УДК 517.98

А.М.Меджитов

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В связи с развитием теории некоммутативного интегрирования в последние годы стали интенсивно исследоваться различные классы банаховых пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана. Важное место среди этих пространств занимают симметричные пространства [1;2], являющиеся некоммутативными аналогами классических функциональных симметричных пространств. Одним из полезных результатов теории функциональных симметричных пространств является описание свойства сепарабельности на языке порядковой непрерывности нормы пространства [3]. В настоящей работе аналогичный результат устанавливается для симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к непрерывной полуконечной алгебре фон Неймана счетного типа.

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана, τ – точный полуконечный нормальный след на $\mathcal{M}$. Обозначим через $C_0(\mathcal{M},\tau)$ совокупность всех измеримых операторов A, для которых $\tau(1-E(\lambda))<\infty$ при всех $\lambda>0$ [4]. Здесь $E(\lambda)$ – спектральная функция оператора $|A|$. Под перестановкой оператора $A\in C_0(\mathcal{M},\tau)$ понимается функция

$$\tilde{A}(\alpha)=\inf\{\lambda>0:\tau(1-E(\lambda))<\alpha\},\quad \alpha>0$$

Симметричным пространством на алгебре $\mathcal{M}$ называется такое банахово пространство $E\subset C_0(\mathcal{M},\tau)$, когда из $A\in E$, $B\in C_0(\mathcal{M},\tau)$ и $\tilde{B}(\alpha)\le\tilde{A}(\alpha)$ следует $B\in E$ и $\|B\|_E\le\|A\|_E$. Из свойств перестановок [4] вытекает, что всякое симметричное пространство идеально.

Пусть E – симметричное пространство на $\mathcal{M}$, $\mathfrak{A}$ – коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$, такая, что сужение τ на $\mathfrak{A}_+$ есть полуконечный след на $\mathfrak{A}$ (сохраним для него обозначение τ). Тогда $E_{\mathfrak{A}}=E\cap C_0(\mathfrak{A},\tau)$ с нормой, индуцированной из E, есть коммутативное симметричное пространство.

Норму симметричного пространства E будем называть порядково непрерывной, если в E выполнено условие (A): $\{A_n\}\subset E$, $0\le A_n\downarrow 0$ следует $\|A_n\|_E\to 0$ при $n\to\infty$.

Далее будем предполагать, что $\mathcal{M}$ – полуконечная непрерывная алгебра фон Неймана счетного типа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – симметричное пространство на $\mathcal{M}$.

следующие условия эквивалентны:

1) в E выполнено условие $(\mathcal{A})$;

2) если $\{\mathcal{A}_n\}$ - последовательность попарно коммутирующих операторов из E и $0 \leq \mathcal{A}_n \downarrow 0$, то $\|\mathcal{A}_n\|_E \to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь импликация $2 \Rightarrow 1$. Пусть $\{\mathcal{A}_n\} \subset E$, $0 \leq \mathcal{A}_n \downarrow 0$ и $\{P_n\}$ - такая последовательность попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{M}$, коммутирующих с $\mathcal{A}_1$, что $\mathcal{A}_1 P_n \in \mathcal{M}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ и $\tau(P_n) < \infty$. Обозначим через $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ максимальную коммутативную подалгебру фон Неймана в $\mathcal{M}$, содержащую $\{P_n\}$ и спектральное семейство оператора $\mathcal{A}_1$. Тогда $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ непрерывна и след τ полуконечен на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. Положим $Q_k = \sum\limits_{n=1}^{k} P_n$ и рассмотрим последовательность $\{\mathcal{A}_1 Q_k^{\perp}\}_{k=1}^{\infty}$ из $E_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$. Так как $Q_k^{\perp} \downarrow 0$, то $\mathcal{A}_1 Q_k^{\perp} \downarrow 0$ и поэтому $\|\mathcal{A}_1 Q_k^{\perp}\|_E \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку $Q_k^{\perp} \mathcal{A}_n Q_k^{\perp} \leq Q_k^{\perp} \mathcal{A}_1 Q_k^{\perp}$, то $\|Q_k^{\perp} \mathcal{A}_1 Q_k^{\perp}\| \to 0$ при $k \to \infty$ и каждом фиксированном n. Пусть $\varepsilon > 0$ и номер k_0 такой, что при $k > k_0$ $\|Q_k^{\perp} \mathcal{A}_1 Q_k^{\perp}\|_E < \varepsilon/4$. Зафиксируем $k > k_0$. Так как $Q_k \mathcal{A}_1 Q_k \in \mathcal{M}$, то последовательность $\{Q_k \mathcal{A}_n Q_k\}_{n=1}^{\infty}$ лежит в непрерывной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}_0 = Q_k M Q_k$. В силу точности следа τ проектор Q_k конечен, поэтому алгебра $\mathcal{M}_0$ конечна. Положим, $E_0 = E \cap L_1(\mathcal{M}_0)$. Тогда E_0 с индуцированной из E нормой есть симметричное пространство на $\mathcal{M}_0$. В силу теоремы 2 [5] в E_0 выполнено условие $(\mathcal{A})$, поэтому $\|Q_k \mathcal{A}_n Q_k\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть при $n > n_0$ $\|Q_k \mathcal{A}_n Q_k\|_E < \varepsilon/4$. В силу неравенства $\mathcal{A}_n \leq 2(Q_k \mathcal{A}_n Q_k + Q_k^{\perp} \mathcal{A}_n Q_k^{\perp})$ [6], получаем $\|\mathcal{A}_n\|_E < \varepsilon$ при $n > n_0$. Таким образом, $\|\mathcal{A}_n\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Известно [7], что на $C_0(\mathcal{M}, \tau)$ существует метрика ρ, сходимость в которой совпадает со сходимостью по мере, причем (C_0, ρ) - полное метрическое пространство. Обозначим через $\mathcal{P}_0$ множество всех проекторов $P \in \mathcal{M}$, для которых $\tau(P) < \infty$. След τ назовем сепарабельным, если метрическое пространство $(\mathcal{P}_0, \rho)$ сепарабельно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пространство (C_0, ρ) сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабелен след τ.

Доказательство предложения непосредственно вытекает из спектральной теоремы для самосопряженных операторов. Обозначим через S совокупность всех простых операторов из $\mathcal{M}$ [2], а через $\mathcal{F}$ – идеал элементарных операторов [8]. Очевидно $S \subset \mathcal{F}$, кроме того, для любого симметричного пространства $E \neq \{0\}$ имеем $\mathcal{F} \subset E$.

ЛЕММА I. Пусть E – симметричное пространство с условием ($\mathcal{A}$). Тогда линейная оболочка S плотна в E по норме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что произвольный положительный оператор $A \in E$ входит в замыкание линейной оболочки S. В силу условия ($\mathcal{A}$) оператор A является пределом по норме последовательности $A_n = A(E(n) - E(\frac{1}{n}))$ операторов из $\mathcal{F}$, где $E(\lambda)$ – спектральная функция оператора A. Поэтому можно считать, что A – элементарный оператор. Если P – носитель оператора A, то $\mathfrak{A} = P\mathcal{M}P$ – конечная непрерывная алгебра фон Неймана. Легко видеть, что в $E_{\mathfrak{A}}$ выполнено условие ($\mathcal{A}$), и утверждение леммы вытекает из предложения 2.1.16 [6].

Обозначим через $\psi_E(\alpha)$ фундаментальную функцию пространства E [7].

ЛЕММА 2. Пусть E – симметричное пространство на $\mathcal{M}$, и $\psi_E(+0) = 0$. Если последовательность $\{P_n\}$ проекторов из E сходится к проектору $P \in E$ по мере, то $P_n \to P$ по норме E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n \to P$ по мере. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что существует такая последовательность $\{Q_n\}$ проекторов из $\mathcal{M}$, что $\tau(Q_n^{\perp}) \to 0$ и $\|(P_n - P)Q_n\|_\infty < 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть δ – константа вложения пространства $L_1(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}$ в E [1]. Имеем

$$\|P_n - P\|_E \leq \|(P_n - P)Q_n\|_E + \|(P_n - P)Q_n^{\perp}\|_E \leq$$
$$\leq \delta \|(P_n - P)Q_n\|_{L_1 \cap \mathcal{M}} + \|(P_n - P)Q_n^{\perp}\|_E$$

Покажем, что оба слагаемых в правой части неравенства стремятся к нулю:

$$\|(P_n - P)Q_n^{\perp}\|_E \leq \|P_n - P\|_\infty \cdot \|Q_n^{\perp}\|_E \leq 2\psi_E(\tau(Q_n^{\perp})) \to 0$$

Далее по определению нормы в пространстве $L_1(\mathcal{M}) \cap \mathcal{M}$

$$\|(P_n - P)Q_n\|_{L_1 \cap \mathcal{M}} = \max\{\|(P_n - P)Q_n\|_\infty, \|(P_n - P)Q_n\|_1\}$$

Достаточно показать, что $\|(P_n - P)Q_n\|_1 \to 0$. Имеем

$(P_n-P)^{\sim}(\alpha)\to 0$ для всех $\alpha>0$. Пусть $\beta>\tau(P)$, тогда, согласно свойству перестановок [4], $\widetilde{P}_n(\alpha+\beta)\leqslant(P_n-P)^{\sim}(\alpha)$ для $\alpha>0$. Следовательно, $\widetilde{P}_n(\alpha+\beta)\to 0$ для всех $\alpha>0$. Но $\widetilde{P}_n(\alpha)$ есть характеристическая функция интервала $(0,\tau(P_n)]$, и если $\widetilde{P}_n(\alpha)<1$, то $\tau(P_n)<\alpha$. Это означает, что последовательность $\tau(P_n)$ ограничена.

Пусть число z таково, что $\tau(P)<z$ и $\tau(P_n)<z$ при всех n. В силу свойства перестановок [4] имеем:

$$[(P_n-P)Q_n]^{\sim}(\alpha)\leqslant(P_n-P)^{\sim}(\alpha)\leqslant\widetilde{P}_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\widetilde{P}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

при $\alpha>2z$. Кроме того, $[(P_n-P)Q_n]^{\sim}(\alpha)\leqslant\|(P_n-P)Q_n\|_{\infty}\leqslant 2^{-n}$. Следовательно,

$$\int_0^{2z}[(P_n-P)Q_n]^{\sim}(\alpha)\,d\alpha\leqslant z\cdot 2^{-n+1},\quad n=1,2,\ldots$$

Так как

$$\|(P_n-P)Q_n\|_1=\int_0^{\infty}[(P_n-P)Q_n]^{\sim}(\alpha)\,d\alpha=\int_0^{2z}[(P_n-P)Q_n]^{\sim}(\alpha)\,d\alpha$$

то $\|(P_n-P)Q_n\|_1\to 0$, $n\to\infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – симметричное пространство на $\mathcal{M}$. Если E сепарабельно, то:

1) след τ сепарабелен;

2) в E выполнено условие $(\mathcal{A})$;

3) $\psi_E(+0)=0$;

4) $\mathcal{F}$ плотно в E по норме;

5) для любого положительного оператора $A=\int_0^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$ из E $\|(A-\lambda\mathbb{1})^{+}\|_E\to 0$ при $\lambda\to\infty$ и $\|AE(\lambda)\|_E\to 0$ при $\lambda\to 0$.

Обратно, пусть: а) выполнены условия I и 2; б) выполнены условия I, 3 и 4; в) выполнены условия I, 3 и 5. Тогда справедливость любого из предложений а), б), в) влечет сепарабельность E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство E сепарабельно.

I. Если d – метрика, порожденная нормой E, то метрическое пространство $(\mathcal{P},d)$ сепарабельно. Следовательно, $(\mathcal{P},\rho)$ сепарабельно, так как топология сходимости по мере слабее топологии нормы.

2. Пусть $\{A_n\} \subset E$ – последовательность попарно коммутирующих операторов, $0 \leq A_n \downarrow 0$ и $\mathfrak{A}$ – максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$, содержащая спектральные семейства всех операторов A_n. Тогда $\{A_n\}$ принадлежит пространству $E_{\mathfrak{A}}$, которое изоморфно некоторому сепарабельному симметричному пространству измеримых функций. Следовательно, в $E_{\mathfrak{A}}$ выполнено условие (A) [3]. Значит, $\|A_n\|_E \to 0$ и, в силу теоремы I, в E выполнено условие (A).

3. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$. В силу непрерывности алгебры $\mathcal{M}$ в ней найдется монотонно убывающая последовательность проекторов $\{P_n\}$ такая, что $\tau(P_n)=\varepsilon_n$. Из нормальности и точности τ следует, что $P_n \downarrow 0$. Согласно условию (A) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_E(\varepsilon_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\|_E = 0$. В силу произвольности $\{\varepsilon_n\}$ $\psi_E(+0)=0$.

4. Если A – положительный оператор из E, $A=\int \lambda\, dE(\lambda)$, то последовательность $A_n = A(E(n) - E(\frac{1}{n}))$ из $\mathcal{F}$ сходится к A по норме в силу условия (A).

5. Свойство 5 вытекает непосредственно из условия (A).

Докажем вторую часть теоремы.

а) Пусть след τ сепарабелен и в E выполнено условие (A). Пусть Ω – счетное плотное множество в $(\mathcal{P}_0, \rho)$. Положим

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{m} (r_k + i s_k) P_k, \ P_k \in \Omega \right\},$$

где r_k, s_k – рациональные числа, $m = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что G – счетное множество. В силу леммы I достаточно показать, что замыкание множества G по норме содержит множество S простых операторов. Пусть $x \in S$, то есть $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}_0$, $P_k P_j = 0$, при $k \neq j$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Из сепарабельности τ вытекает существование таких последовательностей $\{P_{n,k}\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, $k=1,2,\ldots$, что $P_{n,k} \to P_k$ по мере при $n \to \infty$. В силу леммы 2, $\|P_{n,k} - P_k\|_E \to 0$. Теперь легко видеть, что x принадлежит замыканию G.

б) Пусть след τ сепарабелен, $\mathcal{F}$ плотно в E по норме и $\psi_E(+0)=0$. Обозначим через $\mathcal{D}$ линейную оболочку множества $\mathcal{P}_0$. Множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{F}$ по нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_{\infty}$ и, следовательно, по норме пространства $L_1(\mathcal{M})\cap\mathcal{M}$. Значит, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{F}$ по норме E. С другой стороны, в силу леммы 2 замыкание множества G по норме E содержит $\mathcal{D}$.

в) В силу 2 из условия 5 вытекает условие 4. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1 Овчинников В.И. Симметричные пространства измеримых операторов // ДАН СССР. 1970. Т.191, № 4. С.769-771.

2 Yeadon F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras: II - Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1980. V 88. P. 135-142

3 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

4 Овчинников В.И. О s-числах измеримых операторов // Функциональный анализ. 1970. Т.4. Вып.3, С.78-85.

5 Сукочев Ф.А. (en)-инвариантные свойства симметричных пространств измеримых операторов // ДАН УзССР. 1985. № 7. С.6-8.

6 Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов: Дис. канд.физ.-мат. наук. Ташкент: ТашГУ, 1979. 132 с.

7 Овчинников В.И. Симметричные пространства измеримых операторов // Труды/ НИИ матем. ВГУ, 1971, № 3. С.88-107.

8 Segal I.E. A non-commutative extension of abstract integration - Ann. Math. 1953. V 57. P 401-457