---

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

## Posiedzenie

z dnia 23 stycznia 1932 r.

Stefan Mazurkiewicz.

### Przyczynek do aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa.

Komunikat przedstawiony dnia 23 stycznia 1932 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym podaję nowy układ aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa. Cechą charakterystyczną tego układu jest: 1) że prawdopodobieństwo jest przyporządkowane nie zdarzeniom a zdaniom; 2) że jest ono zrelatywizowane względem zmiennego niesprzecznego układu dedukcyjnego. Ponadto określam pewien uproszczony, trójwartościowy rachunek prawdopodobieństwa i rozpatruję jego stosunek do logiki trójwartościowej.

Stefan Mazurkiewicz.

### Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vorgelegt am 23.I 1932.

Den Ausgangspunkt dieser Mitteilung bildet die bekannte Bohlmann'sche Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]), ich vermeide aber gänzlich den Ereignisbegriff, indem bei mir

1) Bohlmann: Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, vol 3 p. 244 (1909); Bohlmann—Poterin du Motel Encyclopédie d. Sciences Mathématiques I 25 (T. I vol. 4 p. 496—497, 1911)

*nicht Ereignisse, sondern Aussagen* als wahrscheinlich gelten [1]). Ich stütze mich dabei auf die metamathematischen Untersuchungen von Tarski [2]) und erhalte für die Bohlmann'schen Axiome einen *logischen* Unterbau. Es scheint allerdings dass man sich einstweilen auf *diskontinuirliche* Wahrscheinlichkeiten beschränken muss entsprechend der Tatsache, dass die Menge aller sinnvollen Aussagen abzählbar ist [3]).

Sind $x$, $y$ Aussagen, so bezeichne ich nach Tarski mit $n(x)$ die Negation von $x$, mit $c(x, y)$ die Implikation mit dem Vorderglied $x$ und dem Nachglied $y$; ich setze weiter: $x+y= =c(n(x), y)$ und $xy=n(n(x)+n(y))$. Ist $V$ eine Aussagenmenge, so bezeichne ich mit $F(V)$ die Folgerungsmenge von $V$[4]), mit $N(V)$ die Menge $\sum_{x \varepsilon V}(n(x))$ d. h. die Menge der Negationen aller Aussagen aus $V$. Ein deduktives, widerspruchfreies System [5]) nenne ich kurz $\mathfrak{W}$*-System*. Die Aussagen $x$, $y$ heissen *äquivalent in Bezug auf die Aussagenmenge* $V$, in Zeichen: $x \sim y$ (rel. $V$) wenn $F(V+(x))=F(V+(y))$.

Die Axiome sind in zwei Gruppen eingeteilt.

### I. Axiome des Feldes.

Es sei $\Pi$ eine Menge von $\mathfrak{W}$-Systemen, und es sei jedem $U \varepsilon \Pi$ eine Aussagenmenge $M(U)$ eindeutig zugeordnet. Es sei weiter: $Z(U)=U+N(U)+M(U)$. Wir nennen $\Pi$ ein Feld wenn folgende Axiome erfüllt sind.

I, 1 Wenn $x \varepsilon M(U)$, $x \sim y$ (rel. $U$) so ist $y \varepsilon M(U)$
I, 2 $U \times M(U)=0$
I, 3 $M(U)=N(M(U))$
I, 4 Wenn $x \varepsilon M(U)$, $y \varepsilon M(U)$, so ist $(x+y) \varepsilon U+M(U)$
I, 5 Wenn $x \varepsilon M(U)$ so ist $U(x)=F(U+(x)) \varepsilon \Pi$
I, 6 Wenn $x \varepsilon M(U)$ so ist: $M(U(x)) \subset M(U) \subset Z(U(x))$.

[1]) Dieser Standpunkt ist nicht neu, vgl. Reichenbach: Math. Zeitschr. 34 p. 568—618. Die Relativisierungsidee findet sich bei Keynes: *A treatise on Probability*, London 1921 und ebenfalls bei Reichenbach, allerdings in einer wesentlich anderen Fassung.

[2]) Tarski: C. R. Soc. d. Sc. Varsovie Cl. III, XXIII p. 22—29 (1930).

[3]) Tarski: l. c. p. 24, Axiom 1.

[4]) Tarski: l. c. p. 23.

[5]) Tarski: l. c. p. 25, 26.



### II. Axiome der Wahrscheinlichkeit [1]).

Es sei $p(x, U)$ eine reelle, nichtnegative Funktion die für $U \varepsilon \Pi$, $x \varepsilon Z(U)$ definiert ist. Wir nennen sie Wahrscheinlichkeit der Aussage $x$ in Bezug auf das System $U$, wenn folgende Axiome gelten:

II, 1 $p(x, U)=1$ für $x \varepsilon U$
II, 2 Wenn $xy \varepsilon N(U)$ so ist: $p(x+y, U)=p(x, U)+p(y, U)$
II, 3 Wenn $x \varepsilon U+M(U)$ so ist: $p(xy, U)=p(x, U)p(y, U(x))$.

Betrachtet man z. B. ein Glücksspiel, so kann das Feld $\Pi$ etwa in folgender Weise bestimmt werden. Es sei $U_0$ das System der Logik und Arithmetik + die Gesammtheit der Spielregeln. $M(U_0)$ sei die Menge der möglichen (also den Regeln nicht widersprechenden) Spielergebnisse. $\Pi$ besteht aus $U_0$ sowie aus allen $\mathfrak{W}$-Systemen die aus $U_0$ durch Adjunktion der Elemente von $M(U_0)$ und die Operation $F$ entstehen.

Es scheint auch, dass sich das „Prinzip des mangelnden Grundes", relativisiert im Bezug auf ein $\mathfrak{W}$-System, exakt formulieren lässt, was mir aber zurzeit noch nicht gelungen ist".

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheint von diesem Standpunkt aus als eine Art mehrwertiger Aussagerechnung, und es entsteht naturgemäss die Frage ihrer Beziehungen zur mehrwertigen Logik von Łukasiewicz [2]). Ich werde im folgenden ein besonderes Feld und eine vereinfachte „dreiwertige Wahrscheinlichkeitsrechnung" in Bezug auf ihr Verhältnis zur dreiwertigen Logik untersuchen.

Es sei $S$ die Menge aller sinnvollen Aussagen, $\Pi$ die Menge aller in $S$ enthaltenen $\mathfrak{W}$-Systeme; wir setzen für $U \varepsilon \Pi$:

$$M(U)=S-[U+N(U)]; \quad Z(U)=S$$

$\Pi$ ist offenbar ein Feld.

Die Axiome der zweiten Gruppe ersetzen wir durch:

III, 1 $p(x, U)=1$ für $x \varepsilon U$
III, 2 $p(x, U)=0$ für $x \varepsilon N(U)$
III, 3 $p(x, U)=\frac{1}{2}$ für $x \varepsilon M(U)$.

[1]) Ich hatte ursprünglich noch folgendes Axiom angenommen: wenn $x \sim y$ (rel. $U$) so ist $p(x, U)=p(y, U)$. Tarski hat aber bewiesen dass dieses Axiom eine Konsequenz der übrigen ist.

[2]) Łukasiewicz: C. R. Soc. d. Sc. Varsovie Cl. III, XXIII p. 51—77.

Nun bilden wir für ein festes $U$ die Matrix welche die Wahrscheinlichkeiten der Aussagen $n(x)$ und $c(x, y)$ angiebt:

| $c$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ oder $1$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $0$ |

Der Unterschied gegenüber der Matrix der dreiwertigen Logik liegt darin, dass in der dreiwertigen Logik $c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$; dagegen für $x \varepsilon M(U)$, $y \varepsilon M(U)$ ist $p(c(x, y), U)$ gleich $\frac{1}{2}$ oder $1$ (für $y = n(x)$ erhalten wir $\frac{1}{2}$, für $y = x$ dagegen 1).

---

F. Leja.

## O spółczynnikach zbieżności szeregów funkcyj analitycznych.

Komunikat zgłoszony dnia 23 stycznia 1932 r.

## Sur les facteurs de convergence des séries des fonctions analytiques.

Mémoire présenté dans la séance du 23 janvier 1932.

Niech będzie dany szereg

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

którego wyrazy $f_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, są funkcjami analitycznemi, regularnemi w pewnym obszarze $D$.

Nazwijmy *czynnikiem zbieżności szeregu* (1) *w obszarze* $D$ górny kres $\lambda_D$ zbioru wszystkich liczb nieujemnych $l$, dla których szereg

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \cdot l^n \tag{2}$$

jest *jednostajnie* zbieżny w każdym obszarze domkniętym, zawartym wewnątrz obszaru $D$.

Każdy szereg funkcyjny postaci (1), którego wyrazy są określone w obszarze $D$, posiada w myśl tej definicji określony



czynnik zbieżności $\lambda_D$, który może być liczbą dodatnią, zerem lub nieskończonością. Przedmiotem tego komunikatu jest pytanie:

Jaki jest czynnik zbieżności $\lambda_D$ szeregu (1), gdy szereg ten jest zbieżny w obszarze $D$?

Zauważmy najpierw, że $\lambda_D \geqq 1$, gdy szereg (1) jest jednostajnie zbieżny w obszarze $D$, co wynika wprost z określenia czynnika $\lambda_D$. Podobną własność posiada szereg (1) w przypadku zbieżności niejednostajnej, ale pod założeniem, że wyrazy tego szeregu są funkcjami mniej ogólnemi. W jednym z komunikatów, ogłoszonych gdzieindziej, [1]) zwróciłem uwagę na następującą własność szeregów wielomianów:

Jeżeli szereg wielomianów

$$\sum_{0}^{\infty} P_n(z) = \sum_{0}^{\infty} (a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots + a_n^{(n)} z^n), \tag{3}$$

którego $n$-ty wyraz jest wielomianem co najwyżej $n$-go stopnia, jest zbieżny prawie wszędzie na okręgu pewnego koła $|z - a| = r$, [2]) to jego czynnik zbieżności wewnątrz tego koła jest nie mniejszy od jedności.

Wynika stąd bezpośrednio następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Jeśli szereg* (1) *jest zbieżny prawie wszędzie* [3]) *w obszarze $D$, a przytem $f_n(z)$ jest wielomianem stopnia $\leqq n$, to czynnik $\lambda_D$ tego szeregu jest nie mniejszy od jedności.*

W przypadku jednak, gdy funkcje analityczne $f_n(x)$ są dowolne, a zbieżność szeregu (1) nie jest jednostajna, czynnik $\lambda_D$ nie musi być $\geqq 1$. Nie mniej jednak i wówczas czynnik ten nie może być dowolny, można bowiem dowieść co następuje:

**Twierdzenie 2.** *Jeśli szereg* (1) *jest zbieżny prawie wszędzie w obszarze $D$* [4]), *to jego czynnik $\lambda_D$ albo jest równy zeru, albo nie jest mniejszy od jedności.*

---

[1]) C. R. t. 193, 1931, p. 764—766.

[2]) Wystarczy założyć, że ciąg wyrazów szeregu (3) jest ograniczony prawie wszędzie na okręgu koła $|z - a| = r$.

[3]) Wystarczy, gdy do każdego punktu $P$ obszaru $D$ istnieje koło do którego wnętrza należy punkt $P$ i na którego okręgu ciąg $\{f_n(z)\}$ jest prawie wszędzie ograniczony.

[4]) Wystarczy założyć, że w każdem otoczeniu dowolnego punktu $P$ obszaru $D$ istnieje koło, do którego wnętrza należy punkt $P$ i na którego ogręgu ciąg wyrazów $\{f_n(z)\}$ szeregu (1) jest prawie wszędzie ograniczony.