中图分类号　O177.2
UDC 分类号　517

非交换 Orlicz 空间中若干拓扑性质和几何性质的研究

作 者 姓 名	麻振华
学 院 名 称	数学与统计学院
指 导 教 师	蒋立宁教授
答辩委员会主席	孙华飞教授
申 请 学 位	理学博士
学 科 专 业	基础数学
学位授予单位	北京理工大学
论文答辩日期	2017 年 6 月 3 日

Noncommutative Orlicz spaces and some basic topological and geometric properties

Candidate Name	Zhen-Hua Ma
School or Department	School of Mathematics and Statistics
Faculty Mentor	Prof. Li-Ning Jiang
Chair, Thesis Committee	Prof. Hua-Fei Sun
Degree Applied	Doctor of Science
Major	Pure Mathematics
Degree by	Beijing Institute of Technology
The Date of Defence	June 3, 2017

摘 要

本文主要研究非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的几何及拓扑性质, 包括: 子空间, 一致单调性, 依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质, 装球常数的下界估计及非交换 Orlicz 序列空间中几何性质等, 具体可分为以下六章.

第一章首先介绍了非交换 Orlicz 空间的历史背景, 研究现状. 然后给出本文的主要研究成果, 以及本文要用到的相关概念和结论, 如经典 Orlicz 空间相关概念、可测算子及非交换 Orlicz 空间的定义等.

第二章主要研究了非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的子空间及某些基本几何性质. 首先, 证明了非交换 Orlicz 空间做为模空间具有 Fatou 性质. 因此, 此空间为 Banach 空间, 同时给出 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的子空间 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中元素的具体表示, 并证明了 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 在范数拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的闭子空间, 在测度拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的稠密子空间. 而且, 还证明了若 $\varphi\in\Delta_2$ 条件, 则 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有一致单调性质, 并且在单位球面上依测度收敛与依范数收敛一致, 因此当 $\varphi\in\Delta_2$ 时, $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 本章最后我们给出了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中 Orlicz 范数的相关性质, 如 Orlicz 范数与模之间的关系、依范数收敛于依测度收敛的等价性、Orlicz 范数绝对连续性及投影算子的 Orlicz 范数计算公式等.

第三章主要研究了非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 上依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质. 我们首先证明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质的充分必要条件为 $\varphi\in\Delta_2$ 条件, 其次我们证明了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有序连续性质、局部一致单调性质等. 做为推论, 我们可以得到非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间自然也具有上述性质. 本章最后, 我们给出 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 对偶空间及自反的刻画.

第四章主要研究了装球常数问题. 首先我们研究了 Cesàro-Orlicz 序列空间中的装球常数问题, 给出了这一空间装球常数的两个计算公式. 接着, 在本章中我们还定义了 BK 序列空间中的一个新常数. 本章最后我们讨论了非交换 Orlicz 函数空间装球常数问题, 进而给出了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 装球常数的下界估计, 同时我们证明了 $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 与 $L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的装球常数都是 $\frac{1}{2}$.

第五章主要研究了非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$. 做为 Schatten 类的推广, 首

先我们给出了非交换 Orlicz 序列空间 $L_{\varphi}(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 的定义并对这一空间中的一些基本性质进行了研究, 如范数与迹的关系、迹不等式等, 进而给出了迹类算子 $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ 和 Schatten 类算子 $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1 < p < \infty)$ 的相应不等式. 本章最后, 我们又给出了 $L_{\varphi}(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 中端点及凸性的判定, 做为推论我们给出了 $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ 和 $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1 < p < \infty)$ 的相应结果.

第六章总结本论文所做的主要内容, 对今后的研究工作做出展望.

关键词: Orlicz 空间; 非交换 Orlicz 空间; τ-可测算子; Kadec-Klee 性质; 对偶空间; 自反性; 装球常数; Cesàro-Orlicz 序列空间; BK 序列空间; 非交换 Orlicz 序列空间; von Neumann 代数.

Abstract

The main aim of this thesis is to study some geometric and topological properties about the noncommutative Orlicz spaces $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, including the closed subspaces, the uniformly monotone, Kadec-Klee property for convergence in measure, the lower bound estimation of the packing constant, some geometric properties of noncommutative Orlicz sequence spaces and so on. This thesis consists of the following six chapters.

In Chapter 1, we present a general survey of the backgrounds and modern developments for noncommutative Orlicz spaces. Subsequently we show the important conclusions of this thesis, and related results for measurable operators and some concepts of noncommutative Orlicz spaces, which will be used throughout this thesis.

In Chapter 2, one establishes as a modular space, the space $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ possesses the Fatou property, and consequently, it is a Banach space. In addition, the description of the subspace $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ which is closed under the norm topology and dense under the measure topology, is given. Moreover, if the Orlicz function φ satisfies the $\varphi\in\Delta_2$ then $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ is uniformly monotone, and convergence in the norm topology and measure topology coincide on the unit sphere. Hence, $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ if φ satisfies the Δ_2 condition. At last of this Chapter, some properties of Orlicz norm on $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ are given, such as the relationship of Orlicz norm and modular, the equivalence of convergence in the measure and the norm, absolute continuity of Orlicz norm, at last the Orlicz norm of the projection operator is given.

In Chapter 3, we present the Kadec-Klee property for convergence in measure of the noncommutative Orlicz spaces $L_\varphi\left(\widetilde{\mathcal{M}},\tau\right)$. Firstly, one proves that $L_\varphi\left(\widetilde{\mathcal{M}},\tau\right)$ have the Kadec-Klee property for convergence in measure if and only if φ satisfies the Δ_2 condition. Hence, $L_\varphi\left(\widetilde{\mathcal{M}},\tau\right)$ have the property of order continuous and local uniform monotonicity properties. At last of this Chapter, the dual space and reflexivity of $L_\varphi\left(\widetilde{\mathcal{M}},\tau\right)$ are given.

In Chapter 4, we mainly study the packing constant. Firstly, one calculate the Kottman constant and the packing constant of the Cesàro-Orlicz sequence space, in order to compute the constants, the paper gives two formulas. On the base of these formulas one can easily

obtain the packing constant for the Cesàro sequence space and some other sequence spaces. Secondly, a new constant $\widetilde{D}(X)$ which seems to be relevant to the packing constant, is given. At last, similar the classical case we calculate the lower bound of the packing constant of the noncommutative Orlicz spaces $L_\varphi\left(\widetilde{\mathcal{M}},\tau\right)$, and one proves all of the packing constant of the noncommutative space $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ and $L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ are $\frac{1}{2}$.

In Chapter 5, we present some results of the noncommutative Orlicz sequence spaces $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ which generalize the Schatten class. First of all, the definition of noncommutative Orlicz sequence spaces $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ is given, and some basic properties of this space are presented, such as the relationship between norm and trace, trace inequality and so on, which generalize the results of $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ and $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1<p<\infty)$. In the last part of this Chapter, one gives the criterions of the extreme point and the round space about $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, as corollary, the corresponding results of $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ and $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1<p<\infty)$ are given.

In Chapter 6, we summarize the main contribution of this thesis and makes the expectation for the further study.

Keywords: Orlicz spaces; noncommutative Orlicz spaces; τ-measuable operator; Kadec-Klee property; dual space; reflexivity; packing constant; Cesàro-Orlicz sequence space; BK sequence space; noncommutative Orlicz sequence space; von Neumann algebra .

目 录

第一章 绪论

§1.1 研究背景及发展状况

众所周知, 泛函分析在现代数学的发展中一直占据着非常重要的作用, 它是由经典数学物理中的变分问题发展而来, 隶属于分析学的范畴, 其研究的对象主要是函数所构成的空间, 它是综合运用函数论、几何学以及现代数学的观点和方法来研究无限维向量空间上的泛函、算子和极限理论的一门学科. 有时人们也把泛函分析看作是无限维向量空间的解析几何及数学分析的延伸. 近百年来, 由于受到量子物理、量子力学、现代力学及现代工程技术等学科的有力刺激, 这门学科才得到了蓬勃的发展, 人们通过综合运用分析、代数和几何的观点和方法, 来系统地研究分析数学、现代物理等学科中所遇到的相关问题, 因此从上世纪以来逐渐发展为一个具有综合性的数学学科分支. 从上世纪中叶开始, 人们开始把泛函分析应用在概率论、偏微分方程理论以及计算数学等数学学科中并极大的推动了这些学科的发展, 目前它的思想和方法已经渗透并运用到现代数学、物理及工程技术理论的很多分支, 如量子物理、量子力学、现代力学、统计力学、现代控制论、调和分析、微分几何、函数论等.

算子代数是泛函分析的一个重要研究方向, 它所研究的基本内容主要包括 C*-代数与 von Neumann 代数. 一般情况下, 我们可以把 C*-代数看作局部紧拓扑空间理论在非交换方向的发展, 而 von Neumann 代数则是经典测度与积分理论的推广. 上世纪 40 年代, 为了研究量子力学的数学基础, 数学家 von Neumann J 和他的合作者 Murray F J 发表了一系列关于非交换算子环的论文 [77, 78, 79, 106, 107], 从而开创了一个崭新的数学领域, 即算子代数. 随后经过众多数学家的共同努力, 算子代数的基本理论逐渐得到了发展和完善, 同时这门崭新的学科也被广泛应用于其他数学领域和学科, 如 K 理论、非交换几何、量子概率、量子力学、算子空间、非交换调和分析等, 同时它还是研究量子统计物理、量子场论和量子信息与量子计算等许多物理学理论发展所需要的基本数学工具. 后来, Dixmier J 重新命名非交换算子环为 von Neumann 代数, 具体来说: 设 $\mathbb{H}$ 是 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 表示 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上全体有界线性算子构成的代数, 则 von Neumann 代数是指有单位元的按照弱算子拓扑闭的 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的自伴子代数 $\mathcal{M}$. 随

后, 在文献 [105] 中 von Neumann 证明了二次换位定理, 即 $\mathcal{M}$ 是弱算子拓扑闭当且仅当 $\mathcal{M}=\mathcal{M}''$, 其中 $\mathcal{M}'$ 表示 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 中的换位子, 即与 $\mathcal{M}$ 可换的有界线性算子的全体.

1940 年, 在文献 [103] 中, Stone M 证明了 Hilbert 空间上按范数拓扑闭的交换的自伴算子全体构成的代数与紧 Hausdorff 空间上实值连续函数全体构成的代数是同构的. 1943 年, Gelfand I M 和 Naimark M A 等人在文献 [38] 中证明了一类具有对合的 Banach 代数等距同构于 Hilbert 空间上有界线性算子代数的范数闭的自伴子代数, 后来人们将这类具有对合的 Banach 代数称为 C*-代数. 文中, 作者通过利用 Gelfand 变换证明了可换的 C*-代数等距同构于紧 Hausdorff 空间上实值连续函数全体构成的代数. 至此, C*-代数理论逐渐得到人们的关注, 同时也由于这个原因, 人们也称 C*- 代数为非交换函数空间. 随后, Segal I E 于 1947 年在文献 [97] 中进一步完善了上述工作, 并将 C*-代数上的正线性泛函与 C^*- 代数的表示联系起来. 这一工作不仅使 C*- 代数得到了更为准确的表述, 而且导致了著名的 Gelfand-Naimark-Segal 构造 (简称 G.N.S. 构造) 的产生, 从而奠定了 C*-代数理论的基础.

进入 20 世纪 50 年代以后, 算子代数理论得到了众多数学家的关注并进入了迅速发展时期. 如, Dixmier J 于 1950 年证明了 von Neumann 代数等距同构于某个 Banach 空间的对偶空间 [26]. Kaplansky I 在其系列论文中证明了著名的稠密性定理, 并且从代数角度研究了 von Neumann 代数和 C*-代数 [49, 50, 51]. 在文献 [47, 48] 中, Kadison R V 将 C*-代数的研究重点则由原来的代数结构转向了对序结构的研究, 这种思想对 C*-代数的进一步发展起到了非常重要的作用.

随后在众多数学家的共同努力下, 算子代数的基本理论日臻完善并在诸如现代数学和物理等其他学科的研究中都有广泛的应用并取得了许多辉煌的成果, 如 Jones 指标理论, 纽结理论, 共形场论, 代数量子场论等 [41, 52, 68], 同时也衍生出许多新的领域, 如非交换几何、自由概率论等 [15, 16, 17, 21, 45, 46, 85, 86].

1953 年 Segal I E 在 C*-代数理论基础上首次提出非交换积分理论 [98], 目前这一理论已经成为很多学科发展的基本理论, 如算子理论和非交换概率理论等. 在此基础上, 1975 年 Yeadon 给出了非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间 $((0<p<\infty))$ 的定义 [116], 具体来说:

令 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数, τ 为 $\mathcal{M}$上的正规半有限忠实的迹, $\mathcal{S}$ 为所有 τ 有限

支撑的元所组成的集合. 则非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间定义为 $\mathcal{S}$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 的完备化, 其中

$$x \in \mathcal{S}, \quad \|x\|_p = \left(\tau\left(|x|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

值得注意的是, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间自然是经典 L^p 空间的推广. 至此我们虽然给出了非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间的定义, 然而和经典情形一样, 在很多情形下我们自然需要对 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中元素有一个明确描述和表达. 事实上, 正如经典 L^p 中的元素为可测函数一样, $L_p(\mathcal{M},\tau)$ 中的元一般可以描述为关于 $(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的可测算子 (关于可测算子等内容将在本章 1.3 中详细介绍). 随后越来越多的数学家对这一空间展开了研究, 并得到了很多重要成果 [42, 114, 115]. 虽然其中很多重要结果都是交换情形下经典结果的推广且与经典情况下的结论相类似, 然而大多数情况下两者却有很大的不同. 目前, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间理论已经运用到了很多领域, 如算子代数理论、非交换几何、非交换概率和数学物理等.

众所周知, 1932 年波兰数学家 Orlicz W 联系积分方程首次给出 Orlicz 空间的概念, 它是经典 L^p 空间的推广. 做为一类具体的 Banach 空间, Orlicz 空间几乎涵盖了所有的 Banach 空间类, 因此 Orlicz 空间可以看做 Banach 空间中一个内容丰富的模型库, 对 Orlicz 空间性质的研究可以看成是一般 Banach 空间的直观材料. 由于经典 L^p 空间是一类具体的 Banach 空间, 因此经典 L^p 空间中的研究方法和技巧对一般 Banach 空间几何学的研究起不了很好的借鉴作用, 而 Orlicz 空间中几何性质的方法和技巧却会为一般 Banach 空间几何学的发展提供很好的借鉴, 这是 L^p 空间所无法比拟的.

自从 Orlicz 空间的定义给出之后 [83, 84], 日本数学家 Nakanozai 随即于 1950 年首次提出了模空间的概念, 并对模空间的一般理论进行了深入的研讨, 进而对 Orlicz 空间进行了推广, 发展出了以 Orlicz 空间为特例的模半序空间理论 [81]. 1955 年, Luxemburg W A 在 Orlicz 空间中率先引入了 Luxemburg 范数 [70], 并对 Orlicz 空间在这一范数下的相关性质进行了深入的研究和探讨, 这一成果极大地推动了 Orlicz 空间理论的发展. 与此同时, 由于求解非线性分析等问题的需要 Krasnoselskii M A 和 Rutickii Ya B 等人系统的研究了那些不满足 Δ_2 条件的 Orlicz 函数所生成的 Orlicz 空间, 随后于 1958 年出版了第一本关于 Orlicz 空间理论的专著《凸函数与 Orlicz 空间》[57], 这本专著的出

版标志着 Orlicz 空间理论已初步形成.

自从上世纪六十年代以来, Orlicz 空间理论不断发展壮大并又取得了许多优秀的成果, 例如, 1960 年, Ando T 和 Rao M M 在文献 [3, 40, 89] 中分别给出了 Orlicz 空间上有界线性泛函表达式, 这为 Orlicz 空间对偶理论的发展奠定了基础; 王廷辅于 1966 年在文献 [108] 中得到了 Orlicz 空间列紧集的充分必要条件; 丁夏畦 [25], Trudinger N S 等人在文献 [104] 中则研究了 Sobolev 嵌入定理, 这为 Orlicz 空间理论应用于偏微分方程方面打下了理论基础; Gaposkin V F 于 1967 年相继发表两篇论文证明 Orlicz 空间有无条件基的充分必要条件是空间自反 [36, 37] . 到上世纪七十年代初, Lindenstrauss J 和 Tzafriri L 开始对 Orlicz 序列空间展开研究, 他们利用空间参数的方法对 Orlicz 序列空间的基和同构问题进行了系统研究, 得到了许多重要的结果 [66, 67], 从此人们开始了 Orlicz 序列空间的研究. 随后, 波兰的一批数学工作者开始对模空间的一般理论和 Orlicz 空间的几何结构展开研究. 进入上世纪八十年代以后, Orlicz 空间理论特别是几何理论得到了长足发展. 其中值得一提的是, 关于 Orlicz 空间理论专著的相继问世标志着 Orlicz 空间理论得到人们的认可和关注, 这几部著作系统的阐述了 Orlicz 空间理论特别是几何理论的一些重要成果, 其中具有代表性的三部著作分别是: 吴丛炘和王廷辅的《 Orlicz 空间及应用》[110], 吴丛炘, 王廷辅, 陈述涛和王玉文的《 Orlicz 空间几何理论》[111], 以及陈述涛的《 Geometry of Orlicz spaces 》[13]. 随后, 一方面 Orlicz 空间理论得到了飞速发展, 另一方面其成果在数学其他领域也得到越来越广泛地应用, 特别是在不动点理论、微分方程、逼近论、概率论、Fourier 分析等领域. 随着对这一空间研究的不断深入, 人们对 Orlicz 空间进行了各种形式的推广, 得到了诸如 Musielak-Orlicz 空间、 Orlicz-Lorentz 空间、 Orlicz-Bochner 空间及 Orlicz-Sobolev 空间等, 关于 Orlicz 空间的具体定义及相关内容将在本章 1.3 中详细介绍.

正如经典 Orlicz 空间是经典 L^p 空间的自然推广一样, 人们自然会问: 非交换 L^p 空间是不是也可以进一步推广呢? Muratov M A 于 1978 年首次提出非交换 Orlicz 空间的概念 [75]. 做为非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间的自然延伸, 非交换 Orlicz 空间理论在上世纪 90 年代开始才被数学家所关注.

1990 年 Kunze 在文献 [59] 中首次以代数形式给出了非交换 Orlicz 空间的定义, 具

体来说:

令 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数, τ 为 $\mathcal{M}$上的正规半有限忠实的迹. 设 φ 为 Orlicz 函数, $K_\varphi = \{a \in \mathcal{M} : \tau(\varphi(|a|)) \leq 1\}$, 则定义非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\mathcal{M},\tau) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nK_\varphi$. 文中还对经典 Orlicz 空间中的 Young 不等式和 Hölder 不等式进行了推广.

与此同时, 在文献 [27] 中作者基于模空间理论通过对经典重排函数的推广给出了非交换 Banach 函数空间的定义, 具体来说:

非交换空间 $L_\rho(\widetilde{\mathcal{M}})$ 可以定义为 $L_\rho(\widetilde{\mathcal{M}}) = \left\{x \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(x) \in L_\rho\right\}$, 而且其范数定义为 $\|x\|_\rho = \rho(\mu(x))$, 其中 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 为可测算子, L_ρ 为具有范数 ρ 的 Banach 空间, $\mu(x)$ 为算子 x 的广义特征值函数. 同时文中还研究了模与范数的关系及下半连续等性质. 文中虽然没有明确给出非交换 Orlicz 空间的定义, 但这一理论可以看成是从函数空间角度来研究非交换 Orlicz 空间的基础工作.

至此, 对非交换 Orlicz 空间的研究工作可以从两个方向展开:

1. 从代数角度展开研究.

非交换 Orlicz 空间不同于交换 Orlicz 空间, 所研究的对象已经不是可测函数而是可测算子, 因此从纯代数角度对这一空间展开研究是既完全可行又是很自然的, 只是这种研究方式比较抽象而且证明方法和思路也与交换情形下大不相同. 其证明主要是根据算子的分解和谱投影算子而展开.

2. 从函数论角度展开研究.

由于非交换 Orlicz 空间是重排不变 (对称) 函数空间, 由文献 [33] 可知, $\tau(x) = \int_0^\infty \mu_t(x)dt$, 其中 τ 为 von Neumann 代数上的正规半有限忠实的迹, $\mu_t(x)$ 为可测算子 x 的广义特征值函数. 因此可以把对非交换 Orlicz 空间的研究转化成对可测函数 $\mu_t(x)$ 的研究. 这种方法的优点是使人容易理解和接受, 而且有些问题的证明思路可以借鉴交换情形下的方法. 从文献来看, 近几年人们对非交换 Orlicz 空间的研究大多都采用这种方法, 本文也是采用这种思路展开研究.

有了前面的基础工作, 近 10 年以来非交换 Orlicz 空间越来越受到世界各国数学家们的重视. 目前来说, 对此空间的研究工作主要是理论和应用两方面, 具体来说:

1. 理论方面

在文献 [1] 与 [2] 中, Al-Rashed M H A 等人分别于 2007 年和 2011 年分别在理论上对非交换 Orlicz 空间进行了研究, 文中主要研究了范数等价性、单调收敛定理等拓扑性质, 这两篇文章推动了非交换 Orlicz 空间的理论发展.

2011 年, Ayupov Sh A 等人考虑了非交换 Orlicz 权函数 [5], 并研究了这一空间的对偶空间, 最后证明了这一空间中的元素可以由局部可测算子进行表示.

2012 年, Louise E L 在文献 [61] 中研究了非交换 Orlicz 空间中的乘法算子, 文中作者对两个非交换 Orlicz 空间中乘法算子的存在性给出了判别, 同时文中还对这类乘法算子的分解进行了研究. 从文中可以看出, 关于非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间的乘法算子的相关结论不能直接推广到交换 Orlicz 空间中.

同在 2012 年, Ghadir Sadeghi 在文献 [94] 中也对非交换 Orlicz 空间进行了深入研究. 论文中作者以模空间为背景考虑了非交换 Orlicz 空间的一些拓扑性质和几何性质, 证明了该空间关于模是完备的, 还证明了该空间中关于 τ 可测算子的 Fatou 引理、单调收敛定理及控制收敛定理, 最后作者还证明了该空间在 Luxemburg 范数下 Orlicz 函数一致凸与 Δ_2 条件可以蕴含模的一致凸性, 可以说该论文的发表在一定意义上为非交换 Orlicz 空间几何理论的发展打下了基础.

2. 应用方面

2004 年 Streater R F 在文献 [102] 中主要研究了量子信息几何中两个非常重要的函数, 一个是 $\varphi(x) = \frac{1}{2}Tr\left(e^{-H_0-\psi_0-x} + e^{-H_0-\psi_0+x}\right) - 1$; 另一个是 $\varphi(x) = Cosh(x) - 1$, 并证明这两个函数都为非交换的量子 Yöung 函数 (Orlicz 函数), 虽然这些函数为特殊的 Orlicz 函数, 然而在流形、量子理论中确有非常重要的作用. 这一文章的发表也说明了非交换 Orlicz 空间理论确实有很重要的应用价值.

2009 年 Louis E L 等人在文献 [60] 中对非交换 Orlicz 空间上的一些映射进行了仔细研究. 文中由重排不变的 Banach 函数出发首先研究了非交换 Orlicz 空间上的 Köthe 对偶等问题, 接着又在非交换 Orlicz 空间基础上给出了非交换随机变量的定义并研究了非交换正规统计模型, 这一内容对非交换概率空间的研究起到了很好的推动.

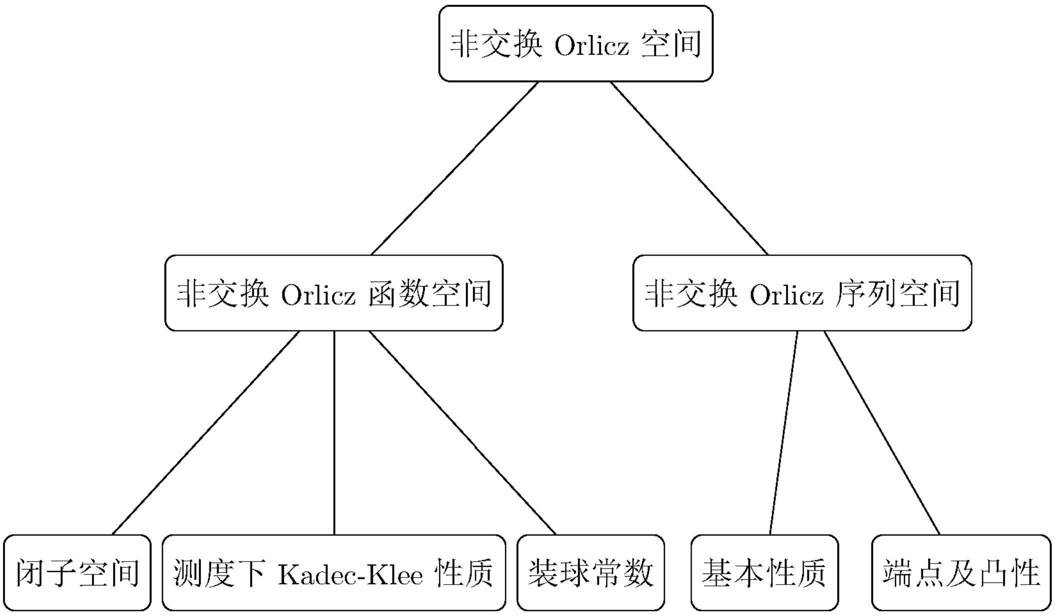
2010 年吐尔别克等人在文献 [6] 中引入了弱非交换 Orlicz 空间的的概念并对这一空间的一些性质进行了研究, 如测度收敛等. 同时还证明了该空间为拟 Banach 空间.

文中对 Rademacher 随机变量, 通过在非交换鞅上建立弱非交换 Khitchine 不等式证明了弱 Burkholder-Gundy 不等式. 这一研究成果推动了鞅理论的发展.

§1.2 本文的主要结论和创新之处

基于 Ghadir Sadeghi [94, 95] 等人的工作, 我们将依托于 von Neumann 代数理论分别对非交换 Orlicz 函数空间和非交换 Orlicz 序列空间中的一些几何及拓扑性质进行研究.

本文的结构如下图所示.



§1.2.1 非交换 Orlicz 空间中的闭子空间及某些几何性质

设 τ 为 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的正规、半有限、忠实的迹, $\widetilde{\mathcal{M}}$ 为 von Neumann 代数上的 τ 可测算子全体, 定义

$$L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(\varphi(\lambda|x|)\right)<\infty,\ \ \exists\,\lambda>0\right\},$$

其中, φ 为 Orlicz 函数, λ 为非负实数, $|x|$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ (Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上有界线性算子全体) 中满足 $|x|^2=x^*x$ 的正算子. 并且定义 Luxemburg 范数如下:

$$\|x\|=\inf\left\{\lambda>0:\tau\left(\varphi\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\right)\leq 1\right\}.$$

我们称这样的空间为非交换 Orlicz 空间 [94].

与此同时, 我们在本文中定义了非交换 Orlicz 空间上的子空间

$$E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(\varphi(\lambda|x|)\right)<\infty,\quad\forall\,\lambda>0\right\}.$$

这一章 (见正文第二章) 中我们主要对上述子空间 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 进行了研究, 并给出了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中一些几何性质的判定, 本章最后我们还研究了非交换 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间中关于 Orlicz 范数的一些性质. 本章主要有如下结果:

(见 **定理 2.2.1**) (Fatou 性质) 设 $x\in\widetilde{\mathcal{M}},x_n\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 如果 $\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$ 且 $0\le x_n\uparrow_n x$, 则 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且 $\|x\|=\sup\limits_n\|x_n\|$.

(见 **定理 2.2.2**) 定义 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(\varphi\left(\lambda|x|\right)\right)<\infty,\ \forall\,\lambda>0\right\}$. 则我们总有下面的结论成立:

(1) $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 在范数拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的闭子空间;

(2) $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 在测度拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的稠密子空间.

(见 **引理 2.2.3**) 我们记 $E_\varphi=E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|}$. 如果 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且 $\tau(\varphi(|x|))<\infty$, 则从 x 到 E_φ 的距离 $d(x,E_\varphi)$ 小于 1, 其中 $d(x,E_\varphi)=\inf\left\{\|x-y\|:\ y\in E_\varphi\right\}$.

(见 **定理 2.2.4**) $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|}$.

(见 **定义 2.2.5 和定理 2.2.6**) 对于 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$, 下面条件等价:

(1) $x\in E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$, 其中 $x_n=u\int_0^n\lambda\mathrm{d}e_\lambda(|x|)$.

(3) $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且 $\lim_{\tau(e_n)\to0}\|xe_n\|=0$.

(见 **定理 2.3.4**) 若 $\varphi\in\Delta_2$, (即对 Orlicz 函数 φ 如果存在 $u_0\ge0$ 及常数 $k>2$ 使得当 $u\ge u_0$ 时$\varphi(2u)\le k\varphi(u)$). 给定任何 $L>0$ 和 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta(L,\varepsilon)>0$ 使得 $\tau(\varphi(|x|))\le L$ 和 $\tau(\varphi(|y|))\le\delta$, 蕴含着

$$|\tau(\varphi(|x+y|))-\tau(\varphi(|x|))|<\varepsilon.$$

(见 **定理 2.3.5**) 若 $\varphi\in\Delta_2$, 则 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 一致单调.

(见 **定理 2.3.6**) 设 $x_n,x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau(\varphi(|x_n|))=\tau(\varphi(|x|))$ 且 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau\big(\varphi\big(|\frac{x_n-x}{2}|\big)\big)=0$. 而且, 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 则 $\|x_n-x\|\to0$.

(见 **定理 2.3.7**) 若 $\varphi \in \Delta_2$, 则

$$E_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau) = L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau).$$

(见 **定理 2.4.3**) 如果 $\varphi \in \Delta_2$, 则 $x \in L_{\varphi}^{o}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 中的可测算子依范数收敛(Orlicz 范数) 与依测度收敛等价, 其中 $L_{\varphi}^{o}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 为赋予 Orlicz 范数的非交换 Orlicz 空间.

(见 **定理 2.4.4**) 如果 $x \in L_{\varphi}^{o}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$. 设 $x = u|x|$ 为可测算子 x 的极分解且 $|x| = \int_0^{\infty} \lambda de_{\lambda}$ 为 x 的谱分解, 令$x_n = u\int_0^n \lambda \mathrm{d}e_{\lambda}$, 则 $x \in L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 且 $\lim_{\tau(e_n)\to 0} \|xe_n\| = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\|^o \to 0$.

(见 **定理 2.4.5**) 投影算子 $e_{[0,\lambda]}$ 的 Orlicz 范数计算公式为:

$$\|e_{[0,\lambda]}\|^o = \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.$$

其中 ψ 为 Orlicz 函数 φ 的余函数, 即对任意 Orlicz 函数 φ, 满足 $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ 且 $\psi(u) = \sup\{uv - \varphi(v) : v \geq 0\}$ 的函数.

§1.2.2 非交换 Orlicz 空间中依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质

设 X 为 Banach 空间, 我们称 X 具有依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质, 如果对任何 $x \in X$, 有 $\|x_n\| \to \|x\|$ 且 $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$ (x_n 依测度收敛于 x), 则 $\|x_n - x\| \to 0$. 这一性质对研究 Banach 空间对偶性等问题中具有重要意义. 本章首先给出了非交换 Orlicz 空间 $L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 满足依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质的条件, 最后给出了 $L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 的对偶空间. 这些结论都是非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间相关结论的推广.

这一部分 (见正文第三章) 主要有如下结果:

(见 **定理 3.2.1**) 如果 $L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质, 则 $\varphi \in \Delta_2$.

(见 **引理 3.2.3 和引理 3.2.2 及定理 3.2.4**) 如果 $\varphi \in \Delta_2$ 且 $x_n, (n = 1, 2, \ldots)$ 及 x 属于 $L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$, 则下列两个条件相互等价:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| \to 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \to \|x\|$ 且 $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$.

这个定理也就是说: 当 $\varphi \in \Delta_2$ 时, $L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有依测度收敛意义下的 Kadec-Klee 性质.

(见 **推论 3.2.5**) 设 x_n 及 x 为 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ $(1<p<\infty)$ 中的元素. 则下列条件等价:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_p\to 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_p\to\|x\|_p$ 且 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$.

上述推论也即是说, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间当 $1<p<\infty$ 时具有依测度收敛意义下的 Kadec-Klee 性质.

(见 **推论 3.2.6**) 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 且 $x_n,(n=1,2,\ldots)$ 及 x 为非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中满足 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$ 的元素, 则

(1) 非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有 $LLUM$ (下局部一致单调) 性质.

(2) 非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有 $ULUM$ (上局部一致单调)性质.

(见 **定理 3.2.7**) 设 $\varphi\in\Delta_2$. 则非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有序连续性质, 因此该空间为可分的 Banach 空间. 特别地, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间当 $1<p<\infty$ 时为可分的 Banach 空间. 关于序连续的定义可参见本文 3.1 或文献 [27] 中命题 3.6.

(见 **定理 3.3.1**) 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 我们有

$$L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)^*=L_\psi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau),$$

其中 $L_\psi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=(L_\psi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau),\|\cdot\|^o)$.

(见 **推论 3.3.2**) $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 自反当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $\psi\in\Delta_2$.

§1.2.3 装球常数

装球常数是一个比较重要且有趣的几何常数, 这一常数在 Banach 空间的几何结构、等距嵌入问题、非紧性及自反性等方面的研究中起到了非常重要的作用. 本章我们首先研究了非交换 Orlicz 函数空间装球常数问题, 类似于经典情形我们给出非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 装球常数的下界, 同时我们证明了 $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 与 $L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的装球常数都是 $\frac{1}{2}$. 其次, 本章中我们还研究了 Cesàro-Orlicz 序列空间中的装球常数问题, 给出了这一空间装球常数的两个计算公式. 最后, 在本章中我们还定义了 BK 序列空间中的一个新常数.

这一章 (见正文第四章) 主要有如下结果:

(见 **引理 4.2.1**) 如果 $\varphi\in\Delta_2(0)$ 且对任何 $x\in S(ces_\varphi)$, 都存在唯一的 $d_x>0$ 使得

下式成立

$$\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{d_x}\right) = \frac{1}{2},$$

其中 $\varphi \in \Delta_2(0)$ 表示为: 对 Orlicz 函数 φ, 如果存在常数 $k > 2$ 使得当 $(u > 0)$ 时, $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$ 成立.

(见 **引理 4.2.2**) 假设 φ 为 Orlicz 函数. 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则$1 < d_x \leq 2$ 且有 $1 < d \leq 2$.

(见 **定理 4.2.3**) 对任何 Cesàro-Orlicz 序列空间:

(1) 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则 $D(ces_\varphi) = d,\ i.e.,\ P(ces_\varphi) = \frac{d}{2+d}$,

(2) 如果 $\varphi \notin \Delta_2(0)$, 则 $D(ces_\varphi) = 2,\ i.e.,\ P(ces_\varphi) = \frac{1}{2}$.

(见 **定理 4.2.4**) 假设 Orlicz 函数 $\varphi \in \Delta_2(0)$ 且,

$$\varphi(\lambda x) = f(\lambda)\varphi(x),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+$ 且 $f(\cdot)$ 连续且可逆, 则对任何 $x \in S(ces_\varphi)$,

$$D(ces_\varphi) = \frac{1}{f^{-1}(\frac{1}{2})}.$$

(见 **定理 4.2.6**) 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则

$$C(ces_\varphi) = 2.$$

(见 **定义 4.4.1**) 若 φ 为 Orlicz 函数, x 为无界算子, 则我们可以定义下面两个指标函数:

$$\alpha_\varphi = \inf_{t<\infty} \frac{\varphi^{-1}(\mu_t(x))}{\varphi^{-1}(\mu_t(2x))};$$

$$\beta_\varphi = \sup_{t<\infty} \frac{\varphi^{-1}(\mu_t(x))}{\varphi^{-1}(\mu_t(2x))}.$$

(见 **定理 4.4.3**) 若 φ 为 Orlicz 函数, x 为无界算子. 则我们有

(1) $\varphi \in \Delta_2$ 当且仅当 $\beta_\varphi < 1$;

(2) $\varphi \in \nabla_2$ 当且仅当 $\alpha_\varphi > \frac{1}{2}$, 其中 $\varphi \in \nabla_2$ 表示 Orlicz 函数 φ 的余函数 $\psi \in \Delta_2$.

(见 **定理 4.4.4**) 若 φ 为 Orlicz 函数, 则

$$\max\left\{\frac{1}{\alpha_\varphi},\ 2\beta_\varphi\right\} \leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right)$$

或

$$\max\left\{\frac{1}{1+2\alpha_\varphi},\ \frac{1}{1+(\beta_\varphi)^{-1}}\right\}\leq P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right).$$

其中 $D(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau))$ 为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的 Kottman 常数, $P(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau))$ 为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的装球常数.

(见 **推论 4.4.5**) 若 φ 为 Orlicz 函数, 则

$$\sqrt{2}\leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)$$

或

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\leq P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right),$$

而且如果 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 非自反, 则

$$D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)=2$$

或

$$P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)=\frac{1}{2}.$$

特别地, 对于非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间的装球常数下界估计如下:

(见 **推论 4.4.6**)

$$\max\left\{2^{\frac{1}{p}},2^{1-\frac{1}{p}}\right\}\leq D\left(L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)$$

或

$$\max\left\{\frac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p}}},\frac{1}{1+2^{\frac{1}{p}}}\right\}\leq P\left(L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right).$$

(见 **推论 4.4.7**) $P\left(L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)=P\left(L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)=P(\mathcal{M})=\frac{1}{2}$.

同样对于 Orlicz 函数 φ, 我们可以定义 l^0 上的凸模 [71, 80]

$$\rho_{ces_\varphi}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|\right).$$

我们称空间

$$ces_\varphi=\{x\in l^0:\rho_{ces_\varphi}(\lambda x)<\infty\ \ \exists\,\lambda>0\},$$

其中 φ 为 Orlicz 函数为 Cesàro-Orlicz 序列空间. 对这一空间也赋予如下的 Luxemburg 范数

$$\|x\|_{ces_\varphi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

§1.2.4 非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 及某些性质

在经典 Orlicz 空间几何理论研究和发展中, 人们最初主要对函数空间的几何性质进行研究. 然而, 序列空间也是非常重要的. 序列可以看成是定义在纯原子无限测度空间的函数, 这与通常通常意义下的函数, 即定义在无原子有限测度空间上的函数有所不同. 大多数情况下, 函数空间的一些结论也能推广到序列空间中, 但是对同一问题两者的证明技巧和方法却大不相同. 本章主要对非交换 Orlicz 序列空间及某些性质进行研究. 类似于经典情形, 我们首先给出非交换 Orlicz 序列空间的定义, 它实际上是 Schatten 类的推广. 随后我们给出了非交换 Orlicz 序列空间的一些基本性质, 最后我们给出了非交换 Orlicz 序列空间中端点及凸性的判断.

首先注意到, 对任意 $0 < p < \infty$, 非交换 $L_p(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 空间由所有 $\mathbb{H}$ 上满足下列条件的紧算子 x 组成:

$$\mathrm{Tr}(|x|^p) = \sum_{n\ge 0} \lambda_n(|x|^p) = \sum_{n\ge 0} (\lambda_n(|x|))^p < \infty.$$

其中, Tr 为 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 上正规、半有限、忠实的迹. 传统上, $\lambda_n(|x|)$ 用 $s_n(x)$ 表示且称为 x 的奇异值. 因此, 对任意 $x \in L_p(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 有

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\ge 0} (s_n(x))^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这些空间 $L_p(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 就是 $\mathbb{H}$ 上所谓的 Schatten 类. 我们可以看出, Schatten 类实际上为非交换 $L_p(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 序列空间. 那么我们进一步对 Schatten 类推广即为非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$.

这一章 (见正文第五章) 主要有如下结果:

(见 **定义 5.2.1 和定义 5.2.2**) 如果 $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 为紧算子, 则非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 定义如下:

$$L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})) = \left\{x : \mathrm{Tr}(\varphi(\lambda x)) = \sum_{n\ge 0} \varphi(\lambda s_n(|x|)) < \infty,\ \exists \lambda > 0\right\}.$$

我们称下面的函数

$$\|x\|_\varphi = \inf\left\{\lambda > 0, \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \le 1\right\}$$

为 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 上的 Luxemburg 范数.

(见 **命题 5.2.5**) 设 $x \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, 则下列结论成立:

(1) 若 $\|x\|_\varphi > 1$, 则 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = \sum\limits_{n\ge0} \varphi(s_n(x)) \ge \|x\|_\varphi$;

(2) 若 $x \ne 0$, 则 $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) \le 1$.

(见 **定理 5.2.6**) 对任何 $x \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, $\|x\|_\varphi = \||x|\|_\varphi = \|x^*\|_\varphi$.

(见 **定理 5.2.7**) 如果 $\varphi \in \Delta_2$, 对任何 $x, y \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 我们有下面结论:

(1) $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) = 1$;

(2) $\|x\|_\varphi = 1$ 当且仅当 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = 1$;

(3) $\mathrm{Tr}(\varphi(x_n)) \to 0$ 当且仅当 $\|x_n\|_\varphi \to 0$;

(4) $\mathrm{Tr}(\varphi(x+y)) \le \frac{k}{2}[\mathrm{Tr}(\varphi(x)) + \mathrm{Tr}(\varphi(y))]$, 其中 k 满足对任何 $\alpha > 0$ 使得 $\varphi(2\alpha) \le k\varphi(\alpha)$.

(见 **推论 5.2.8**) (1) $\mathrm{Tr}\left(\frac{x^p}{\|x\|_\varphi^p}\right) = 1$. 特别地, $S_1(\mathbb{H})$ 和 $S_2(\mathbb{H})$ 分别满足 $\mathrm{Tr}\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi^1}\right) = 1$ 和 $\mathrm{Tr}\left(\frac{x^2}{\|x\|_\varphi^2}\right) = 1$.

(2) 若 x 为 *Schatten* 类算子, 则 $\varphi(2x) = |2x|^p = 2^p|x|^p$. 此时, 在定理 5.2.7 的 (4) 中取 $k = 2^p$ 我们可以得到下列不等式:

$$\mathrm{Tr}(|x+y|^p) \le 2^{p-1}[\mathrm{Tr}(|x|^p) + \mathrm{Tr}(|y|^p)]$$

或

$$\sum_{n\ge0} s_n(|x+y|^p) \le 2^{p-1}\left[\sum_{n\ge0} s_n(|x|^p) + \sum_{n\ge0} s_n(|y|^p)\right]$$

特别地, 对 $x \in S_1(\mathbb{H})$, 我们有

$$\sum_{n\ge0} s_n(|x+y|) \le \left[\sum_{n\ge0} s_n(|x|) + \sum_{n\ge0} s_n(|y|)\right];$$

对 $x \in S_2(\mathbb{H})$, 我们有

$$\sum_{n\ge0} s_n(|x+y|^2) \le 2\left[\sum_{n\ge0} s_n(|x|^2) + \sum_{n\ge0} s_n(|y|^2)\right];$$

在 Banach 空间几何学的研究过程中, 端点是一个很重要且基本的概念, 人们从端点出发可以对 Banach 空间 X 中各种凸性展开研究. 我们一般记 $B(X)$ 为 X 中的单位球, $S(X)$ 为 X 中的单位球面. 端点和凸空间的定义具体表述为: 设 A 是 X 的凸子集. 我们称点 $x \in A$ 为 A 的端点 (extreme point), 若对 $y, z \in A$, $2x = y + z$ 都有 $y = z$ 成立. A 的全体端点组成的集记做 $\mathrm{Ext}A$. 我们称空间 X 为凸空间, 如果 X 的单位球面上的点都为端点, 即 $\mathrm{Ext}B(X) = S(X)$.

(见 **定理 5.3.1**) 对任何非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, $x \in \mathrm{Ext}B\left(l_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$ 当且仅当下面两个条件同时成立

(1) $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = 1$;

(2) $s_n(x) \in \mathbb{R} \setminus S_\varphi$ 的个数不超过 1.

(见 **推论 5.3.2**) 对任何 $\mathbb{H}$ 上的 Schatten 类算子 $S_p(\mathbb{H})$, 当 $1 < p < \infty$ 时, $x \in \mathrm{Ext}B\left(S_p(\mathbb{H})\right)$ 当且仅当

$\mathrm{Tr}(|x|^p) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n\left(|x|^p\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\lambda_n\left(|x|\right)\right)^p = 1$, 即 $x \in S\left(S_p(\mathbb{H})\right)$.

特别地, 迹类算子 $S_1(\mathbb{H})$ 没有端点.

(见 **定理 5.3.3**) 非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 为凸空间当且仅当下面两个条件同时成立

(1) $\varphi \in \Delta_2$;

(2) φ 在区间 $[0, \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]$ 上严格凸.

(见 **推论 5.3.4**) 当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathbb{H}$ 上的 Schatten 类算子 $S_p(\mathbb{H})$ 为凸空间. 特别地, 迹类算子 $S_1(\mathbb{H})$ 不是凸空间.

§1.3 预备知识

本节给出本文所需要的有关基本概念和结论. 未涉及的概念和命题可参见文献 [1, 2, 59, 75, 76, 94].

定义 1.3.1 ([76]). 设 $B(\mathbb{H})$ 为Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上线性有界算子全体, 若 $\mathbb{A} \in B(\mathbb{H})$, 令

$$\mathbb{A}' = \{x \in B(\mathbb{H}) : ax = xa, \forall a \in \mathbb{A}\}.$$

我们称 $\mathbb{A}'$ 是 $\mathbb{A}$ 的交换子. $\mathbb{A}$ 的二次交换子 $\mathbb{A}''$ 是 $\mathbb{A}'$ 的交换子.

定义 1.3.2 ([76]). $B(\mathbb{H})$ 的对合子代数 $\mathcal{M}$ 称为 $\mathbb{H}$ 上的 von Neumann 代数, 若 $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

显然, $\mathbb{H}$ 上的 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 是单位的、弱算子闭的并且 $\mathcal{M}$ 是 $B(\mathbb{H})$ 的一个 C^*-子代数.

定理 1.3.3 ([115]). *设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{H}$ 上的一个 von Neumann 代数, $x \in \mathcal{M}$, $x = u|x|$ 是 x 在 $B(\mathbb{H})$ 中的极分解, 则 $u, |x| \in \mathcal{M}$, 其中 u 为酉算子, $|x|$ 满足 $|x|^2 = x^*x$.*

一般来说, von Neumann 代数中的元都不具有交换性, 但下面一个重要的例子却是交换 von Neumann 代数.

例子 1.3.4. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ 有限的完备测度空间. 设 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是 Ω 上本性有界可测函数全体构成的代数, 则 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 可以表示为 $\mathbb{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的一个 von Neumann 代数. 而且可以证明可分 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的每个交换 von Neumann 代数都同构与某个 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. 若 $\mathbb{H}$ 不可分, 结论仍然成立, 此时相应的测度不是 σ 有限的.

下面我们给出 von Neumann 代数上迹的概念.

定义 1.3.5 ([115]). 令 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数.

(1) $\mathcal{M}$ 上的迹是指满足如下条件的映射 $\tau : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$:

(i) $\forall x, y \in \mathcal{M}_+$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \tau(x + \lambda y) = \tau(x) + \lambda\tau(y)$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{M}, \tau(x^*x) = \tau(xx^*)$.

(2) 迹 τ 称为正规的, 如果对 $\mathcal{M}_+$ 中任一有界单增网 $\{x_i\}_i$ 有 $\sup\limits_i \tau(x_i) = \tau\left(\sup\limits_i x_i\right)$; 称为有限的, 如果 $\tau(1) < \infty$; 称为半有限的, 如果对任一非零元 $x \in \mathcal{M}_+$ 存在一个非零元 $y \in \mathcal{M}_+$ 使得 $y \leq x$ 且 $\tau(y) < \infty$; 称为忠实的, 如果 $x \in \mathcal{M}_+$ 使得 $\tau(0) = 0$ 有 $x = 0$.

迹是矩阵迹的推广, 关于迹有如下比较有用的命题:

命题 1.3.6 ([115]). *(1) 迹 τ 是非减的, 即 $0 \leq x \leq y$ 蕴含 $\tau(x) \leq \tau(y)$;*

(2) 迹性质蕴含 τ 是酉不变的, 即对任意 $x \in \mathcal{M}_+$ 和任意酉元 $u \in \mathcal{M}$ 有 $\tau(u^*xu) = \tau(x)$.

通常情况下, 当 τ 为有限时, 我们假设它是规范的, 即 $\tau(1) = 1$. 如果 τ 是 $\mathcal{M}$ 上一个正规忠实规范的迹, 称 $(\mathcal{M}, \tau)$ 为一个非交换概率空间. 类似地, 如果 τ 是 $\mathcal{M}$ 上一个正规半有限忠实的迹, 我们称 $(\mathcal{M}, \tau)$ 为一个非交换测度空间.

本文中我们仍然用 $\mathcal{M}$ 表示具有正规半有限忠实 (n.s.f.) 迹的 von Neumann 代数. 其中 $\mathbf{1}$ 代表 $\mathcal{M}$ 中的单位元, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 代表 $\mathcal{M}$ 中所有的自伴投影.

通常情况下, 算子 x 的定义域记作 $D(x)$. 因为我们只考虑线性算子, $D(x)$ 必定是 $\mathbb{H}$ 的一个向量子空间. 设 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{G}$ 是 Hilbert 空间, x 是 $D(x)$ $(\subset \mathbb{H})$ 到 $\mathbb{G}$ 中的线性算子, 那么对 $\mathbb{G}$ 中的某一个向量 η, 满足 $(x\xi, \eta) = (\xi, \eta^*)$, $(\xi \in D(x))$ 的 $\mathbb{H}$ 中的向量 η^* 最多只有一个的充分必要条件是 $D(x)$ 在 $\mathbb{H}$ 中稠密 [113]. 但是这里只讨论了唯一性, 即使 $\overline{D(x)} = \mathbb{H}$ 也并不能保证对于一切 $\eta \in \mathbb{G}$ 都能够找到使上式成立的 η^*. 另一方面, 在 $\overline{D(x)} \neq \mathbb{H}$ 时, 对于某些 $\eta \in \mathbb{G}$, 仍然可能没有使得上式成立的 η^*, 但如果 $\eta \in \mathbb{G}$ 使得上式有解时, 解就必定不止一个. 为了保证相应于 η 的 η^* 的唯一性, 就需要 $D(x)$ 在 $\mathbb{H}$ 中的稠密性. 于是就有了稠定算子的概念如下:

我们称算子 x 为稠定的, 如果 $D(x)$ 在 $\mathbb{H}$ 中稠密; x 称为闭的, 如果 $\xi_n \in D$ 且 $\xi, \eta \in \mathbb{H}$ 使得在 $\mathbb{H}$ 中 $\xi_n \to \xi$ 且 $x\xi_n \to \eta$ 就有 $\xi \in D(x)$ 且 $x\xi = \eta$. 值得注意的是, x 为闭算子当且仅当它的图 $G(x) = \{(\xi, x\xi) : \xi \in D(x)\}$ 在 $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ 中是闭的.

现在设 $x \in B(\mathbb{H})_+$, 则 x 有唯一的谱分解:

$$x = \int_0^\infty \lambda \ \mathrm{d}e_\lambda(x),$$

其中 $e_\lambda(x)$ 为算子 x 的谱测度. 通常用 $e_\lambda^\perp(x)$ 或者 $\mathbb{1}_{(\lambda,\infty)}$ 表示对应于区间 (λ, ∞) 的谱测度. 值得注意的是, 算子 $y \in B(\mathbb{H})$ 与 x 可交换当且仅当 y 与 x 的所有谱投影可交换. 设 φ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的一个 Borel 函数, 则由 Borel 函数演算, $\varphi(x)$ 是通过下式定义的一个闭的稠定算子

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi(\lambda) \ \mathrm{d}e_\lambda(x).$$

特别地, 如果 φ 是有界的, 则 $\varphi(x) \in B(\mathbb{H})$.

给定一个算子 x, 令

$$\|x\| = \sup\{\|x\xi\| : \xi \in D(x), \|\xi\| = 1\}.$$

由上面算子的范数定义可知, $\|x\|$ 可能是 ∞. 如果 x 是稠定的且 $\|x\| < \infty$, 那么 $\|x\|$ 能够唯一延拓为整个 $\mathbb{H}$ 上的一个有界算子, 此时我们可以认为 $x \in B(\mathbb{H})$.

下面我们给出可测算子及相关概念.

定义 1.3.7. $\mathbb{H}$ 上的一个闭稠定算子 $x : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{H}$ 称为附属于 $\mathcal{M}$ 如果对 $\mathcal{M}$ 的交换子 $\mathcal{M}'$ 中的任意酉元 u 有 $u^*xu = x$.

注 1.3.8. (1) 令 x 是一个闭稠定算子且 $x = u|x|$ 为其极分解. 那么, x 附属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当 x^* 附属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当 $u, |x|$ 均附属于 $\mathcal{M}$.

(2) 如果 x 是一个正算子且附属于 $\mathcal{M}$, 则它的所有谱投影属于 $\mathcal{M}$. 特别地, 如果 $x = \int \lambda \mathrm{d}e_\lambda(x)$ 是它的谱分解, 那么对所有 λ 有 $e_\lambda^\perp(x) \in \mathcal{M}$. 进一步, 对 $\mathbb{R}_+$ 上任意 Borel 函数 φ, $\varphi(x)$ 也附属于 $\mathcal{M}$.

定义 1.3.9. [82] 设 x 附属于 $\mathcal{M}$. 我们称 x 为 τ-可测算子(或可测算子), 如果存在 $\lambda \geq 0$ 使得

$$\tau(e_{(\lambda,\infty)}(|x|)) < \infty$$

成立, 其中 $e_{(\lambda,\infty)}(|x|) = e_\lambda^\perp(|x|)$ 为算子 $|x|$ 对应于区间 (λ, ∞) 上的谱投影. τ-可测算子的全体用 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 表示.

注 1.3.10. (1) 显然 $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$;

(2) 如果 τ 是有限的, 则任何附属于 $\mathcal{M}$ 的算子 x 都是可测的.

引理 1.3.11 ([115])**.** *令 x 为一个附属于 $\mathcal{M}$ 的算子, 则*

(1) 对任一 $\lambda \geq 0$ 有 $\tau\left(e_{(\lambda,\infty)}(|x|)\right) = \tau\left(e_{(\lambda,\infty)}(|x^*|)\right)$;

(2) $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ 当且仅当对任意 $\delta > 0$ 都存在 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 使得 $e(\mathbb{H}) \subset D(x)$ 且 $\tau(e^\perp) \leq \delta$ 当且仅当 $x^* \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

定义 1.3.12. [115]

(1) 给定 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$. 定义

$\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)=\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:$ 存在 $e\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 使得 $e(\mathcal{H})\in\mathcal{D}(x),\|xe\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leq\varepsilon$ 且 $\tau(\mathbf{1}-e)\leq\delta\}$.

(2) 对 $x,y\in\widetilde{\mathcal{M}}$, 定义

$\Delta(x)=\inf\{\varepsilon+\delta:x\in\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)\}$ 且 $d(x,y)=\Delta(x-y)$.

引理 1.3.13. *[115] (1) 令 $\varepsilon>0,\delta>0$ 且 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$, 则 $x\in\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$ 当且仅当 $\tau(e_{(\varepsilon,\infty)}(|x|))\leq\delta$;*

(2) $\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$ 关于对合运算是封闭的, 即 $x\in\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$ 当且仅当 $x^*\in\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$;

(3) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta_1,\delta_2\in(0,\infty)$,

$$\mathcal{V}(\varepsilon_1,\delta_1)+\mathcal{V}(\varepsilon_2,\delta_2)\subset\mathcal{V}(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\delta_1+\delta_2),$$

$$\mathcal{V}(\varepsilon_1,\delta_1)\mathcal{V}(\varepsilon_2,\delta_2)\subset\mathcal{V}(\varepsilon_1\varepsilon_2,\delta_1\delta_2).$$

定理 1.3.14. *[115] 如下结论成立:*

(1) $(\widetilde{\mathcal{M}},d)$ 是一个完备的拓扑对合代数;

(2) $\mathcal{M}$ 在 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 中稠密;

(3) $(\widetilde{\mathcal{M}},d)$ 关于函数演算是稳定的. 准确地说, 令 φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上一个 Borel 函数且在紧集上有界, 又令 x 为一个正可测算子. 那么, 算子 $\varphi(x)\in\widetilde{\mathcal{M}}$.

下面我们给出本文中常用的一个概念, 分布函数及依测度收敛.

定义 1.3.15 ([82]). 设 $x_n,x\in\widetilde{\mathcal{M}}$. 我们称 x_n 依测度收敛于 x, 记为: $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$, 如果对任意的 $\varepsilon,\delta>0$, 都存在 n_0 使得当 $n\geq n_0$ 都有 $x_n-x\in\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$ 成立.

注 1.3.16. (1) 根据 $\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)$ 的定义, 我们可以得到 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$ 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\tau(e_{(\varepsilon,\infty)}(|x_n-x|))=0$$

成立.

(2) 容易知道 $\{\mathcal{V}(\varepsilon,\delta)\}_{\varepsilon,\delta>0}$ 是 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 中关于向量空间拓扑 τ_m 的 0 点的领域基而且 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 是完备的拓扑 $*$-代数.

定义 1.3.17. ([33]) 对 $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, 分布函数 $\lambda_{(\cdot)}(x):[0,\infty)\to[0,\infty]$ 定义如下:

$$\lambda_s(x)=\tau(e_{(s,\infty)}(|x|)),\ s\geq 0.$$

由于 x 是 τ-可测算子, 容易知道对任意 $s>0$ 有 $\lambda_s(x)<\infty$ 成立且 $\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_s(x)=0$. 由于 τ 正规而且 $e_{(s_n,\infty)}(|x|)\uparrow e_{(s,\infty)}(|x|)$ 按照 $s_n\downarrow s$ 强收敛, 因此函数 $\lambda_s(x)$ 非减而且右连续. 值得注意的是, $\lambda_s(x)$ 是经典情形下可测函数分布函数在非交换情形下的类比 [101].

定义 1.3.18. ([33]) 设 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$. 对任何 $t>0$, 定义广义特征值函数如下:

$$\mu_t(x)=\inf\{s\geq 0:\lambda_s(x)\leq t\},$$

其中 $\lambda_s(x)$ 为可测算子 x 的分布函数.

由上面定义可知: $\mu_t(x)$ 的下确界是可达的且当 $t>0$ 时 $\lambda_{\mu_t(x)}(x)\leq t$. 值得注意的是, 我们这里所谓的 τ-可测算子的广义特征值函数实际上是经典函数空间中递减重排函数的自然推广, 而且 τ-可测算子的广义特征值函数在非交换重排不变的 Banach 函数空间理论研究中占据了非常重要的作用 [27].

注 1.3.19. 由例 1.3.4 可知, 如果 $\mathcal{M}$ 为交换 von Neumann 代数, 则 $\mathcal{M}$ 即为 $L^\infty(X,\mu)$ 且 $\tau(f)=\int f\mathrm{d}\mu$, 其中 (X,μ) 为局部可测空间, 我们有

$$\mu_t(f)=\inf\{s\geq 0:\mu\left(\{x\in X,|f(x)|>s\}\right)\leq t\}.$$

因此, $\mu_t(f)$ 即为经典情形下递减重排函数 $f^*(t)$ [101].

下面引理中的结论是非常重要的.

引理 1.3.20. *([33]) 设 x,y,z 为可测算子, 则下面结论成立:*

(1) 映射 $t\in(0,\infty)\to\mu_t(x)$ 非增右连续且满足 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\mu_t(x)=\|x\|\in[0,\infty]$;

(2) $\mu_t(x)=\mu_t(|x|)=\mu_t(x^*)$ 且对 $t>0$ 及 $\alpha\in\mathbb{C}$ 有 $\mu_t(\alpha x)=|\alpha|\mu_t(x)$;

(3) 若 $0\leq x\leq y$, 则有 $\mu_t(x)\leq\mu_t(y)$, $t>0$;

(4) 对任何在区间 $[0,\infty)$ 上满足 $f(0)=0$ 的连续增函数 φ, 都有 $\mu_t(\varphi(|x|))=\varphi\left(\mu_t(|x|)\right),t>0$;

(5) $\mu_{t+s}(x+y) \le \mu_t(x)+\mu_s(y), t,s>0;$

(6) $\mu_t(xyz) \le \|x\|\|z\|\mu_s(y), t>0;$

(7) $\mu_{t+s}(xy) \le \mu_t(x)\mu_s(y), t>0.$

命题 1.3.21. 设 x 为正可测算子, 则我们有

$$\tau(x)=\int_0^\infty \mu_t(x)\mathrm{d}t.$$

由引理 1.3.20 的 (iv) 和命题 1.3.21 我们可以得到如下重要推论:

推论 1.3.22. 设 φ 为 $[0,\infty)$ 上满足 $\varphi(0)=0$ 的连续增函数, 则对任何可测算子 x, 我们有

$$\tau\left(\varphi(|x|)\right)=\int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(|x|)\right).$$

引理 1.3.23. *([115])* 对任意两个 $x,y\in\mathcal{M}$ 都存在两个部分等距算子 $u,v\in\mathcal{M}$ 使得

$$|x+y|\le u|x|u^*+v|y|v^*.$$

下面我们给出非交换 Orlicz 空间的定义及相关性质.

定义 1.3.24. ([13]) 称函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ 为 Orlicz 函数, 如果

$$\varphi(u)=\int_0^{|u|} p(t)\mathrm{d}t,$$

其中 p 为定义在 $[0,\infty)$上的实值函数且满足如下性质:

(1) 对任意 $t>0$, 有 $p(0)=0$, $p(t)>0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)=\infty;$

(2) p 右连续;

(3) p 为 $(0,\infty)$ 上的非减函数.

对任意 Orlicz函数 φ, 可以定义其余函数 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ 如下:

$$\psi(u)=\sup\{uv-\varphi(v):v\ge 0\}.$$

互余的两个 Orlicz 函数对 (φ,ψ) 满足如下 Yöung 不等式:

$$uv\le\varphi(u)+\psi(v),\ u,v\in[0,\infty),$$

而且等式成立的充分必要条件为 $u=\psi(v)$ 或 $v=\varphi(u)$.

在经典 Orlicz 空间的理论研究中, Δ_2 条件具有重要意义, 其定义如下:

定义 1.3.25. ([111]) 我们称 Orlicz 函数 φ 满足 Δ_2 ($\Delta_2(0)$) 条件, 如果存在 $u_0\geq 0$ 及常数 $k>2$ 使得当 $u\geq u_0$ ($u>0$) 时有下式成立,

$$\varphi(2u)\leq k\varphi(u).$$

以后我们总用 $\varphi(u)\in\Delta_2$ ($\Delta_2(0)$) 表示 $\varphi(u)$ 满足 Δ_2 ($\Delta_2(0)$) 条件; 用 $\varphi(u)\in\nabla_2$ ($\nabla_2(0)$) 表示它的余函数 $\psi(u)\in\Delta_2$ ($\Delta_2(0)$); 用 $\varphi(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$ ($\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$) 表示 $\varphi(u)\in\Delta_2$ ($\Delta_2(0)$) 且 $\varphi(u)\in\nabla_2$ ($\nabla_2(0)$).

例子 1.3.26. 容易验证, $\varphi(u)=\frac{|u|^p}{p}$, $1<p<\infty$ 与 $\psi(v)=\frac{|v|^q}{q}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ 为互余的 Orlicz 函数, 且 $\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$.

例子 1.3.27. 函数 $\varphi(u)=e^{|u|}-|u|-1$ 与 $\psi(v)=(1+|v|)\log(1+|v|)-|v|$ 为互余的 Orlicz 函数, 且 $\varphi\in\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$.

关于 Orlicz 函数的详细介绍可以参见文献 [13, 89].

下面我们给出非交换 Orlicz 空间的概念.

设 φ 为 Orlicz 函数. 对任意 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$, 定义

$$\widetilde{\rho}_\varphi(x)=\tau(\varphi(|x|)).$$

则 $\tau(\varphi(|x|))$ 为 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 上的凸模 [94].

定义 1.3.28. 定义

$$L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(\varphi(\lambda|x|)\right)<\infty,\ \exists\,\lambda>0\right\},$$

并且定义 Luxemburg 范数如下:

$$\|x\|=\inf\left\{\lambda>0:\tau\left(\varphi\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\right)\leq 1\right\}.$$

我们称这样的空间为非交换 Orlicz 空间.

注 1.3.29. (1) 在上述定义中我们注意到, 如果对任意 τ-可测算子 $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, 满足 $\varphi(x) = |x|^p$, $1 \leq p < \infty$, 则 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 恰为非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间而且 Luxemburg 范数即为如下表达式:

$$\|x\|_p = \left(\tau\left(|x|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2) 经典 L^p 空间 (交换情形) 属于非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间族中. 事实上, 令 $(\Sigma, \mathcal{F}, \mu)$ 为一个 σ 有限的测度空间. 用乘法将 $L_\infty(\Sigma)$ 表示为 $\mathbb{H} = L_2(\Sigma)$ 上的 von Neumann 代数. 更准确的说, 对 $f \in L_\infty(\Sigma)$ 令 $M_f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 为相应的乘法算子, 定义为 $M_f(g) = fg$, 则 $f \mapsto M_f$ 是从 $L_\infty(\Sigma)$ 到 $B(\mathbb{H})$ 的一个等距的 $*$-同态. 进一步, 它的值域在 $B(\mathbb{H})$ 中是 σ-弱算子闭的. 这使得我们可以将 $L_\infty(\Sigma)$ 看作 $\mathbb{H}$ 上的一个 von Neumann 代数, 它是交换的. 注意, $L_\infty(\Sigma)$ 投影恰好是可测集的特征函数.

对任一正函数 $f \in L_\infty(\Sigma)_+$ 定义

$$\int f = \int_\Sigma f \mathrm{d}\mu.$$

那么 $\int$ 是 $L_\infty(\Sigma)$ 上的 n.s.f. 迹. 函数 $f \in L_\infty(\Sigma)$ 属于 $\mathcal{S}\left(L_\infty(\Sigma)\right)$ ($L_\infty(\Sigma)$ 中 τ 有限支撑组成的集合) 当且仅当 f 支撑在一个具有有限测度的子集上. 对这样的 f, 有

$$\int |f|^p = \int_\Sigma |f|^p \mathrm{d}\mu.$$

因此, 由 $\int$ 定义的非交换 L_p 范数等于由 μ 定义的通常的 L^p 范数. 故, $L_p\left(L_\infty(\Sigma)\right)$ 与通常的 $L^p(\Sigma)$ 相同 [115].

(3) 由上面 (2) 可知, 经典 Orlicz 空间 L_φ 属于非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$, 即 $L_\varphi\left(L_\infty(\Sigma)\right)$ 与通常的 $L_\varphi(\Sigma)$ 相同.

下图表示了经典 L^p 空间、经典 Orlicz 空间与非交换 L_p 空间及非交换 Orlicz 空间之间的关系:

$$\begin{tikzcd}
\text{经典 } L^p \text{ 空间} \arrow[r, "\text{推广}"] \arrow[d, "+von\ Neumann\ \text{代数}"] & \text{经典 } Orlicz \text{ 空间} \arrow[d, "+von\ Neumann\ \text{代数}"] \\
\text{非交换 } L_p \text{ 空间} \arrow[r, "\text{推广}"] & \text{非交换 } Orlicz \text{ 空间}
\end{tikzcd}$$

类似于经典情形, 对于 $x,y\in L_{\varphi}(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 我们可以定义 Orlicz 范数:

$$\|x\|^{o}=\sup\{\tau(|xy|):\tau(\psi(|y|))\leq 1\},$$

其中 ψ 为 φ的余函数. 而且, 我们可以得到两个范数之间的如下关系式 [94]:

$$\|x\|\leq\|x\|^{o}\leq 2\|x\|.$$

根据算子的函数演算, 我们可以得到非交换 Orlicz 空间中的 Yöung 不等式:

引理 1.3.30. *([59])* 对于互余的两个 *Orlicz* 函数 (φ,ψ), 且对任意的 $x,y\in\widetilde{\mathcal{M}}$ 我们有*:*

$$\tau(|xy|)\leq\tau(\varphi(|x|))+\tau(\psi(|y|)).$$

而且, 如果 $0\leq x\in\widetilde{\mathcal{M}}$ 且 $\tau(\varphi(x))<\infty$, 则有 $0\leq y\in\widetilde{\mathcal{M}}$ 且

$$\tau(xy)=\tau(\varphi(x))+\tau(\psi(y)) \text{ 和 } \tau(\psi(y))\leq 1.$$

关于非交换 Orlicz 空间详细理论请参见文献 [1, 2, 59, 75, 94].

第二章　非交换 Orlicz 空间中的闭子空间及某些几何性质

在泛函分析的发展中，Banach 空间是人们研究的主要对象，它是最常见且应用最广的一类拓扑线性空间. 前面我们已经给出了非交换 Orlicz 空间的定义，那么我们自然要问这个空间是不是 Banach 空间呢? 这个问题是对非交换 Orlicz 空间进行系统研究之前需要解决的一个很基本且很重要的问题. 在本章中，我们首先证明了非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 在 Luxemburg 范数下具有 Fatou 性质. 因此，该空间完备. 另外，在文献 [59] 中作者以代数形式定义了非交换 Orlicz 空间中的一个子空间 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$，在本章第二节中我们将给出这个子空间的另一种描述，而且证明了该子空间为非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中在范数拓扑下的闭线性子空间而且在测度拓扑下为稠密子空间，具体可参看本章定理 2.2.2. 本章第三节我们会给出非交换 Orlicz 空间在 Orlicz 范数下的几个基本结论. 本章第四节我们将研究非交换 Orlicz 空间中的一些几何性质，如一致单调等. 本节最后我们证明了当 $\varphi\in\Delta_2$ 时，非交换 Orlicz 空间中单位球面上的元素依范数收敛和依测度收敛等价，因此当 $\varphi\in\Delta_2$ 时，$E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$，具体可参看本章定理 2.4.7.

§2.1　基础知识

这一节我们首先给出定义在 $(0,\infty)$ 上可测函数组成的 Banach 函数空间的概念. 我们始终用 $L^0(\mathbb{R}_+,m)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上所有的复值 Lebesgue 可测函数 (等价类) 组成的线性空间.

定义 2.1.1. ([27, 80]) 我们称定义在可测函数 $L^0(\mathbb{R}_+,m)$ 上的映射 $\rho: L^0_+\to[0,\infty]$ 为模函数，如果满足:

(1) $\rho(f)=0$ 当且仅当 $f=0$ 几乎处处成立;

(2) $\rho(\lambda f)=\lambda\rho(f)$ 对任意 $f\in L^0_+,\lambda>0$ 成立;

(3) 对任意 x,y 有，$\rho(x+y)\le\rho(x)+\rho(y)$ 成立;

(4) 对所有 $f,g\in L^0_+$，如果 $f\le g$，则 $\rho(f)\le\rho(g)$ 成立.

(3′) 如果 (3) 换成对任意 x,y 及 $\alpha+\beta=1$ 有 $\rho(\alpha x+\beta y)\le\alpha\rho(x)+\beta\rho(y)$，则我们

称 ρ 为凸模.

通过模函数可以给出如下模空间及 Luxemburg 范数的定义:

定义 2.1.2. [54, 56, 80] 若 ρ 为向量空间 X 上的模函数.

(1) 定义模空间 L_ρ 为:

$$L_\rho = \{f \in X : \rho(\lambda f) \to 0,\ \lambda \to 0\};$$

(2) 定义模空间 L_ρ 上的 Luxemburg 范数为:

$$\|f\|_\rho = \inf \left\{\alpha > 0, \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1\right\}.$$

由定义可知经典 L^p 空间及 Orlicz 空间都是模空间. 关于模空间我们有下面几个常用的命题:

命题 2.1.3. *[80] (1) 若对任意 $\lambda > 0$ 及 $f_1, f_2 \in L_\rho$ 且 $\rho(\lambda f_1) \leq \rho(\lambda f_1)$, 则 $\|f_1\|_\rho \leq \|f_2\|_\rho$;*

(2) 若 $f \in L_\rho$, 则当 $\alpha \geq 0$ 时, $\|\alpha f\|_\rho$ 为非减函数;

(3) 若 $\|\alpha f\|_\rho < 1$, 则 $\rho(f) \leq \|\alpha f\|_\rho$;

(4) 若 $f, f_n \in L_\rho$, 则 $\|f - f_n\|_\rho \to 0$ 当且仅当对任何 $\alpha > 0$ 有 $\rho(\alpha(f - f_n)) \to 0$.

特别地, 通过条件 $\rho(f) = \rho(|f|)$ 可以把模函数 ρ 延拓到整个可测函数类 L^0, 此时我们可以定义 $L_\rho(0,\infty) = \{f \in L^0(0,\infty) : \rho(f) < \infty\}$. 而且如果我们赋予范数 $\rho(\cdot)$, 则 $L_\rho(0,\infty)$ 就成为 Banach 空间, 我们称之为 Banach 函数空间.

例子 2.1.4. [28] 若 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 为可测算子, 定义

$$L_\rho(\widetilde{\mathcal{M}}) = \{x \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(x) \in L_\rho\}$$

并且定义范数 $\|x\|_\rho = \rho(\mu(x))$, 其中 $\mu(x)$ 为可测算子 x 的重排函数. 此时, $L_\rho(\widetilde{\mathcal{M}})$ 就为定义在 $[0,\infty)$ 上的 Banach 函数空间, 而且可以证明 $(L_\rho(\widetilde{\mathcal{M}}), \|\cdot\|_\rho)$ 为赋范线性空间.

下面我们给出重排不变及对称 Banach 函数空间的概念如下.

定义 2.1.5. [28] 称 Banach 空间 $(E, \|\cdot\|_E)$ (其中 $E \subseteq L^0(\mathbb{R}_+, m)$) 为重排不变的 Banach 函数空间, 如果由条件 $f \in E, g \in L^0(\mathbb{R}_+, m)$ 及 $\mu(g) \leq \mu(f)$ 能得到 $g \in E$ 和 $\|g\|_E \leq \|f\|_E$. 而且, 我们称 $(E, \|\cdot\|_E)$ 为对称的 Banach 函数空间, 如果还具有如下条件, 条件 $f, g \in E$ 及 $g \prec\prec f$ 蕴含 $\|g\|_E \leq \|f\|_E$ [14]. 这里 $g \prec\prec f$ 表示对所有 $t > 0$:

$$\int_0^t \mu_s(g)ds \leq \int_0^t \mu_s(f)ds$$

成立.

定义 2.1.6. [27] 称模函数 ρ 为下半连续的, 如果 $f_n, f,\ (n = 1, 2, \cdots)$ 且 f_n 几乎处处收敛于 f 蕴含 $\rho(f) \leq \underline{\lim}\rho(f_n)$.

正如例 2.1.4 所示, Dodds 等人在 Banach 函数空间基础上给出了非交换空间 $L_\rho(\widetilde{M})$ 的如下定义:

$$L_\rho(\widetilde{M}) = \{f \in \widetilde{M} : \mu(f) \in L_\rho(0, \infty)\},$$

并证明了如果 ρ 为下半连续函数且 $L_\rho(0, \infty)$ 为赋予范数 $\|f\|_\rho = \rho(\mu(f))$ 的重排不变空间, 则 $L_\rho(\widetilde{M})$ 为 Banach 空间.

下面我们给出算子空间中重排不变的定义.

定义 2.1.7. [28] 我们称 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 的线性子空间 E 为重排不变的, 如果 $x \in E, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ 且对任意 $t > 0$, $\mu_t(y) \leq \mu_t(x)$ 都有 $y \in E$ 和 $\|y\|_E \leq \|x\|_E$ 成立.

§2.2 非交换 Orlicz 空间中的闭子空间及相关性质

由文献 [7] 可知 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 范数重排不变算子空间. 而且由文献 [28] 中推论 2.4 可知具有 Fatou 性质的范数重排不变算子空间即为 Banach 空间. 因此, 为了证明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 为 Banach 空间, 我们需要证明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有 Fatou 性质.

定理 2.2.1. *(Fatou 性质) 设 $x \in \widetilde{\mathcal{M}}, x_n \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$. 如果 $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$ 且 $0 \leq x_n \uparrow_n x$, 则 $x \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 且 $\|x\| = \sup\limits_n \|x_n\|$.*

证明: 因为 $x_n \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$, 我们有 $\mu(x_n) \in L_\varphi(0, \infty)$. 又因为 $\sup\limits_n \|x_n\| = \sup\limits_n \|\mu(x_n)\| < \infty$, 由文献 [28] 中命题 1.7 可知, 如果 $x_n, x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ 且 $0 \leq x_n \uparrow_n x$, 则 $\mu_t(x_n) \uparrow_n \mu_t(x)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立.

因此由经典情形下的该定理可知 $\mu(x)\in L_\varphi(0,\infty)$ 且 $\|\mu(x)\|=\sup\limits_n\|\mu(x_n)\|$.

所以我们得到, $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且 $\|x\|=\sup\limits_n\|x_n\|$. □

在文献 [59] 中, Kunze 考虑了如下子空间的一些性质

$$E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|}.$$

下面我们考虑该空间中的另一子空间. 即

$$A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\Big\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(\varphi\left(\lambda|x|\right)\right)<\infty,\ \forall\ \lambda>0\Big\}.$$

容易验证 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的线性子空间. 下面一些定理表明了 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中范数拓扑下闭且为测度拓扑下稠密的子空间.

定理 2.2.2. *我们总有下面的结论成立:*

(1) $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ *在范数拓扑下为* $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ *的闭子空间;*

(2) $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ *在测度拓扑下为* $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ *的稠密子空间.*

证明: (1) 给定 $x_n\in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 和 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 使得 x_n 依范数收敛于 x . 由文献 [60] 中的引理 2.1 可知, 任何 $z\in\mathcal{M}$, 有 $z\in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}})$ 当且仅当 $\mu(z)\in A_\varphi(0,\infty)$.

再结合文献 [27] 中推论 4.3 可知

$$\|\mu(x_n)-\mu(x)\|\le\|\mu(x_n-x)\|=\|x_n-x\|\to 0.$$

因此由经典情形我们可知 $\mu(x)\in A_\varphi(0,\infty)$.

所以可得 $x\in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$.

(2) 对任何 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 设

$$x=u|x|=u\int_0^\infty\lambda\mathrm{d}e_\lambda(|x|)$$

为 x 的极分解. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 设 $x_n=u\int_0^n\lambda\mathrm{d}e_\lambda(|x|)$, 则显然有 $x_n\in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且

$$x-x_n=u|x|e_{(n,\infty)}(|x|)=u\int_n^\infty\lambda\mathrm{d}e_\lambda(|x|).$$

对任意 $\varepsilon>0$,

$$e_{(\varepsilon,\infty)}(|x-x_n|)=\begin{cases}e_{(n,\infty)}(|x|), & \varepsilon<n,\\ e_{(\varepsilon,\infty)}(|x|), & \varepsilon\ge n.\end{cases}$$

因为 x 为 τ-可测算子, $\lim_n \tau(e_{(n,\infty)}(|x|)) = 0$, 这就意味着 $\lim_n \tau(e_{(\varepsilon,\infty)}(|x-x_n|)) = 0$ 对任何 $\varepsilon > 0$ 成立. 因此, $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 依测度为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的稠密子空间. □

为了对 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 进行深入研究, 我们还需要给出下面一些引理.

引理 2.2.3. *我们记* $E_\varphi = E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) = \overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|}$. *如果* $x \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ *且* $\tau(\varphi(|x|)) < \infty$, *则从* x *到* E_φ *的距离* $d(x,E_\varphi)$ *小于 1, 其中* $d(x,E_\varphi) = \inf\{\|x-y\| : \ y \in E_\varphi\}$.

证明: 设 $x = u|x|$ 为 x 的极分解, 其中 $|x| = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}e_\lambda(|x|)$. 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x_n = u\int_0^n \lambda \mathrm{d}e_\lambda(|x|)$. 由于 $\tau(\varphi(|x|)) < \infty$, 对任何 $\varepsilon > 0$ 我们可以选取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足

$$\tau(\varphi(|x-x_{n_0}|) = \int_{n_0}^\infty \varphi(\lambda)\mathrm{d}\tau(e_\lambda) < \varepsilon.$$

又由于 $x_n \in E_\varphi$, 则由 Young 不等式可以得到

$$d(x,E_\varphi) \le \|x-x_{n_0}\| \le \|x-x_{n_0}\|^o \le 1 + \tau(\varphi(|x-x_{n_0}|) < 1+\varepsilon.$$

因此, 由 ε 的任意性可知 $d(x,E_\varphi) \le 1$. □

下面定理表明 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 在范数拓扑下为所有 τ-可测有界算子集合的闭包.

定理 2.2.4. $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) = E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) = \overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|}$.

证明: 对任何 $x \in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 和 $k \ge 1$, 我们有 $kx \in A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 因此 $d(kx,E_\varphi) \le 1$ 或 $d(x,E_\varphi) \le \frac{1}{k}$. 由于 k 为任意常数, 则我们有 $x \in E_\varphi$, *i.e.*, $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) \subseteq E_\varphi$.

另一方面, 由于 $\mathcal{M}$ 包含于 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且由定理 2.2.2 可知 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的闭子空间, 则 E_φ 包含于 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 这就意味着 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) = E_\varphi$.

而且, 由 $A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的定义可知,

$$A_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) = \overline{\mathcal{M}\bigcap L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)}^{\|\cdot\|} = E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau).$$

□

以后, 类似于经典情形, 我们仍然用 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 来表示集合

$$\left\{x \in \widetilde{\mathcal{M}} : \tau\left(\varphi\left(\lambda|x|\right)\right) < \infty, \ \forall\, \lambda > 0\right\}.$$

类似于函数空间, 下面我们给出 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中可测算子范数绝对连续的定义.

定义 2.2.5. 如果 $x \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 且满足

$$\lim_{\tau(e_n)\to 0} \|xe_n\| = 0,$$

则我们称算子 x 范数绝对连续.

定理 2.2.6. 对于 $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, 下面条件等价:

(1) $x \in E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$, 其中 $x_n = u\int_0^n \lambda \mathrm{d}e_\lambda(|x|)$.

(3) x 范数绝对连续.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2). 给定 $\varepsilon > 0$, 由于 $x \in E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$, 我们有

$$\tau\left(\varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\right) = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\tau(e_\lambda(|x|)) < \infty.$$

因为 $x_n = u\int_0^n \lambda \mathrm{d}e_\lambda(|x|)$, 当 n 足够大时我们可以得到

$$\tau\left(\varphi\left(\frac{|x-x_n|}{\varepsilon}\right)\right) = \int_n^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\tau(e_\lambda(|x|)) \le 1.$$

因此, 由 Young 不等式,

$$\left\|\frac{x-x_n}{\varepsilon}\right\| \le \left\|\frac{x-x_n}{\varepsilon}\right\|^o \le 1 + \tau\left(\varphi\left(\frac{|x-x_n|}{\varepsilon}\right)\right) \le 2$$

对 $n \in \mathbb{N}$. 这就得到, 对任意的 ε, 当 $n \to \infty$ 时, $\|x - x_n\| \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 n_0 使得 $\|x - x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 x_{n_0} 有界, 故存在 $\delta > 0$ 及投影算子 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 使得 $\tau(e) < \delta$ 时 $\|x_{n_0}e\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $\tau(e) < \delta$ 时我们有

$$\|xe\| = \|(x - x_{n_0} + x_{n_0})e\| \le \|(x - x_{n_0})e\| + \|x_{n_0}e\| < \varepsilon.$$

此时, 我们只需要在上式中取一列递减投影序列 $\{e_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 且使得 $\bigwedge\limits_n e_n = 0$, 则由文献 [115] 中定理 5.1.2 的 (3) 可知, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(e_n) = 0$, 于是 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $x_n = xe_{(n,\infty)}$, 则由条件 (2) $\|x - x_n\| = \|xe_{[n,\infty)}\| \to 0$. 又由于 $x_n \in E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 再由定理 2.2.2 中的 (1) 可知 $x \in E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$. $\square$

§2.3 非交换 Orlicz 空间中某些几何性质的刻画

经典 Orlicz 空间做为一类具体的 Banach 空间, 它的各种性质及其判据都是一般 Banach 空间的直观材料; 刻画 Orlicz 空间几何性质的方法和论证技巧将为一般 Banach 空间几何学提供借鉴. 由于非交换 Orlicz 空间是经典 Orlicz 空间的推广, 因此对其几何学的研究也不可或缺. 本节就是在这一背景下对非交换 Orlicz 空间中的某些几何性质进行研究. 具体包括: 一致单调性、依范数收敛与依测度收敛的一致性等内容.

首先, 为了证明非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的一致单调性. 我们需要引入如下几个引理, 其中 Δ_2 条件已由定义 1.3.25 给出.

引理 2.3.1. *若 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $\|x\|\geq\varepsilon$ 时, $\tau(\varphi(|x|))\geq\delta$.*

引理 2.3.2. *若 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 都存在 $\delta(\varepsilon)\in(0,1)$ 使得当 $\tau(\varphi(|x|))\leq 1-\varepsilon$ 时都有 $\|x\|\leq 1-\delta$ 成立.*

引理 2.3.3. *若 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 都存在 $\delta(\varepsilon)\in(0,1)$ 使得 $\|x\|\geq 1+\delta$成立, 其中 $\tau(\varphi(|x|))\geq 1+\varepsilon$.*

引理 2.3.1-2.3.3 只是经典情形下的平行推广. 具体证明过程可以参看文献 [20].

定理 2.3.4. *若 $\varphi\in\Delta_2$. 给定任何 $L>0$ 和 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta(L,\varepsilon)>0$ 使得 $\tau(\varphi(|x|))\leq L$ 和 $\tau(\varphi(|y|))\leq\delta$, 蕴含着*

$$|\tau(\varphi(|x+y|))-\tau(\varphi(|x|))|<\varepsilon.$$

证明: 首先, 对任何 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 和 $\|x\|\leq 1$, 记 $\|\cdot\|_\varphi$ 为经典 Orlicz 空间 $L_\varphi(0,\infty)$ 中的 Luxemburg 范数.

由于 $\|\mu_t(x)\|_\varphi=\|x\|$, 由经典情形可知,

$$\begin{aligned}\tau(\varphi(x)) &= \int_0^\infty \varphi(\mu_t(x))dt\\ &\leq \|\mu_t(x)\|_\varphi=\|x\|.\end{aligned}$$

现设

$$h = \sup\{\tau(\varphi(|2x|+|2y|)) : \tau(\varphi(|x|)) \le L, \tau(\varphi(|y|)) \le 1\}.$$

则由于 $\varphi \in \Delta_2$ 可知 $L < h < \infty$. 不失一般性, 我们假定 $L > 1$ 且 $\varepsilon < 1$.

取 $\beta = \frac{\varepsilon}{h}$. 由引理 2.2.2, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\tau(\varphi(|y|)) \le \delta$, 可以得到 $\|y\| \le \min\{\frac{\beta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ *i.e.*, $\|\frac{2}{\beta}y\| \le 1$. 因此, 如果 $\tau(\varphi(|x|)) \le L$ 和 $\tau(\varphi(|y|)) \le \delta$ 成立, 则由文献 [33] 中的定理 4.4 和 φ 的凸性可知,

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi(|x+y|)) &= \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(|x+y|)\right) \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(u|x|u^* + v|y|v^*)\right) \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(u|x|u^*) + \mu_t(v|y|v^*)\right) \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(|x|) + \mu_t(|y|)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \varphi\left((1-\beta)\mu_t(|x|) + \beta\left(\mu_t(|x|) + \frac{\mu_t(|y|)}{\beta}\right)\right) \mathrm{d}t \\
&\le (1-\beta)\int_0^\infty \varphi(\mu_t(|x|))\mathrm{d}t + \beta\int_0^\infty \varphi\left(\mu_t(|x|) + \frac{\mu_t(|y|)}{\beta}\right) \mathrm{d}t \\
&\le (1-\beta)\int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(|x|\right)\right) \mathrm{d}t + \frac{\beta}{2}\Big[\int_0^\infty \varphi(\mu_t(2|x|))\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(\frac{2|y|}{\beta}\right)\right) \mathrm{d}t\Big] \\
&= (1-\beta)\tau(\varphi(|x|)) + \frac{\beta}{2}\left[\tau(\varphi(2|x|)) + \tau\left(\varphi\left(\frac{2|y|}{\beta}\right)\right)\right] \\
&\le \tau(\varphi(|x|)) + \frac{\beta h}{2} + \frac{\beta}{2}\left\|\frac{2}{\beta}y\right\| \\
&\le \tau(\varphi(|x|)) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

上述不等式中分别用 $x+y, -y$ 代替 x, y, 我们可以得到

$$\tau(\varphi(|x|)) = \tau(\varphi(|(x+y)+(-y)|)) \le \tau(\varphi(|x+y|)) + \varepsilon.$$

因此结论成立. □

下面我们给出一致单调的定义.

定义 2.3.5. 我们称非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有一致单调性, 如果对任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得对满足条件 $\|x\| = 1$ 和 $\|y\| \ge \varepsilon$ 的正 τ-可测算子 x, y, 都有 $\|x+y\| \ge 1 + \delta(\varepsilon)$.

定理 2.3.6. 若 $\varphi \in \Delta_2$, 则 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有一致单调性.

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 且 $x, y \in L_\varphi^+(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 使得 $\|x\| = 1$ 和 $\|y\| \geq \varepsilon$. 由于 $\varphi \in \Delta_2$, 则由文献 [94] 中命题 3.6 可知 $\tau(\varphi(y)) \geq \eta$ 其中 $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$.

则由文献 [33] 中命题 4.6 可得

$$\tau(\varphi(x+y)) \geq \tau(\varphi(x)) + \tau(\varphi(y)) \geq 1 + \eta.$$

因此, 由引理 2.2.3, 存在 $\delta > 0$ 满足 $\|x + y\| \geq 1 + \delta$. □

下面定理说明在条件 $\varphi \in \Delta_2$ 下, 非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 中单位球面上依范数收敛和依测度收敛等价.

定理 2.3.7. 设 $x_n, x \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\varphi(|x_n|)) = \tau(\varphi(|x|))$ 且 $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau\big(\varphi\big(\big|\frac{x_n - x}{2}\big|\big)\big) = 0$. 而且, 如果 $\varphi \in \Delta_2$, 则$\|x_n - x\| \to 0$.

证明: 由 φ 的凸性和文献 [33] 中引理 2.5 可知,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x - x_n|}{2}\right)\right) &= \varphi\left(\frac{1}{2}\mu_t(|x - x_n|)\right) \\
&\leq \varphi\left(\frac{1}{2}\mu_{\frac{t}{2}}(|x|) + \frac{1}{2}\mu_{\frac{t}{2}}(|x_n|)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x|)\right) + \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x_n|)\right)\right].
\end{aligned}$$

如果 $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$, 由文献 [33] 中引理 3.1 可知对任何 $t > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_t(x_n - x) = 0$.

假设 $\tau(\varphi(|x_n|)) \to \tau(\varphi(|x|))$. 由 Fatou 引理可知

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x|)\right) \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{\varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x|)\right) + \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x_n|)\right)}{2} \\
&\quad -\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x - x_n|}{2}\right)\right)\Big] \mathrm{d}t \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^\infty \Big[\frac{\varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x|)\right) + \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x_n|)\right)}{2} \\
&\quad -\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x - x_n|}{2}\right)\right)\Big] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}(|x|)\right) \mathrm{d}t - \lim_{n\to\infty} \sup \tau\left(\varphi\left(\frac{|x - x_n|}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

因此可得

$$-\lim_{n\to\infty}\sup\tau\left(\varphi\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right)\geq 0,$$

这就意味着 $\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_n-x|}{2}\right)\right)\to 0$. 若 $\varphi\in\Delta_2$, 则由文献 [94] 中的命题 3.6 中的 (iii) 可知 $\|x_n-x\|\to 0$. □

下面定理说明当 $\varphi\in\Delta_2$ 时, $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\mathcal{M}$.

定理 2.3.8. 若 $\varphi\in\Delta_2$, 则

$$E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau).$$

证明: 由定理 2.3.7, 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 依范数收敛和依测度收敛等价. 因此, 结合定理 2.2.2 可知结论自然成立. □

推论 2.3.9. 对任何 τ-可测算子 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$, 设 $\varphi(x)=|x|^p$, $1\leq p<\infty$, 则显然 $\varphi\in\Delta_2$. 因此,

$$\begin{aligned}L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau) &= E_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\\ &= \left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left((\lambda|x|)^p\right)<\infty,\ \forall\ \lambda>0\right\}\\ &= \left\{x\in\widetilde{\mathcal{M}}:\tau\left(|x|^p\right)<\infty\right\}.\end{aligned}$$

注 2.3.10. 注意到定理 2.3.8 中 $\varphi\in\Delta_2$ 的条件为必要条件, 也就是说, 如果当 $\varphi\notin\Delta_2$ 时, $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\subsetneqq L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 而且, 如果 $\varphi\notin\Delta_2$. 则由文献 [13] 中定理 1.13 可知, 存在 $0<\alpha_k\uparrow\infty$ 使得

$$\varphi\left(\left(1+\frac{1}{k}\alpha_k\right)\right)>2^k\varphi(\alpha_k)\ \ (k\in\mathbb{N}).$$

在非原子 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 中选取两两正交的投影 $\{e_k\}$ 使得 $\varphi(\alpha_k)\tau(e_k)=\frac{\varepsilon}{2^k}$, 其中 $\varepsilon>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$, 定义

$$x_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k e_k$$

其中 $\alpha_k\in\mathbb{R}_+$.

则,

$$\tau(\varphi(x_n)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(\alpha_k)\tau(e_k) = \frac{\varepsilon}{2^n} < \infty,$$

可以得到 $x_n \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$.

但是对任何 $l > 1$, 若 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $l \geq 1 + \frac{1}{n_0}$, 则对任何 $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \tau(\varphi(lx_n)) &> \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi\left(\left(1 + \frac{1}{k}\alpha_k\right)\right)\tau(e_k) \\ &> \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k \varphi(\alpha_k)\tau(e_k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon = \infty, \end{aligned}$$

这说明 $x_n \notin E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ $(n \in \mathbb{N})$. 因此如果 $\varphi \notin \Delta_2$, 则$E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau) \subsetneqq L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$.

§2.4 非交换 Orlicz 空间中关于 Orlicz 范数的若干性质

在第一章中我们已经介绍了 Orlicz 范数的定义, 由文献 [94] 可知, 非交换 Orlicz 空间中 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数是等价的. 这一节中我们主要研究非交换 Orlicz 空间中关于 Orlicz 范数的一些性质, 如 Orlicz 范数与模之间的关系、依范数收敛与依测度收敛的等价性、范数绝对连续性及投影算子的范数计算公式等.

以后我们用 $L^o_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 表示赋予 Orlicz 范数的非交换 Orlicz 空间.

首先我们来讨论 Orlicz 范数与模之间的关系, 定理如下:

定理 2.4.1. 设 $x \in L^o_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$, 则下面两个结论成立:

(1) $\|x\|^o \leq 1 \Rightarrow \tau(\psi(p(|x|)) \leq 1$;

(2) $\|x\|^o \leq 1 \Rightarrow \tau(\varphi(|x|) \leq \|x\|^o$.

证明: (1) 若 $x = u|x|$ 为算子 x 的极分解且 $|x| = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}e_\lambda$ 为算子 x 的谱分解. 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 设

$$x_n = u\int_0^n \lambda de_\lambda.$$

则 $|x_n| = \int_0^n \lambda \mathrm{d}e_\lambda$ 且 $|x_n| \uparrow |x|$, 则我们有 $\|x_n\|^o \uparrow \|x\|^o$ 成立. 如果 (1) 不对, 则对所有 n,

$$1 < \tau(\psi(p(|x_n|)) < \infty.$$

又由 ψ 的凸性可知,

$$\tau\left(\psi\left(\frac{p(|x_n|)}{\tau(\psi(p(|x_n|)))}\right)\right) \leq \frac{1}{\tau\left(\psi\left(p\left(|x_n|\right)\right)\right)}\tau\left(\psi\left(p\left(|x_n|\right)\right)\right) = 1.$$

因此, 由 Yöung 不等式我们可以得到如下矛盾:

$$\begin{aligned} 1 \geq \|x\|^o \geq \|x_n\|^o &\geq \tau\left(|x_n|\frac{p(|x_n|)}{\tau(\psi(p(|x_n|)))}\right) \\ &= \frac{1}{\tau\left(\psi(p(|x_n|))\right)}\left[\tau\left(\varphi\left(|x_n|\right)\right) + \tau\left(\psi\left(p\left(|x_n|\right)\right)\right)\right] \\ &> 1. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 及 Yöung 不等式成立条件并结合 Orlicz 范数意义可得:

$$\tau(\varphi(x)) \leq \tau(\varphi(x)) + \tau(\psi(p(|x|))) = \tau(|x| \cdot p(|x|)) \leq \|x\|^o.$$

$\square$

注 2.4.2. 定理 2.4.1 中的 (2) 蕴含了$\|x_n\|^o \to 0 \Rightarrow \tau(\varphi(|x_n|)) \to 0$.

定理 2.4.3. *如果 $\varphi \in \Delta_2$, 则 $x \in L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的可测算子依范数收敛(Orlicz 范数) 与依测度收敛等价.*

证明: 由注 2.4.2 可知我们只需证明当 $\varphi \in \Delta_2$ 时 $\tau(\varphi(|x_n|)) \to 0 \Rightarrow \|x_n\|^o \to 0$ 即可.

设 $\varphi \in \Delta_2$ 且满足 $\varepsilon > 0$. 选取 $x_0 > 0$ 及 $K > 1$ 使得

$$\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_0|}{\varepsilon}\right)\right) < \varepsilon,\ \ \varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \leq K\varphi(x)\ \ (x \geq x_0).$$

假设 $x_n \in L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 且 $\tau\left(\varphi\left(|x_n|\right)\right) \to 0$. 则

$$\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_n|}{\varepsilon}\right)\right) \leq \tau\left(\varphi\left(\frac{|x_0|}{\varepsilon}\right)\right) + K\tau\left(\varphi\left(|x_n|\right)\right) < \varepsilon + K\tau(\varphi(|x_n|) \to \varepsilon$$

因此由 Yöung 不等式可以得到

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x_n}{\varepsilon}\right\|^o &= \sup\left\{\tau\left(\left|\frac{x_n}{\varepsilon}y\right|\right):\ \tau(\psi(|y|)) \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\tau\left(\varphi\left(\left|\frac{x_n}{\varepsilon}\right|\right)\right) + \tau\left(\psi\left(|y|\right)\right):\ \tau\left(\psi\left(|y|\right)\right) \leq 1\right\} \\ &\leq 1 + \varepsilon + K\tau\left(\varphi\left(|x_n|\right)\right) \\ &\to 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性我们可以断定 $\|x_n\|^o \to 0$. $\square$

下面我们证明 $L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的任意 x 都满足范数绝对连续性, 即 $L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有范数绝对连续性.

定理 2.4.4. 如果 $x\in L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 设 $x=u|x|$ 为可测算子 x 的极分解且 $|x|=\int_0^\infty \lambda de_\lambda$ 为 x 的谱分解, 令$x_n=u\int_0^n \lambda de_\lambda$. 则 x 范数绝对连续当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|^o\to 0$.

证明: 由于 $\|x\|\le\|x\|^o\le 2\|x\|$, 再结合定理 2.2.6 可以得到结论. □

本节最后我们给出投影算子 $e_{[0,\lambda]}$ 的 Orlicz 范数的计算公式.

定理 2.4.5. 投影算子 $e_{[0,\lambda]}$ 的 *Orlicz* 范数计算公式为:

$$\|e_{[0,\lambda]}\|^o=\psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.$$

证明: 首先, 对任何 $y\in L_\psi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 及 $\tau(\psi(|y|))\le 1$, 由 Jensen 不等式有,

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mu_s(y)\mathrm{d}s\right) &\le \frac{1}{\lambda}\psi\left(\int_0^\lambda \mu_s(y)\mathrm{d}s\right)\\ &\le \frac{1}{\lambda}\psi\left(\int_0^\infty \mu_s(y)\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\tau\left(\psi(y)\right)\\ &\le \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^\lambda \mu_s(y)\mathrm{d}s\le\psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.$$

再由 Orlicz 范数定义可知,

$$\begin{aligned}\|e_{[0,\lambda]}\|^o &= \sup\left\{\tau(e_{[0,\lambda]}y):\ \tau(\psi(y))\le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_0^\lambda \mu_s(y)\mathrm{d}s:\ \tau(\psi(y))\le 1\right\}\\ &\le \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.\end{aligned}$$

另一方面, 注意到

$$\tau\left(\psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)e_{[0,\lambda]}\right)\right)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda e_{[0,\lambda]}dt=1,$$

再由 Orlicz 范数定义我们可以得到

$$\|e_{[0,\lambda]}\|^o \geq \tau\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)e_{[0,\lambda]}\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}.$$

综上所述我们可以得到,

$$\|e_{[0,\lambda]}\|^o = \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}.$$

□

下面举例对定理 2.4.5 加以说明.

例子 2.4.6. 对于非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}})$, 如果 $\varphi(u) = |u|^p$ $(1 < p < \infty)$, 则其余函数 $\psi(v) = |v|^q$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任何 $e_{[0,\lambda]} \in L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}})$ 有

$$\begin{aligned}\|e_{[0,\lambda]}\|^o &= \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}\lambda \\ &= \lambda^{1-\frac{1}{q}} \\ &= \lambda^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

例子 2.4.7. 对于非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}})$, 如果 $\varphi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ $(1 < p < \infty)$, 则其余函数 $\psi(v) = \frac{|v|^q}{q}$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任何 $e_{[0,\lambda]} \in L_\varphi^o(\widetilde{\mathcal{M}})$ 有

$$\begin{aligned}\|e_{[0,\lambda]}\|^o &= \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda \\ &= \left(q\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}\lambda \\ &= q^{\frac{1}{q}}\lambda^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

第三章 非交换 Orlicz 空间中依测度收敛下 Kadec-Klee 性质的刻画

§3.1 预备知识

J. Radon 在文献 [88] 中首次研究了 Kadec-Klee 性质. 具体来说就是: 如果 $(E, \|\cdot\|_E)$ 为赋范线性空间, 则 E 称之为具有 Kadec-Klee 性质 (有时我们也称为 Radon-Riesz 性质, 或 H 性质) 当且仅当其单位球面上的序列弱收敛和依范数收敛等价. 随后很多学者对这一性质进行了研究, 例如, 在文献 [92] 和 [93] 中, F. Riesz 证明了经典 $L^p, (1<p<\infty)$ 空间具有 Kadec-Klee 性质. 另外一个例子就是在文献 [12] 中, 陈述涛和王玉文证明了经典 Orlicz 空间 L_φ 具有 Kadec-Klee 性质的充分必要条件为 $\varphi \in \Delta_2$ 且 φ 严格凸.

在本章中, 我们主要研究非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 中依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质. 具体来说, 对任何 $x \in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}, \tau})$, 如果 $\|x_n\| \to \|x\|$ 且 x_n 依测度收敛于 x, 则 $\|x_n - x\| \to 0$. 为此我们首先证明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质的充分必要条件为 $\varphi \in \Delta_2$, 其次我们证明了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 具有序连续性质、局部一致单调性质等. 做为推论, 我们可以得到非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间自然也具有上述性质. 本章最后, 我们给出 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 对偶空间及自反的刻画.

假设 E 为具有偏序关系 "$\leq$" 的 Banach 空间. 我们称 E 为序连续的如果对任何 $x \in E$ 及 E_+ (E 中的正锥) 的序列 $\{x_n\}$ 且满足 $0 \leq x_n \leq |x|$ 及 x_n 依测度收敛于 0, 都有 $\|x_n\| \to 0$ 成立. 我们注意到在对称空间 E 中 (参见定义 2.1.5) 其范数 $\|\cdot\|_E$ 为序连续的当且仅当 E 可分.

一般情况下, 我们称 E 为下局部一致单调 (记为 $E \in (LLUM)$), 如果对任意 $x \in E_+$ 且 $\|x\|_E = 1$ 及任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 存在 $\delta = \delta(x,\varepsilon) \in (0,1)$ 使得 $0 \leq y \leq x$ 及 $\|y\|_E \geq \varepsilon$ 蕴含 $\|x-y\| \leq 1-\delta$ 成立. 我们称 E 为上局部一致单调(记为 $E \in (ULUM)$), 如果对任意 $x \in E_+$ 且 $\|x\|_E = 1$ 及任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ 使得 $y \geq 0$ 且 $\|y\|_E \geq \varepsilon$ 蕴含 $\|x+y\| \geq 1+\delta$ 成立 [44].

对于局部一致单调性质我们有如下比较有用的等价条件: $E \in (LLUM)$ (或 $E \in (ULUM)$) 当且仅当 $x \in E_+$, $x \neq 0$, 及 E_+ 中满足条件 $x_n \leq x$ (或 $x \leq x_n$) 和 $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$ 的序列 $\{x_n\}$, 都有 $\|x_n - x\|_E \to 0$ 成立.

§3.2 依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质

这一部分中, 我们首先证明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 依测度收敛意义下具有 Kadec-Klee 性质当且仅当 Orlicz 函数满足 $\varphi\in\Delta_2$. 做为推论, 接着说明 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 为序连续的, 从而说明非交换 Orlicz 空间的 Köthe 对偶与 Banach 对偶是一致的.

定理 3.2.1. 如果 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有依测度收敛下的 *Kadec-Klee* 性质, 则 $\varphi\in\Delta_2$, 其中$\mathcal{M}$ 为非原子 *von-Neumann* 代数.

证明: 我们分别以如下两种情形证明结论:

情形 1: 如果 $\tau(1)=\infty$. 我们假设 $\varphi\notin\Delta_2$, 选取 $\{u_k\}_{k=1}^\infty\in\mathbb{R}^+$ 及 $\mathcal{M}$ 中非零的两两相互正交的投影算子 $\{e_k\}_{k=1}^\infty\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 且满足 $\tau(e_n)\to 0$ 使得

$$\varphi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right)>2^k\varphi(u_k)$$

和

$$\varphi(u_k)\tau(e_k)=\frac{1}{2^k}$$

成立, 其中$k\in\mathbb{N}$.

定义 $x=\sum\limits_{k=1}^\infty u_ke_k$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^\infty u_ke_k-u_ne_n$. 则 $\tau(\varphi(x))=\sum\limits_{k=1}^\infty\varphi(u_k)\tau(e_k)=\sum\limits_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}<\infty$, 这也蕴含了 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 同样由文献 [33] 中的引理 2.6 可以得到 $\|x_n\|\to\|x\|$ 和$\tau(e_n)\to 0$,

$$\begin{aligned}\tau(e_{(s,\infty)}(|x_n-x|)) &= \tau(e_{(s,\infty)}(|2u_ne_n|))\\ &= \int_0^\infty \chi_{(s,\infty)}(\mu_t(|2u_ne_n|))dt\\ &\to 0\end{aligned}$$

因此, $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$ 对任意 $s>0$ 成立.

另一方面, 由文献 [94]中命题 3.4 中的第 (ii) 条和文献 [33] 中的注3.3 , 结合函数演算, 由于 $\mu_t(e_k)=\chi_{[0,\tau(e_k))}(t)$ 对任何 $k\in N$ 成立, 我们可以得到: $\varphi\left(\frac{e_k}{\|e_k\|}\right)=\varphi\left(\frac{1}{\|e_k\|}\right)e_k$,

$$1\geq\tau\left(\varphi\left(\frac{e_k}{\|e_k\|}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{\|e_k\|}\right)\tau(e_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi\left(\frac{1}{\|e_k\|}\right)\frac{1}{2^k\varphi(u_k)} \\
&> \varphi\left(\frac{1}{\|e_k\|}\right)\frac{1}{\varphi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right)}.
\end{aligned}
$$

因此我们有$\|e_k\| > \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right]^{-1}$ 和

$$
\|x-x_n\| = \|2u_ne_n\| > 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1},
$$

这可以得到结论成立.

情形 2: 如果 $\tau(1)<\infty$. 由文献 [29] 我们知道依测度下局部收敛与依测度收敛是一样的. 因此, 结合文献 [30] 中的定理 2.6 及经典 Orlicz 空间中的形同定理, 我们可以得到如果 $L_\varphi(0,\infty)$ 满足依测度局部收敛下的 Kadec-Klee 性质, 则 $\varphi\in\Delta_2$, 这也可以得到结论. □

为了证明在条件 $\varphi\in\Delta_2$ 下 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有依测度收敛下的 Kadec-Klee 性质, 我们还需要如下两个引理.

引理 3.2.2. 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 则对 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的任何序列 $\{x_n\}$ 及 $\|x\|=1$, 使得 $\|x_n\|\to\|x\|$ 成立的充分必要条件为 $\tau(\varphi(|x_n|))\to\tau(\varphi(|x|))$ 或 $\|x_n\|\to 1$ 当且仅当 $\tau(\varphi(|x_n|))\to 1$.

证明: 假设 $\tau(\varphi(|x_n|))\to 1$. 我们考虑如下两种情况:

情形 1: 如果 $\tau(\varphi(|x_n|))\le 1$, 由于 $\tau(\varphi(|x_n|))\le 1$ 蕴含了 $\|x_n\|\le 1$, 由 φ 的凸性及文献 [94] 中命题 3.4 的 (ii), 我们可以得到 $\frac{1}{\|x_n\|}\tau(\varphi(|x_n|))\le\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_n|}{\|x_n\|}\right)\right)\le 1$, 即, $\tau\left(\varphi(|x_n|)\right)\le\|x_n\|$.

情形 2: 如果 $\tau(\varphi(|x_n|))\ge 1$, 由文献 [94] 中命题 3.4 的的 (i) 我们有 $\tau(\varphi(|x_n|))\ge\|x_n\|$.

因此, 我们可以得到 $|\|x_n\|-1|\le|\tau(\varphi(|x_n|))-1|$, 由于 $\tau(\varphi(|x_n|))\to 1$ 这也蕴含了 $\|x_n\|\to 1$.

现在, 假设 $\|x_n\|\to 1$, 我们首先考虑如下两种情形:

情形 1: 如果 $\|x_n\|$ 单调上升收敛于 1 并且结论不成立, 则假设存在 $\varepsilon_0>0$ 及属于 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的子列 $\{x_{n_i}\}\subseteq\{x_n\}$ 使得 $\tau(\varphi(|x_{n_i}|))\le 1-\varepsilon_0$. 我们假设 $\|x_{n_i}\|\ge\frac{1}{2}$ 对所有

$n_i \in \mathbb{N}$ 都成立. 令 $a_{n_i} = \frac{1}{\|x_{n_i}\|} - 1$, 则 $a_{n_i} \leq 1$ 对所有 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立,而且当 $n_i \to \infty$ 时 $a_{n_i} \downarrow 0$.

又由于 $\varphi \in \Delta_2$, 则由文献 [33] 中定理 4.4 的 (iii) 可知 $\sup\limits_{n_i}\{\tau(\varphi(2|x_{n_i}|))\} < \infty$ 成立, 所以我们可以得到如下矛盾:

$$
\begin{aligned}
1 &= \tau\left(\varphi\left(\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right) \\
&= \tau\left(\varphi\left(a_{n_i}|2x_{n_i}| + (1-a_{n_i})|x_{n_i}|\right)\right) \\
&= \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(a_{n_i}|2x_{n_i}| + (1-a_{n_i})|x_{n_i}|\right)\right) \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(a_{n_i}|2x_{n_i}|\right) + \mu_t\left((1-a_{n_i})|x_{n_i}|\right)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \varphi\left(a_{n_i}\mu_t(2|x_{n_i}|) + (1-a_{n_i})\mu_t(|x_{n_i}|)\right) \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty \left(a_{n_i}\varphi\left(\mu_t(|2x_{n_i}|)\right) + (1-a_{n_i})\varphi\left(\mu_t(|x_{n_i}|)\right)\right) \mathrm{d}t \\
&= a_{n_i}\tau\left(\varphi(|2x_{n_i}|)\right) + (1-a_{n_i})\tau\left(\varphi(|x_{n_i}|)\right) \\
&\leq a_{n_i}\sup_{n_i}\{\tau\left(\varphi(2|x_{n_i}|)\right)\} + (1-a_{n_i})(1-\varepsilon_0) \\
&\to 1-\varepsilon_0 < 1.
\end{aligned}
$$

情形 2: 如果 $\|x_n\|$ 单调下降收敛于 1 并且结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 中的子列 $\{x_{n_i}\} \subseteq \{x_n\}$ 使得 $\tau(\varphi(|x_{n_i}|)) \geq 1 + \varepsilon_0$ 成立. 假设 $\|x_{n_i}\| \leq 2$ 对所有 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立. 又由于 $\varphi \in \Delta_2$, 则存在常数 $L > 0$ 使得 $\tau(\varphi(2|x_{n_i}|)) \leq L$ 对所有 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立. 由假设我们可以得到 $0 \leq 1 - \frac{1}{\|x_{n_i}\|} \leq 1$ 及 $0 \leq 2 - \|x_{n_i}\| \leq 1$. 令 $a_{n_i} = 1 - \frac{1}{\|x_{n_i}\|}, b_{n_i} = 2 - \|x_{n_i}\|$, 则

$$0 \leq a_{n_i} + b_{n_i} = (1 - \frac{1}{\|x_{n_i}\|}) + (2 - \|x_{n_i}\|) = 3 - \left(\frac{1}{\|x_{n_i}\|} + \|x_{n_i}\|\right) \leq 1$$

对任意 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立.

因此, 再由 φ 的凸性及文献 [33] 中定理 4.4 的 (iii) 及条件 $\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right) = 1$ 对任何 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立及 $1 - \frac{1}{\|x_{n_i}\|} \to 0$ 可以得到如下矛盾:

$$
\begin{aligned}
1+\varepsilon_0 &\leq \tau(\varphi(|x_{n_i}|)) \\
&= \tau\left(\varphi\left(a_{n_i}|2x_{n_i}| + b_{n_i}\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right) \\
&= \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(a_{n_i}|2x_{n_i}| + b_{n_i}\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(a_{n_i}|2x_{n_i}|\right)+\mu_t\left(b_{n_i}\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \varphi\left(a_{n_i}\mu_t\left(|2x_{n_i}|\right)+b_{n_i}\mu_t\left(\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&\leq a_{n_i}\int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(|2x_{n_i}|\right)\right)\mathrm{d}t+b_{n_i}\int_0^\infty \varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= a_{n_i}\tau\left(\varphi\left(|2x_{n_i}|\right)\right)+b_{n_i}\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_{n_i}|}{\|x_{n_i}\|}\right)\right) \\
&\leq a_{n_i}L+b_{n_i} \\
&= \left(1-\frac{1}{\|x_{n_i}\|}\right)L+(2-\|x_{n_i}\|) \\
&\to 1.
\end{aligned}
$$

现在, 假设 $\|x_n\|\to 1$ 并且结论不成立, 则存在 $\{x_{n_{i_j}}\}\subseteq\{x_{n_i}\}\subseteq\{x_n\}$ 或者 $\|x_{n_{i_j}}\|$ 单调上升收敛于 1 或者 $\|x_{n_{i_j}}\|$ 单调下降收敛于 1, 此时可以分别由情形 1 和情形 2 得出矛盾, 这就得到了结论. □

运用文献 [33] 中的引理 3.4, 我们容易得到如下引理.

引理 3.2.3. *假设 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 对 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中任何满足 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$ 的序列 $\{x_n\}$, 如果映射 $s\to\mu_s(x)$ 在 $s=t$ 处连续, 则 $\varphi(\mu_t(x_n))\to\varphi(\mu_t(x))$ 成立或者 $\mu_t(\varphi(x_n))\to\mu_t(\varphi(x))$ 成立.*

现在我们来证明这部分的主要结论, 即如果 $\varphi\in\Delta_2$, 则 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有依测度收敛意义下的 Kadec-Klee 性质.

定理 3.2.4. *如果 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $x_n,(n=1,2,\dots)$ 及 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 则下列两个条件相互等价:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|\to 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\to\|x\|$ 且 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$.

这个定理也就是说: 当 $\varphi\in\Delta_2$ 时, $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有依测度收敛意义下的 Kadec-Klee 性质.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 如果 (1) 成了, 由范数的三角不等式我们有 $\|x_n\|\to\|x\|$. 现在我们来说明 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$. 由文献 [31] 中的引理 4.4 我们知道如下的自然嵌入 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\hookrightarrow\mathcal{M}$

是连续的. 因此, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, 我们可以得到 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$, 这就可以得到结论.

(2) $\Rightarrow$ (1). 由 φ 的凸性及文献 [33] 中引理 2.5 的 (v),(vi), 我们有

$$
\begin{aligned}
0\leq\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right) &= \varphi\left(\frac{1}{2}\mu_t(|x-x_n|)\right)\\
&\leq \varphi\left(\frac{1}{2}\left(\mu_t\left(u|x|u^*+v|x_n|v^*\right)\right)\right)\\
&= \varphi\left(\mu_t\left(\frac{u}{\sqrt{2}}|x|\frac{u^*}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}|x_n|\frac{v^*}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&\leq \varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}|x|\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right)+\mu_{\frac{t}{2}}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}|x_n|\frac{v^*}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&\leq \varphi\left(\frac{1}{2}\mu_{\frac{t}{2}}\left(|x|\right)+\frac{1}{2}\mu_{\frac{t}{2}}\left(|x_n|\right)\right]\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}\left(|x|\right)\right)+\varphi\left(\mu_{\frac{t}{2}}\left(|x_n|\right)\right)\right].
\end{aligned}
$$

因为 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$, 再由文献 [33] 中的引理 3.6 可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_t(x_n-x)=0$ 对任意 $t>0$ 成立, 再由引理 3.2.2, 假设 $\tau(\varphi(|x_n|))\to\tau(\varphi(|x|))$, 则运用 Fatou 引理及引理 3.2.3 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
0\leq\int_0^\infty\varphi\left(\mu_t\left(|x|\right)\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\mu_t\left(|x|\right)\right)-\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right)\right]\mathrm{d}t\\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty\left[\varphi\left(\mu_t\left(|x|\right)\right)-\varphi\left(\mu_t\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right)\right]\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty\varphi\left(\mu_t(|x|)\right)\mathrm{d}t-\limsup_{n\to\infty}\tau\left(\varphi\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
-\limsup_{n\to\infty}\tau\left(\varphi\left(\frac{|x-x_n|}{2}\right)\right)\geq 0,
$$

这就蕴含了 $\tau\left(\varphi\left(\frac{|x_n-x|}{2}\right)\right)\to 0$.

所以由于 $\varphi\in\Delta_2$ 则 $\|x_n-x\|\to 0$, 这就完成了本定理的证明. □

做为应用, 我们可以得到如下推论.

推论 3.2.5. 设 x_n 及 x 为 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ $(1<p<\infty)$ 中的元素. 则下列条件等价:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_p\to 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_p\to\|x\|_p$ 且 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$.

上述推论也即是说, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间当 $1<p<\infty$ 时具有依测度收敛意义下的 Kadec-Klee 性质.

结合上面的定理 3.2.4 及引理 3.2.1 我们可以得到如下推论,

推论 3.2.6. 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 且 $x_n, (n=1,2,\dots)$ 及 x 为非交换 *Orlicz* 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中满足 $x_n\xrightarrow{\tau_m}x$ 的元素, 则

(1) 非交换 *Orlicz* 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有 *LLUM* 性质.

(2) 非交换 *Orlicz* 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有 *ULUM* 性质.

由文献 [33] 中的引理 3.1 及上面引理 3.2.1 我们有如下定理,

定理 3.2.7. 设 $\varphi\in\Delta_2$. 非交换 *Orlicz* 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 具有序连续性质, 即对任何 $x\in L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 及 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)_+$ 中满足 $0\le x_n\le|x|$ 及 x_n 依测度收敛于 *0* 的序列 $\{x_n\}$, 都有 $\|x_n\|\to0$ 成立, 因此该空间为可分的 *Banach* 空间. 特别的, 非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间当 $1<p<\infty$ 时为可分的 *Banach* 空间.

§3.3 非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的对偶空间

众所周知, 泛函分析的主要研究对象是线性有界算子, 而 Banach 空间 X 的对偶空间就是 X 上全体线性有界泛函的全体, 它是线性有界算子的特殊情况. 在泛函分析的发展和应用中, 人们常把 Banach 空间与其对偶空间联系起来考虑. 而对偶理论不只在泛函分析理论本身, 而且在数学物理和近代偏微方程理论上都起到重要的作用. 由第二章的知识我们知道, 非交换 Orlicz 空间为 Banach 函数空间, 因此我们自然要考虑它的对偶空间. 本节中我们将给出非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的对偶空间及自反性的判断. 这些结论也自然是非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间对偶理论的推广.

如果 Banach 空间 $E\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$ 为真对称的, 即 $E\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$ 为对称且重排不变, 则 E 的 Köthe 对偶 $E^\times$ 以如下形式给出:

$$E^\times=\{y\in\widetilde{\mathcal{M}}:xy\in L_1(\mathcal{M}),\ \forall\ x\in E\}$$

并且如果 $x\in\widetilde{\mathcal{M}}$,

$$\|x\|_{E^\times}=\sup\{\tau(|xy|):y\in E,\|y\|_E\le1\}.\ [27]$$

下面定理给出了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的对偶空间形式.

定理 3.3.1. 如果 $\varphi\in\Delta_2$, 我们有

$$L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)^*=L_\psi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau),$$

其中 $L_\psi^o(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=(L_\psi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau),\|\cdot\|^o)$.

证明: 由文献 [28] 中的定理 5.6 及 5.11 可知, 如果一个具有重排不变且对称的 Banach 函数空间 $E(\mathcal{M})$ 具有序连续性质, 则它的 Banach 对偶 $E(\mathcal{M})^*$ 即为 $E^\times(\mathcal{M})$. 因此, 由上面定理 3.2.7, 我们可以得到结论. □

类似于经典情形, 运用定理 3.3.1 我们可以得到如下结果.

推论 3.3.2. $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 自反当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$ 且 $\psi\in\Delta_2$.

容易知道, 如果 $\varphi(x)=|x|^p$ $(1<p<\infty)$, 则 $\psi(x)=|x|^q$ 为 φ 的余函数, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 因此, 做为定理 3.3.1 的特殊例子, 我们有

(1) $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)^*=L_q(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 其中 $1<p<\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

(2) 当 $1<p<\infty$ 时, $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 自反.

特别地, 如果 $p=1$ 则 $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)^*=L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=\mathcal{M}$, 但是由于 $\mathcal{M}^*\neq L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$, 则 $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 非自反.

第四章　装球常数

§4.1　基础知识

Banach 空间几何学正向数量化方向发展, 除研究定性几何外, 还研究各种几何常数, 称为数量几何学. 装球常数即为此类几何常数之一. 装球常数是一个比较重要且有趣的几何常数, 这一常数在 Banach 空间的几何结构、等距嵌入问题、非紧性及自反性等方面的研究中起到了非常重要的作用. 自从 1950 年以来, 很多数学家都在不同的 Banach 空间中对这一常数进行了研究 [9, 44, 55, 90, 109].

本章主要研究了装球常数问题. 首先我们研究了非交换 Orlicz 函数空间装球常数问题, 类似于经典情形我们给出非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 装球常数的下界, 同时我们证明了 $L_1(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 与 $L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的装球常数都是 $\frac{1}{2}$. 其次, 本章中我们还研究了 Cesàro-Orlicz 序列空间中的装球常数问题, 给出了这一空间装球常数的两个计算公式. 最后, 在本章中我们还定义了 BK 序列空间中的一个新常数.

这章中我们总是用 X 表示 Banach 空间, $B(X)$ 及 $S(X)$ 分别表示 X 上的单位球和单位球面. 下面我们首先给出 Banach 空间中装球常数的概念.

定义 4.1.1. ([55]) 在 Banach 空间 X 中, 我们称以 $x_1, x_2, \cdots$ 为心 $r>0$ 为半径的一族球被装在单位球内, 如果下面两个条件成立:

(1) $\|x_n\| \le 1-r,\ n=1,2,\cdots,$

(2) $\|x_n - x_m\| \ge 2r,\ n\ne m,\ n,m=1,2,\cdots.$

上述定义的另一种表述就是: 当 $P(X)\le r$ 时, 则 $B(X)$ 可以包含无限多个两两不交且以 r 为半径的球, 而且当 $P(X)>r$ 时, $B(X)$ 只能包含有限多个球. 对于二维空间和三维空间装球常数问题可见下图:

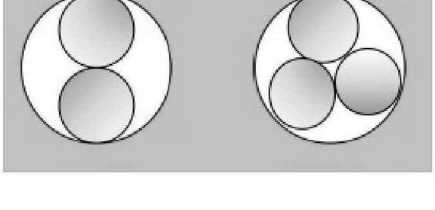


图 4.1　二维平面

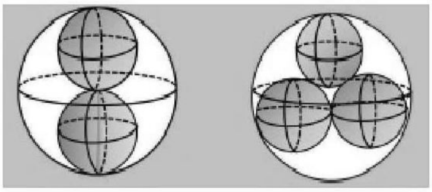


图 4.2 三维空间

显然, 如果 X 的维数 $\dim X = n < +\infty$ 则 $r = 0$, 因此我们只考虑 $\dim X = +\infty$ 的情况.

19 世纪 50年代, J. A. Burlak, R. A. Rankin 和 A. P. Robertson [9] 给出了 Banach空间 X 中如下关于装球常数的计算公式:

$$P(X) = \sup\{r > 0 : \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X), \|x_n\| \leq 1 - r,$$
$$\|x_n - x_m\| \geq 2r,\ n \neq m\}.$$

Kottman [55] 证明了

$$P(X) = \frac{D(X)}{2 + D(X)},$$

其中 $D(X) = \sup\{\mathrm{sep}(\{x_n\}) : \{x_n\} \subset S(X)\}$ 且 $\mathrm{sep}(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\}$. 同时对任何无限维 Banach 空间 X 他也给出了如下不等式:

$$\frac{1}{3} \leq P(X) \leq \frac{1}{2}.$$

本章中的前两节内容具体可参见文献[74].

§4.2 Cesàro-Orlicz 序列空间中的装球常数及计算公式

做为 Cesàro 序列空间的推广, Cesàro-Orlicz 序列空间首先由 [65] 在 1988 年提出, 自此有很多的数学工作者对这一空间进行了研究 [34, 35, 58, 72, 73, 96]. 这一节中, 我们首先考虑 Cesàro-Orlicz 序列空间中的装球常数问题并给出两个计算公式, 本节最后我们还会介绍一个新的常数 $\widetilde{D}(X)$. 值得注意的是, 虽然本节所研究的 Cesàro 序列空间是交换的, 但是对这一序列空间的研究有助于以后对非交换 Orlicz 序列空间几何性质的研究.

我们首先给出 Cesàro-Orlicz 序列空间的相关概念.

设 l^0 为所有实序列 $x=(x(i))_{i=1}^{\infty}$ 组成的集合.

我们定义 Orlicz 序列空间如下:

$$l_{\varphi}=\{x\in l^0:\rho_{\varphi}(\lambda x)<\infty,\ \exists\,\lambda>0\},$$

其中 $\rho_{\varphi}(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(|x(i)|)$.

我们知道如果在 l_{φ} 上赋予如下的 Luxemburg 范数,

$$\|x\|_{\varphi}=\inf\left\{\lambda>0,\ \rho_{\varphi}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$$

即成为 Banach空间 [13].

同样对于 Orlicz函数 φ, 我们可以定义 l^0 上的凸模 [80, 71]

$$\rho_{ces_{\varphi}}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|\right).$$

我们称空间

$$ces_{\varphi}=\{x\in l^0:\rho_{ces_{\varphi}}(\lambda x)<\infty,\ \exists\,\lambda>0\},$$

为 Cesàro-Orlicz 序列空间. 对这一空间也赋予如下的 Luxemburg 范数

$$\|x\|_{ces_{\varphi}}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{ces_{\varphi}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leq 1\right\}.$$

注意到如果 $\varphi(u)=|u|^p, 1\leq p<\infty$, 则空间 ces_{φ} 即为 Cesàro 序列空间 ces_p [18, 19, 62] 而且 Luxemburg 范数即为如下的形式:

$$\|x\|_{ces_p}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

我们称 l^0 的子空间 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Köthe 序列空间, 如果下列两个条件成立:

(1) 对任何 $x\in l^0$ 及 $y\in X$ 使得对任意 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $|x(i)|\leq|y(i)|$ 成立, 我们有 $x\in X$ 且$\|x\|\leq\|y\|$;

(2) 对所有 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $x\in X$ 且 $x(i)\neq 0$.

任何非平凡的 Cesàro-Orlicz 序列空间都属于 Köthe 序列空间 [20].

我们称 Köthe 序列空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的元素 x 为序连续的如果对 X_+ (X 中的正锥)中的任何序列 $\{x_n\}$, 若 $i, n \in \mathbb{N}$, $x_n(i) \le |x(i)|$ 及 x_n 依坐标收敛于 0, 有 $\|x_n\| \to 0$ 成立.

我们称 Köthe 序列空间 X 为序连续的如果任何 $x \in X$ 都序连续. 容易验证 X 序连续当且仅当对任何 $x \in X$, 当 $n \to \infty$ 时 $\|(0, \ldots 0, x(n+1), x(n+2), \ldots)\| \to 0$ 成立. 由文献 [20] 可知 Cesàro-Orlicz 序列空间序连续.

我们称 Köthe 序列空间 X 具有 Fatou 性质, 如果对 X_+ 中的任何序列 $\{x_n\}$ 及 $x \in l^0$ 且 x_n 依坐标收敛于 x 及 $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$, 都有 $x \in X$ 且 $\|x_n\| \to \|x\|$. 由文献 [70] 可知, 任何具有 Fatou 性质的 Köthe 序列 (函数) 空间都是完备的. 由文献 [20] 我们知道 ces_φ 序列空间在 Luxemburg 范数下具有 Fatou 性质, 因此为 Banach 空间.

受 Orlicz 序列空间中装球常数问题得到启发 [13], 我们将在本节中首先考虑 Cesàro-Orlicz序列空间中当 $x \in S(ces_\varphi)$ 时的一个常数 d_x.

引理 4.2.1. 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$ 且对任何 $x \in S(ces_\varphi)$, 都存在唯一的 $d_x > 0$ 使得下式成立

$$\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{d_x}\right) = \frac{1}{2}.$$

证明: 对任何固定的 $x \in S(ces_\varphi)$, 由于 φ 为连续函数可知

$$f(k) = \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{k}\right),\ k \in (0, +\infty)$$

亦为连续函数.

因此, 由 Orlicz 函数 φ 的定义, 我们可以得到 $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = 0$ 及 $\lim\limits_{k \to 0^+} f(k) = +\infty$.

注意到 $\varphi \in \Delta_2(0)$ 且 $x \in S(ces_\varphi)$, 由文献 [20] 中的引理 2.5 可知, 条件 $\|x\|_{ces_\varphi} = 1$ 蕴含了

$$f(1) = \rho_{ces_\varphi}(x) = 1.$$

因此, 存在一 $k \in (0, +\infty)$ 使得 $\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{2}$. 运用函数 φ 的单调性, 由 x 所确定的数 k 是唯一的, 我们记为 d_x. □

下面我们定义

$$d = \sup\{d_x : x \in S(ces_\varphi)\},$$

并研究这一常数与 ces_φ 中装球常数之间的关系.

引理 4.2.2. *假设 φ 为 Orlicz 函数. 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则$1 < d_x \leq 2$ 且有 $1 < d \leq 2$.*

证明: 因为 $x \in S(ces_\varphi)$, 所以由文献 [20] 中的引理 2.5 可知 $d_x \neq 1$, 而且由于 φ 在区间 $[0, \infty)$ 中的非减性可知 $d_x > 1$.

对任何 $x \in S(ces_\varphi)$, 由于 φ 为凸函数及 $d_x > 1$, 我们有

$$\frac{1}{2} = \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{d_x}\right) \leq \frac{1}{d_x}\rho_{ces_\varphi}(x) = \frac{1}{d_x},$$

这也意味着 $d_x \leq 2$.

由 d 的定义我们可以得到结论. □

下面我们证明对任何 Cesàro-Orlicz 序列空间, 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则 $D(ces_\varphi) = d$.

定理 4.2.3. *对任何 Cesàro-Orlicz 序列空间:*

(1) 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则 $D(ces_\varphi) = d$, i.e., $P(ces_\varphi) = \frac{d}{2+d}$,

(2) 如果 $\varphi \notin \Delta_2(0)$, 则 $D(ces_\varphi) = 2$, i.e., $P(ces_\varphi) = \frac{1}{2}$.

证明: (1) 由文献 [19] 中的定理 1 及文献 [20] 中的引理 1 可知: 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 对任何 Cesàro-Orlicz 序列空间 ces_φ,

$$D(ces_\varphi) = \sup\left\{\mathrm{sep}(\{x_n\}) : x_n = \sum_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} x_n(i)e_i \in S(ces_\varphi)\right\},$$

其中 $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots$.

对这些 x_n 及 x_m,由上面引理可知存在 $d_{x_n}, d_{x_m} \in (1, 2]$ 使得

$$\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n}{d_{x_n}}\right) = \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_m}{d_{x_m}}\right) = \frac{1}{2}.$$

给定足够小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $d - \varepsilon_1 \geq \max\{d_{x_n}, d_{x_m}\} > 0$ 其中 $m \neq n$. 再由文献 [20] 中引理 2.3, 存在 $\delta(L, \varepsilon) > 0$ 使得

$$|\rho_{ces_\varphi}(x + y) - \rho_{ces_\varphi}(y)| < \varepsilon$$

对所有 $x, y \in ces_\varphi$ 且 $\rho_{ces_\varphi}(x) \leq L$ 及 $\rho_{ces_\varphi}(y) \leq \delta(L, \varepsilon)$成立.

取 $n \in \mathbb{N}$ 足够大使得

$$\sum_{k=i_{m-1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{a_n}{kd_{x_m}}\right) < \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' > 0$ 足够小且 $a_n = \sum\limits_{i=1}^{i_n} |x_n(i)|$.

由于 $\mathrm{suupp}x_n \cap\ \mathrm{suupp}x_m = \varnothing$, 对任何 $m > n$ 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n - x_m}{d-\varepsilon_1}\right) &= \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n + x_m}{d-\varepsilon_1}\right) \\
&= \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{d_{x_n}}{d-\varepsilon_1}\cdot\frac{x_n}{d_{x_n}} + \frac{d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\frac{x_m}{d_{x_m}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{i_{m-1}} \varphi\left(\frac{d_{x_n}}{d-\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{x_n(i)}{d_{x_n}}\right|\right) \\
&+ \sum_{k=i_{m-1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{a_n}{d_{x_m}} + \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{x_m(i)}{d_{x_m}}\right|\right)\right) \\
&\leq \frac{d_{x_n}}{d-\varepsilon_1}\cdot\sum_{k=1}^{i_{m-1}} \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{x_n(i)}{d_{x_n}}\right|\right) \\
&+ \frac{d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\sum_{k=i_{m-1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\left(\frac{a_n}{d_{x_m}} + \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{x_m(i)}{d_{x_m}}\right|\right)\right) \\
&\leq \frac{d_{x_n}}{d-\varepsilon_1}\cdot\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n}{d_{x_n}}\right) + \frac{d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\left(\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_m}{d_{x_m}}\right) + \varepsilon'\right) \\
&= \frac{d_{x_n}}{d-\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&\leq \frac{d_{x_n}+d_{x_m}}{d-\varepsilon_1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&\leq \frac{2d}{d-\varepsilon_1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&= \frac{d}{d-\varepsilon_1}\cdot(1+2\varepsilon') \\
&= \left(1+\frac{\varepsilon_1}{d-\varepsilon_1}\right)\cdot(1+2\varepsilon') \\
&= 1+\varepsilon'',
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon'' = 2\varepsilon' + \frac{\varepsilon_1}{d-\varepsilon_1} + 2\frac{\varepsilon_1\varepsilon'}{d-\varepsilon_1} > 0$.

因此, 由 Luxemburg 范数的定义我们知道对任何 $n \neq m$, 由 $\varepsilon_1 > 0$ 的任意性可知 $\|x_n - x_m\| \geq d - \varepsilon_1$, *i.e.*, $D(ces_\varphi) \geq d$.

下面我们证明相反的不等式. 对上述 ε', 给定足够小的 ε_2 $\varepsilon_2 > 2\varepsilon' d$, 则 $\varepsilon_2 > 0$. 与

第一步相类似, 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n - x_m}{d+\varepsilon_2}\right) &= \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n + x_m}{d+\varepsilon_2}\right) \\
&= \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{d_{x_n}}{d+\varepsilon_2}\cdot\frac{x_n}{d_{x_n}} + \frac{d_{x_m}}{d+\varepsilon_2}\cdot\frac{x_m}{d_{x_m}}\right) \\
&\leq \frac{d_{x_n}}{d+\varepsilon_2}\cdot\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_n}{d_{x_n}}\right) + \frac{d_{x_m}}{d+\varepsilon_2}\cdot\left(\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x_m}{d_{x_m}}\right)+\varepsilon'\right) \\
&= \frac{d_{x_n}}{d+\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{d_{x_m}}{d+\varepsilon_2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&\leq \frac{d_{x_n}+d_{x_m}}{d+\varepsilon_2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&\leq \frac{2d}{d+\varepsilon_2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right) \\
&= \frac{d}{d+\varepsilon_2}\cdot(1+2\varepsilon') \\
&= \left(1-\frac{\varepsilon_2}{d+\varepsilon_2}\right)\cdot(1+2\varepsilon') \\
&= 1-\varepsilon'',
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_2}{d+\varepsilon_2}(2\varepsilon'+1) - 2\varepsilon'$ 且由于 $\varepsilon_2 > 2\varepsilon' d$ 可知 $\varepsilon'' > 0$.

再由 Luxemburg 范数定义, 对任何 $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \leq d+\varepsilon_2$.

由 $\varepsilon_2 > 0$ 的任意性, 我们可以得到 $D(ces_\varphi) \leq d$, 因此 $D(ces_\varphi) = d$, *i.e.*, $P(ces_\varphi) = \frac{d}{2+d}$.

(2) 由文献 [44] 及文献 [72] 中的推论 1, 我们知道如果 $\varphi \notin \Delta_2(0)$, 则 ces_φ 非自反且 $D(ces_\varphi) = 2$. □

由上面引理我们知道对任何不同的 $x \in S(ces_\varphi)$ 都存在唯一不同的 d_x 满足下面关系 $\rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{d_x}\right) = \frac{1}{2}$. 下面定理说明对不同的 $x, y \in S(ces_\varphi)$, $d_x = d_y$.

定理 4.2.4. *假设 Orlicz 函数 $\varphi \in \Delta_2(0)$ 且,*

$$\varphi(\lambda x) = f(\lambda)\varphi(x),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+$ 且 $f(\cdot)$ 连续且可逆, 则对任何 $x \in S(ces_\varphi)$,

$$D(ces_\varphi) = \frac{1}{f^{-1}(\frac{1}{2})}.$$

证明: 首先我们确定 $f^{-1}(\frac{1}{2}) \neq 0$. 而且, 如果 $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, 则由于 $f(\cdot)$ 可逆可知 $f(0) = \frac{1}{2}$.

对任何 $x \in S(ces_\varphi)$,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \varphi(x) = 0,$$

则由 φ 的定义可知 $x = 0$, 这就与 $x \in S(ces_\varphi)$ 矛盾.

由上面定理可知, 对任何 $x \in S(ces_\varphi)$, 取

$$\begin{aligned} \rho_{ces_\varphi}\left(\frac{x}{d_x}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\left|\frac{x(j)}{d_x}\right|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{d_x} \cdot \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|\right) \\ &= f\left(\frac{1}{d_x}\right)\sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|\right) \\ &= f\left(\frac{1}{d_x}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此 $d_x = \frac{1}{f^{-1}(\frac{1}{2})}$ 且 $d = d_x$ 由$x \in S(ces_\varphi)$ 的任意性, 这就意味着 $D(ces_\varphi) = \frac{1}{f^{-1}(\frac{1}{2})}$.

□

现在对 Cesàro-Orlicz 序列空间, 根据上面定理我们很容易计算装球常数. 我们首先看看下面的例子.

例子 4.2.5. 如果 φ 为 Lebesgue N-函数: $\varphi(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $1 < p < \infty$, 则

$$D(X) = 2^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 显然 $\varphi(u) \in \Delta_2(0)$, 且

$$\varphi(\lambda u) = \frac{|\lambda u|^p}{p} = |\lambda|^p \cdot \frac{|u|^p}{p} = |\lambda|^p \cdot \varphi(u),$$

则 $f(\lambda) = |\lambda|^p$.

因此, 我们有

$$D(X) = \frac{1}{f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

□

下面我们将给出计算装球常数的第二个公式. 下面通过 $C(ces_\varphi)$ 我们记

$$\sup\{\inf \rho_{ces_\varphi}(x_n - x_m),\ m \neq n\},$$

其中 $x_n = \sum\limits_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} \in S(ces_\varphi)$, 且 $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots$.

定理 4.2.6. 如果 $\varphi \in \Delta_2(0)$, 则

$$C(ces_\varphi) = 2.$$

证明: 对任何 $a,\ b \in \mathbb{R}_+$, 运用 φ 的凸性我们有下面的不等式

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi(b).$$

由于 $\mathrm{supp} x_n \bigcap\ \mathrm{supp} x_m = \emptyset\ (n \neq m)$, 我们有

$$\rho_{ces_\varphi}(x_n - x_m) = \rho_{ces_\varphi}(x_n + x_m) \geq \rho_{ces_\varphi}(x_n) + \rho_{ces_\varphi}(x_m) = 2.$$

另一方面, 由文献 [20] 中引理 2.3 可知, 对固定的 $\varepsilon > 0$, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x(i)|\right) \leq 1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|y(i)|\right) < \delta$ 的时候,

存在 $\delta > 0$ 使得

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x(i)+y(i)|\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x(i)|\right)\right| < \varepsilon,$$

取 $n_1 \in \mathbb{N}$ 足够大使得 $\sum\limits_{k=i_{n_1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{a_1}{k}\right) < \varepsilon$. 因此对任何 $m > n$,

$$\begin{aligned}
\rho_{ces_\varphi}(x_m - x_1) &= \rho_{ces_\varphi}(x_m + x_1) \\
&= \sum_{k=1}^{i_{m-1}} \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x_1(i)|\right) \\
&+ \sum_{k=i_{m-1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\left(a_1 + \sum_{i=1}^{k}|x_m(i)|\right)\right) \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x_1(i)|\right) \\
&+ \sum_{k=i_{m-1}+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x_m(i)|\right) + \varepsilon \\
&= \rho_{ces_\varphi}(x_1) + \rho_{ces_\varphi}(x_m) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$= \quad 2+\varepsilon.$$

重复上面的步骤, 我们有

$$\inf \rho_{ces_\varphi}(x_n - x_m) \leq 2+\varepsilon,\, m \neq n.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们得到

$$\sup\{\inf \rho_{ces_\varphi}(x_n - x_m) : m \neq n\} = 2,$$

因此 $C(ces\varphi) = 2$. □

注 4.2.7. 由上面的定理可知, 由范数和模之间的关系我们可以通过 $C(X)$ 计算 $D(X)$.

下面我们再次计算 $D(ces_p)$.

例子 4.2.8. 我们已经知道 $\varphi(u) = |u|^p$, 则空间 ces_φ 即为 Cesàro 序列空间 ces_p. 对任何 $x \in ces_p$, 由于

$$\|x\|_{ces_p}^p = \|x\|_{ces_\varphi}^p = \rho_{ces_\varphi}(x),$$

由上面定理可知

$$D(ces_\varphi) = C^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

§4.3 BK 序列空间中的一个新常数

我们从非零空间 X 为实序列空间, 如果 X 为线性空间且 $X \subset l^0$. 如果 X 为序列空间, 对任何 $k \in \mathbb{Z}_+$, 我们称映射 $p_k : X \to \mathbb{R}$ 为坐标映射, 如果

$$p_k(x) = x_k,\, x = \{x_k\} \in X.$$

我们称序列空间 X 具有 K 性质如果任何 p_k 为连续映射. 我们称序列空间 X 为 BK 序列空间如果其为具有 K 性质的 Banach 空间.

下面我们列举一些经典的序列空间如下:

例子 4.3.1. (1) $c_0=\left\{x\in l^0:\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=0\right\}$, $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$.

(2) $l_p=\left\{x\in l^0:\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\},1\le p<\infty\right\}$, $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(3) $l^\infty=\left\{x\in l^0:\sup\limits_k|x_k|<\infty\right\}$, $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$.

(4) $c=\left\{x\in l^0:\lim\limits_{k\to+\infty}x_k<\infty\right\}$, $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$.

(5) $ces_p=\left\{x\in l^0:\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}<\infty,1<p<\infty\right\}$, $\|x\|^p=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sigma x(n))^p$, 其中 $\sigma x(n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

由文献 [112] 可知上面的例子都是 BK 序列空间.

特别地, 实可分的 Hilbert 序列空间为 BK 空间.

在 BK 序列空间 X 中我们记 $e_n=(0,0,\cdots,\overbrace{1}^{nth},0,\cdots)$. 一般情况下, $\|e_n\|\neq1$, 但是 $\|s_n\|=\left\|\frac{e_n}{\|e_n\|}\right\|=1$, *i.e.*, $s_n\in S(X)$. 下面我们将考虑一个新的几何常数, 这个常数看起来和装球常数有些相似. 下面我们用 $\widetilde{D}(X)$ 来表示

$$\sup\{\mathrm{sep}(\{s_n\})\},\ n=1,2,\ldots,$$

其中 $\mathrm{sep}(\{s_n\})=\inf\{\|s_n-s_m\|:n\neq m\}$.

显然 $\widetilde{D}(X)\le D(X)$. 接下来, 我们来计算上面例子中的 $\widetilde{D}(X)$.

例子 4.3.2. 对任何 $p\in(1,\infty)$, 下面公式成立

$$\widetilde{D}(ces_p)=D(ces_p)=2^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 对 $s_n=\frac{e_n}{\|e_n\|},n=1,2,\cdots$ 和 $e_n=(0,0,\cdots,\overbrace{1}^{nth},0,\cdots)$, 显然 $s_n\in S(ces_p)$.

当 $m=1$ 时, 不失一般性我们假设 $n>m$. 则我们有

$$\begin{aligned}\|s_n-s_1\|^p &= \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\|e_1\|}\right)^p+\sum_{m=n}^{\infty}\left[\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{\|e_1\|}+\frac{1}{\|e_n\|}\right)\right]^p\\ &= \left(\frac{1}{\|e_1\|}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^p}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{\|e_1\|}+\frac{1}{\|e_n\|}\right)^p\cdot\left(\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{\|e_1\|^p}\cdot(\|e_1\|^p-\|e_n\|^p)+\left(\frac{1}{\|e_1\|}+\frac{1}{\|e_n\|}\right)^p\cdot\|e_n\|^p\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|e_1\|^p}{\|e_1\|^p} - \frac{\|e_n\|^p}{\|e_1\|^p} + \left[\left(\frac{1}{\|e_1\|} + \frac{1}{\|e_n\|}\right) \cdot \|e_n\|\right]^p \\
&= 1 - \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_1\|}\right)^p + \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_1\|} + 1\right)^p.
\end{aligned}
$$

定义 $t = \frac{\|e_n\|}{\|e_1\|}$, 则由于 $0 < \|e_n\| < \|e_1\|$ 可得到 $t \in (0,1)$.

下面, 对连续函数 $f(t) = 1 - t^p + (1+t)^p,\ p > 1$, 我们有

$$
f'(t) = -p \cdot t^{p-1} + p \cdot (1+t)^{p-1} = p \cdot [(1+t)^{p-1} - t^{p-1}] \geq 0,
$$

因此, $f(t) \geq f(0) = 2$ 且 $\|s_n - s_1\|^p \geq 2$, 当然有 $\inf \|s_n - s_1\| \geq 2^{\frac{1}{p}}$成立.

另一方面, 注意到 $\|e_n\| \to 0\,(n \to \infty)$ 且对任何 $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\|s_n - s_1\|^p &= 1 - \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_1\|}\right)^p + \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_1\|} + 1\right)^p \\
&< 1 + \left(1 + \frac{\|e_n\|}{\|e_1\|}\right)^p \to 1 + (1+\varepsilon)^p \ \ (n \to \infty),
\end{aligned}
$$

$i.e.$, $\inf \|s_n - s_1\|^p < (2+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$.

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们可以得到

$$
\sup\{\inf \|s_n - s_1\| : n \neq 1\} = 2^{\frac{1}{p}}.
$$

当 $m = 2$ 时,

$$
\begin{aligned}
\|s_n - s_2\|^p &= \sum_{m=2}^{n-1} \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\|e_2\|}\right)^p + \sum_{m=n}^{\infty} \left[\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{\|e_2\|} + \frac{1}{\|e_n\|}\right)\right]^p \\
&= \left(\frac{1}{\|e_2\|}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \cdots + \frac{1}{(n-1)^p}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{\|e_2\|} + \frac{1}{\|e_n\|}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{\|e_2\|^p} \cdot (\|e_2\|^p - \|e_n\|^p) + \left(\frac{1}{\|e_2\|} + \frac{1}{\|e_n\|}\right)^p \cdot \|e_n\|^p \\
&= \frac{\|e_2\|^p}{\|e_2\|^p} - \frac{\|e_n\|^p}{\|e_2\|^p} + \left[\left(\frac{1}{\|e_2\|} + \frac{1}{\|e_n\|}\right) \cdot \|e_n\|\right]^p \\
&= 1 - \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_2\|}\right)^p + \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_2\|} + 1\right)^p.
\end{aligned}
$$

类似于上面的步骤, 我们可以得到

$$
\sup\{\inf \|s_n - s_2\| : n \neq 1\} = 2^{\frac{1}{p}}.
$$

再重复上面的步骤, 对任何 $m \geq 3$, $m \neq n$,

$$\sup\{\inf\{\|s_n - s_m\| : n \neq m\} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

因此, $\widetilde{D}(ces_p) = D(ces_p) = 2^{\frac{1}{p}}$ 这样就得到了结论. $\square$

例子 4.3.3. 对任何 $p \in (1, \infty)$ 下面的公式成立:

$$\widetilde{D}(l_p) = D(l_p) = 2^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 对 l_p 空间, 其中 $p \in (1, \infty)$, 我们有 $\|e_n\| = 1$, 因此 $s_n = e_n$. 由于对任何 $n \neq m$,

$$\sup\{\inf\{\|s_n - s_m\| : n \neq m\} = \|s_n - s_m\| = 2^{\frac{1}{p}}.$$

因此, $\widetilde{D}(l_p) = D(l_p) = 2^{\frac{1}{p}}$. $\square$

例子 4.3.4. 对任何可分的 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$, 下式成立:

$$\widetilde{D}(\mathbb{H}) = D(\mathbb{H}) = \sqrt{2}.$$

证明: 由于序列 $e_n = (0, 0, \cdots, \overbrace{1}^{nth}, 0, \cdots)$, $n \in \mathbb{N}$ 为 $\mathbb{H}$ 中的正交基, 因此

$$\sup\{\inf \|s_n - s_m\| : n \neq m\} = \|s_2 - s_1\| = \sqrt{2}.$$

所以

$$\widetilde{D}(\mathbb{H}) = D(\mathbb{H}) = \sqrt{2}.$$

$\square$

注 4.3.5. 由上面的例子 1-3 我们可以看到对这些 BK 序列空间 $\widetilde{D}(X) = D(X)$. 如果该等式对任何 BK 序列空间都成立, 则我们会很容易计算出装球常数. 不幸的是, 由下面几个例子可以看书对某些 BK 序列空间而言该等式却不成了.

例子 4.3.6. $D(c_0) = 2$ 且 $\widetilde{D}(c_0) = 1$.

证明: 由于 c_0 非自反, 由文献 [44] 可知 $P(c_0)=\frac{1}{2}$, $i.e.$, $D(c_0)=2$. 由于 $\|e_n\|=1$ 蕴含了 $s_n=e_n$, 因此对任何 $n\neq m$,

$$\sup\{\inf\|s_n-s_m\|:n\neq m\}=\|s_n-s_m\|=1.$$

所以, $\widetilde{D}(c_0)=1\neq D(c_0)$. □

例子 4.3.7. $D(l^\infty)=2$ 且 $\widetilde{D}(l^\infty)=1$.

证明: 类似于上面的 4 例, 我们同样有

$$\sup\{\inf\|s_n-s_m\|:n\neq m\}=\|s_n-s_m\|=1.$$

则 $\widetilde{D}(l^\infty)=1\neq D(l^\infty)$, 又由于 l^∞ 非自反且由文献 [44] 可知 $D(l^\infty)=2$. □

显然上面例 1-3 中的 BK 序列空间都为自反空间且具有 Schauder 基, 然而例 4 非自反例 5 没有 Schauder 基. 因此我们自然会想到下面的问题.

注 4.3.8. 我们知道对任何 BK 序列空间而言 $\widetilde{D}(X)\leq D(X)$. 然而当该 BK 序列空间为自反的且具有 Schauder 基时是不是一定有 $\widetilde{D}(X)=D(X)$ 成立呢? 这是我们接下来要考虑的问题.

§4.4 非交换 Orlicz 空间中装球常数的下界估计

本节我们主要研究非交换 Orlicz 空间中装球常数问题. 我们给出了自反非交换 Orlicz 空间中装球常数的下界估计, 证明了非自反非交换 Orlicz 空间中装球常数为 $\frac{1}{2}$. 文献 [69] 中已经证明了下面的引理

引理 4.4.1. (1) $\varphi\in\Delta_2$ 当且仅当 $\sup\left\{\frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)}:0<u<\infty\right\}<\infty$;
(2) $\varphi\in\nabla_2$ 当且仅当 $\inf\left\{\frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)}:0<u<\infty\right\}>2$.

类似于经典情形, 我们首先引入下面两个指标函数.

定义 4.4.2. 若 φ 为 Orlicz 函数, x 为无界算子, 则我们可以定义下面两个指标函数:

$$\alpha_\varphi=\inf_{t<\infty}\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_t(2x)\right)};$$

$$\beta_{\varphi}=\sup_{t<\infty}\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_t(2x)\right)}.$$

容易知道, 对任何 Orlicz 函数 φ, 给定无界算子 x, 则 $\alpha_{\varphi}\geq\frac{1}{2}$ 而且$\beta_{\varphi}\leq 1$.

定理 4.4.3. *若 φ 为 Orlicz 函数, x 为无界算子. 则我们有*

(1) $\varphi\in\Delta_2$ *当且仅当* $\beta_{\varphi}<1$;

(2) $\varphi\in\nabla_2$ *当且仅当* $\alpha_{\varphi}>\frac{1}{2}$.

证明: (1) 若 $\varphi\in\Delta_2$, 则存在常数 $K>2$ 及 $v\geq 0$ 有 $\varphi(2v)\leq K\varphi(v)$. 因此, 令 $0<\delta=\frac{1}{K-1}<1$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi\left((1+\delta)v\right)&\leq(1-\delta)\varphi\left(v\right)+\delta\varphi\left(2v\right)\\&\leq(1-\delta+K\delta)\varphi\left(v\right)\\&=2\varphi\left(v\right).\end{aligned}$$

上式中令 $v=\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)\geq 0$, 我们有

$$(1+\delta)\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)\leq\varphi^{-1}\left(2\mu_t(x)\right)$$

因此, 我们可以得到 $\beta_{\varphi}\leq\frac{1}{1+\delta}<1$.

如果 $\varphi\notin\Delta_2$, 则由文献 [13] 中定理 1.13 可知, 存在 $1\leq v_n$ 单调上升趋近于 ∞ 使得

$$\varphi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)v_n\right)>2^n\varphi(v_n)>2\varphi(v_n)\ \ (n\geq 1).$$

令 $\varphi(v_n)=\mu_t(x)$ 代入上式,则有

$$1>\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(2\mu_t(x)\right)}>\frac{n}{1+n},$$

因此,我们可以得到 $\beta_{\varphi}=1$.

综上可知, $\varphi\in\Delta_2$ 当且仅当 $\beta_{\varphi}<1$.

(2) 若 $\varphi\in\nabla_2$, 则由文献 [91] 中定理 2 可知 φ 的余函数 $\psi\in\Delta_2$, 所以存在 $0<\delta<1$ 使得当 $v\geq 0$ 时, $\psi\left((1+\delta)\right)\leq 2\psi(v)$. 而且由文献 [89] 可知 $2\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\leq\varphi\left(\frac{\omega}{1+\delta}\right)$, 令 $x=\frac{\omega}{2}, a=\frac{2\delta}{1+\delta}$, 我们有

$$2\varphi(x)\leq\varphi\left((2-a)x\right),x\geq 0.$$

在上式中我们令 $x=\varphi^{-1}(\mu_t(x))$, 则我们可以得到 $\varphi^{-1}(2\mu_t(x))\le(2-a)\varphi^{-1}(\mu_t(x))$, 因此得到 $\frac{1}{2}<\frac{1}{2-a}\le\alpha_\varphi$.

如果 $\varphi\notin\nabla_2$, 则存在 $u_n\uparrow\infty$ 使得

$$\varphi(2u_n)<(2+\frac{1}{n})\varphi(u_n).$$

又由 φ 的凸性可知, $\varphi(2u_n)\ge 2\varphi(u_n)$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(u_n)}{\varphi(2u_n)}=\frac{1}{2}.$$

在上式中令 $\mu_t(x)=\frac{1}{2}\varphi(2u_n)$, 则

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi^{-1}(\mu_t(x))}{\varphi^{-1}(2\mu_t(x))}=\frac{1}{2}.$$

事实上, 如果上式不成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得下式成立:

$$\frac{\varphi^{-1}(\mu_t(x))}{\varphi^{-1}(2\mu_t(x))}>\frac{1}{2-\varepsilon_0},$$

因此,

$$\begin{aligned}\varphi(u_n) &< \varphi\left(\frac{2-\varepsilon_0}{2}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi(2u_n)\right)\right)\\ &< \frac{2-\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{1}{2}\varphi(2u_n)\\ &= \frac{2-\varepsilon_0}{4}\varphi(2u_n)\end{aligned}$$

这就与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi(u_n)}{\varphi(2u_n)}=\frac{1}{2}$ 矛盾.

所以, 综上所述 $\varphi\in\nabla_2$ 当且仅当 $\alpha_\varphi>\frac{1}{2}$. □

定理 4.4.4. *若 φ 为 Orlicz 函数, 则*

$$\max\left\{\frac{1}{\alpha_\varphi},\ 2\beta_\varphi\right\}\le D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)$$

或

$$\max\left\{\frac{1}{1+2\alpha_\varphi},\ \frac{1}{1+(\beta_\varphi)^{-1}}\right\}\le P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right).$$

证明: 由 α_φ 的定义, 对任意 $\varepsilon>0$ 及无界算子 x, 存在 t_0 使得

$$\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)}<\alpha_\varphi+\varepsilon$$

或

$$\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)}>\frac{1}{\alpha_\varphi+\varepsilon}.$$

考虑两两正交的投影算子族 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 且满足 $\tau(e_i)=\frac{1}{\mu_{t_0}(2x)}$, 若 $x_i=\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)e_i\right), i=1,2,\cdots$, 则 $\|x_i\|=1$ 且由上式可得, 对 $i\neq j$ 有,

$$\begin{aligned}
\tau\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)(x_i-x_j)\right] &= \tau\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)x_i-(\alpha_\varphi+\varepsilon)x_j)\right] \\
&= \tau\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)(e_i-e_j)\right] \\
&= \varphi\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)\right]\left[\tau(e_i)+\tau(e_j)\right] \\
&= \frac{\varphi\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)\right]}{\mu_{t_0}(x)} \\
&= \frac{\varphi\left[(\alpha_\varphi+\varepsilon)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)\right]}{\varphi\left[\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)\right]} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

所以, $\|x_i-x_j\|>\frac{1}{\alpha_\varphi+\varepsilon}$, 这就得到了 $\frac{1}{\alpha_\varphi}\leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)$.

另一方面, 取 $0<\varepsilon<1$, 由 β_φ 的定义可知, 存在 t_0 使得

$$\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)}>\beta_\varphi-\frac{\varepsilon}{2}.$$

考虑两两正交的投影算子族 $\{e_k^{(i)}\}_{k=1}^{2^i}$, 令 $x_i=\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)R_i$, 其中 $R_i=\sum\limits_{k=1}^{2^i}(-1)^{k+1}e_k^{(i)}$ 且 $\tau\left(e_k^{(i)}\right)=\frac{1}{2^i\mu_{t_0}(x)}, 1\leq k\leq 2^i$, 显然

$$\tau\left(\bigvee_{k=1}^{2^i}e_k^{(i)}\right)=\frac{1}{\mu_{t_0}(x)},$$

则 $\|x_i\|=1$ 且由上式可得, 对 $i\neq j$ 有,

$$\begin{aligned}
\tau\left[\left(\frac{1}{2\beta_\varphi-\varepsilon}\right)(x_i-x_j)\right] &= \tau\left[\left(\frac{1}{2\beta_\varphi-\varepsilon}\right)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)(R_i-R_j)\right] \\
&= \varphi\left[\left(\frac{1}{2\beta_\varphi-\varepsilon}\right)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)\right]\left[\tau\left(R_i\right)+\tau\left(R_i\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varphi\left[\left(\frac{1}{2\beta_\varphi-\varepsilon}\right)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)\right]}{\mu_{t_0}(2x)} \\
&= \frac{\varphi\left[\left(\frac{1}{2\beta_\varphi-\varepsilon}\right)\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(x)\right)\right]}{\varphi\left[\varphi^{-1}\left(\mu_{t_0}(2x)\right)\right]} \\
&> 1.
\end{aligned}
$$

所以, $\|x_i - x_j\| > 2\beta_\varphi - \varepsilon$, 这就得到了 $2\beta_\varphi \leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)$.

综上所述, 结合装球常数和 Kottman 常数的定义我们可以得到:

$$
\max\left\{\frac{1}{\alpha_\varphi},\ 2\beta_\varphi\right\} \leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)
$$

或

$$
\max\left\{\frac{1}{1+2\alpha_\varphi},\ \frac{1}{1+(\beta_\varphi)^{-1}}\right\} \leq P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right).
$$

□

对于非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间, 由于

$$
\alpha_\varphi = \inf_{t<\infty}\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_t(2x)\right)} = \inf_{t<\infty}\frac{[\mu_t(x)]^{\frac{1}{p}}}{[\mu_t(x)]^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}};
$$

$$
\beta_\varphi = \sup_{t<\infty}\frac{\varphi^{-1}\left(\mu_t(x)\right)}{\varphi^{-1}\left(\mu_t(2x)\right)} = \sup_{t<\infty}\frac{[\mu_t(x)]^{\frac{1}{p}}}{[\mu_t(x)]^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}.
$$

结合定理 4.2.4 我们可得非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 空间 Kottman 常数与装球常数下界估计分别为:

推论 4.4.5.

$$
\max\left\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\right\} \leq D\left(L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)
$$

或

$$
\max\left\{\frac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p}}}, \frac{1}{1+2^{\frac{1}{p}}}\right\} \leq P\left(L_p(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right).
$$

推论 4.4.6. *若 φ 为 Orlicz 函数, 则*

$$
\sqrt{2} \leq D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)\right)
$$

或

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \leq P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right),$$

而且如果 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 非自反, 则

$$D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = 2$$

或

$$P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = \frac{1}{2}.$$

证明: 首先注意到 $\sqrt{2} \leq \max\left(\frac{1}{\alpha_\varphi}, 2\beta_\varphi\right)$, 否则会有 $\alpha_\varphi > \frac{1}{\sqrt{2}} > \beta_\varphi$, 这就与 $\alpha_\varphi \leq \beta_\varphi$ 矛盾.

若 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 非自反, 则 $\varphi \notin \triangle_2 \bigcap \nabla_2$, 由定理 4.4.4 可知 $\alpha_\varphi = \frac{1}{2}, \beta_\varphi = 1$, 因此 $\max\left(\frac{1}{\alpha_\varphi}, 2\beta_\varphi\right) = 2$ 结合条件 $D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) \leq 2$ 可以得到

$$D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = 2$$

或

$$P\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = \frac{1}{2}.$$

□

注 4.4.7. 推论 4.4.6 中的 $\sqrt{2}$ 是可以达到的. 事实上, 如果令 $\varphi(x) = |x|^2$, 则 $\varphi^{-1}(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$, 此时 $\alpha_\varphi = \beta_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此 $D\left(L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right)$ 可以取到最小值 $\sqrt{2}$.

有上述定理我们可以立即得到如下推论:

推论 4.4.8. $P\left(L_1(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = P\left(L_\infty(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)\right) = P(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}$.

注 4.4.9. 由文献 [89] 中 5.3 节推论 7 可以知道, 对经典 Orlicz 空间通过内插函数可以确定出 Kottman 常数的上界估计为 $2^{1-\frac{s}{2}}$, $0 < s \leq 1$, 从而可以求出经典 L^p 空间中的 Kottman 常数及装球常数分别为 $\max\left\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\right\}$ 和 $\max\left\{\frac{1}{1+2^{1-\frac{1}{p}}}, \frac{1}{1+2^{\frac{1}{p}}}\right\}$. 然而对于非交换 Orlicz 空间目前还没有内插函数及内插不等式的研究成果, 所以上界还无法估计.

第五章　非交换 Orlicz 序列空间及其凸性

在经典 Orlicz 空间几何理论研究和发展中, 人们主要对函数空间的几何性质进行研究. 然而, 序列空间是非常重要的. 一般情况下, 我们称可测集 E 是一个原子集, 如果 E 有正测度, 但是其任何可测的真子集都是零测集. 特别地, 单点集为原子集. 如果 E 不是原子集且具有有限测度则我们称其为无原子有限测度集. 此时, 序列可以看成是定义在原子测度空间的函数, 这与通常意义下的函数, 即定义在无原子有限测度空间上的函数有所不同. 大多数情况下, 函数空间的一些结论也能推广到序列空间中, 但是对同一问题两者的证明技巧和方法却大不相同. 本章主要研究了非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$. 做为 Schatten 类的推广, 首先我们给出了非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 的定义并对这一空间中的一些基本性质进行了研究, 如范数与迹的关系、迹不等式等, 进而给出了迹类算子 $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ 和 Schatten 类算子 $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1 < p < \infty)$ 的相应不等式. 本章最后, 我们又给出了 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 中端点及凸性的判定, 做为推论我们给出了 $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ 和 $\mathcal{S}_p(\mathbb{H})$ $(1 < p < \infty)$ 的相应结果.

§5.1　预备知识

§5.1.1　Schatten 类

在对非交换 $L_p(\widetilde{\mathcal{M}}, \tau)$ 空间的研究中, 第一个基本的例子当属 Schatten 类. 由于它们不是函数空间, 在非交换空间理论研究中最初人们经常把它作为 "病态空间" 加以考虑并主要用它来构造反例. 然而随着对非交换理论深入研究后, 人们逐渐发现这类算子确有很多优良的性质, 如可以用它来研究算子不等式等. 从此, Schatten 类才引起人们的关注. 尤其是近几年, 人们越来越发现 Schatten 类的重要性而且这一理论在复分析和信号处理方面得到广泛的应用. 如, 在文献 [32] 中, El-Fallah 等人研究了 Schatten 类中具有单叶特征的复合算子; 文献 [8] 中, 作者研究了 Schatten 类 Fourier 积分算子, 文中作者证明了: 具有光滑相位函数且它的符号在固定时间及频率的 Fourier 积分算子即为 Schatten 类. 近几年关于 Schatten 类还有一大批优秀的成果也相继问世, 在此我们不能一一列举. 有关 Schatten 类的更多信息我们可以参见文献 [10, 11, 22, 23, 24, 39, 63, 64, 87, 99, 100].

下面给出 Schatten 类的具体介绍,

令 $\mathbb{H}$ 为一个 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上全体有界线性算子构成的代数. 令 Tr 为 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 上通常的迹. 参照文献 [115], 下面回顾一下这个迹的一些基本性质.

定义 5.1.1. 令 $\{\xi_i\}_{i\in I}$ 为 $\mathbb{H}$ 的一个正交基. 那么, 对 $x\in\mathcal{B}(\mathbb{H})_+$ 有

$$\mathrm{Tr}(x)=\sum_i<\xi_i,x\xi_i>.$$

由文献 [115] 中 3.1 节内容可知这个定义不依赖于 $\{\xi_i\}_{i\in I}$ 的特殊选择. 而且 Tr 为 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 上的一个正规、半有限、规范的迹. 由上面定义可知, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 中的一个投影算子 e 具有有限迹, 即 $\mathrm{Tr}(e)<\infty$ 当且仅当它具有有限秩. 特别地, Tr 有限的充分必要条件是 $\dim\mathbb{H}<\infty$. 因此, 其支撑是具有有限迹的投影的算子全体构成的理想 $\mathcal{S}\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$, 这是由 $\mathbb{H}$ 上具有有限秩的算子全体组成的. 不难验证, Tr 是 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 上唯一的正规、半有限、规范的迹而且使得对每个秩为 1 的投影 e 都有 $\mathrm{Tr}(e)=1$.

另一方面, 如果 $x\in\mathcal{B}(\mathbb{H})_+$ 且具有有限迹则 x 为紧算子; 从而 x 至多具有可数多个非零的特征值且以零为唯一的聚点. 那么, 令 $\lambda_0\geq\lambda_1\geq\cdots$ 为 x 的特征值且按重数重复排列, 有 $\lim\limits_n\lambda_n(x)=0$. 由紧算子的谱分解知, 存在一个正交序列 $\{\xi_n\}\subset\mathbb{H}$ 使得

$$x\xi=\sum_{n\geq0}\lambda_n(x)<\xi_n,\xi>\xi_n,\quad \xi\in\mathbb{H}.$$

由此可得

$$\mathrm{Tr}(x)=\sum_{n\geq0}\lambda_n(x).$$

有了上面内容我们可以定义 Schatten 类如下:

定义 5.1.2. 对任意 $0<p<\infty$, 非交换 $L_p\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$ 空间由所有 $\mathbb{H}$ 上满足下列条件的紧算子 x 组成:

$$\mathrm{Tr}\left(|x|^p\right)=\sum_{n\geq0}\lambda_n\left(|x|^p\right)=\sum_{n\geq0}\left(\lambda_n\left(|x|\right)\right)^p<\infty.$$

一般情况下我们用 $s_n(x)$ 表示 $\lambda_n\left(|x|\right)$ 且称为 x 的奇异值. 此时, 对任意 $x\in L_p\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$ 其范数定义为

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n\geq0}\left(s_n(x)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们称空间 $L_p\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$ 为 $\mathbb{H}$ 上的 Schatten 类, 一般用 $S_p(\mathbb{H})$ 或 $\mathcal{C}_p(\mathbb{H})$ 表示.

注 5.1.3. (1) $S_\infty(\mathbb{H})$ 不是紧算子全体构成的理想而是整个 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 本身;

(2) 我们经常称 $S_1(\mathbb{H})$ 和 $S_2(\mathbb{H})$ 分别是迹类算子全体和 Hilbert-Schmidt 算子全体;

(3) 对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{H}$ 有

$$\|\xi\otimes\eta\|_p=\|\xi\|\|\eta\|,$$

其中 $\xi\otimes\eta$ 为 $\mathbb{H}$ 上的有界算子, 定义为 $\zeta\mapsto<\eta,\zeta>\xi$. 此时定义在 $(\mathcal{B}(\mathbb{H}),\mathrm{Tr})$ 上的可测算子就是全体有界算子.

(4) 如果 $\mathbb{H}$ 是可分的, 由 $\|x\|_p$ 的酉不变性我们可以假定: 当 $\dim\mathbb{H}=\infty$ 时, $\mathbb{H}=l_2$; 当 $\dim\mathbb{H}=n$ 时, $\mathbb{H}=\mathbb{C}^n$. 一般地用 S_p 和 S_p^n 分别表示 $S_p(l_2)$ 和 $S_p(\mathbb{C}^n)$. 显然, S_p 可以认为是经典 l_p 序列空间的非交换类似. 如果将 $\mathcal{B}(l_2)$ 上的算子按 l_2 的自然基表示为无穷矩阵. 令 (e_{ij}) 为 $\mathcal{B}(l_2)$ 的典则单位矩阵, 即 e_{ij} 是这样的算子, 它对应的矩阵在 (i,j) 处其矩阵元 1, 其他矩阵元均为 0. 因此, 给定任一有限数列 $\{\alpha_i\}\subset\mathbb{C}$ 有

$$\left\|\sum_i\alpha_ie_{ij}\right\|_p=\left(\sum_i|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\sum_i\alpha_ie_{ji}\right\|_p,$$

其中 j 是任意固定的, 且

$$\left\|\sum_i\alpha_ie_{ii}\right\|_p=\left(\sum_i|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

引理 5.1.4. *[115] 设 $x_n,x\in(\mathcal{B}(\mathbb{H}),\mathrm{Tr})$, 则 x_n 以测度收敛于 x 当且仅当 x_n 一致收敛于 x, 即按照 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的算子范数拓扑收敛.*

§5.1.2 端点及凸性

众所周知, Banach 空间的单位球的凸性研究, 最早是由 Clarkson J 在讨论向量测度的 Radon-Nikodym 定理时开始研究的. 随后人们又讨论了各种凸性, 它们在最佳逼近理论、不动点理论等领域都有着非常重要的作用. 而在 Banach 空间几何学的研究过程中, 端点是一个很重要且基本的概念, 人们从端点出发可以对 Banach 空间中各种凸性展开研究.

这一节中我们主要给出端点及凸性的基本概念. 设 X 为赋范线性空间, $B(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示 X 的闭单位球和单位球面.

定义 5.1.5. [117] 设 A 是 X 的凸子集. 我们称点 $x\in A$ 为 A 的端点 (extreme point), 若对 $y,z\in A$, $2x=y+z$ 都有 $y=z$ 成立. A 的全体端点组成的集记做 $\mathrm{Ext}A$.

例子 5.1.6. 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的单位圆周上的点都是端点.

例子 5.1.7. 欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 上的单位正方形中只有 $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ 是端点.

端点是一个与代数运算有关的概念, 下面著名的 Krein-Milman 定理说明可以用端点来表示一个紧凸集.

定理 5.1.8. *[117] 令 K 是局部凸空间 X 的紧凸集, 则 K 是它的端点的闭凸包, 即 $K = \overline{co}(ExtK)$.*

下面我们给出凸性空间的概念.

定义 5.1.9. 我们称赋范线性空间 X 为凸空间 (SC 或 R), 如果 X 单位球面上的点都是单位球内的端点, 即 $\mathrm{Ext}B(X) = S(X)$.

由凸空间定义容易知道上面例 5.1.6 为凸空间, 而例 5.1.7 则不是凸空间.

定义 5.1.10. 我们称函数 $f(u) = au + b, (a, b \in \mathbb{R})$ 为仿射函数. 称区间 $[a, b]$ 为 Orlicz 函数 φ 的仿射区间 (简记为 SAI), 如果 φ 在区间 $[a, b]$ 上仿射且对任意 $\varepsilon > 0$, φ 在区间 $[a-\varepsilon, b]$ 或 $[a, b+\varepsilon]$ 上不是仿射函数. 用 $\{[a_i, b_i]\}_i$ 表示 φ 的所有仿射区间.

定义 5.1.11. 我们称

$$S_\varphi = \mathbb{R} \setminus \left[\bigcup_i (a_i, b_i)\right]$$

为函数 φ 的严格凸点.

显然, 如果 $u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1)$ 且$\alpha u + (1-\alpha)v \in S_\varphi$, 则

$$\varphi(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha\varphi(u) + (1-\alpha)\varphi(v). \tag{5.1}$$

§5.2 非交换 Orlicz 序列空间及某些基本性质

本节中我们给出非交换 Orlicz 序列空间的定义及相关性质.

定义 5.2.1. 如果 $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 为紧算子, 则非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 及子空间 $E_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 分别定义如下:

$$L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})) = \{x : \mathrm{Tr}(\varphi(\lambda x)) = \sum_{n\geq 0} \varphi(\lambda s_n(|x|)) < \infty,\ \exists \lambda > 0\};$$

$$E_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})) = \{x : \mathrm{Tr}(\varphi(\lambda x)) = \sum_{n\geq 0} \varphi(\lambda s_n(|x|)) < \infty, \forall \lambda > 0\}.$$

定义空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 上的 Luxemburg 范数如下:

定义 5.2.2. 对非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, 我们称下面的函数

$$\|x\|_\varphi = \inf\left\{\lambda > 0, \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \leq 1\right\}$$

为 Luxemburg 范数.

根据第二章中的定理 2.2.2 及定理 2.3.7 可以得到如下推论:

推论 5.2.3. 当 $\varphi \in \Delta_2$ 时, $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})) = E_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$.

注 5.2.4. (1) 当 $\varphi(x) = |x|^p$, $1 \leq p < \infty$ 时, 显然 $\varphi \in \Delta_2$, 所以对任何紧算子 $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, 则

$$\begin{aligned}
L_p(\mathcal{B}(\mathbb{H})) &= E_p(\mathcal{B}(\mathbb{H})) \\
&= \{x \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : \mathrm{Tr}\left((\lambda|x|)^p\right) = \sum_{n\geq 0} (\lambda s_n(|x|))^p < \infty, \forall \lambda > 0\} \\
&= \{x \in \mathcal{B}(\mathbb{H}) : \mathrm{Tr}\left((\lambda|x|)^p\right) = \sum_{n\geq 0} (s_n(|x|))^p < \infty\}
\end{aligned}$$

且 Luxemburg 范数为

$$\|x\|_p = \mathrm{Tr}(|x|^p) = \sum_{n\geq 0} ((s_n(|x|))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

所以, $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 确为 Schatten 类算子的推广.

(2) $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 中的范数 $\|x\|_\varphi$ 与经典 Orlicz 序列空间中的范数 $\|\cdot\|_{\widetilde{\varphi}}$ 有如下关系:

$$\begin{aligned}
\|x\|_\varphi &= \inf\left\{\lambda > 0,\ \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0,\ \sum_{n\geq 0} \varphi\left(\frac{1}{\lambda} s_n(|x|)\right) \leq 1\right\} \\
&= \|s_n(|x|)\|_{\widetilde{\varphi}}.
\end{aligned}$$

类似于经典情形, 下面我们给出另外两个范数: Amemiya 范数和 Orlicz 范数如下.

定义 5.2.5. 对非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, 我们分别称下面的函数

$$\|x\|^A = \inf \frac{1}{\lambda}\{1 + \mathrm{Tr}(\varphi(\lambda x)) : \lambda > 0\}$$

与

$$\|x\|^o = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} s_n(x) \cdot s_n(y) : \mathrm{Tr}(\psi(y)) \leq 1\right\}$$

为 Amemiya 范数和 Orlicz 范数.

类似于经典情形, 由文献 [43] 可知下面的关系式成立:

$$\|x\|^A = \|x\|^o.$$

且非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 在上面任何一个范数下都是 Banach 空间.

关于范数和模之间的关系我们有如下命题:

命题 5.2.6. 设 $x \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, 则下列结论成立

(1) 若 $\|x\|_\varphi > 1$, 则 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = \sum\limits_{n\geq 0} \varphi(s_n(x)) \geq \|x\|_\varphi$;

(2) 若 $x \neq 0$, 则 $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) \leq 1$;

(3) 若 $\|x\|_\varphi \leq 1$, 则 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = \sum\limits_{n\geq 0} \varphi(s_n(x)) \leq \|x\|_\varphi$;

(4) $\|x\|_\varphi \leq \|x\|^o \leq 2\|x\|_\varphi$.

证明: (1) 假设 $\|x\|_\varphi > 1$, 选取 $0 < \varepsilon < 1$ 使得 $(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi > 1$. 则

$$\begin{aligned}
1 &< \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi}\mathrm{Tr}(\varphi(x)) + \left(1 - \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi}\right)\mathrm{Tr}(\varphi(0)) \\
&= \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi}\mathrm{Tr}(\varphi(x)),
\end{aligned}$$

这就蕴含了

$$(1-\varepsilon)\|x\|_\varphi < \mathrm{Tr}(\varphi(x)),$$

上式中令 $\varepsilon \to 0$ 可以得到结论.

(2) 给定任意 $\varepsilon > 0$, 则存在 $\lambda_\varepsilon > 0$ 使得 $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda_\varepsilon}\right)\right) \leq 1$, 再由 Luxemburg 范数的定义可知 $\lambda_\varepsilon < \varepsilon + \|x\|_\varphi$.

上述条件保证了 $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi+\varepsilon}\right)\right) \leq 1$, 又由 $0 < \varepsilon < 1$ 的任意性可知,

$$\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) \leq 1.$$

(3) 如果 $x \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 且 $\|x\|_\varphi \leq 1$, 不妨设 $x \neq 0$. 由 $\|x\|_\varphi$ 的定义可知, 必存在一单调递减且收敛于 $\|x\|_\varphi$ 的数列 $\{\lambda_n\}$ 使得

$$\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right) = \sum_{n\geq 0} \varphi\left(\frac{1}{\lambda_n} s_n(x)\right) \leq 1.$$

因此由 Levy 定理可得,

$$\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) = \sum_{n\geq 0} \varphi\left(\frac{1}{\|x\|_\varphi} s_n(x)\right) \leq 1.$$

再由 φ 的凸性及 $\|x\|_\varphi \leq 1$ 可知,

$$\frac{1}{\|x\|_\varphi}\mathrm{Tr}(\varphi(x)) \leq \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\|x\|_\varphi}\varphi(x)\right) \leq 1,$$

所以

$$\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = \sum_{n\geq 0} \varphi(s_n(x)) \leq \|x\|_\varphi.$$

(4) 首先由 $\|x\|^o$ 的定义及 (2) 和 (3) 可知当 $x \neq 0$ 时有,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right\|^o \leq 1 + \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) \leq 2,$$

即 $\|x\|^o \leq 2\|x\|_\varphi$.

另一方面, 由定理 2.4.1 中的 (2) 可知,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right\|^o \leq 1,$$

即 $\|x\|_\varphi \leq \|x\|^o$. □

定理 5.2.7. 对任何 $x \in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, $\|x\|_\varphi = \||x|\|_\varphi = \|x^*\|_\varphi$.

证明: 这个证明类似于文献 [115] 中的定理 5.2.1. 具体如下:

由定义可知, $\|x\|_\varphi=\||x|\|_\varphi$. 现在令 $x=u|x|$ 为 x 的极分解. 此时有 $u|x|u^*=|x^*|$, 则由归纳法可知, 对任意正整数 n 有 $u|x|^nu^*=|x^*|^n$, 从而对任一多项式 P 有 $uP(|x|)u^*=P(|x^*|)$. 因此, 由 Stone－Weierstrass 定理及连续函数演算可知, 对 $\mathbb{R}$ 上任一连续函数 φ 有 $u\varphi(|x|)u^*=\varphi(|x^*|)$. 故由迹的性质可知

$$\mathrm{Tr}\left(\varphi(|x^*|)\right)=\mathrm{Tr}\left(u\left(\varphi(|x|)\right)u^*\right)=\mathrm{Tr}\left(\varphi(|x|)\right),$$

再由 $\|x\|_\varphi$ 的定义可以得到 $\||x|\|_\varphi=\|x^*\|_\varphi$. □

定理 5.2.8. *如果 $\varphi\in\Delta_2$, 对任何 $x,y\in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 我们有下面结论:*

(1) $\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right)=1$;

(2) $\|x\|_\varphi=1$ 当且仅当 $\mathrm{Tr}(\varphi(x))=1$;

(3) $\mathrm{Tr}(\varphi(x_n))\to 0$ 当且仅当 $\|x_n\|_\varphi\to 0$;

(4) $\mathrm{Tr}(\varphi(x+y))\le\frac{k}{2}\left[\mathrm{Tr}(\varphi(x))+\mathrm{Tr}(\varphi(y))\right]$, 其中 k 满足对任何 $\alpha>0$ 使得 $\varphi(2\alpha)\le k\varphi(\alpha)$.

证明: (1) 设 $x\in L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, 则由文献 [4] 中的命题 0 可知,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi}\right)\right) &= \sum_{n\ge 0}\varphi\left(\frac{1}{\|x\|_\varphi}s_n(|x|)\right)\\ &= \sum_{n\ge 0}\varphi\left(\frac{1}{\|s_n(|x|)\|_{\widetilde{\varphi}}}s_n(|x|)\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

(2) 如果 $\|x\|_\varphi=1$ 则显然有 $\mathrm{Tr}(\varphi(x))=1$. 相反的, 若 $\mathrm{Tr}(\varphi(x))=1$, 则由文献 [80] 中的注 8.15 可知结论成立.

(3) 该结论可直接由文献 [80] 中的定理 8.14 得到.

(4) 由本文引理 1.3.23 可知, 存在部分等距算子 u,v 使得 $|x+y|\le u|x|u^*+v|x|v^*$, 结合 φ 的单调性、凸性、迹定义第 (3) 条及定理 5.2.7 的证明过程, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\varphi(x+y)) &\le \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(u|x|u^*+v|y|v^*\right)\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(2\frac{u|x|u^*+v|y|v^*}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{k}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(\varphi\left(u|x|u^*\right)\right)+\operatorname{Tr}\left(\varphi\left(v|y|v^*\right)\right)\right] \\
&= \frac{k}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left(s_n(u|x|u^*)\right)+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(s_n(v|y|v^*)\right)\right] \\
&\leq \frac{k}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left(s_n(|x|)\right)+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(s_n(|y|)\right)\right] \\
&= \frac{k}{2}\left[\operatorname{Tr}(\varphi(x))+\operatorname{Tr}(\varphi(y))\right].
\end{aligned}
$$

□

由注 5.2.4 中的 (1) 我们知道, 当 $\varphi(x)=|x|^p$, $1\leq p<\infty$ 时, 对任何紧算子 $x\in\mathcal{B}(\mathbb{H})$, 则 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 即为 Schatten 类算子且 Luxemburg 范数为

$$
\|x\|_p=\operatorname{Tr}(|x|^p)=\sum_{n\geq 0}\left((s_n(|x|))^p\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

特别地, 当 $p=1$ 时 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 为迹算子类 $S_1(\mathbb{H})$, 当 $p=2$ 时 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 即为 Hilbert-Schmitdt 算子类 $S_2(\mathbb{H})$. 此时, $\varphi\in\Delta_2$. 因此根据定理 5.2.7 很容易得到下面的推论.

推论 5.2.9. (1) $\operatorname{Tr}\left(\frac{x^p}{\|x\|_\varphi^p}\right)=1$. *特别地, $S_1(\mathbb{H})$ 和 $S_2(\mathbb{H})$ 分别满足 $\operatorname{Tr}\left(\frac{x}{\|x\|_\varphi^{\frac{1}{2}}}\right)=1$ 和 $\operatorname{Tr}\left(\frac{x^2}{\|x\|_\varphi^2}\right)=1$.*

(2) 若 x 为 Schatten 类算子, 则 $\varphi(2x)=|2x|^p=2^p|x|^p$. 此时, 在定理 5.2.7 的 (4) 中取 $k=2^p$ 我们可以得到下列不等式:

$$
\operatorname{Tr}\left(|x+y|^p\right)\leq 2^{p-1}\left[\operatorname{Tr}\left(|x|^p\right)+\operatorname{Tr}\left(|y|^p\right)\right]
$$

或

$$
\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x+y|^p\right)\leq 2^{p-1}\left[\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x|^p\right)+\sum_{n\geq 0}s_n\left(|y|^p\right)\right]
$$

特别地, 对 $x\in S_1(\mathbb{H})$, 我们有

$$
\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x+y|\right)\leq\left[\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x|\right)+\sum_{n\geq 0}s_n\left(|y|\right)\right];
$$

对 $x\in S_2(\mathbb{H})$, 我们有

$$
\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x+y|^2\right)\leq 2\left[\sum_{n\geq 0}s_n\left(|x|^2\right)+\sum_{n\geq 0}s_n\left(|y|^2\right)\right];
$$

§5.3 非交换 Orlicz 序列空间中的端点及凸性的判定

受经典 Orlicz 序列空间启发, 本节中我们给出非交换 Orlicz 序列空间中的端点及凸性的判定定理. 本节中, 我们把具有相同特征值的紧算子归为一类, 用 $x, y, z, \cdots$ 表示.

下面我们首先给出非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$ 中端点的等价条件.

定理 5.3.1. *对任何非交换 Orlicz 序列空间 $L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H}))$, $x \in \mathrm{Ext}B(L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})))$ 当且仅当下面两个条件同时成立*

(1) $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = 1$;

(2) $s_n(x) \in \mathbb{R} \setminus S_\varphi$ 的个数不超过 1.

证明: 充分性. 设 $y, z \in B(L_\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{H})))$ 且 $y + z = 2x$. 下面证明 $y = z$. 由 φ 的凸性可知

$$\begin{aligned} 1 = \mathrm{Tr}(\varphi(x)) &= \mathrm{Tr}\left(\varphi\left(\frac{y+z}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \varphi\left(\frac{s_n(|y+z|)}{2}\right) \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2}\left[\varphi(s_n(|y|)) + \varphi(s_n(|z|))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\varphi(y)) + \mathrm{Tr}(\varphi(z))\right] \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \varphi(s_n(x)) &= \varphi\left(\frac{s_n(|y+z|)}{2}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{s_n(|y|) + s_n(|z|)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(s_n(y)) + \varphi(s_n(z))\right] \end{aligned}$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 又由 (2) 可知至多存在一个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $s_m(x) \in \mathbb{R} \setminus S_\varphi$. 因此由 5.1 式可知对所有的 $n \neq m$ 都有 $s_n(x) = s_n(y) = s_n(z)$. 又由于 $\sum\limits_n \varphi(s_n(y)) = 1 = \varphi(s_n(z))$ 可以推断 $s_m(y) = s_m(z)$, 但由于 $s_m(y), s_m(z), s_m(x)$ 在 φ 的同一仿射区间内且 $0 \in S_\varphi$, 则必有 $s_m(x) = s_m(y) = s_m(z)$, 因此可以得到 $x = y = z$.

必要性. 先证明 (1) 成立. 设 $x\in \mathrm{Ext}B\left(L_{\varphi}\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$. 取 $\varepsilon=1-\mathrm{Tr}(\varphi(x))>0$, 则我们可以选取 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(2s_n(x))\leq\varepsilon.$$

定义 y,z 使得其特征值满足下式

$$(s_n(y),s_n(z))=\begin{cases}(s_n(x),s_n(x)), & n<n_0,\\ (0,2s_n(x)), & n\geq n_0.\end{cases}$$

其中上式表示当 $n<n_0$ 时, $s_n(y)=s_n(z)=s_n(x)$; 当 $n\geq n_0$ 时, $s_n(y)=0$, $s_n(z)=2s_n(x)$.

所以 $y\neq z, y+z=2x$ 而且

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\varphi(y)) &= \sum_{n=0}^{n_0-1}\varphi(s_n(x))\\ &< \mathrm{Tr}(\varphi(z))\\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1}\varphi(s_n(x))+\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(2s_n(x))\\ &< \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(s_n(x))+\varepsilon\\ &= \mathrm{Tr}(\varphi(x))+\varepsilon=1\end{aligned}$$

这就与 $x\in \mathrm{Ext}B\left(L_{\varphi}\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$ 矛盾.

下面证明(2)成立. 若 (2)不成立, 不失一般性可设 $s_0(x),s_1(x)\in\mathbb{R}\backslash S_{\varphi}$, 即 $s_0(x),s_1(x)$ 分别属于φ 的两个仿射区间 (a_0,b_0) 与(a_1,b_1).

设 $\varphi(u)=\alpha_i u+\beta_i$, $u\in(a_i,b_i)$ $(i=0,1)$, 则由 Orlicz 函数定义可知 $\alpha_i>0$, $i=0,1$. 选取 $\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$ 使得 $\alpha_0\varepsilon_0=\alpha_1\varepsilon_1$ 且满足 $s_i(x)+\varepsilon_i\in(a_i,b_i)$ $(i=0,1)$.

定义 y,z 使得其特征值满足 $s_0(y)=s_0(x)+\varepsilon_0, s_1(y)=s_1(x)-\varepsilon_1, s_n(y)=s_n(x)(n\geq 2), s_n(z)=2s_n(x)-s_n(y)$ $(n\in\mathbb{N})$. 则有 $y\neq z$ 且

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\varphi(y)) &= \mathrm{Tr}(\varphi(z))\\ &= \sum_{n\geq 0}\varphi(s_n(y))\\ &= \varphi(s_0(x)+\varepsilon_0)+\varphi(s_1(x)-\varepsilon_1)+\sum_{n\geq 2}\varphi(s_n(x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_0(s_0(x)+\varepsilon_0)+\beta_0+\alpha_1(s_1(x)-\varepsilon_0)+\beta_1+\sum_{n\geq 2}\varphi(s_n(x)) \\
&= \alpha_0 s_0(x)+\beta_0+\alpha_1 s_1(x)+\beta_1+\sum_{n\geq 2}\varphi(s_n(x)) \\
&= \varphi(s_0(x))+\varphi(s_1(x))+\sum_{n\geq 2}\varphi(s_n(x)) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi(x)) \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

这又与 $x \in \mathrm{Ext}B\left(L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$ 矛盾. 因此定理得证. □

由于当 $1 < p < \infty$ 时 $\varphi(x) = |x|^p$ 为严格凸函数, 因此满足上面定理第二条, 所以我们有如下推论:

推论 5.3.2. 对任何 $\mathbb{H}$ 上的 *Schatten* 类算子 $S_p(\mathbb{H})$, 当 $1 < p < \infty$ 时, $x \in \mathrm{Ext}B\left(S_p(\mathbb{H})\right)$ 当且仅当

$\mathrm{Tr}(|x|^p) = \sum_{n\geq 0}\lambda_n\left(|x|^p\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\lambda_n\left(|x|\right)\right)^p = 1$, 即 $x \in S\left(S_p(\mathbb{H})\right)$.

特别地, 迹类算子 $S_1(\mathbb{H})$ 没有端点.

定理 5.3.3. 非交换 *Orlicz* 序列空间 $L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$ 为凸空间当且仅当下面两个条件同时成立

(1) $\varphi \in \Delta_2$;

(2) φ 在区间 $[0, \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]$ 上严格凸.

证明: 充分性. 对任何 $x \in L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$, 由 (1) 及引理 5.3.4 可知 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = 1$. 取 $I = \{n \in \mathbb{N} : s_n(x) \in \mathbb{R} \setminus S_\varphi\}$, 则由 (2) 可知对任意 $n \in I$, $|s_i(x)| > \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. 因此, I 包含至多为一个点, 再由定理 5.4.1 可知 $x \in \mathrm{Ext}B\left(L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$.

必要性. 先证 (1) 成立. 如若不然, 则我们可以构造一 $x \in L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)$ 使得 $\|x\|_\varphi = 1$ 且 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) < 1$, 因此 $x \notin \mathrm{Ext}B\left(L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$.

再证 (2) 成立. 若 (2) 不成立, 则 φ 在 $[0, \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]$ 的子区间 $[a, b]$ 内仿射. 由于 $2\varphi(b) \leq 1$, 我们可以找到一点 $c \in (a, b)$ 及$d > 0$ 使得 $2\varphi(c) + \varphi(d) = 1$. 定义 x 使得其特征值分别为 $c, c, d, 0, 0, \cdots$, 则 $\mathrm{Tr}(\varphi(x)) = 1$, 再由定理 5.4.1 可知 $x \notin \mathrm{Ext}B\left(L_\varphi\left(\mathcal{B}(\mathbb{H})\right)\right)$.

综上所述, 定理成立. □

由于当 $1 < p < \infty$ 时 $\varphi(x) = |x|^p$ 为严格凸函数, 因此必然在区间 $\left[0, \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 上严格凸, 而又由推论 5.3.2 可知 $S_1(\mathbb{H})$ 没有端点, 所以结合定理 5.3.3 我们有如下推论:

推论 5.3.4. (1) 当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathbb{H}$ 上的 *Schatten* 类算子 $S_p(\mathbb{H})$ 为凸空间;

(2) 迹类算子 $S_1(\mathbb{H})$ 不是凸空间.

第六章　结论及展望

一、论文的主要工作

经典 Orlicz 空间是 L^p 空间的自然推广, 最初由波兰数学家 W. Orlicz 于 1932 年联系积分方程而最先引入. 近几十年来, 众多数学家都致力于这一空间的研究,产生了一大批深刻的理论成果. 近年来, 它的应用价值也日益凸显, 已经有学者把 Orlicz 空间运用到量子信息几何等领域并产生了许多很有影响力的结果, 这对数学的发展特别是在应用数学方面起到了很好的推动作用. 如果对经典 Orlicz 空间加以推广和变形, 即在 von Neumann 代数理论基础上把这一空间中的研究对象从可测函数拓展为可测算子就得到所谓的 "非交换Orlicz 空间". 做为一类对称的非交换 Banach 函数空间, 虽然非交换 Orlicz 空间起源较早, 但最近几年才开始受到人们的普遍关注. 从目前来看, 虽然对这一空间的研究在理论上还缺乏系统性, 但是在应用方面却显得非常广泛和重要, 如非交换概率空间、量子信息几何、鞅理论等. 本文主要对非交换 Orlicz 空间中的某些几何性质及拓扑性质进行了研究.

本文的主要结果如下:

(1) 对非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的一个非常重要的子空间 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 进行了研究, 并给出了这一子空间元素的刻画, 证明了这一空间在范数拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的闭子空间, 在测度拓扑下为 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的稠密子空间, 还证明了当 $\varphi\in\Delta_2$ 时, 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 依范数收敛和依测度收敛等价, 因此当 $\varphi\in\Delta_2$ 时 $E_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)=L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$. 接着研究了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的某些几何性质, 如一致单调性等. 最后又对 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的 Orlicz 范数进行了初步研究, 如投影算子的 Orlicz 范数的刻画等.

(2) 进一步, 给出了非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中的依测度收敛下 Kadec-Klee 的判定条件, 从而给出了 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 的对偶空间, 该结论也自然是非交换 L_p 空间的推广.

(3) 讨论了非交换 Orlicz 空间 $L_\varphi(\widetilde{\mathcal{M}},\tau)$ 中装球常数问题, 虽然没有给出具体计算公式, 但是我们给出了该空间中装球常数的下界. 另外, 给出了 Cesàro-Orlicz 序列空间中装球常数计算的两个公式, 根据这两个公式对某些 Cesàro-Orlicz 序列空间很容易计算其装球常数.

(4) 做为 Schatten 类的推广, 我们提出了非交换 Orlicz 序列空间的概念并对该空间中的一些几何性质进行了研究, 如端点和凸性的判断, 这些结果自然是 Schatten 类的推广.

二、前景展望

2004 年 Streater R F 在文献 [102] 中主要研究了量子信息几何中两个非常重要的函数, 一个是 $\varphi(x)=\frac{1}{2}Tr\left(e^{-H_0-\psi_0-x}+e^{-H_0-\psi_0+x}\right)-1$; 另一个是 $\varphi(x)=Cosh(x)-1$, 并证明这两个函数都为为非交换的量子 Yöung 函数 (Orlicz 函数), 虽然这些函数为特殊的 Orlicz 函数, 然而在流形、量子理论中确有非常重要的作用. 这些成果的发表也充分说明了非交换 Orlicz 空间理论确实有很重要的应用价值.

2009 年 Louis E L 等人在文献 [60] 中对非交换 Orlicz 空间上的一些映射进行了仔细研究. 文中由重排不变的 Banach 函数出发首先研究了非交换 Orlicz 空间上的 Köthe 对偶等问题, 接着又在非交换 Orlicz 空间基础上给出了非交换随机变量的定义并研究了非交换正规统计模型, 这一内容对非交换概率空间的研究起到了很好的推动.

2010 年吐尔别克等人在文献 [6] 中引入了弱非交换 Orlicz 空间的的概念并对这一空间的一些性质进行了研究, 如测度收敛等. 同时还证明了该空间为拟 Banach 空间. 文中对 Rademacher 随机变量, 通过在非交换鞅上建立弱非交换 Khitchine 不等式证明了弱 Burkholder-Gundy 不等式. 这一研究成果推动了鞅理论的发展.

从整体来看, 以后对非交换 Orlicz 空间的研究我们可以从下面两个方面进一步展开工作:

(1) 理论方面. 需要对非交换 Orlicz 函数空间的理论知识进一步深化, 特别是要加强对这一空间中的几何性质的研究, 如一致凸、一致非方等性质, 为以后的应用打下坚实的基础. 另外, 由于目前还没有相关文献对非交换 Orlicz 序列空间进行研究, 因此对这一空间的研究也是比较有意义的. 从文中可以看出, 非交换 Orlicz 序列空间是 Schatten 类的推广, 所以对非交换 Orlicz 序列空间的深入研究有助于更深入讨论 Schatten 类的相关性质, 如矩阵不等式等.

(2) 应用方面. 由文献可以看出, 目前关于非交换 Orlicz 函数空间的研究已经应用在非交换概率空间、量子信息几何及鞅理论等方面. 因此, 我们可以进一步对这些学科中的相关理论进行深入分析和讨论.

参考文献

[1] Al-Rashed M H A, Zegarliński B. Noncommutative Orlicz spaces associated to a state [J]. Studia Mathematica, 2007, 180(3): 199-209.

[2] Al-Rashed M H A, Zegarliński B. Noncommutative Orlicz spaces associated to a state II [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(12): 2999–3013.

[3] Ando T. Linear functionals on Orlicz spaces [J]. Nieuw. Arch. wisk, 1960, 8(8): 1–16.

[4] Anna K, On uniform convexity of Orlicz spaces [J]. Indag. Math. 1982, 44(1): 27–36.

[5] Ayupov S A, Chilin V I, Abdullaev R Z. Orlicz Spaces associated with a Semi-Finite Von Neumann Algebra [J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 2011, 53(4): 519–533.

[6] Bekjan T N, Chen Z, Liu P, et al. Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities [J]. Studia Mathematica, 2010, 204(3): 195–212.

[7] Bennet G, Sharpley R. Interpolation of operators [M]. London: Academic Press, 1988.

[8] Bishop S. Schatten class Fourier integral operators [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2010, 31(2): 205–217.

[9] Burlak J A C, Rankin R A, Robertson A P. The Packing of Spheres in the Space l^p [J]. Proc. Gla. Mat. Asso, 1958, 4(1):22–25.

[10] Buzano E, Toft J. Schatten - von Neumann properties in the Weyl calculus [J]. Journal of Functional Analysis, 2008, 259(12):3080–3114.

[11] Carroll T, Cowen C C. Compact composition operators not in the Schatten classes [J]. Journal of Operator Theory, 1991, 26(1): 109–120.

[12] 陈述涛, 王玉文. Orlicz空间的 H 性质 [J]. 中国数学年刊, 1987(1).

[13] Chen S T. Geometry of Orlicz spaces [M]. Dissertiones Math, 1996.

[14] Chilin V I, Dodds P G, Sedaev A A, et al. Characterizations of Kadec-Klee properties in symmetris spaces of measurable functions [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1996, 348(12): 4895–4918.

[15] Connes A. Noncommutative geometry [M]. London-New York: Academic Press, 1994.

[16] Connes A, Landi G. Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations [J]. Communications in Mathematical Physics, 2001, 221: 141–159.

[17] Connes A, Violette M D. Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples [J]. Communications in Mathematical Physics, 2002, 230: 539–579.

[18] Cui Y A, Hudzik H. On the Banach-Saks and weak Banach-Saks properties of some Banach sequence spaces [J]. Acta Sci. Math, 1999, 65: 179–187.

[19] Cui Y A, Hudzik H. Packing constant for Cesaro sequence spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 2695–2702.

[20] Cui Y A, Hudzik H. Basic toplogical properties of Cesaro-Orlicz spaces [J]. Proc. Indian Acad. Sci Vol, 2005, 115: 461–476.

[21] Dan V, Dykema K J, Nica A. Free Random Variables [M]. 1992.

[22] Delgado J, Ruzhansky M. L^P-Nuclearity, traces, and Grothendieck-Lidskii formula on compact Lie groups [J]. Journal De Mathématiques Pures Et Appliqués, 2013, 102(1):153–172.

[23] Delgado J, Ruzhansky M. Schatten classes and traces on compact Lie groups [J]. arXiv:1303.3914v1, 2013.

[24] Delgado J, Ruzhansky M. Schatten classes on compact manifolds: Kernel conditions [J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 267(3): 772–798.

[25] 丁夏畦. 一类函数空间的性质和应用 [J]. 数学学报, 1960, 10: 1316–1360.

[26] Dixmier J. Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert [J]. Annals of Mathematics, 1950, 51(2): 387–408.

[27] Dodds P G, Dodds K Y, Pagter B D. Non-commutative Banach function spaces [J]. Mathematische Zeitschrift, 1989, 201(4): 583-597.

[28] Dodds P G, Dodds K Y, Pagter B D. Noncommutative Köthe Duality [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 339(2): 717–750.

[29] Dodds P G, Dodds T K, Dowling P N, Lennard C J, Sukochev F A. A uniform Kadec-Klee property for symmetric operator spaces [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1995, 118(3): 487-502.

[30] Dodds P G, Dodds T K, Sukochev F A. Lifting of kadec-klee properties to symmetric spaces of measurable operators [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(125): 1457-1467.

[31] Dodds P G, Dodds T K, Pagter B D. Non-commutative Banach function spaces [J], Mathematische Zeitschrift, 1989, 201(4): 583-597.

[32] El-Fallah O, Ibbaoui M E, Naqos H. Composition operators with univalent symbol in Schatten classes [J]. Journal of Functional Analysis, 2013, 266(3): 1547–1564.

[33] Fack T, Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1986, 123(2): 269–300.

[34] Foralewski P, Hudzik H, Szymaszkiewicz A. Local rotundity structure of Cesaro-Orlicz sequence spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2008, 345(1): 410–419.

[35] Foralewski P, Hudzik H, Szymaszkiewicz A. Some remarks on Cesaro-Orlicz sequence spaces [J], Math. Inequal. Appl, 2010, 2(13): 363–386.

[36] Gapoškin, V. F. The existence of unconditional bases in Orlicz spaces [J]. Funkcional. anal. i Priloen, 1967(4): 26-32.

[37] Gapoškin, V. F. On unconditional bases in Orlicz spaces [J]. Uspekhi. Mat. Nauk, 1967(2): 113–114.

[38] Gelfand I M, Naimark M A. On the imbedding of normed rings into the rings of operators in Hilbert space [J]. Matematicheskii Sbornik, 1943, 12: 197–213.

[39] Gohberg I C, Krein M G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators [M], Translations of Mathematical Monographs, Vol.18. Providence, RI: American Mathematical Society, 1969.

[40] 郭大钧. Urysohn 算子的全连续性 [J]. 中国科学, 1962, 11: 437–452.

[41] Haag R. Local quantum physics [M]. Berlin: Spring, 1996.

[42] Haagerup U, Rosenthal H P, Sukochev F A. Banach Embedding Properties of Non-Commutative L^p-Spaces [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2000, 163(776): 68.

[43] Hudzik H, Maligranda L. Amemiya norm equals Orlicz norm in general, Indag. Math. 2000, 44(4): 573–585.

[44] Hudzik H. Every nonreflexive Banach lattice has the packing constant equal to $\frac{1}{2}$ [J]. Collectanea Mathematica, 2007, 44(1-3): 129–134.

[45] Jones V F R. Polynomial invariants of knots via von Neumann algebra [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1985, 12: 103–111.

[46] Jones V F R. Hecke algebra representations of braid groups and line polynomials [J]. Annals of Mathematics, 1987, 126: 355–388.

[47] Kadison R V. A representation theory for commutative topological algebra [M]. Providence: American Mathematical Society, 1951.

[48] Kadison R V. A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras [J]. Annals of Mathematics, 1952, 56(3): 181–182.

[49] Kaplansky I. A theorem on rings of operators [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1951, 1(2): 227–232.

[50] Kaplansky I. Projections in Banach algebras [J]. Annals of Mathematics, 1951, 53(2): 235–249.

[51] Kaplansky I. The structure of certain operator algebras [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1951, 70: 219–155.

[52] Kawahigashi Y, Longo R. Classification of local conformal nets. Case $c < 1$ [J]. Annals of Mathematics, 2004, 160: 493-522.

[53] Kawakami S, Yoshida H. Actions of finite groups on finite von Neumann algebras and the relative entropy [J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1987, 39: 609–626.

[54] Khamsi M A, Kozlowski W M. Modular Function Spaces [M]. M. Dekker, 1988.

[55] Kottman C A. Packing and reflexivity in Banach spaces [J]. Tran. Amer. Math. Soc, 1970, 150(2): 565–565.

[56] Kozowski W M. Notes on modular function spaces. I [J]. Comment. math. prace Mat, 1988, 28(1): 87-100,101–116.

[57] Krasnoselski M A, Ruticki Ja B. Convex functions and Orlicz spaces [M]. P. Noordhoff, 1961.

[58] Kubiak D. A note on Cesaro-Orlicz sequence spaces [J] J. Math. Anal. Appl, 2009, 349: 291–296.

[59] Kunze W. Noncommutative Orlicz Spaces and Generalized Arens Algebras [J]. Mathematische Nachrichten, 1990, 147(1): 123–138.

[60] Labuschagne L E, Majewski W A. Maps on noncommutative Orlicz spaces [J]. Illinois Journal of Mathematics, 2009, 55(3): 1053–1081.

[61] Labuschagne L E. Multipliers on noncommutative Orlicz spaces [J]. Qua. Math, 2012, 37(4): 531–546.

[62] Lee P Y. Cesaro sequence spaces [J]. Math. Chronicle, New Zealand, 1984, 13: 29–45.

[63] Lefevre P, Li D, Queffélec H, et al. Nevanlinna counting function and Carleson function of analytic maps [J]. Mathematische Annalen, 2011, 351(2): 305–326.

[64] Lefevre P, Li D, Queffélec H, et al. Compact composition operators on the Dirichlet space and capacity of sets of contact points [J]. Journal of Functional Analysis, 2013, 264(4): 895–919.

[65] Lim S K, Lee P Y. An Orlicz extension of Cesaro sequence spaces [J]. Comment. Math. Prace Mat, 1988, 28: 117–128.

[66] Lindenstrauss J, Tzafriri L. On orlicz sequence spaces III [J]. Israel Journal of Mathematics, 1973, 14(4): 368–389.

[67] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach spaces. I. Sequence spaces [M]. Springer-Verlag, 1977.

[68] Longo R. Index of subfactors and statistics of quantum fields. II. Correspondences, braid group statistics and Jones polynomial [J]. Communications in Mathematical Physics, 1990, 130: 285–309.

[69] Lozinski S. On convergence in mean of Fourier series [J]. C. r. acad. sci. urss, 1946: 7–10.

[70] Luxemburg W A. Banach function spaces [M]. Thesis (Delft), 1955.

[71] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation [J]. Seminars in Mathematics Imecc Universidad Estadual De, 1989, 5.

[72] Maligranda L, Petrot N, Suantai S. On the James constant and B-convexity of Cesaro and Cesaro-Orlicz sequence spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2007, 326: 312–331.

[73] Ma Z H, Cui Y A. Some important geometric properties in Cesaro-Orlicz sequence spaces [J]. Advance in Mathematics (Chinese), 2013, 3: 354–348.

[74] Ma Z H, Jiang L N, Xin Q L. Packing constant for Cesàro-Orlicz sequence spaces [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2016,66 (141): 13–25.

[75] Muratov M A. Noncommutative Orlicz-spaces [J]. Dokl. Akad. Nauk. Uzssr, 1978, 6: 11–13.

[76] Murphy G J. C^*-algebras and operator theory [M]. New York: Academic Press, 1990.

[77] Murray F J, von Neumann J. On rings of operators [J]. Annals of Mathematics, 1936, 37: 116–229.

[78] Murray F J, von Neumann J. On rings of operators. II [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1937, 41: 208–248.

[79] Murray F J, von Neumann J. On rings of operators. IV [J]. Annals of Mathematics, 1943, 44: 716–808.

[80] Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1983, 1034(4):1–216.

[81] Nakano H. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces [J]. 1950, 1.

[82] Nelson E. Notes on non-commutative integration [J]. J. Funct. Anal, 1974, 15: 103-116.

[83] Orlicz W. Ubereine Gewisse Klasse Von Raumen Von Typus [J]. B. Bull. Int. Acad Polon. sci. ser. 1932, A: 207–220.

[84] Orlicz W. UberRaume (L^M) [J]. Bull. Acad. Polonaise. 1936, A: 93–107.

[85] Ozawa N, PoPa S. On a class of II $_1$ factors with at most one Cartan subalgebra, II [J]. American Journal of Mathematics, 2008, 132(3): 841–866.

[86] Popa S. On a class of type II $_1$ factors with Betti numbers invariants [J]. Annals of Mathematics, 2002, 163(3): 809–899.

[87] Potapov D, Sukochev F. Operator-Lipschitz functions in Schatten - von Neumann classes [J]. Acta Mathematica, 2011, 207(2): 375–389.

[88] Radon J. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen [J]. Sitz. Akad. Wiss. Wien, 1913, 122: 1295–1438.

[89] Rao M M, Ren Z D. Theory of Orlicz spaces [M]. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc, 1981.

[90] Rankin R A. On packing of sphere in Hillbert space [J]. Proc. Glasgow Math. Assoc, 1955, 2: 145–146.

[91] Rao M M, Ren Z D. Applications of Orlicz spaces [M]. Marcel: Dekker Inc New York, 2002.

[92] Riesz F. Sur la convergence en moyenne I [J]. Acta Sci. Math. 1928, 4: 58–64.

[93] Riesz F. Sur la convergence en moyenne II [J]. Acta Sci. Math. 1928, 4: 182–185.

[94] Sadeghi G. Non-commutative Orlicz spaces associated to a modular on τ-measurable operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 395(2):705–715.

[95] Sadeghi G, Saadati R. On geometrical properties of noncommutative modular function spaces [J]. New York Journal of Mathematics, 2015, 21:759–781.

[96] Saejung S. Another look at Cesaro sequence spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2010, 366: 530–537.

[97] Segal I E. The Group Algebra of a Locally Compact Group [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1947, 61(1):69–105.

[98] Segal I E. A Non-Commutative Extension of Abstract Integration [J]. Ann. Math, 1953, 57(3): 401–457.

[99] Simon B. Trace Ideals and Their Applications [M], London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol.35. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

[100] Sobolev A V. On the Schatten - von Neumann properties of some pseudo-differential operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2013, 266(9): 5886–5911.

[101] Stein E, Weiss G, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

[102] Streater R F. Quantum Orlicz Spaces in Information Geometry [J]. Open Systems and Information Dynamics, 2004, 11(4): 359–375.

[103] Stone M H. A General Theory of Spectra. II [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1940, 26(4):280–283.

[104] Trudinger N S. On Imbedding into Orlicz Spaces and Some Applications [J]. J. Math. Mech, 1967, 17: 473–483.

[105] von Neumann J. Zur algebra der funktionaloperationen und theorie der normalen operatoren [J]. Mathematische Annalen, 1929, 102(1): 370–427.

[106] von Neumann J. On rings of operators. III [J]. Annals of Mathematics, 1940, 41: 94–161.

[107] von Neumann J. On rings of operators. Reduction theory [J]. Annals of Mathematics, 1949, 50: 401–485.

[108] 王廷辅. $B(s)$ 与 $L^M(G)$ 的列紧性 [J]. 数学进展, 1966, 9(3): 287–290.

[109] Webb J R, Zhao W. On connections between set and ball measures of noncompatness [J]. Bull. London Math. Soc, 1990, 22: 471–477.

[110] 吴丛炘, 王廷辅. Orlicz 空间及应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983.

[111] 吴丛炘, 王廷辅, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986.

[112] 吴丛炘, 林萍, 卜庆营李秉彝. 序列空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

[113] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数与泛函分析(下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[114] Xu Q H. Embedding of C_q and R_q into noncommutative L^p-spaces $1 \leq p < q \leq 2$ [J]. Math. Ann, 2006, 335: 109-131.

[115] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换 L^p 空间引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[116] Yeadon F J. Noncommutative L^p-spaces [J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1975, 77: 91–102.

[117] 俞鑫泰. Banach空间几何理论 [M]. 华东师范大学出版社, 1986.

攻读博士学位期间发表论文

1. Lining Jiang, **Zhenhua Ma**. Closed subspaces and some basic topological properties of noncommutative Orlicz spaces [J]. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 2017, DOI 10.1007/s12044-017-0334-7. **(SCI)**
2. **Zhenhua Ma**, Lining Jiang, Kai Ji. Kadec-Klee property for convergence in measure of noncommutative Orlicz spaces [J]. 2017, arXiv:1610.03948v1. **(已投稿JMAA)**
3. **麻振华**, 沈丛丛, 张新. 强 C^*–代数值度量空间及其不动点性质 [J]. 北京理工大学学报: 自然科学版, 2017, (已接收). **(EI)**
4. **Zhenhua Ma**, Lining Jiang, Qiaoling Xin. Packing constant for Cesaro-Orlicz sequence spaces [J], Czechoslovak Mathematical Journal, 66 (141) 2016, 13-25. **(SCI)**
5. **Zhenhua Ma**, Lining Jiang. C*-Algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems [J], Fixed Point Theory and Applications, 2015: 222. **(SCI)**
6. **Zhenhua Ma**, Lining Jiang, Hongkai Sun. C*-algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems [J], Fixed Point Theory and Applications, 2014, 2014: 206. **(SCI)**
7. **麻振华**, 辛巧玲. 算子值度量空间上的不动点定理 [J]. 北京理工大学学报: 自然科学版, 34(10), 2014, 1078-1080. **(EI)**

致 谢

转眼间四年的博士生活即将结束. 在这四年里, 虽然付出了很多的辛苦, 但是我觉得得到更多的是收获. 在本论文将要完稿之际, 向曾经帮助过、支持过我的老师、家人和同学致以真诚的感谢和祝福!

首先, 向我的导师蒋立宁教授表示由衷的感谢和真挚的祝福. 在这四年里蒋老师在学习上给予我很大的帮助, 使我对数学理论知识有了更深层次的理解和认识, 在科研上传授我做学问的方法和技巧, 并与我一起进行分析和讨论, 督促我在科研的道路上走得更远. 通过蒋老师在这四年里对我的教导, 我开始才慢慢走上科研的道路. 学习期间当遇到困难问题时, 蒋老师都会耐心平和、认真细致地教我如何去解决并和我一起探讨. 可以说, 我在博士期间取得的成果和蒋老师的谆谆教诲是分不开的. 在此, 我想再次对蒋老师表示深深的敬意并由衷的感谢老师这四年对我的无私帮助!

同时感谢北京理工大学孙华飞教授、哈尔滨理工大学崔云安教授认真细致地审阅了我的学位论文.

感谢我的母亲和妻子李颜君女士, 是你们在我迷茫的时候给了我极大的鼓励, 谢谢你们在背后一直默默的支持、鼓励着我向前, 特别是 2012 年我在北京脱产学习的一年中, 你们更是付出了太多的辛苦. 为我在校期间安心学习创造了条件, 更不会让我为家里的琐事分心.

最后, 我要感谢数学与统计学院 2013 届全体博士同学, 感谢你们在四年博士期间的陪伴, 在此我对你们再一次表示深深的感谢.