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:x\left(i\right)\in B'\right\}=0$。

证明 赋 1-Amemiya (Orlicz) 范数 Orlicz 空间单位球面暴露点的证明，已经在文献[51]中给出证明，故在此省略。

不失一般性，设$x(i)\ge 0, i\in\mathbb{N}$。

必要性

由于暴露点为端点，根据引理 4.1 知，条件 a)，b) 和 c) 成立。

若 e)-(i) 不成立，不妨假设 $k_x x(1)=a'\in A'$， $k_x x(2)=b'\in B'$，选取 $c_1>a'$，$c_2<b'$ 满足 $\Phi(a')+\Phi(b')=\Phi(c_1)+\Phi(c_2)$， $p_-(a')=p_+(a')=p_-(c_1)=p_+(c_1)$ 和 $p_-(b')=p_+(b')=p_-(c_2)=p_+(c_2)$。令

$$x'=\left(\frac{c_1}{k_x},\frac{c_2}{k_x},x(3),x(4),\cdots\right)$$

显然有 $I_\Phi(k_x x')=I_\Phi(k_x x)$。

若 $x\in h_{\Phi,p}$，设

$$v=\begin{cases} p_-(a')=p_+(a') & i=1 \\ p_-(b')=p_+(b') & i=2 \\ v(i)\in\left[p_-(x(i)),p_+(x(i))\right] & i\geq 3 \end{cases} \tag{5-4}$$

且满足 $I_\Phi^{p-1}(k_x x)I_\Psi(v)=1$，根据定理 3.8 知，$v_0=v/\|v\|_{\Psi,q}\in Grad(x)$。由 x' 定义知，$p_-(k_x x'(1))=p_+(k_x x'(1))=v(1)$， $p_-(k_x x'(2))=p_+(k_x x'(2))=v(2)$ 对于任意 $i\geq 3$ 有 $v(i)\in\left[p_-(kx'(i)),p_+(kx'(i))\right]$。根据定理 3.8， $v_0=v/\|v\|_{\Psi,q}\in Grad(x')$，由于 $x'/\|x'\|_{\Phi,p}\neq x$，这与 x 是 $B(l_{\Phi,p})$ 暴露点矛盾。

若 $x\in l_{\Phi,p}\setminus h_{\Phi,p}$，则 x 的支撑泛函都在 $l_{\Psi,q}\oplus S$ 中。根据 Hahn-Banach 定理存在 $\varphi\in S$，使 $\|\varphi\|=\varphi(k_x x)$ 和 $I_\Phi^{p-1}(k_x x)\left(I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)=1$ 成立，其中 v 的定义见 (5-4) 式。设 $f=v/\|v\|_{\Psi,q}+\varphi$，根据定理 3.7 知，$f$ 在 x 点处范数可达，即 $f/\|f\|_{\Psi,q}\in Grad(x)$。根据 x' 的定义，显然有 $I_\Phi^{p-1}(k_x x')\left(I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)=1$ 和 $\varphi(k_x x')=\varphi(k_x x)=\|\varphi\|$ 成立。因此，$f/\|f\|_{\Psi,q}\in Grad(x')$，由于 $x'/\|x'\|_{\Phi,p}\neq x$，这与 x 是 $B(l_{\Phi,p})$ 的暴露点矛盾，故条件 e)-(i) 成立。

下面证明 e)-(ii) 的必要性。若 $I_{\Phi}^{p-1}(k_x x)\cdot I_{\Psi}(p_-(k_x x))=1$ 且

$$card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in A'\}\cdot card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in B\}>0$$

不失一般性，假设 $k_x x(1)=a'\in A'$， $k_x x(2)=b\in B$ 。选取 $c_1>a'$， $c_2<b$ 使得 $\Phi(a')+\Phi(b)=\Phi(c_1)+\Phi(c_2)$ ， $p_-(a')=p_+(a')=p_-(c_1)=p_+(c_1)$ 和 $p_-(b)=p_-(c_2)=p_+(c_2)$ 同时成立。令

$$x'=\left(\frac{c_1}{k_x},\frac{c_2}{k_x},x(3),x(4),\cdots\right)$$

显然有 $I_{\Phi}(k_x x')=I_{\Phi}(k_x x)$ 。对于任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $p_-(k_x x(i))=p_-(k_x x'(i))$ ，故 $v=p_-(k_x x)/\|p_-(k_x x)\|_{\Psi,q}\in Grad(x')$ ，但是 $x'/\|x'\|_{\Phi,p}\neq x$ ，故 x 不是 $B(l_{\Phi,p})$ 的暴露点。所以若 $I_{\Phi}^{p-1}(k_x x)\cdot I_{\Psi}(p_-(k_x x))=1$ 必有

$$card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in A'\}\cdot card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in B\}=0$$

若 $\theta(k_x x)<1$ ，根据定理 3.10 知 x 的所有支撑泛函都在 $l_{\Psi,q}$ 中，用类似方法可证明若 $I_{\Phi}^{p-1}(k_x x)\cdot I_{\Psi}(p_+(k_x x))=1$ 则必有

$$card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in A\}\cdot card\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in B'\}=0$$

f) 当 $p=\infty$ 时，有 $k_x=1/\|x\|_{\Phi,\infty}=1$ 。

f)-(i) 这种情况已在文献[73]中证明，在此省略。

f)-(ii) 设 $I_{\Psi}(p_-(x))=\infty$ ，$f=v+\varphi$ 是 x 的支撑泛函，根据定理 3.6，有 $\varphi\neq 0$ 。根据定理 3.5 知 $K_1(f)\neq\varnothing$ 。根据定理 3.7 有 $p_-(x)\le lv(i)\le p_+(x)$ 其中 $l\in K_1(f)$ ，于是得到

$$\infty=I_{\Psi}(p_-(x))\le I_{\Psi}(lv)=l\left(\|f\|_{\Psi,1}^{*}-\|\varphi\|\right)-1<\infty$$

矛盾，因此 $I_{\Psi}(p_-(x))<\infty$ 是必要的。

充分性

情形 (I) $card\,(supp(x))=1$

不失一般性，假设 $x=\left(x(1),0,\cdots\right)$，设 $v=\left(v(1),0,\cdots\right)\in S\left(l_{\Psi,q}\right)$ 是 x 的支撑泛函，取 $x'\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$。假设 $card\left(suppx'\right)\geq 2$，若 $x'(1)=0$，则 $\langle v,x'\rangle=0<\langle v,x\rangle$；若 $x'(1)\neq 0$，根据 $\|x'\|_{\Phi,p}=\|x\|_{\Phi,p}$ 有 $\left|x'(1)\right|\leq\left|x(1)\right|$，如果 $\left|x'(1)\right|=\left|x(1)\right|$，由于 $\|x'\|_{\Phi,p}=\|x\|_{\Phi,p}=1$，有 $x'(i)=0\ (i>1)$，这与 $card\left(suppx'\right)\geq 2$ 矛盾。故 $\left|x'(1)\right|<\left|x(1)\right|$，有 $\langle v,x'\rangle<\langle v,x\rangle$，因此 x 是一个暴露点。

假设 $card\left(suppx'\right)=1$，若 $\langle v,x'\rangle=\langle v,x\rangle=1$，必有 $x'(1)=x(1)$，$x'(i)=0$ $(i>1)$，故 $x=x'$ 是一个暴露点。

情形 (II) $\left|x(i)\right|=b_\Phi<\infty,\ i\in\mathbb{N}$

由于 Ψ 在零点连续，存在 $v=\left(v(i)\operatorname{sgn}x(i)\right)$ 使得

$$\langle x,v\rangle=b_\Phi\sum_{i=1}^{\infty}\left|v(i)\right|=\|v\|_{\Psi,q}$$

则 $v/\|v\|_{\Psi,q}$ 是 x 的支撑泛函，取任意 $x'\in S\left(l_{\Phi,p}\right)\backslash\{x\}$，取 $i\in suppx\cap suppx'$ 使得 $\left|x'(i)\right|<b_\Phi$ (若 $suppx\cap suppx'=\varnothing$，则 $x=x'$)。有

$$\langle x',v\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x'(i)v(i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left|x'(i)\right|\cdot\left|v(i)\right|<b_\Phi\sum_{i=1}^{\infty}\left|v(i)\right|$$

所以 x 是一个暴露点。

情形 (III) $1\leq p<\infty$

(1) $I_\Phi^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_\Psi\left(p_-\left(k_x x\right)\right)=1$ 且

$$card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in A'\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x(i)\in B\right\}=0$$

由 $I_\Phi^{p-1}(k_x x)\cdot I_\Psi(p_-(k_x x))=1$，有 $1\in K_q\left(p_-\left(k_x x\right)\right)$。根据定理 3.8 知 $v=p_-\left(k_x x\right)/\|p_-\left(k_x x\right)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。若 v 也是 x' 的支撑泛函，则有

$\langle v,x'\rangle=1$，根据定理 5.2 知 $K_p(x')\neq\varnothing$，取 $k'\in K_p(x')$，有

$$\begin{aligned}
0&=\frac{1}{k'}\left(1+I_\Phi^p(k'x')\right)^{\frac{1}{p}}-\left\langle\frac{p_-(k_xx)}{\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}},x'\right\rangle\\
&=\frac{1}{k'\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}}\left(\left(1+I_\Phi^p(k'x')\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}-\langle p_-(k_xx),k'x'\rangle\right)\\
&=\frac{1}{k'\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}}\left(\left(1+I_\Phi^p(k'x')\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(1+I_\Psi^q(p_-(k_xx))\right)^{\frac{1}{q}}-\sum_{i=1}^\infty k'x'(i)p_-(k_xx(i))\right)\\
&\geq\frac{1}{k'\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi(k'x')+I_\Psi(p_-(k_xx))-\sum_{i=1}^\infty k'x'(i)p_-(k_xx(i))\right)\\
&\geq\frac{1}{k'\|p_-(k_xx)\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi(k'x')+I_\Psi(p_-(k_xx))-I_\Phi(k'x')-I_\Psi(p_-(k_xx))\right)=0
\end{aligned}$$

根据引理 1.6 有 $I_\Phi^{p-1}(k'x')\cdot I_\Psi(p_-(k_xx))=I_\Phi^{p-1}(k_xx)\cdot I_\Psi(p_-(k_xx))=1$，根据 Young 等式成立条件有 $p_-(k'x'(i))\leq p_-(k_xx(i))\leq p_+(k'x'(i))$ （$i\in\mathbb{N}$），于是对于任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $k'x'(i)=k_xx(i)$，又根据 $k'=\|k'x'\|_{\Phi,p}=\|k_xx\|_{\Phi,p}=k_x$，得 $x'=x$，因此 x 是 $B(l_{\Phi,p})$ 暴露点。

(2) $I_\Phi^{p-1}(k_xx)\cdot I_\Psi(p_-(k_xx))<1$，$\theta(k_xx)=1$

记 $J_x=\{i\in\mathbb{N}:p_-(k_xx(i))<p_+(k_xx(i))\}$，由于 $I_\Phi^{p-1}(k_xx)\cdot I_\Psi(p_-(k_xx))<1$，对任意 $i\in J_x$，选取 $\varepsilon_i>0$ 满足 $p_-(k_xx(i))+\varepsilon_i\leq p_+(k_xx(i))$ 和

$$\left(\sum_{i=1}^\infty\Phi(k_xx(i))\right)^{p-1}\cdot\left(\sum_{i\notin J_x}\Psi(p_-(k_xx(i)))+\sum_{i\in J_x}\Psi(p_-(k_xx(i))+\varepsilon_i)\right)<1$$

设

$$v(i)=\begin{cases}p_-(k_xx(i)), & i\notin J_x\\ p_-(k_xx(i))+\varepsilon_i, & i\in J_x\end{cases}\tag{5-5}$$

则有 $I_\Phi^{p-1}(k_x x)\cdot I_\Psi(v)<1$。由于 $\theta(k_x x)=1$，根据定理 3.9 知 x 的支撑泛函在 $l_{\Psi,q}\oplus S$ 中。根据 Hahn-Banach 定理知，存在 $\varphi\in S$ 使得 $\|\varphi\|=\varphi(k_x x)$，且满足 $I_\Phi^{p-1}(k_x x)\cdot\left(I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|\varphi\|\right)=1$ 成立。令 $f=v/\|v\|_{\Psi,q}+\varphi$，根据定理 3.7 知 f 在 x 处范数可达，

$$\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\frac{1}{\|v\|_{\Psi,q}}s_q\left(\rho^{*}\left(\|v\|_{\Psi,q}f\right)\right)$$

且 $f/\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 是 x 的暴露泛函，若 $f/\|f\|_{\Psi,q}^{*}$ 也是 $x'\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的支撑泛函，则有 $K_p(x')\neq\varnothing$，(事实上，若 $K_p(x')=\varnothing$，$\|x'\|_{\Phi,p}=b_\Psi\sum_{i=1}^{\infty}|x'(i)|\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|x'(i)|=1/b_\Psi<\infty$ 根据 $\left(h_{\Phi,p}\right)^{*}=l_{\Psi,q}$，$x'$ 的支撑泛函都在 $l_{\Psi,q}$ 中，这与 $\varphi\neq 0$ 矛盾，因此 $K_p(x')\neq\varnothing$)

取 $k'\in K_p(x')$。有

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{1}{k'}\left(1+I_\Phi^p(k'x')\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{f}{\|f\|_{\Psi,q}^{*}}(x')\\
&=\frac{1}{k'\|f\|_{\Psi,q}^{*}}\left(\left(1+I_\Phi^p(k'x')\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{\Psi,q}^{*}-f(k'x')\right)\\
&=\frac{(1+I_\Phi^p(k'x'))^{\frac{1}{p}}\dfrac{1}{\|v\|_{\Psi,q}}\left(1+\left(I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}-\left\langle\dfrac{v}{\|v\|_{\Psi,q}},k'x'\right\rangle-\varphi(k'x')}{k'\|f\|_{\Psi,q}^{*}}\\
&\geq\frac{1}{k'\|f\|_{\Psi,q}^{*}\|v\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi(k'x')+I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|-\langle v,k'x'\rangle-\|v\|_{\Psi,q}\varphi(k'x')\right)\\
&\geq\frac{1}{k'\|f\|_{\Psi,q}^{*}\|v\|_{\Psi,q}}\left(I_\Phi(k'x')+I_\Psi(v)+\|v\|_{\Psi,q}\|\varphi\|-I_\Psi(v)-I_\Phi(k'x')-\|v\|_{\Psi,q}\varphi(k'x')\right)\\
&=\frac{1}{k'\|f\|_{\Psi,q}^{*}}\left(\|\varphi\|-\varphi(k'x')\right)\geq 0
\end{aligned}
$$

因此，有 $\|\varphi\|=\varphi\left(k'x'\right)$， $I_{\Phi}^{p-1}\left(k'x'\right)\cdot\left(I_{\Psi}\left(v\right)+\|v\|_{\Psi,q}\cdot\|\varphi\|\right)=1$ 和对任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $p_{-}\left(k'x'\left(i\right)\right)\le p_{-}\left(k_x x\left(i\right)\right)\le p_{+}\left(k'x'\left(i\right)\right)$ 成立。不论 $k_x x\left(i\right)\in SC_{\Phi}$，还是 $i\in J_x$，显然都有 $k'x'\left(i\right)=k_x x\left(i\right)$。因此对任意 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $k'x'\left(i\right)=k_x x\left(i\right)$ 成立。根据 $k'=\|k'x'\|_{\Phi,p}=\|k_x x\|_{\Phi,p}=k_x$ 有 $x'=x$，因此 x 是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

(3) $I_{\Phi}^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(k_x x\right)\right)=1$， $\theta\left(k_x x\right)<1$ 且

$$card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in A\right\}\cdot card\left\{i\in\mathbb{N}:k_x x\left(i\right)\in B'\right\}=0$$

由定理 3.8 和 3.9 知 x 的支撑泛函在 $l_{\Psi,q}$ 中，且 $v=p_{+}\left(k_x x\right)/\|p_{+}\left(k_x x\right)\|_{\Psi,q}$ 是 x 的唯一支撑泛函。若 v 也是 x' 的支撑泛函，则 $\langle v,x'\rangle=1$，取 $k'\in K_p\left(x'\right)$，用 (1) 中类似方法可以证明 $x=x'$，因此 x 是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

(4) $I_{\Phi}^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{-}\left(k_x x\right)\right)<1<I_{\Phi}^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_{\Psi}\left(p_{+}\left(k_x x\right)\right)$， $\theta_{\Phi}\left(k_x x\right)<1$。

设 $v=\left(v\left(i\right)\right)$ 定义见 (5-5) 式且满足 $I_{\Phi}^{p-1}\left(k_x x\right)\cdot I_{\Psi}\left(v\right)=1$。根据定理 3.8 知 $v/\|v\|_{\Psi,q}$ 是 x 的支撑泛函，也是暴露泛函。若 $v/\|v\|_{\Psi,q}$ 是 $x'\in S\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的支撑泛函，取 $k'\in K_p\left(x'\right)$。根据 $1\in K_q\left(v\right)$，Young 不等式和 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\|v\|_{\Psi,q}&=\langle v,x'\rangle=\frac{1}{k'}\langle v,k'x'\rangle\le\frac{1}{k'}\left(I_{\Psi}\left(v\right)+I_{\Phi}\left(k'x'\right)\right)\\&\le\frac{1}{k'}s_p\left(I_{\Phi}\left(k'x'\right)\right)\cdot s_q\left(I_{\Psi}\left(v\right)\right)=\|v\|_{\Psi,q}\end{aligned}$$

根据引理 1.6 有 $I_{\Phi}^{p-1}\left(k'x'\right)\cdot I_{\Psi}\left(v\right)=1$，根据 Young 等式成立条件，对于任意 $i\in N$ 有 $p_{-}\left(k'x'\left(i\right)\right)\le p_{-}\left(k_x x\left(i\right)\right)\le p_{+}\left(k'x'\left(i\right)\right)$，类似可得 $x=x'$，因此 x 是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的一个暴露点。

情形（IV） $p=\infty$， $I_\Psi\left(p_-\left(x\right)\right)<\infty$ 。

(1) $\theta\left(x\right)<1$

由 $\theta\left(x\right)<1$ 知 x 的支撑泛函在 $l_{\Psi,1}$ 中。令 $J_x=\left\{i\in\mathbb{N}:p_-\left(x\left(i\right)\right)<p_+\left(x\left(i\right)\right)\right\}$ 。

对任意 $i\in J_x$，选取 $\varepsilon_i>0$ 满足 $p_-\left(x\left(i\right)\right)+\varepsilon_i\le p_+\left(x\left(i\right)\right)$，令

$$v\left(t\right)=\begin{cases}p_-\left(x\left(i\right)\right), & i\notin J_x,\\ p_-\left(x\left(i\right)\right)+\varepsilon_i, & i\in J_x,\end{cases}\tag{5-6}$$

由定理 3.8 知 $v_0=v/\|v\|_{\Psi,1}$ 是 x 的支撑泛函。于是有

$$\|v\|_{\Psi,1}=\left\langle v,x\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}v\left(i\right)x\left(i\right)=I_\Phi\left(x\right)+I_\Psi\left(v\right)=1+I_\Psi\left(v\right)$$

因此，$1\in K_1\left(v\right)$ 。若 $v_0=v/\|v\|_{\Psi,1}$ 也是 $y\in S\left(l_{\Phi,\infty}\right)\backslash\{0\}$ 的支撑泛函。则有

$$\|v\|_{\Psi,1}=\left\langle v,y\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}v\left(i\right)y\left(i\right)\le I_\Phi\left(y\right)+I_\Psi\left(v\right)\le 1+I_\Psi\left(v\right)=\|v\|_{\Psi,1}$$

于是对任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $p_-\left(y\left(i\right)\right)\le p_-\left(x\left(i\right)\right)\le p_+\left(y\left(i\right)\right)$ 和 $I_\Phi\left(x\right)=I_\Phi\left(y\right)=1$ 成立。

类似有 $x=y$ 。因此，x 是 $B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$ 的一个暴露点。

(2) $\theta\left(x\right)$=1

由定理 3.9 知 $Grad\left(x\right)\subset l_{\Psi,1}\bigoplus S$，根据 Hahn-Banach 定理，存在 $\varphi\in S$ 使得 $\|\varphi\|=\varphi(x)$ 。令 $f=v+\varphi$ 其中 v 的定义见 (5-6) 式。则 f 在 x 处是范数可达的且 $1\in K_1\left(f\right)$ 。若 f 在 $y\in S\left(l_{\Phi,\infty}\right)\backslash\{0\}$ 也是范数可达的，则有

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Psi,1}^*&=\left\langle v,y\right\rangle+\varphi\left(y\right)\le I_\Phi\left(y\right)+I_\Psi\left(v\right)+\varphi\left(y\right)\\&\le 1+I_\Psi\left(v\right)+\varphi\left(y\right)=\|v\|_{\Psi,1}+\|\varphi\|=\|f\|_{\Psi,1}^*\end{aligned}$$

其中 $I_\Phi\left(x\right)=1$ 由于 x 是 $B\left(l_{\Phi,p}\right)$ 的端点。根据 Young 不等式，对于任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有

$p_-\left(y\left(i\right)\right)\le p_-\left(x\left(i\right)\right)\le p_+\left(y\left(i\right)\right)$， $I_\Phi\left(y\right)=1$ 和 $\varphi\left(y\right)=\varphi\left(x\right)=\|\varphi\|$ 同时成立，故有

$x=y$。因此，x 是 $B\left(l_{\Phi,\infty}\right)$ 的一个暴露点。

5.4 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的暴露性

定理 5.5 赋 p-Amemyia ($1\le p\le\infty$) 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 具有暴露性当且仅当赋 p-Amemyia ($1\le p\le\infty$) 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 是严格凸的。

证明 必要性

设 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 具有暴露性质，即单位球面 $S\left(L_{\Phi,p}\right)$（$S\left(l_{\Phi,p}\right)$）上每一点都为暴露点。由于暴露点是端点，因此 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 是严格凸的。

充分性

任给 $x\in S\left(L_{\Phi,p}\right)\left(S\left(l_{\Phi,p}\right)\right)$，存在 $f\in Grad\left(x\right)$，若存在 $x_1\in S\left(L_{\Phi,p}\right)\left(S\left(l_{\Phi,p}\right)\right)$ 使得 $f\left(x\right)=f\left(x_1\right)=1$，则有

$$f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)=\left\|\frac{x+x_1}{2}\right\|_{\Phi,p}=1$$

由于 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 是严格凸的，必有 $x=x_1$，所以 x 是暴露点。由 x 的任意性，有 $L_{\Phi,p}\left(l_{\Phi,p}\right)$ 是严格凸的。

5.5 本章小结

本章主要对赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 的暴露性行研究。利用单位球面上点的支撑泛函的具体形式，给出了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 单位球面点为暴露点的判据。结果表明，当 $1<p<\infty$ 时，$L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 中暴露点的判据弱于 L_{Φ}^{o}，L_{Φ}，l_{Φ}^{o}

和 l_{Φ} 中暴露点的判据。从点态性质的结果出发获得了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 具有暴露性的充要条件。

结　论

随着 Orlicz 空间几何理论的发展成熟和应用的需要，数学工作者们开始把目光转向了 Orlicz 空间的各种推广和深化。赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 是赋 Orlicz 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi}^{o}\left(l_{\Phi}^{o}\right)$ 和赋 Luxemburg 范数 Orlicz 空间 $L_{\Phi}\left(l_{\Phi}\right)$ 的推广，由于 p-Amemyia 范数 $\|\cdot\|_{\Phi,p}$ 的生成函数的多样性，使得 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 更为复杂。因此，研究 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 需要引入新的技巧。$L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 中很多点态性质和几何性质的判据还没有得到，需要不断完善该理论内容。本文对 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 的光滑性、严格凸性和暴露性进行研究，主要结果和创新点如下：

一、在 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 的对偶空间引入如下泛函：

$$\|f\|_{\Psi,q}^{*}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}s_{q}\left(\rho^{*}(kf)\right)=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\left(1+\left(\rho^{*}(kf)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le q<\infty\\ \inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\left\{1,\rho^{*}(kf)\right\}, & q=\infty\end{cases}$$

利用该泛函，给出了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 有界线性泛函范数计算公式和单位球面上点的支撑泛函的具体形式。进一步借助单位球面上点的支撑泛函的具体形式得到了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 光滑点的判据。从光滑点的刻画出发获得了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 具有光滑性的判别准则。

二、给出了 $l_{\Phi,p}$ 具有严格凸性的判别准则。使用新的方法简化了 l_{Φ}^{o} 和 l_{Φ} 具有严格凸性的证明。

三、利用 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$ 单位球面上点的支撑泛函的具体形式，给出了 $L_{\Phi,p}$ 和 $l_{\Phi,p}$

单位球面上的点为暴露点的判别准则。结果表明，当$1<p<\infty$时，$L_{\Phi,p}$和$l_{\Phi,p}$暴露点的判别准则弱于L_{Φ}^{o}，L_{Φ}，l_{Φ}^{o}和l_{Φ}中暴露点的判别准则。利用点态性质的结果获得了$L_{\Phi,p}$和$l_{\Phi,p}$具有暴露性的充要条件。

赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间中的点态性质和几何性质的研究只解决了一小部分，还有大量工作可以做，该空间中的很光滑点、强光滑点、强暴露点、弱*强暴露点、弱强暴露点、WM 点等点态性质及相应的几何性质都未解决。是否可以借住赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间有界线性泛函的范数计算公式解决上述点态性质的刻画问题？进而为研究该空间具有相应的几何性质提供支撑。这是我今后需要继续研究的问题。

2019 年 Wisla M 将赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间推广得到更一般的赋 s-范数 Orlicz 空间。是否可以借鉴寻找赋 p-Amemyia 范数 Orlicz 空间有界线性泛函范数计算公式的方法去寻找赋 s-范数 Orlicz 空间有界线性泛函的范数计算公式？从而为进一步的研究赋 s-范数 Orlicz 空间的光滑性、暴露性、WM 性质等几何性质提供必要的工具。这也是我今后需要继续研究的问题。

参考文献

[1] CLARKSON J A. Uniformly Convex Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1936, 40(3): 396-414.

[2] 俞鑫泰. Banach空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986: 1-200.

[3] 崔云安. Banach空间几何理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-223.

[4] 刘培德. 鞅与Banach空间几何学[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 1-180.

[5] 徐世英, 李冲, 杨文善. Banach空间中的非线性逼近理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 1-156.

[6] 张恭庆. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987: 1-86.

[7] LINDENSTRAUSS J, TZAFRIRI L. Classical Banach Spaces II: Function Spaces[M]. Springer Science & Business Media, 2013:1-200.

[8] KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Mapping Which Do Not Increase Distance, The American Mathematical Monthly, 1965, 72(9): 1004-1006.

[9] SIMS B. A Class of Spaces with Weak Normal Structure, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1994, 49(3): 523-528.

[10] ORLICZ W. Ubereine Gewisse Klasse Von Raumen Vom Typus B[J]. Bulletin of International Academy Poland, Seria A, Krakow, 1932, 207-220.

[11] 陈述涛, 王玉文.关于赋范线性空间非方性的定义[J]. 数学年刊, 9A (3): 1988.

[12] MALIGRANDA L. Orlicz Spaces and Interpolation[M]. Campinas: Seminars in Mathematics, Universidade Estadual de Campinas, 1989: 1-100.

[13] KURC W. Strictly and Uniformly Monotone Musielak-Orlicz Spaces and Applications to Best Approximation[J]. Journal of Approximation Theory, 1992, 69(2): 173-187.

[14] WANG B X. Support Functional and Its Applications of Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematicae, 1993, 33: 185-192.

[15] 崔云安, 王廷辅. Orlicz序列空间的一致单调系数及其应用[J]. 应用数学学报, 1997, 20(3): 362-365.

[16] 吕彦鸣, 滕岩梅, 王廷辅. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间中最佳逼近算子[J]. 应用泛函分析学报, 1999 (1): 82-85.

[17] HE X, CHEN S T. Monotonicity and Best Approximation in Orlicz-Sobolev

Spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 50(6): 1311-1324.
[18] CHEN S T, HE X, HUDZIK H, et al. Monotonicity and Best Approximation in Orlicz-Sobolev Spaces with the Luxemburg Norm[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 344(2): 687-698.
[19] MILNES H W. Convexity of Orlicz Spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1957, 7(3): 145111483.
[20] 劳炳元,朱熹平. Orlicz空间的端点[J]. 中山大学学报, 1983(02): 99-105.
[21] HUDZIK H, KURC W, WISŁA M. Strongly Extreme Points in Orlicz Function Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 1995, 189(3): 651-670.
[22] HUDZIK H. Orlicz Spaces without Strongly Extreme Points and without H-points[J]. Canadian Mathmatical Bulletin., 1993, 36: 173-177.
[23] 崔云安，王廷辅. Orlicz 空间的强端点[J]. 数学杂志, 1987, 4(8): 335-340.
[24] CUI Y, HUDZIK H, PLUCIENNIK R. Extreme Points and Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 789-817.
[25] CUI Y, YAN L, MENG C. Strong U-Points of Orlicz Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Banyan Journal of Mathematics.,1997, 4: 45-58.
[26] KAMINSKA A. Strict Convexity of Sequence Orlicz-Musielak Spaces with Orlicz Norm[J]. Journal of Functional Analysis, 1983, 50(3): 285-305.
[27] CUI Y, HUDZIK H, MENG C. On Some Local Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Acta Mathematica Hungarica, 1998, 80(1): 143-154.
[28] HUDZIK H, CUI Y, ZOU M, et al. Extreme Points and Strong U-Points in Musielak–Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 2007, 26(1): 87-101.
[29] KHAMSI M A. Uniform Smoothness Implies Super-Normal Structure Property[J]. Theory, Methods & Applications, 1992, 19(11): 1063-1069.
[30] JESUS G-F. The Fixed Point Property in Banach Spaces with the NUS-Property[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 215(2): 532-542.
[31] 陈述涛. Orlicz空间的光滑点[J]. 哈尔滨师范大学自然科学版, 1989, 5(1): 1-4.

[32] CHEN S T. Smoothness of Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematics, XXVII, 1987, 49-58.

[33] 王廷辅，陈述涛. Orlicz空间的光滑性[J]. 工程数学学报, 2013, 4(3): 113-115.

[34] GRZASLEWICZ R, HUDZIK H. Smooth Points of Orlicz Spaces Equipped with Luxemburg Norm[J]. Mathematische Nachrichten, 1992, 155(1): 31-45.

[35] SHI Z, WANG T. On the Smoothness of Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Collectanea Mathematica, 1996, 47(2): 105-109.

[36] CHEN S, HUDZIK H, KAMINSKA A. Support Functionals and Smooth Points in Orlicz Function Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Japanese Journal of Mathematics, 1994, 39(2): 271-279.

[37] WANG B, WANG T. Support Functionals and Smooth Points in Abstract M spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1999, 127(6): 1761-1770.

[38] JI D, YU L, WANG T. Nearly Smooth Points and Near Smoothness in Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1998, 39(4): 721-732.

[39] HUDZIK H, ZBĄSZYNIAK Z. Smooth Points of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[C].Colloquium Mathematicae. 1993, 65(2): 157-164.

[40] ZBĄSZYNIAK Z. Smooth Points of the Unit Sphere in Musielak-Orlicz Function Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1994, 35(1): 95-102.

[41] ZBASZYNIAK Z. Smoothness in Musielak-Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Collectanea Mathematica, 1997: 543-561.

[42] WANG T, BIAN S. Smooth Points and Strong (Very) Smooth Points of Musielak-Orlicz Spaces with Orlicz Norm[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 1999, 1(1): 61-68.

[43] 王廷辅，郝翠霞，刘莉芳. 赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的 Gateaux可微点与Frechet可微点[J]. 数学物理学报, 2003, 23(2): 145-153.

[44] 王廷辅. 赋Orlicz范数Musielak-Orlicz序列空间的一致Gateaux可微性[J]. 系统数学与科学, 2003, 23(2): 205-214.

[45] VIGELIS R, CAVALCANTE C. Smoothness of the Orlicz Norm in

Musielak-Orlicz Function Spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 2014, 287(8-9): 1025-1041.
[46] STRASZEWICZ S. Uber Exponierte Punkte Abgeschlossener Punktmengen[J]. Fundamenta Mathematicae, 1935, 24: 139-143.
[47] LINDENSTRAUSS J. On Operators Which Attain Their Norm[J]. Israel Journal of Mathematics, 1963, 1(3): 139-148.
[48] PHELPS R. Dentability and Extreme Points in Banach Spaces[J]. Journal of Functional Analysis, 1974, 17(1): 78-90.
[49] NAN C. On Weakly Exposed Points[J]. Northeasten Mathematics, 1990, 6(4): 449-454.
[50] CUI Y, HUDZIK H, ZHU H. On the Weakly Strongly Exposed Property and Some Smoothness Properties of Orlicz Spaces[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1996, 54(3): 431-440.
[51] WANG B. Exposed Points Orlicz Spaces[J]. Baoji Teachers College, 1989, 12: 43-49.
[52] GRZASLEWICZ R, HUDZIK H, KURC W. Extreme and Exposed Points in Orlicz Spaces[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1992, 44(03): 505-515.
[53] WANG T, JI D, SHI Z. The Criteria of Strongly Exposed Points in Orlicz Spaces[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1994, 35(4): 721-734.
[54] HUDZIK H, PALLASCHKE D. On Some Convexity Properties of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Mathematische Nachrichten, 1997, 186: 167-185.
[55] LI M, WANG B, WANG T. Strongly Exposed Points of Orlicz Sequence Spaces[J]. Acta Mathematica Sinica English Series, 1998, 14(3):593-604.
[56] BEDNAREK R, KOWALEWSKI W. Exposed Points in Musieilak-Orlicz Spaces Equipped with the Luxemburg Norm[J]. Mathematica Japonicae, 1995, 41(1): 145-154.
[57] SHI Z, LIU C. Exposed and Strongly Exposed Points in Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2012, 16(1): 305-322.
[58] AIZPURU A, GARCÍA-PACHECO F J. A Short Note About Exposed Points in Real Banach Spaces[J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28(4): 797-800.

[59] SHI Z, LIU C. Strongly Exposed Points in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Endowed with Orlicz Norm[J]. Banach Center Publications, 2011, 92: 327-338.
[60] SHI Z, LIU C. Explosiveness of Musielak-Orlicz Sequence Spaces[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2012,14(1): 14-22.
[61] LUXEMBURG W A J. Banach Function Spaces[D], Thesis, Delft, 1956.
[62] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII Y B. Convex Functions and Orlicz Spaces[M]. P. Noordhoff, 1961: 34-39.
[63] NAKANO H. Topology and Linear Topological Spaces[M]. Maruzen Co, Ltd, 1951: 12-40.
[64] LUXEMBURG W A J, ZAANEN A C. Conjugate Spaces of Orlicz Spaces[J]. Indagationes Mathematics, 1956, 59: 217-228.
[65] ANDO T. Linear Functionals on Orlicz Spaces[J]. Nieuw Arch Wisk, 1960, 8(8):1-16.
[66] MUSIELAK J. Orlicz Spaces and Modular Spaces[M]. Springer, Berlin: Lecture Notes in Mathematics, 1034, 1983.
[67] GAPOŠKIN V F. The Existence of Unconditional Bases in Orlicz Spaces[J]. Funkcional Analysis i Priložen, 1967, 1(4): 26-32.
[68] LINDENSTRAUSS J, TZAFRIRI L. Orlicz Sequence Spaces[M]. Classical Banach Spaces I. 1971: 375-390.
[69] 丁夏畦. 一类函数空间的性质和应用[J]. 数学学报, 1960, 10: 316-360.
[70] TRUDINGER N S. On imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(5): 473-483.
[71] 吴从炘, 王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983: 1-200.
[72] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 等. Orlicz空间几何理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986: 16-178.
[73] CHEN S T. Geometry of Orlicz Spaces[M]. Warszawa: Polish Scientific Publisher, 1996: 1-165.
[74] ZUO M, CUI Y, HUDZIK H, et al. On the Points of Local Uniform Rotundity and Weak Local Uniform Rotundity in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(10): 4906-4915.

[75] HUDZIK H, KAMINSKA A, MASTYLO M. Geometric Properties of Some Calderon Lozanovskili Spaces and Orlicz-Lorentz Spaces[J]. Houston Journal of Mathematics, 1996, 22: 639-663.

[76] DONALDSON T, TRUDINGER N. Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems[J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 8: 52-75.

[77] CHEN S T, HU C Y, ZHAO C X. Extreme Points and Rotundity of Orlicz-Sobolev Spaces[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2002, 32(5): 293-299.

[78] HUDZIK H, MALIGRANDA L. Amemiya Norm Equals Orlicz Norm in General[J]. Indag Mathematics, 2000, 11(4): 573-585.

[79] CUI Y, DUAN L, HUDZIK H, et al. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces: Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1796-1816.

[80] CUI Y, HUDZIK H, LI J, et al. Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 6343-6364.

[81] CHEN L, CUI Y. Complex Extreme Points and Complex Rotundity in Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73(5): 1389-1393.

[82] CHEN L, CUI Y. Complex Rotundity of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2011, 378: 151-158.

[83] 李小彦，崔云安. 赋p-Amemiya范数Orlicz空间的对偶空间[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(001), 110-112.

[84] CUI Y, HUDZIK H, WISŁA M, et al. Non-Squareness Properties of Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75(10): 3973-3993.

[85] HE X, CUI Y, HUDZIK H. The Fixed Point Property of Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 1: 1-18.

[86] HE X, YU J, CUI Y, et al. Packing Constant in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 626491: 1-7.

[87] 段丽芬，许晶，崔云安．赋p-Amemiya($1\le p\le\infty$)范数的Orlicz序列空间的端点和严格凸性[J]．吉林大学学报 (理学版), 2012(5):902-906.
[88] CUI Y, HUDZIK H, LI J. Some Fundamental Properties for Duals of Orlicz Spaces. Nonlinear Analysis Theory Methods Application, 2010, 73(8): 2353-2360.
[89] CUI Y, HUDZIK H, WISŁA M. Monotonicity Properties and Dominated Best approximation Problems in Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 432(2): 1095-1105.
[90] CUI Y, HUDZIK H, WISŁA M. M-Constants, Dominguez-Benavides Coefficient, and Weak Fixed Point Property in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2016, 89(2016): 1-14.
[91] KACZMAREK R. Uniform Rotundity of Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Mathematische Nachrichten, 2018, 291(10): 1514-1532.
[92] KACZMAREK R. Uniform Rotundity in Every Direction of Orlicz Function Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Collectanea Mathematica, 2019, 70(1): 71-86.
[93] 贺鑫，崔云安，季丹丹．赋p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调系数[J]．数学进展, 2019, 4.
[94] HE X, CUI Y, HUDZIK H. Local Monotonicity Coefficients in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2020, 2020(1): 1-15.
[95] WISŁA M. Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norms Results and Open Questions[J]. Commentationes Mathematics, 2016, 55, 183-209.
[96] WISŁA M. Orlicz Spaces Equipped with s-Norm [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 483(2): 123659.
[97] 崔云安，安莉丽，展玉佳．赋s-范数的Orlicz空间的端点 [J]．哈尔滨理工大学学报, 2020, 25(5): 143-148.
[98] CUI Y, ZHAN Y. Strongly Extreme Points and Middle Point Locally Uniformly Convex in Orlicz Spaces Equipped with s-Norm [J]. Journal of Function

Spaces, 2019, 2019(4): 1-7.

[99] CUI Y, WISŁA M. Monotonicity Properties and Solvability of Dominated Best Approximation Problem in Orlicz Spaces Equipped with *s*-Norm[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2021, 115(4): 1-22.

[100] DONG J, CUI Y, WISŁA M. Kadec-Klee Property in Orlicz Function Spaces Equipped with *s*- Norm [J]. Journal of Function Spaces, 2022, 2022: 1-7.

[101] CUI Y, HUDZIK H, KACZMAREK R, et al. Uniform Monotonicity of Orlicz Spaces Equipped with the Mazur-Orlicz F-norm and Dominated Best Approximation in F-normed Köthe Spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 2022, 295(3): 487-511.

[102] BAI X, CUI Y, KOŃCZAK J. Monotonicities in Orlicz Spaces Equipped with Mazur-Orlicz-norm[J]. Journal of Function Spaces, 2020, 2020.

[103] CUI Y, WANG T. Uniformly Nonsquare in Orlicz Space Equipped with the Mazur-Orlicz-Norm[J]. Journal of Function Spaces, 2021, 2021(10): 1-7.

[104] SULLIVAN F. A Generalization of Uniformly Rotund Banach spaces[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1979, 31(3): 628-636.

[105] DAY M M. Strict Convexity and Smoothness of Normed Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1955, 78(2): 516-528.

[106] CUI Y, HUDZIK H, NOWAK M, et al. Some Geometric Properties in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Journal of Convex Analysis, 1999, 6(1): 91-113.

[107] CUI Y, FORALEWSKI P, HUDZIK H, et al. Kadec–Klee Properties of Orlicz–Lorentz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Positivity, 2021, 25(4): 1273-1294.

[108] CUI Y, FORALEWSKI P, KOŃCZAK J. Orlicz-Lorentz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Acta Mathematica Scientia, 2022, 42(2): 623-652.

[109] WANG D, CUI Y. Uniform Kadec-Klee Properties of Orlicz-Lorentz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Positivity, 2022, 26(2): 1-16.

[110] FORALEWSKI P, KOŃCZAK J. Local Uniform Non-squareness of Orlicz–Lorentz Function Spaces[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2019, 113(4): 3425-3443.

[111] WANG D, CUI Y. K-uniform Convexity in Orlicz-Lorentz Function Space Equipped with the Orlicz Norm[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2022: 1-8.
[112] CUI Y, ZHAO L. Kadec-Klee Property in Musielak-Orlicz Function Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Aequationes mathematicae, 2022, 96(1): 167-184.

攻读博士学位期间发表的学术论文及获得成果

[1] Xiaoyan Li, Yunan Cui*, Marek Wisla. Smoothness of Orlicz Function Spaces Equipped with the *p*-Amemiya Norm[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2021, 15(3):1-27. (排名: 1/3, SCI 检索号: 000648288500002, IF: 0.990, JCR 分区: Q3)

[2] Xiaoyan Li, Yunan Cui*. Strict Convexity of Orlicz Sequence Spaces Equipped with *p*-Amemiya Norms[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 5:1-12. (排名: 1/2, SCI 检索号: 000677941100001, IF: 0.516, JCR 分区: Q4)

[3] Xiaoyan Li, Yunan Cui*. Exposed Points of Orlicz Sequence Spaces Equipped with *p*-Amemiya Norms[J]. Journal of Geometric Analysis, 2022, 32:307. (排名: 1/2, SCI 检索号: 000857395100010, IF: 1.002, JCR 分区: Q2)

[4] Xiaoyan Li, Yunan Cui*. Exposed Points of Orlicz Function Spaces Equipped with *p*-Amemiya Norms[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2022:1-10. (排名: 1/2, SCI 检索号: 00086636400001, IF: 0.559, JCR 分区: Q4)

致 谢

值此论文完成之际，谨向给予我无私帮助的老师和同学们致以诚挚的谢意！

我要感谢导师崔云安教授对我一直以来的教导。2007 年考取崔老师的硕士研究生，时隔十二年，2019 年再次考取崔老师的博士研究生，在我的两段研究学习生活中崔老师给予我极大的帮助。读博以来，崔老师经常组织大家一起进行学术研讨，从基本知识要点的讲解再到学术前沿问题的分析，每次研讨都使我感觉收获颇丰。这三年多来，正是由于崔老师的耐心指导和辛苦付出，使得我快速掌握了论文投稿、修改和校稿等各方面的工作，为读博士期间顺利发表 SCI 学术论文打下坚实基础。在博士毕业论文的撰写过程中崔老师倾注了无数的心血和汗水，使我的毕业论文能够精益求精。崔老师是我的良师益友，能够成为崔老师的硕士和博士研究生是我有生以来最光荣的事情！

我要感谢哈尔滨师范大学数学科学学院的领导和同事们在我学业、工作、生活等多方面的照顾和关心，使我能够顺利展开教学工作，同时又可继续进行博士期间的学习！

我要感谢 901 的所有师弟、师妹们，是他们陪伴我度过了这三年多的学习研究生活，帮助我解决学习和生活等方面的困难，使我能够安心学习！

我还要感谢我的父母、公公婆婆、爱人和孩子，正是由于家人们的全力支持使得我能够在学业上更上一层楼，取得今天的成绩。