МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЗБЕКСКОЙ ССР

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

МЕДЖИТОВ Артур Максутович

УДК 517.98

НЕКОММУТАТИВНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ИЗОМЕТРИИ

01.01.01 - математический анализ

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

А. Меджит

Научный руководитель :
кандидат физико-математических
наук. доцент В.И.ЧИЛИН

Ташкент - 1988

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению банаховых операторных алгебр было положено в 30-40-х годах серией основополагающтх работ Ф.Дж.Мюррея и Дж. фон Неймана [81 - 83, 85] , в которых были исследованы слабо замкнутые инволютивные подалгебры алгебры $B(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , названные впоследствии алгебрами фон Неймана. Дальнейшее развитие теория этих алгебр получила в работах Ж.Диксмье, И.Сигала, Х.Дая, Ш.Сакаи, М.Такесаки, М.Томита, А.Конна и других и в последнее время представляет собой обширную и интенсивно развивающуюся часть общей теории банаховых алгебр, богатую интересными и глубокими результатами, насыщенную разветвленными связями со многими разделами математики и математической физики.

В фундаментальной работе И.Сигала [92] было введено кольцо измеримых операторов , присоединенных к алгебре фон Неймана, которое является естественным некоммутативным аналогом кольца измеримых функций на пространстве с мерой.
Работы И.Сигала и Ф.Стайнспринга [94] положили начало развитию теории интегрирования на алгебрах фон Неймана для следов и весов, являющейся некоммутативным вариантом классической теории меры и интегрирования. За последние два десятилетия эта теория, называемая теперь теорией некоммутативного интегрирования, пополнилась целым рядом новых результатов [26,28, 31, 36 - 40 , 43-45, 58, 61, 66, 67, 73, 101] и продолжает интенсивно развиваться. Следует также указать на исследования,

связанные с построением теории неассоциативного интегрирования на йордановых операторных алгебрах [I, 4I] .

Развитие теории некоммутативного интегрирования привело к необходимости изучения нового класса банаховых пространств - симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Впервые некоммутативные симметричные пространства, ассоциированные с алгебрами фон Неймана, отличными от $B(H)$, рассматривались в работах В.И.Овчинникова [29,30] . Дальнейшему изучению свойств таких пространств посвящены работы [I03, 32-35] . В случае алгебры $B(H)$ класс некоммутативных симметричных пространств совпадает с классом симметрично-нормированных идеалов компактных операторов, которые изучались в монографиях Р.Шаттена [9I] и И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [7] .

Наиболее интересными и содержательными примерами симметричных пространств измеримых операторов являются некоммутативные L_p -пространства, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Геометрические, порядковые и топологические свойства этих пространств подробно изучались в работах [25,26,30,36-38, 42,57,59,66,67,72.73,74,80,I02] .

Одним из важных вопросов в развивающейся теории некоммутативных симметричных пространств является их изоморфная и изометрическая классификация. В связи с этим возникает необходимость исследования структуры изометрических отображений таких пространств. Статья С.Банаха [48], в которой выясняется общий вид изометрий пространства $L_p[0,1]$, положила начало большой серии работ, характеризующих изометрии различных классов коммутативных и некоммутативных симметричных пространств [2,3,4,8-10,46,47,49,50,52,53,55,62,64,65,68,70, 71,75,78,79,86,87-89,93,98,99,104].

Настоящая работа продолжает исследования в указанном направлении.

Целью работы является:

1) изучение порядковых и топологических свойств некоммутативных симметричных пространств;
2) описание максимальных и минимальных некоммутативных симметричных пространств;
3) описание положительных изометрий из симметричного во вполне симметричное пространство измеримых операторов;
4) описание изометрий некоммутативных пространств Лоренца;
5) описание изометрий симметричных пространств, ассоциированных с атомическими алгебрами фон Неймана.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации. Она состоит из восьми параграфов. В § I приведены основные определения, обозначения и необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся теории операторных алгебр, теории некоммутативного интегрирования и теории симметричных пространств. Остальные семь параграфов разбиты на две главы.

Результаты § 2 посвящены изучению порядковых свойств нормы (таких, как порядковая непрерывность и полунепрерывность, монотонная полнота, полная симметричность) некоммутативного симметричного пространства на непрерывной полуконечной алгебре фон Неймана и их связи с соответствующими свойствами функционального прототипа данного пространства.

В § 3 получен ряд необходимых и достаточных условий сепарабельности некоммутативного симметричного пространства, ассоцированного с непрерывной полуконечной алгеброй фон Неймана.

В § 4 предлагается описание максимальных и минимальных некоммутативных симметричных пространств в терминах симметрического нормирующего функционала. Истоком этой задачи явились соответствующие результаты, полученные в монографии И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [7] для симметрично-нормированных идеалов компактных операторов.

В § 5 основные результаты §§ 2 и 3 доказаны для симметричных пространств, ассоциированных с атомическими алгебрами фон Неймана.

Глава II посвящена изучению общего вида линейных изометрий некоторых классов некоммутативных симметричных пространств.

В § 6 исследуются положительные изометрии из симметричного во вполне симметричное пространство измеримых операторов на конечных непрерывных алгебрах фон Неймана.

В § 7 дается описание изометрий некоммутативных пространств Лоренца на конечных непрерывных алгебрах фон Неймана.

В § 8 выясняется общий вид изометрий сепарабельного симметричного пространства на полуконечной атомической алгебре фон Неймана. Используемый при этом метод, впервые примененный Г.Лимером [78, 79] для характеризации изометрий функциональных пространств Орлича, требует описания множества всех эрмитовых операторов, действующих в данном пространстве.

В диссертации все утверждения внутри каждого параграфа нумеруются подряд с первой цифрой, обозначающей номер параграфа. Список литературы содержит 104 наименования советских и зарубежных авторов.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [14 - 22]. В совместных работах Ф.А.Сукочеву принадлежит следующее: в работе [I9] - лемма I, в работе [20] - результаты § 2 и леммы 3.I и 3.2.

Результаты диссертации докладывались на конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока (Новосибирск, I987 г.), на ХП школе по теории операторов в функциональных пространствах (Тамбов, I987 г.), на семинаре кафедры математического анализа Ленинградского государственного университета (I988 г.), на городском семинаре по функциональному анализу при кафедре функционального анализа ТашГУ им. В.И.Ленина (I985-I988 гг.), на конференциях молодых ученых ТашГУ им. В.И.Ленина (I984 - - I987 гг.), на конференции молодых ученых Института математики им. В.И.Романовского АН УзССР (I986 г.).

Основные положения, выносящиеся на защиту:

I. Изучены различные топологические и порядковые свойства некоммутативных симметричных пространств на полуконечных непрерывных и атомических алгебрах фон Неймана и их связь с соответствующими свойствами функциональных прототипов этих пространств.

2. Получено описание минимальных и максимальных некоммутативных симметричных пространств.

2. Установлен общий вид положительных изометрий из симметричного во вполне симметричное пространство измеримых операторов, а также общий вид изометрий некоммутативных пространств Лоренца.

4. Описаны эрмитовы операторы и изометрии симметричных пространств на атомических алгебрах фон Неймана.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю Владимиру Ивановичу Чилину за постоянное внимание и большую помощь при работе над диссертацией.

§ I. Определения, обозначения и предварительные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории алгебр фон Неймана, теории некоммутативного интегрирования и теории симметричных пространств. Подробнее см. [5, I3, 28-30, 3I, 60, 76, 90, 92, 95, 97, I02, I03].

I. Алгебры фон Неймана

Пусть H - гильбертово пространств, $B(H)$ - алгебра всех линейных ограниченных операторов в H. Для всякого подмножества A в $B(H)$ символом A' обозначается его коммутант, т.е. множество всех операторов из $B(H)$, коммутирующих со всеми операторами из A. Очевидно, A' является банаховой алгеброй операторов, содержащей единичный оператор $\mathbb{1}$. Алгеброй фон Неймана называется такая $*$-подалгебра A в $B(H)$, что $A=A''$. Центр $Z(A)$ алгебры фон Неймана A определяется равенством $Z(A)=A\cap A'$. Алгебра фон Неймана называется фактором, если ее центр тривиален, т.е. если $Z(A)=\mathbb{C}\mathbb{1}$, где $\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел.

Частичный порядок на A определяется конусом положительных элементов $A_+=\{x^*x,\ x\in A\}$.

Следом на алгебре фон Неймана A называется функционал τ на положительном конусе A_+ со значениями в $[0,+\infty]$ удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y)$, $x,y\in A_+$;

2) $\tau(\lambda x)=\lambda\tau(x)$, $\lambda\geqslant 0$, $x\in A_+$;

3) $\tau(x^*x)=\tau(xx^*)$, $x\in A$

с обычным соглашением $0\cdot(+\infty)=0$. След τ называется точным, если $\tau(x)>0$ для любого ненулевого $x\geqslant 0$, полуконечным, если каждый ненулевой $x\in A_+$ мажорирует некоторый ненулевой $y\geqslant 0$ такой, что $\tau(y)<+\infty$, конечным, если $\tau(\mathbb{1})<+\infty$, нормальным, если $\tau(\sup x_i)=\sup\tau(x_i)$ для любой ограниченной возрастающей сети $\{x_i\}$ в A_+.

Два проектора e и f из алгебры фон Неймана A называются эквивалентными (обозначение: $e\sim f$), если существует элемент $u\in A$ такой, что $u^*u=e$, $uu^*=f$. Для данного элемента $x\in A$ наименьший проектор $e\in A$ со свойством $ex=x$ называется левым носителем x и обозначается $l(x)$. Правый носитель $r(x)$ есть наименьший проектор f из A со свойством $xf=x$. Для любого $x\in A$ имеем $l(x)\sim r(x)$. Для самосопряженных операторов $x\in A$ левый носитель совпадает с правым и называется просто носителем оператора x. Центральным носителем оператора $x\in A$ называется минимальный проектор $z\in Z(A)$ со свойством $zx=x$.

Точная верхняя грань проекторов $e,f\in A$ обозначается $e\vee f$.

Оператор $x\in A$ называется элементарным, если его левый (а значит, и правый) носитель имеет конечный след. Совокупность $\mathcal{F}$ всех элементарных операторов из A образует двусторонний идеал в A. Оператор $x\in A$ называется простым, если он имеет вид $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k p_k$, где $\lambda_k\in\mathbb{C}$, p_k - попарно ортогональные проекторы из $\mathcal{F}$.

Для оператора $x \in A$ положим $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}(x + x^*)$ $\operatorname{Im} x = \frac{i}{2}(x^* - x)$. Самосопряженные операторы $\operatorname{Re} x$ и $\operatorname{Im} x$ называются соответственно вещественной и мнимой частью оператора x . Всякий самосопряженный оператор $x \in A$ можно единственным образом представить в виде $x = x_+ - x_-$, где $x_+, x_- \in A_+$ и $x_+ x_- = 0$. Положительные операторы x_+ и x_- называются соответственно положительной и отрицательной частью оператора x . Каждый оператор $x \in A$ единственным образом представляется в виде $x = u|x|$ (полярное разложение оператора x), где $|x| \geq 0$, $u^* u = r(x)$ и $u u^* = l(x)$. Оператор $|x|$ называется модулем оператора x и $|x| = (x^* x)^{1/2}$.

Проектор e в алгебре фон Неймана A называется конечным, если $e \sim p \leq e$ влечет $e = p$. Алгебру A называют полуконечной, если всякий проектор в A содержит ненулевой конечный проектор. Алгебра A конечна, если $\mathbb{1}$ - конечный проектор. Полуконечность алгебры A эквивалентна существованию на ней точного нормального полуконечного следа.

Алгебра фон Неймана A называется σ - конечной или алгеброй счетного типа, если мощность любого набора ее взаимно ортогональных проекторов не провосходит мощности счетного множества. Фактор A называют фактором типа I , если он содержит ненулевой минимальный проектор. Всякий фактор типа I изоморфен алгебре $B(H)$ для некоторого гильбертова пространства H .

Алгебра A называется непрерывной, если в ней нет ненулевых минимальных проекторов, и атомической, если каждый проектор из A мажорирует некоторый ненулевой минимальный проектор.

Пусть A - алгебра фон Неймана, τ - точный полуконечный нормальный след на A. Подалгебру фон Неймана B в A назовем собственной, если сужение τ на B_+ является полуконечным следом на B.

П р е д л о ж е н и е I.I. Пусть A - непрерывная алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Тогда в A существует собственная непрерывная коммутативная подалгебра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью леммы Цорна построим семейство $\{e_i\}_{i\in I}$ попарно ортогональных ненулевых проекторов таких, что $\tau(e_i)<\infty$ для всех $i\in I$ и $\sum\limits_{i\in I} e_i=\mathbb{1}$. Обозначим через B максимальную коммутативную подалгебру фон Неймана в A, содержащую семейство $\{e_i\}_{i\in I}$. Пусть $\mathfrak{A}$ - множество конечных наборов индексов из I, и пусть $p_\alpha=\sum\limits_{i\in\alpha} e_i$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Если $x\in B_+$, $x\neq 0$, то существуют ненулевой проектор $q\in B$ и число $\lambda>0$ такие, что $\lambda q\leq x$. Среди проекторов p_α найдется проектор p_{α_0}, для которого $qp_{\alpha_0}\neq 0$, ибо в противном случае $q=\lim\limits_{\alpha} qp_\alpha=0$ (предел в сильной операторной топологии).
Имеем $\lambda q p_{\alpha_0}\leq\lambda q\leq x$ и $\tau(\lambda q p_{\alpha_0})<\infty$, т.е. сужение τ на B_+ есть полуконечный след на B. Непрерывность алгебры B вытекает из ее максимальности и непрерывности A.

В теории операторных алгебр важную роль играет спектральная теорема.

Теорема 1.2. Для всякого самосопряженного оператора x в гильбертовом пространстве H существует единственная операторная функция $e(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, обладающая следующими свойствами:

1) $e(\lambda)$ - проектор из $B(H)$;

2) $e(\lambda)e(\mu)=e(\lambda)$ при $\lambda\le\mu$;

3) $e(\lambda)$ коммутирует с каждым оператором $y\in B(H)$, коммутирующим с x;

4) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e(\lambda)\xi=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e(\lambda)\xi=\xi$ для любого $\xi\in H$;

5) $e(\lambda)\xi$ - непрерывная слева функция при любом $\xi\in H$;

6) ξ принадлежит области определения $\mathcal{D}(x)$ оператора x тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^2 d\,\|e(\lambda)\xi\|^2<\infty$$

и в этом случае

$$x\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, de(\lambda)\xi. \qquad (1.1)$$

Функция $e(\lambda)$ из теоремы 1.2 называется спектральной функцией оператора x, а формула (1.1) - его спектральным разложением.

Определим понятие оператора, измеримого относительно алгебры фон Неймана. Пусть A - алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H . Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ из H называется присоединенным к A (обозначение $\mathfrak{D}\eta A$), если $U(\mathfrak{D})\subset\mathfrak{D}$ для каждого унитарного оператора $U\in A'$. Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ из H называется сильно плотным в H относительно алгебры A , если

1) $\mathfrak{D}\eta A$;

2) существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}\subset A$, что $P_n\uparrow\mathbb{1}$, $P_n(H)\subset\mathfrak{D}$ и $\mathbb{1}-P_n$ - конечный проектор для $n\in N$.

Оператор x в H называется присоединенным к A (обозначение $x\eta A$), если x коммутирует с каждым унитарным оператором из A' . Ограниченный оператор x присоединен к A в том и только в том случае, когда $x\in A$. Если x - самосопряженный оператор в H , $e(\lambda)$ - его спектральная функция, то $x\eta A$ тогда и только тогда, когда $e(\lambda)\in A$ для всех λ .

Оператор x в H называется измеримым относительно A, если

1) $x\eta A$;

2) область определения $\mathfrak{D}(x)$ оператора x сильно плотна в H относительно A ;

3) оператор x замкнут.

Обозначим через $\mathcal{M}(A)$ совокупность всех операторов в H, измеримых относительно A . Если $x\in\mathcal{M}(A)$, то $x^*\in\mathcal{M}(A)$ и $\lambda x\in\mathcal{M}(A)$ для любого $\lambda\in\mathbb{C}$. Кроме того, для любых $x,y\in\mathcal{M}(A)$ операторы $x+y$ и xy допускают замыкания, которые являются измеримыми операторами. Они называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов x и y. Таким образом, $\mathcal{M}(A)$ является инволютивной алгеброй с единицей относительно операций сильной суммы, сильного произведения, умножения на скаляр и перехода к сопряженному оператору.

На множестве $\mathcal{M}(A)_h$ всех самосопряженных операторов из $\mathcal{M}(A)$ вводится частичный порядок: $y \le x$, если $((x-y)\xi,\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathcal{D}(x-y)$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в H.

Пусть $\{x_i\}$ - сеть операторов из $\mathcal{M}(A)_h$. Если $\{x_i\}$ возрастает и имеет в $\mathcal{M}(A)_h$ точную верхнюю грань x, то мы будем писать $x_i \uparrow x$. Аналогично, если $\{x_i\}$ убывает и имеет точную нижнюю грань x, то это обозначается $x_i \downarrow x$.

Вещественная и мнимая части оператора $x \in \mathcal{M}(A)$, его носители и модуль, а также положительная и отрицательная части самосопряженного оператора $x \in \mathcal{M}(A)$ определяются и обозначаются так же, как и для операторов из A.

Пусть A и B - алгебры фон Неймана, $\Phi : A \to B$ - линейное отображение, сохраняющее инволюцию. Будем говорить, что Φ

1) морфизм, если $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$, $x, y \in A$;

2) антиморфизм, если $\Phi(xy) = \Phi(y)\Phi(x)$, $x, y \in A$;

3) йорданов морфизм, если $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$, $x \in A$

4) изоморфизм, если Φ - биективный морфизм;

5) антиизоморфизм, если φ – биективный антиморфизм;

6) йорданов изоморфизм, если φ – биективный йорданов морфизм,

Если $\varphi : A \to B$ – йорданов изоморфизм, то существует такой проектор $e \in Z(B)$, что отображение $x \to \varphi(x)e$ есть морфизм, а $x \to \varphi(x)(\mathbb{1}-e)$ – антиморфизм.

2. Симметричные пространства измеримых функций

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ – конечной мерой, $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ – совокупность (классов) комплексных или вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω. Для каждой функции $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ вводится функция распределения

$$n_f(\lambda) = \mu(\{\omega : |f(\omega)| > \lambda\}), \quad \lambda > 0$$

Совокупность всех функций $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ для которых $n_f(\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, обозначается через $S(\Omega, \mu)$. Перестановкой функции $f \in S(\Omega, \mu)$ называется функция

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : n_f(\lambda) < t\}.$$

Эта функция определена на $(0, \mu(\Omega))$, неотрицательна, не возрастает и непрерывна слева. Функции, имеющие одинаковые перестановки, называются равноизмеримыми.

Приведем некоторые свойства перестановок [13,76].

1) Если $|f(\omega)| \le |g(\omega)|$ п.в., то $f^* \le g^*$.

2) $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*(t)$ для любого числа α.

3) $\int\limits_0^t (f+g)^*(s)ds \le \int\limits_0^t f^*(s)ds + \int\limits_0^t g^*(s)ds$

при каждом $t \in (0, \mu(\Omega))$;

4) Пусть (Ω', Σ', μ') - другое пространство с σ - конечной мерой, $\mu(\Omega)=\mu'(\Omega')$, $\{f_n\} \subset S(\Omega, \mu)$ и $\{g_n\} \subset S(\Omega', \mu')$ - две возрастающие последовательности неотрицательных функций. Если f_n равноизмерима с g_n при каждом $n \in N$ и $f_n \uparrow f \in S(\Omega, \mu)$, то $g = \sup\limits_n g_n$ принадлежит $S(\Omega', \mu')$ и функции f и g равноизмеримы.

Линейное подпространство E в $S(\Omega, \mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством, если из того, что $f \in E$, $g \in S(\Omega, \mu)$ и $g^*(t) \le f^*(t)$ для всех $t \in (0, \mu(\Omega))$, вытекает, что $g \in E$ и $\|g\|_E \le$ $\le \|f\|_E$. Иногда требование полноты в определении симметричного пространства опускают. Примерами симметричных пространств являются пространства $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича (см. [11, 12, 13]). Приведем еще два важных примера симметричных пространств.

1) Пространство $L_1(\Omega, \mu) \cap L_\infty(\Omega, \mu)$ состоит из элементов, общих для $L_1(\Omega, \mu)$ и $L_\infty(\Omega, \mu)$. Норма на нем задается формулой

$$\|f\|_{L_1 \cap L_\infty} = \max\{\|f\|_{L_1}, \|f\|_{L_\infty}\}.$$

2) Пространство $L_1(\Omega,\mu)+L_\infty(\Omega,\mu)$ состоит из элементов вида $f=g+h$, где $g\in L_1(\Omega,\mu)$, $h\in L_\infty(\Omega,\mu)$ и наделено нормой

$$\|f\|_{L_1+L_\infty}=\int_0^1 f^*(t)\,dt=\inf\{\|g\|_{L_1}+\|h\|_{L_\infty}\},$$

где точная нижняя грань берется по всем элементам $g\in L_1(\Omega,\mu)$ и $h\in L_\infty(\Omega,\mu)$ таким, что $g+h=f$.

Для любого симметричного пространства E на непрерывном пространстве с мерой (Ω,Σ,μ) имеют место непрерывные вложения

$$L_1(\Omega,\mu)\cap L_\infty(\Omega,\mu)\subset E\subset L_1(\Omega,\mu)+L_\infty(\Omega,\mu).$$

Пусть $f,g\in L_1(\Omega,\mu)+L_\infty(\Omega,\mu)$. Будем говорить, что функция f мажорирует функцию g, и писать $g\prec f$, если для всех $t\in(0,\mu(\Omega))$

$$\int_0^t g^*(s)\,ds\le\int_0^t f^*(s)\,ds.$$

Линейное подпространство E в $L_1(\Omega,\mu)+L_\infty(\Omega,\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ назовем вполне симметричным пространством, если из того, что $f\in E$, $g\in L_1(\Omega,\mu)+L_\infty(\Omega,\mu)$ и $g\prec f$ следует, что $g\in E$ и $\|g\|_E\le\|f\|_E$. Из свойств перестановок вытекает, что всякое вполне симметричное пространство является симметричным. Согласно [13], вполне симметричные пространства есть в точности интерполяционные между $L_1(\Omega,\mu)$ и $L_\infty(\Omega,\mu)$ пространства с интерполяционной константой единица.

Пусть E - симметричное пространство. Через E' обозначается ассоциированное к нему пространство [11, 13] с нормой

$$\|f\|_{E'} = \sup\{|\int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu|, g\in E, \|g\|_E \le 1\}.$$

Пространство E' является вполне симметричным пространством с порядково полунепрерывной и монотонно полной нормой [11, 13].

Пространство $S(\Omega,\mu)$, где $\Omega=(0,+\infty)$, а μ - мера Лебега, будем обозначать через $S(0,+\infty)$.

Предположим, что $\mu(\Omega)=\infty$. Из результатов [56] нетрудно вывести следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.3. Если пространство (Ω,Σ,μ) непрерывно, то существует сохраняющее меру отображение π из Ω на $(0,+\infty)$.

Предположим, что пространство (Ω,Σ,μ) непрерывно и E - симметричное пространство на нем. Обозначим через $\tilde{E}$ совокупность всех функций из $S(0,+\infty)$, обладающих следующим свойством: для каждой функции $f\in\tilde{E}$ существует функция $g\in E$, равноизмеримая с f. Положим $\|f\|_{\tilde{E}}=\|g\|_E$.

П р е д л о ж е н и е 1.4. (ср. [13], стр. 212). Множество $\tilde{E}$ образует симметричное пространство на $(0,+\infty)$ с нормой $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\pi:\Omega\to(0,+\infty)$ -

сохраняющее меру отображение. Зададим оператор $\Pi : S(0,+\infty) \to S(\Omega,\mu)$ формулой $(\Pi f)(\omega) = f(\pi(\omega))$. Покажем, что Π непрерывен относительно топологий сходимости по мере. Пусть $f_n \to f$ по мере в $S(0,+\infty)$. Тогда $(f_n - f)^*(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $t > 0$. Так как Π линеен и $(\Pi g)^* = g^*$ для всех $g \in S(0,+\infty)$, то $(\Pi f_n - \Pi f)^*(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $t > 0$. Это означает, что $\Pi f \to \Pi f_n$ по мере в $S(\Omega,\mu)$.

Легко видеть, что $\widetilde{E}$ совпадает с полным прообразом пространства E при отображении Π, поэтому $\widetilde{E}$ является линейным многообразием в $S(0,+\infty)$. Очевидно, что для любого $f \in \widetilde{E}$ имеет место равенство $\|f\|_{\widetilde{E}} = \|\Pi f\|_E$, из которого легко следует, что $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ - норма. Покажем, что $\widetilde{E}$ - банахово пространство. Пусть $\{f_n\}$ - фундаментальная последовательность в $\widetilde{E}$. Тогда последовательномть $\{\Pi f_n\}$ фундаментальна в E и, следовательно, сходится к некоторому элементу $g \in E$. Тогда $\{\Pi f_n\}$ сходится к g в пространстве $L_1(\Omega,\mu) + L_\infty(\Omega,\mu)$. Так как Π сохраняет норму $\|\cdot\|_{L_1+L_\infty}$, то последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторому элементу f в $L_1(0,+\infty) + L_\infty(0,\infty)$. В силу установленной непрерывности оператора Π получаем, что $g = \Pi f$ и, следовательно, $f \in \widetilde{E}$. Так как $\Pi f_n \to \Pi f$ в E, то $f_n \to f$ в $\widetilde{E}$.

Пусть $f_1 \in \widetilde{E}$, $f_2 \in S(0,+\infty)$ и $f_2^*(t) \le f_1^*(t)$, $t > 0$.

Тогда $\Pi f_1 \in E$, $\Pi f_2 \in S(\Omega,\mu)$ и $(\Pi f_2)^*(t) \le (\Pi f_1)^*(t), t>0$. Следовательно, $\Pi f_2 \in E$ и $\|\Pi f_2\|_E \le \|\Pi f_1\|_E$. Это означает, что $f_2 \in \widetilde{E}$ и $\|f_2\|_{\widetilde{E}} \le \|f_1\|_{\widetilde{E}}$. Предложение доказано.

3. Симметричные пространства измеримых операторов

Пусть A - полуконечная алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Пара (A,τ) представляет собой так называемое "некоммутативное пространство с мерой". Для каждого оператора $x \in \mathcal{M}(A)$ определяется функция распределения

$$n_x(\lambda) = \tau(\mathbb{1} - e(\lambda)), \quad \lambda > 0,$$

где $e(\lambda)$ - спектральная функция оператора $|x|$. Совокупность операторов $x \in \mathcal{M}(A)$, для которых $n_x(\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, обозначается через $C(A,\tau)$. Операторы из $C(A,\tau)$ называются вполне измеримыми или τ - измеримыми [61,102]. Перестановкой оператора $x \in C(A,\tau)$ называется функция

$$\widetilde{x}(t) = \inf\{\lambda > 0 : n_x(\lambda) < t\}.$$

Перестановка $\widetilde{x}(t)$ определена на $(0,\tau(\mathbb{1}))$, неотрицательна, не возрастает и непрерывна слева. Понятие перестановки вполне измеримого оператора обобщает одновременно понятия перестановки измеримой функции (см. п.2) и последовательности s - чисел компактного оператора [7]. Операторы с одинаковыми перестановками будем называть равноизмеримыми.

Перечислим некоторые важные свойства перестановок [28,61, 102]. Пусть $x, y \in C(A,\tau)$. Тогда

1) $\tilde{x} = (x^*)^\sim = |x|^\sim$;

2) $(ax)^\sim \le \|a\|_\infty \tilde{x},\ a \in A$, где $\|\cdot\|_\infty$ - норма в A ;

3) $\tilde{x} \le \tilde{y}$ если $|x| \le |y|$;

4) $(\alpha x)^\sim = |\alpha|\tilde{x}$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$;

5) $(x+y)^\sim(t+s) \le \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t),\ t,s \in (0,\tau(\mathbb{1}))$;

6) $(xy)^\sim(t+s) \le \tilde{x}(t)\tilde{y}(s),\ t,s \in (0,\tau(\mathbb{1}))$;

7) $\tilde{x}(t+s) \le (x+y)^\sim(t) \le \tilde{x}(t-s)$, если $\tau(z(y)) < s$;

8) $\|x\|_\infty = \tilde{x}(+0) = \lim\limits_{t\to+0} \tilde{x}(t)$, если $x \in A$.

Определим на $C(A,\tau)$ топологию сходимости по мере. Фундаментальную систему окрестностей нуля в этой топологии образуют множества

$$V(\varepsilon,\delta) = \{x \in C(A,\tau):\ \text{существует такой проектор } p \in A,\ \text{что } \|xp\|_\infty \le \varepsilon \text{ и } \tau(\mathbb{1}-p) \le \delta\},\ \varepsilon>0,\ \delta>0.$$

$C(A,\tau)$ является полной топологической $*$ - алгеброй. Замыкание в $C(A,\tau)$ идеала элементарных операторов $\mathcal{F}$ обозначается через $C_0(A,\tau)$. Множество $C_0(A,\tau)$ является подалгеброй в $C(A,\tau)$ и состоит из тех операторов x, для которых $n_x(\lambda) < \infty$ для всех $\lambda > 0$ или, эквивалентно, $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0$.

Сходимость по мере можно охарактеризовать следующим образом [30, 102].

П р е д л о ж е н и е 1.5. Последовательность $\{x_n\} \subset \subset C(A,\tau)$ сходится по мере к оператору $x \in C(A,\tau)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} (x-x_n)^{\sim}(t) = 0$ при каждом $t \in (0, \tau(\mathbb{1}))$.

Так же, как и для измеримых функций ([13], с.93), устанавливается справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1.6. Если последовательность $\{x_n\} \subset C(A,\tau)$ сходится по мере к оператору $x \in C(A,\tau)$, то $\tilde{x}_n(t) \to \tilde{x}(t)$ во всех точках непрерывности функции $\tilde{x}(t)$.

Заметим, что если выполнены условия этого предложения, то $\tilde{x}_n(t) \to \tilde{x}(t)$ почти всюду, так как функция $\tilde{x}(t)$ имеет не более счетного множества точек разрыва.

Функция $\rho(x,y) = \inf\limits_{\lambda>0} \{\lambda, n_{(x-y)}(\lambda)\}$ задает на $C(A,\tau)$ метрику, согласованную с топологией сходимости по мере. Относительно этой метрики $C(A,\tau)$ является полным метрическим пространством. Запись $x_n \xrightarrow{\tau} x$ означает, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Линейное подпространство E в $C(A,\tau)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством на (A,τ), если из того, что $x \in E$, $y \in C(A,\tau)$ и $\tilde{y}(t) \le \tilde{x}(t)$ для всех $t \in (0, \tau(\mathbb{1}))$, следует, что $y \in E$ и $\|y\|_E \le \le \|x\|_E$.

Из определения симметричного пространства видно, что норма элемента $x \in E$ зависит только от его перестановки $\tilde{x}(t)$. В частности, норма проектора $p \in E$ зависит только от значения следа $\tau(p)$. Если алгебра A непрерывна, то значения $\tau(p)$ для всех $p \in E$ целиком заполняют интервал $(0, \tau(\mathbb{1}))$. На этом интервале определяется функция $\varphi_E(t) = \|p\|_E, \tau(p) = t$, которая называется фундаментальной функцией симметричного пространства E.

Всякое симметричное пространство на (A, τ) непрерывно вложено в $C(A, \tau)$ [30].

Всюду в дальнейшем будем считать, что алгебра A счетного типа. Как и в теории нормированных решеток (см., например, [6, II]), норму симметричного пространства E будем называть порядково непрерывной, монотонно полной или порядково полунепрерывной, если выполнены соответственно условия:

(A) из $\{x_n\} \subset E, x_n \downarrow 0$ следует, что $\|x_n\|_E \to 0$;

(B) из $\{x_n\} \subset E, 0 \leq x_n \uparrow, \sup_n \|x_n\|_E < \infty$ следует существование такого $x \in E$, что $x_n \uparrow x$;

(C) из $\{x_n\} \subset E, 0 \leq x_n \uparrow x \in E$ следует, что $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$.

Очевидно, выполнение условия (A) влечет выполнение условия (C). Пространства с условием (A) называются минимальными, а с условиями (B) и (C) - максимальными (ср. [24]).

Приведем примеры симметричных пространств на (A, τ).

1) Пусть $x \in C(A, \tau)$ - положительный оператор, $e(\lambda)$ - его спектральная функция. Положим

$$\tau(x) = \sup_n \tau\Big(\int_0^n \lambda\, de(\lambda)\Big) = \int_0^\infty \lambda\, d\tau(e(\lambda)).$$

Пространство $L_1(A,\tau)$ состоит из тех $x \in C(A,\tau)$, для которых

$$\|x\|_1 = \tau(|x|) < \infty .$$

След τ можно продолжить до непрерывного линейного функционала на $L_1(A,\tau)$, который мы также будем обозначать через τ.

Пусть $1 < p < \infty$. Пространство $L_p(A,\tau)$ состоит из операторов $x \in C(A,\tau)$, для которых $|x|^p \in L_1(A,\tau)$. Норма в $L_p(A,\tau)$ задается равенством

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

Роль пространства $L_\infty(A,\tau)$ играет сама алгебра A с обычной операторной нормой $\|\cdot\|_\infty$.

2) Предположим, что $\tau(\mathbb{1}) = 1$. Пусть $\psi(t)$ - возрастающая непрерывная вогнутая функция на $[0,1]$ и $\psi(0)=0$. Положим

$$\Lambda_\psi(A,\tau) = \Big\{x \in C(A,\tau) : \int_0^1 \tilde{x}(t)\, d\psi(t) < \infty\Big\}.$$

Множество $\Lambda_\psi(A,\tau)$ с нормой $\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 \tilde{x}(t)\, d\psi(t)$ образует симметричное пространство на (A,τ), которое называется пространством Лоренца.

Пространство Марцинкевича $M_\psi(A,\tau)$ состоит из всех тех операторов $x \in C(A,\tau)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0<t\le 1} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \tilde{x}(s)\, ds .$$

Если алгебра A непрерывна, то в силу [33, II] $\Lambda_\psi(A,\tau)$ - пространство с условиями (A) и (B), а $M_\psi(A,\tau)$ - пространство с условиями (B) и (C), но без условия (A).

Через $M^0_\psi(A,\tau)$ обозначается замыкание в $M_\psi(A,\tau)$ алгебры A. Согласно [57], сопряженное пространство к $\Lambda_\psi(A,\tau)$ отождествляется с $M_\psi(A,\tau)$, а сопряженное к $M^0_\psi(A,\tau)$ при условии $\lim\limits_{t\to+0}\frac{t}{\psi(t)}=0$ отождествляется с $\Lambda_\psi(A,\tau)$. Двойственность в этих парах пространств осуществляется посредством билинейной формы $\langle x,y\rangle = \tau(xy)$.

3) Пространства $L_1(A,\tau)\cap L_\infty(A,\tau)$ и $L_1(A,\tau)+L_\infty(A,\tau)$ определяются так же, как аналогичные пространства функций (см. п.2). Если алгебра A непрерывна, то для всякого симметричного пространства E на (A,τ) имеют место непрерывные вложения [29]

$$L_1(A,\tau)\cap L_\infty(A,\tau)\subset E\subset L_1(A,\tau)+L_\infty(A,\tau).$$

4) Пусть (Ω,Σ,μ) - пространство с σ - конечной мерой, $L_\infty(\Omega,\mu)$ - $*$ - алгебра комплексных измеримых существенно ограниченных функций на Ω. $L_\infty(\Omega,\mu)$ является алгеброй фон Неймана, и понятия измеримого оператора относительно этой алгебры и измеримой функции на (Ω,Σ,μ) по существу совпадают [92]. Всякое симметричное пространство комплексных функций на Ω отождествляется с некоторым симметричным пространством на (A,τ), где $A=L_\infty(\Omega,\mu)$, а τ - интеграл Лебега, построенный по мере μ. Таким образом, все симметричные пространства комплексных измеримых функций являются примерами симметричных пространств измеримых операторов.

Обратно, пусть A - σ - конечная коммутативная алгебра фон Неймана. Тогда A изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega,\mu)$ комплексных измеримых существенно ограниченных функций на некотором пространстве (Ω,Σ,μ) с σ -конечной мерой. Меру μ можно выбрать так, чтобы для любого проектора $p\in A$ и соответствующей ему характеристической функции измеримого множества $S\in\Sigma$ выполнялось равенство $\tau(p)=\mu(S)$. Изоморфизм между A и $L_\infty(\Omega,\mu)$ продолжается до изоморфизма алгебр $C(A,\tau)$ и $S(\Omega,\mu)$, сохраняющего порядок и перестановки. В дальнейшем в подобных ситуациях мы не будем различать соответствующие друг другу операторы и функции.

Пусть $x,y\in L_1(A,\tau)+L_\infty(A,\tau)$. Будем говорить, что оператор x мажорирует y, и писать $y\prec x$, если $\tilde{y}\prec\tilde{x}$ (см. п.2).

Линейное подпространство E в $L_1(A,\tau)+L_\infty(A,\tau)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется вполне симметричным пространством на (A,τ), если из того, что $x\in E$, $y\in$ $\in L_1(A,\tau)+L_\infty(A,\tau)$ и $y\prec x$, следует, что $y\in E$ и $\|y\|_E\leq\|x\|_E$. Из свойств перестановок вытекает, что всякое вполне симметричное пространство на (A,τ) является симметричным. Согласно [29, 103], вполне симметричные пространства и только они являются интерполяционными между $L_1(A,\tau)$ и A с интерполяционной константой единица.

Каждому симметричному пространству E на (A,τ) ставится в соответствие ассоциированное к нему пространство E'. Оно по определению состоит из всех тех операторов $x\in C(A,\tau)$ для которых конечна норма

$$\|x\|_{E'} = \sup\{|\tau(x,y)| : y\in E, \|y\|_E \le 1\}.$$

Пространство E' является (вполне) симметричным пространством на (A,τ) с условиями (B) и (C). По пространству E' строится второе ассоциированное пространство $E''=(E')'$ и т.д. Для того, чтобы пространства E и E'' совпадали, необходимо и достаточно, чтобы в E были выполнены условия (B) и (C) [103].

Пусть A - алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный след, $\tau(\mathbb{1})=1$, B - подалгебра фон Неймана в A. Имеет место следующая теорема [100]

Теорема I.7. Существует линейное отображение E пространства $L_1(A,\tau)$ на $L_1(B,\tau)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $E(x^*)=E(x)^*$;

2) $x\geqslant 0$ влечет $E(x)\geqslant 0$;

3) $E(x)=x$ для любого $x\in L_1(B,\tau)$;

4) E отображает A на B и $\|E(x)\|_\infty \le \|x\|_\infty$;

5) $E(x^*)E(x)\le E(x^*x)$;

6) $E(E(x)y)=E(xE(y))=E(x)E(y)$ для $x\in L_1(A,\tau)$ $y\in A$ или $x\in A$, $y\in L_1(A,\tau)$;

7) $\|E(x)\|_1 \le \|x\|_1$.

Отображение E пространства $L_1(A,\tau)$ на $L_1(B,\tau)$ называется условным ожиданием относительно B.

ГЛАВА I

ПОРЯДКОВЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 2. Порядковые свойства нормы некоммутативных симметричных пространств

Всюду в этом параграфе будем считать, что A - непрерывная полуконечная алгебра фон Неймана счетного типа, снабженная точным нормальным полуконечным следом τ ($\tau(\mathbb{1})=\infty$), E - симметричное пространство на (A,τ).

Обозначим через $\widetilde{E}$ совокупность всех функций из $S(0,+\infty)$ обладающих следующим свойством: для каждой функции $f\in\widetilde{E}$ существует такой оператор $x\in E$, что $f^*(t)=\widetilde{x}(t)$ для всех $t>0$. Для $f\in\widetilde{E}$ положим $\|f\|_{\widetilde{E}}=\|x\|_E$, если $f^*=\widetilde{x}$ для $x\in E$.

Предложение 2.I. Множество $\widetilde{E}$ образует симметричное пространство на $(0,+\infty)$ с нормой $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$.

Доказательство. Пусть B - непрерывная собственная коммутативная подалгебра в A (см. предложение I.I), $E_B=E\cap C(B,\tau)$. Легко видеть, что E_B с нормой, индуцированной из E, является симметричным пространством на (B,τ). Алгебра B изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega,\mu)$ на некотором пространстве (Ω,Σ,μ) с непрерывной σ - конечной мерой, поэтому E_B отождествляется с некоторым симметричным пространством на (Ω,Σ,μ).

Пусть π - сохраняющее меру отображение из Ω на $(0,+\infty)$. Если $f\in\widetilde{E}$ и $f^*=\widetilde{x}$, где $x\in E$, то функция $g=\widetilde{x}\circ\pi$ принадлежит E_B и $g^*=f^*$. Это означает, что $\widetilde{E}=\widetilde{E}_B$ и $\|f\|_{\widetilde{E}}=\|f\|_{\widetilde{E}_B}$. Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением I.4.

Следующее утверждение устанавливает связь между монотонной сходимостью и сходимостью по мере в алгебре $C_0(A,\tau)$.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Пусть $\{x_n\}$ - убывающая последовательность положительных операторов из $C_0(A,\tau)$. Если $x_n\downarrow 0$, то $x_n\xrightarrow{\tau}0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e(\lambda)$ - спектральная функция оператора x_1. Для произвольного $\varepsilon>0$ положим $p=e(\frac{\varepsilon}{4})$, $q=\mathbb{1}-p$. Тогда $\|x_1p\|_\infty\le\frac{\varepsilon}{4}$ и поскольку $px_np\le px_1p$ для любого номера n, то $\|px_np\|_\infty\le\frac{\varepsilon}{4}$, $n\in N$.

Так как $\tau(q)<\infty$ и τ - точный след, то q - конечный проектор. Кроме того, $qx_nq\downarrow 0$ следовательно, $qx_nq\xrightarrow{\tau}0$ [26], т.е. $(qx_nq)^\sim(t)\to 0$ при каждом $t>0$. Пусть для произвольного $t>0$ номер n_0 выбран так, чтобы для всех $n\geqslant n_0$ было справедливо неравенство $(qx_nq)^\sim(\frac{t}{2})<\frac{\varepsilon}{4}$. Используя неравенство

$x_n \le 2(px_np+qx_nq)$ и свойства перестановок, получим для $n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{2}\tilde{x}_n(t) \le (px_np+qx_nq)^{\sim}(t) \le (px_np)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right)+$$
$$+(qx_nq)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right) \le \|px_np\|_\infty + (qx_nq)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это означает, что $\tilde{x}_n(t) \longrightarrow 0$ при каждом $t>0$, т.е. $x_n \xrightarrow{\tau} x$. Предложение доказано.

Перейдем теперь к результатам, устанавливающим связь между порядковыми свойствами нормы в пространствах E, E_B и $\tilde{E}$.

Т е о р е м а 2.3. Пусть $E \subset C_0(A,\tau)$ - симметричное пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. Норма в E порядково непрерывна.
2. В A существует собственная непрерывная коммутативная подалгебра B такая, что норма в E_B порядково непрерывна.
3. Норма в $\tilde{E}$ порядково непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1 $\Longrightarrow$ 2. Пусть B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A, $\{x_n\}$ - последовательность положительных операторов из E_B, $x_n \downarrow 0$ в $C(B,\tau)$. В силу предложения 2.2 $x_n \xrightarrow{\tau} x$, поэтому $x_n \downarrow 0$ и в $C(A,\tau)$. Но в E выполнено условие (A), поэтому $\|x_n\|_E \longrightarrow 0$, т.е. $\|x_n\|_{E_B} \longrightarrow 0$.

2 $\Longrightarrow$ 3. Пусть B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A такая, что норма в E_B порядково не-

прерывна. Алгебра B изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega,\mu)$, где (Ω,μ) - непрерывное пространство с σ -конечной мерой. Пусть $\pi:\Omega\to(0,+\infty)$ - сохраняющее меру отображение. Если $\{f_n\}\subset\widetilde{E}$ и $f_n\downarrow 0$, то функции $y_n=f_n\circ\pi$ принадлежат E_B и $0\le y_n\downarrow$. Так как $f_n\to 0$ по мере и y_n равноизмеримы с f_n, то $y_n\to 0$ по мере. Отсюда следует, что $y_n\downarrow 0$, поэтому $\|y_n\|_{E_B}\longrightarrow 0$. Остается воспользоваться равенствами $\|f\|_{\widetilde{E}}=\|y_n\|_{E_B}$.

$3\Longrightarrow 1$. Пусть $\{x_n\}\subset E$ и $x_n\downarrow 0$. В силу предложения 2.2 $x_n\xrightarrow{\tau}0$, поэтому $\widetilde{x}_n(t)\downarrow 0$ и $\|\widetilde{x}_n\|_{\widetilde{E}}\longrightarrow 0$, т.е. $\|x_n\|_E\to 0$.

Замечание 2.4. Всякое симметричное пространство E с условием (A) принадлежит $C_0(A,\tau)$. Действительно, если предположить противное, то $\mathbb{1}\in E$. Пусть $\{p_n\}$ - последовательность проекторов из E, $p_n\uparrow\mathbb{1}$ и $\tau(p_n)<\infty$, $n\in N$. Тогда $(\mathbb{1}-p_n)\downarrow 0$, но $\|\mathbb{1}-p_n\|_E=$ $=\|\mathbb{1}\|_E$. Таким образом, предположение $E\subset C_0(A,\tau)$ в теореме 2.3 можно отбросить.

Для доказательства следующего утверждения нам понадобится понятие (ℓn) - эквивалентности симметричных пространств (см. [23, 33]). Пусть A и B - две непрерывные полуконечные алгебры фон Неймана счетного типа, снабженные точными нормальными полуконечными следами τ и ν, причем $\tau(\mathbb{1})=$ $=\nu(\mathbb{1})$. Симметричные пространства E и F на (A,τ) и (B,ν) соответственно называются (ℓn) - эквивалентными, если пространства $\widetilde{E}$ и $\widetilde{F}$ совпадают. Два (ℓn) - эквивалентных пространства на одной и той же алгебре, очевидно, совпадают.

Л е м м а 2.5. Пространство E', (ρn) - эквивалентно пространству $(\tilde{E})'$, т.е. $(E')^{\sim} = (\tilde{E})'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in (\tilde{E})'$ и $f = f^*$. Выберем в A собственную коммутативную непрерывную подалгебру B. Пусть (Ω, Σ, μ) - непрерывное пространство с σ - конечной мерой такое, что B изоморфна $L_\infty(\Omega, \mu)$ и $\pi : \Omega \longrightarrow (0, +\infty)$ - сохраняющее меру отображение. Функция $f \circ \pi$ отождествляется с оператором $x \in C(A, \tau)$, для которого $\tilde{x} = f^*$. Имеем [103]

$$\sup\{|\tau(xy)| : y \in E, \|y\|_E \le 1\} =$$

$$= \sup\left\{\int_0^\infty \tilde{x}(t)\tilde{y}(t)dt : y \in E, \|y\|_E \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int_0^\infty f(t)g(t)dt : g \in \tilde{E}, \|g\|_{\tilde{E}} \le 1\right\} =$$

$$= \|f\|_{(\tilde{E})'} < \infty .$$

Следовательно, $x \in E'$ и $\|x\|_{E'} = \|f\|_{(\tilde{E})'}$. Это означает, что

$$f \in (E')^{\sim} \quad \text{и} \quad \|f\|_{(E')^{\sim}} = \|f\|_{(E)'} .$$

Обратно, пусть $f \in (E')^{\sim}$ и $f = f^*$. Тогда найдется такой оператор $x \in E'$, что $\tilde{x} = f$. Имеем

$$\sup\{\int_0^\infty f(t)g(t)dt : g\in\widetilde{E}, \|g\|_{\widetilde{E}} \le 1\} =$$

$$= \sup\{\int_0^\infty \widetilde{x}(t)\widetilde{y}(t)dt : y\in E, \|y\|_E \le 1\} =$$

$$= \sup\{|\tau(xy)| : y\in E, \|y\|_E \le 1\} = \|x\|_{E'} =$$

$$= \|f\|_{(E')^\sim} < \infty .$$

Следовательно, $f \in (\widetilde{E})'$ и $\|f\|_{(\widetilde{E})'} = \|f\|_{(E')^\sim}$.

Поскольку пространства $(E')^\sim$ и $(\widetilde{E})'$ симметричны, из доказанного вытекает их совпадение.

С л е д с т в и е 2.6. Пространство E максимально тогда и только тогда, когда максимально пространство $\widetilde{E}$.

С л е д с т в и е 2.7. Для любого симметричного пространства E на (A,τ) пространства E' и E''' совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.5 пространства E' и $(\widetilde{E})'$ (en) - эквивалентны, пространства E''' и $(\widetilde{E})'''$ (en) - эквивалентны. Но пространства $(\widetilde{E})'$ и $(\widetilde{E})'''$ совпадают [II], поэтому E' и E''' (en) - эквивалентны, т.е. $E' = E'''$.

С л е д с т в и е 2.8. Для любого симметричного пространства E в пространстве E' выполнены условия (B) и (C).

Т е о р е м а 2.9. Пусть $E \subset C_0(A,\tau)$ - симметричное пространство. Следующие условия эквивалентны:

I. Норма в E монотонно полна.

2. В A существует собственная непрерывная коммутативная подалгебра B такая, что норма в E_B монотонно полна.

3. Норма в $\widetilde{E}$ монотонно полна.

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$. Пусть B -собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A, $\{x_n\} \subset E_B$, $0 \le x_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|x_n\|_{E_B} < \infty$. Так как норма в E монотонно полна, найдется такой оператор $x \in E$, что $x_n \uparrow x$. Согласно предложению 2.2, $x_n \xrightarrow{\tau} x$, поэтому в силу предложения I.6 $\widetilde{x}_n(t) \to \widetilde{x}(t)$ почти всюду. Кроме того, последовательность $\widetilde{x}_n$ возрастает и $\widetilde{x}_n \le \widetilde{x}$. Следовательно, $\widetilde{x}_n \uparrow \widetilde{x}$.

Пусть B изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) - непрерывное пространство с σ - конечной мерой. Рассмотрим на Ω функцию $y = \sup\limits_n x_n$. Согласно [I3, с. 93-94], $\widetilde{x}_n(t) \longrightarrow \widetilde{y}(t)$ почти всюду, поэтому $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Это означает, что $y \in E$, следовательно, $y \in E_B$.

$2 \Longrightarrow 3$. Пусть $\{f_n\}$ - возрастающая последовательность неотрицательных функций из $\widetilde{E}$ и $\sup\limits_n \|f_n\|_{\widetilde{E}} < \infty$. Предположим, что B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A и в E_B выполнено условие (B). Пусть B изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega, \mu)$ и $\pi: \Omega \to (0, +\infty)$ - сохраняющее меру отображение. Положим $x_n = f_n \circ \pi$, $n \in N$. Тогда $\{x_n\} \subset E_B$, $0 \le x_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|x_n\|_{E_B} < \infty$. Следовательно, существует такой элемент $x \in E_B$, что $x_n \uparrow x$. Тогда $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$, причем из предложений 2.2 и I.6 вытекает, что $f_n^* \uparrow \widetilde{x}$. Согласно [I3, с. 93-94], функция $f = \sup\limits_n f_n$

имеет перестановку $f^* = \tilde{x}$. Следовательно, $f \in \tilde{E}$.

$3 \Longrightarrow 1$. Пусть в $\tilde{E}$ выполнено условие (B). Тогда $\tilde{E}$ совпадает с $(\tilde{E})''$ по составу и нормы в этих пространствах эквивалентны [6, стр. 143].

В силу леммы 2.5 пространства E'' и $(\tilde{E})''$ (en)- эквивалентны, поэтому E и E'' совпадают по составу и имеют эквивалентные нормы. Но в пространстве E'' условие (B) выполнено (следствие 2.8), значит, оно выполнено и в E.

Т е о р е м а 2.10. Пусть $E \subset C_0(A, \mu)$ - симметричное пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. Норма в E порядково полунепрерывна.
2. В A существует собственная непрерывная коммутативная подалгебра B такая, что норма E_B порядково полунепрерывна.
3. Норма в $\tilde{E}$ порядково полунепрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликации $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$ доказываются так же, как и в предыдущей теореме. Установим справедливость импликации $3 \Longrightarrow 1$. Пусть $\{x_n\} \subset E$, $0 \le x_n \uparrow x \in E$. Тогда $x_n \xrightarrow{\tau} x$ и, значит, $\tilde{x}_n(t) \longrightarrow \tilde{x}(t)$ почти всюду. Поэтому $\tilde{x}_n \uparrow \tilde{x}$ и в силу порядковой полунепрерывности нормы в $\tilde{E}$ получаем $\|\tilde{x}_n\|_{\tilde{E}} \longrightarrow \|\tilde{x}\|_{\tilde{E}}$. Это означает, что $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$.

Т е о р е м а 2.11. Пусть E - симметричное пространство на (A, τ). Следующие условия эквивалентны:

1. E вполне симметрично.
2. В A существует собстенная непрерывная коммута-

тивная подалгебра B такая, что E_B вполне симметрично.

3. $\widetilde{E}$ вполне симметрично.

Доказательство. I $\Longrightarrow$ 2. Пусть B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A, $x \in E_B$, $y \in C(B,\tau)$ и $y \prec x$. Тогда $y \in E$ и $\|y\|_E \leq \|x\|_E$. Следовательно, $y \in E_B$ и $\|y\|_{E_B} \leq \|x\|_{E_B}$.

2 $\Longrightarrow$ 3. Пусть B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A, для которой E_B вполне симметрично. Тогда B изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega,\mu)$ и существует сохраняющее меру отображение $\pi : \Omega \to (0,+\infty)$. Пусть $f \in \widetilde{E}$, $g \in S(0,+\infty)$ и $g \prec f$.

В E_B найдется оператор x с перестановкой $\widetilde{x} = f^*$ (например, $x = f \circ \pi$). Положим $y = g \circ \pi$; тогда $y \in C(B,\tau)$ и $\widetilde{y} = g^*$. Следовательно, $y \prec x$. Пространство E_B вполне симметрично, поэтому $y \in E_B$ и $\|y\|_{E_B} \leq \|x\|_{E_B}$. Таким образом, $g \in \widetilde{E}$ и $\|g\|_{\widetilde{E}} \leq \|f\|_{\widetilde{E}}$.

3 $\Longrightarrow$ I. Пусть $\widetilde{E}$ вполне симметрично. Предположим, что $x \in E$, $y \in C(A,\tau)$ и $y \prec x$. Тогда функция $\widetilde{y}(t)$ принадлежит $\widetilde{E}$ и $\|\widetilde{y}\|_{\widetilde{E}} \leq \|\widetilde{x}\|_{\widetilde{E}}$. Следовательно, в E существует оператор z с перестановкой $\widetilde{z} = \widetilde{y}$ и нормой $\|z\|_E = \|\widetilde{y}\|_{\widetilde{E}}$. Но тогда и сам оператор y принадлежит E, причем $\|y\|_E \leq \|x\|_E$.

Следствие 2.12. Всякое максимальное или минимальное симметричное пространство вполне симметрично.

Доказательство. Если E - максимальное симметричное пространство, то в силу следствия 2.6 пространство $\widetilde{E}$ также максимально. Согласно теореме 4.9 [13, с. 142], пространство $\widetilde{E}$ вполне симметрично. Следовательно, также вполне симметрично. Для минимальных симметричных пространств доказательство аналогичное.

Замечание 2.13. В случае, когда $\tau(\mathbb{1})<\infty$, теоремы 2.3, 2.9 и 2.10 получены в [32].

§ 3. Критерий сепарабельности некоммутативного симметричного пространства

Пусть A - непрерывная полуконечная алгебра фон Неймана счетного типа, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Обозначим через $\mathcal{P}_0$ множество всех проекторов $p\in A$, для которых $\tau(p)<\infty$. Напомним, что ρ - метрика на $C(A,\tau)$, согласованная с топологией сходимости по мере.

Определение 3.1. След τ назовем сепарабельным, если метрическое пространство $(\mathcal{P}_0,\rho)$ сепарабельно.

Предложение 3.2. Пространство $C_0(A,\tau)$ сепарабельно относительно топологии сходимости по мере тогда и только тогда, когда сепарабелен след τ.

Доказательство. Пусть след τ сепарабелен и G - счетное плотное в топологии сходимости по мере подмножество в $\mathcal{P}_0$. Обозначим через Ω множество всевозможных конечных сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n}(r_k+is_k)p_k$, где

r_k и s_k - рациональные числа, а $p_k \in G$, $k=\overline{1,n}$. Очевидно, Ω - счетное множество, плотное в топологии сходимости по мере в идеале элементарных операторов $\mathcal{F}$. Кроме того, $\mathcal{F}$ плотно в $C_0(A,\tau)$ по мере. Следовательно, $C_0(A,\tau)$ сепарабельно. Обратное очевидно.

Обозначим через S линейную оболочку множества всех простых операторов из A или, что то же самое, линейную оболочку множества $\mathcal{P}_0$.

Лемма 3.3. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ) с порядково непрерывной нормой. Тогда множество S плотно в E.

Доказательство. Поскольку любой оператор из E представляется в виде линейной комбинации положительных операторов, то достаточно показать, что произвольный положительный оператор $x \in E$ принадлежит замыканию S. Согласно замечанию 2.4, $x \in C_0(A,\tau)$, поэтому последовательность $x_n = x(e(n)-e(\frac{1}{n}))$ операторов из $\mathcal{F}$, где $e(\lambda)$ - спектральная функция x, сходится к x по норме E. Поэтому можно считать, что x - элементарный оператор. Если p - носитель оператора x, то $B=pAp$ - конечная непрерывная алгебра фон Неймана. Легко видеть, что в пространстве $E_B = pEp$ выполнено условие (A), следовательно, утверждение леммы вытекает из предложения 2.I.I6 [26].

Обозначим через $\varphi_E(t)$ фундаментальную функцию пространства E.

Лемма 3.4. Пусть $E \subset C_0(A,\tau)$ - симметричное пространство и $\varphi_E(+0)=0$. Если последовательность $\{p_n\}$

проекторов из E сходится к проектору $p\in E$ по мере, то

$$\lim_{n\to\infty}\|p-p_n\|_E=0.$$

Доказательство. Пусть $p_n\xrightarrow{\tau}p$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что существует такая последовательность $\{q_n\}$ проекторов из A, что $\|(p_n-p)q_n\|_\infty<\frac{1}{2^n}$, $n\in N$ и $\tau(q_n^\perp)\longrightarrow 0$, где $q_n^\perp=\mathbb{1}-q_n$.

Пусть δ – константа вложения пространства $L_1\cap A=L_1(A,\tau)\cap L_\infty(A,\tau)$ в E. Имеем

$$\|p-p_n\|_E\le\|(p-p_n)q_n\|_E+\|(p-p_n)q_n^\perp\|_E\le$$
$$\le\delta\|(p-p_n)q_n\|_{L_1\cap A}+\|(p-p_n)q_n^\perp\|_E.$$

Покажем, что оба слагаемых в правой части неравенства стремятся к нулю. Действительно,

$$\|(p_n-p)q_n^\perp\|_E\le\|p_n-p\|_\infty\|q_n^\perp\|_E\le 2\varphi_E[\tau(q_n^\perp)]\to 0.$$

Далее, по определению нормы в $L_1\cap A$

$$\|(p_n-p)q_n\|_{L_1\cap A}=\max\{\|(p_n-p)q_n\|_1;\ \|(p_n-p)q_n\|_\infty\}.$$

Нам достаточно показать, что $\|(p_n-p)q_n\|_1\to 0$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n-p)^\sim(t)=0$ для всех $t>0$. Пусть $s>\tau(p)$, тогда, согласно свойствам перестановок, $\tilde{p}_n(t+s)\le(p_n-p)^\sim(t)$ при $t>0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{p}_n(t+s)=0$ для всех $t>0$. Перестановка $\tilde{p}_n(t)$

есть характеристическая функция интервала $(0, \tau(p_n)]$, и если $\tilde{p}_n(t) < 1$, то $\tau(p_n) < t$. Это означает, что последовательность $\tau(p_n)$ ограничена. Пусть число $\gamma > 0$ таково, что $\tau(p) < \gamma$ и $\tau(p_n) < \gamma$ при всех $n \in N$. Согласно свойствам перестановок,

$$[(p_n - p)q_n]^{\sim}(t) \leq (p_n - p)^{\sim}(t) \leq \tilde{p}_n\left(\frac{t}{2}\right) + \tilde{p}\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

при $t > 2\gamma$. Кроме того,

$$[(p_n - p)q_n]^{\sim}(t) \leq \|(p_n - p)q_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\gamma} [(p_n - p)q_n]^{\sim}(t)\,dt \leq \frac{\gamma}{2^{n-1}}.$$

Так как

$$\|(p_n - p)q_n\|_1 = \int_0^\infty [(p_n - p)q_n]^{\sim}(t)\,dt = \\ = \int_0^{2\gamma} [(p_n - p)q_n]^{\sim}(t)\,dt,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|(p_n - p)q_n\|_1 = 0.$$

Т е о р е м а 3.5. Пусть E - симметричное пространство на (A, τ). Если E сепарабельно, то

(I) след τ сепарабелен;

(2) в E выполнено условие (A);

(3) $\varphi_E(+0) = 0$;

(4) в E плотна линейная оболочка S множества всех простых операторов из A;

(5) для любого положительного оператора $x \in E$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|(x-\lambda\mathbb{1})_+\|_E=0 \text{ и } \lim_{\lambda\to 0}\|xe(\lambda)\|_E=0,$$

где $e(\lambda)$ - спектральная функция x ;

(6) $E\subset L_0(A,\tau)$.

Обратно, если след τ сепарабелен и выполнено условие (2), или условия (3) и (4), или условия (3), (5) и (6), то пространство E сепарабельно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пространство E сепарабельно.

(I) Если d - метрика на E, порожденная нормой, то пространство $(\mathcal{P}_0, d)$ сепарабельно. Следовательно, $(\mathcal{P}_0,\rho)$ сепарабельно, так как топология сходимости по мере слабее топологии нормы симметричного пространства [30] .

(2) Пусть B - собственная непрерывная коммутативная подалгебра в A . Тогда пространство E_B сепарабельно. Так как E_B отождествляется с некоторым функциональным симметричным пространством, то в нем выполнено условие (A) [II] . В силу теоремы 2.3 в E также выполнено условие (A).

(3) Пусть $\{\varepsilon_n\}$ - последовательность положительных чисел, $\varepsilon_n\downarrow 0$. В силу непрерывности алгебры A в ней найдется монотонно убывающая последовательность проекторов $\{p_n\}$ такая, что $\tau(p_n)=\varepsilon_n$. Из нормальности и точности τ следует, что $p_n\downarrow 0$. Согласно (2), $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_E(\varepsilon_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n\|_E=0$. В силу произвольности $\{\varepsilon_n\}$ имеем $\varphi_E(+0)=0$.

Свойство (4) - это утверждение леммы 3.3. Свойство (5) также непосредственно вытекает из условия (A), а (6) - из замечания 2.4.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что след τ сепарабелен и в E выполнено условие (A). Пусть Ω - счетное множество, построенное в предложении 3.2. В силу леммы 3.3 достаточно показать, что замыкание Ω в E содержит множество S. Пусть $x \in S$, т.е. $x = \sum\limits^{n} \lambda_k p_k$, где $p_k \in \mathcal{P}_0$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$. Из сепарабельности τ вытекает существование таких последовательностей $\{p_{j,k}\}_{j=1}^{\infty}$, принадлежащих счетному плотному множеству $G \subset \mathcal{P}_0$, что $p_{j,k} \xrightarrow{\tau} p_k$ при $j \to \infty$. Согласно замечанию 2.4, $E \subset C(A,\tau)$, поэтому в силу леммы 3.4 $\lim\limits_{j\to\infty} \|p_{j,k} - p_k\|_E = 0$. Теперь легко видеть, что x принадлежит замыканию Ω в E.

Предположим теперь, что след τ сепарабелен, множество S плотно в E и $\varphi_E(+0) = 0$. Тогда $E \subset C_0(A,\tau)$ поэтому мы можем воспользоваться леммой 3.4, согласно которой замыкание в E счетного множества Ω содержит S.

Наконец, из условий (5) и (6) в силу предложения 2.9 [103] вытекает, что в E плотен идеал $\mathcal{F}$ элементарных операторов. Но множество S плотно в $\mathcal{F}$ по нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_E$, а значит, и по норме любого симметричного пространства, что и завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 3.6. Всякое сепаребельное симметричное пространство на (A,τ) вполне симметрично.

Доказательство. Если E сепарабельно, то в нем выполнено условие (А). Согласно теореме 2.3, в $\tilde{E}$ также выполнено условие (А), поэтому $\tilde{E}$ сепарабельно [II]. В частности, $\tilde{E}$ вполне симметрично [I3]. В силу теоремы 2.II E вполне симметрично.

Замечание 3.7. В случае, когда $\tau(\mathbb{1})<\infty$, из теоремы 3.5 непосредственно вытекает, что симметричное пространство E сепарабельно тогда и только тогда, когда след τ сепарабелен и в E выполнено условие (А). Это утверждение было получено ранее в [32].

§ 4. Описание минимальных и максимальных некоммутативных симметричных пространств

Как уже отмечалось в § I, норма элемента x симметричного пространства E зависит только от его перестановки $\tilde{x}(t)$. Другими словами, $\|x\|_E=\Phi(\tilde{x})$, где Φ - некоторый функционал, определенный на множестве $\mathcal{L}$ неотрицательных убывающих непрерывных слева функций на $(0,+\infty)$. Естественно возникает вопрос об описании классов функционалов на $\mathcal{L}$, порождающих те или иные симметричные пространства на алгебрах фон Неймана. В этом параграфе дается такое описание для функционалов позволяющих строить все минимальные и максимальные симметричные пространства на непрерывных полуконечных алгебрах фон Неймана. В случае фактора типа I аналогичная задача рассматривалась в [7].

I. Обозначим через K^* множество всех ограниченных финитных функций из $S(0,+\infty)$, совпадающих почти всюду со своими перестановками. Как обычно, мы не будем различать функции, совпадающие почти всюду.

О п р е д е л е н и е 4.I. Отображение $\Phi: K^* \longrightarrow [0,+\infty)$ назовем симметрическим нормирующим функционалом (с.н.ф.), если для любых $f, g \in K^*$ и $\alpha \geqslant 0$ выполнены следующие условия:

I) $\Phi(f) > 0$ при $f \neq 0$;

2) $\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f)$;

3) если $f \prec g$, то $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.

Множество всех функций из $S(0,+\infty)$, перестановки которых принадлежат K^* , совпадает с множеством K всех ограниченных функций, носители которых имеют конечную меру. Поэтому с.н.ф. Φ , определенный на K^*, можно продолжить до некоторого функционала $\Phi': K \longrightarrow [0,+\infty)$ по формуле $\Phi'(f) = \Phi(f^*)$. Функционал Φ' также будем называть симметрическим нормирующим функционалом. На множестве K^* значения Φ' и Φ совпадают, поэтому в дальнейшем штрих в обозначении с.н.ф. опускается.

П р е д л о ж е н и е 4.2. Симметрический нормирующий функционал Φ на множестве K обладает следующими свойствами:

а) $\Phi(f) > 0$ для всех $f \in K$, $f \neq 0$;

б) $\Phi(\alpha f) = |\alpha| \Phi(f)$ для всех $f \in K$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

в) $\Phi(f+g)\le\Phi(f)+\Phi(g)$ для всех $f,g\in K$;

г) если $f,g\in K$ и $f\prec g$, то $\Phi(f)\le\Phi(g)$;

д) если $f,g\in K$ и $|f|\le|g|$, то $\Phi(f)\le\Phi(g)$.

Доказательство. Свойства а), г) и д) вытекают непосредственно из определения Φ .

б) В силу свойства 2) перестановок (§ I, п.2)

$$\Phi(\alpha f)=\Phi[(\alpha f)^*]=\Phi(|\alpha|f^*)=|\alpha|\Phi(f).$$

в) Согласно свойству 3) перестановок (§ I, п.2),

$$\int_0^\tau(f+g)^*(t)\,dt\le\int_0^\tau f^*(t)\,dt+\int_0^\tau g^*(t)\,dt$$

для всех $\tau>0$. Поэтому

$$\Phi(f+g)=\Phi[(f+g)^*]\le\Phi(f^*+g^*)\le$$

$$\le\Phi(f^*)+\Phi(g^*)=\Phi(f)+\Phi(g).$$

Предложение доказано.

Для произвольной функции $f(t)\in S(0,\infty)$ назовем верхней срезкой функцию

$$f^s(t)=\begin{cases} s\cdot\exp(i\arg f(t)), & \text{если } |f(t)|>s,\\ f(t), & \text{если } |f(t)|\le s,\end{cases}$$

а правой срезкой - функцию $f_\tau(t)=f(t)\chi_{(0,\tau]}(t)$,

где s и τ - произвольные положительные числа.

Нам понадобятся следующие очевидные свойства срезок.

Предложение 4.3. Пусть f и g - неотрицательные функции из $S(0,+\infty)$. Тогда

1) $(\alpha f)^s = \alpha f^{\frac{s}{\alpha}}$, где $\alpha > 0$;

2) $(f+g)^s \leq f^s + g^s$;

3) $f_\tau^s \leq f_{\tau'}^{s'}$, если $s \leq s'$ и $\tau \leq \tau'$.

Пусть Φ - с.н.ф., $f(t)$ - произвольная функция из $S(0,+\infty)$, совпадающая со своей перестановкой. Для любых положительных s и τ функция $f_\tau^s(t)$ принадлежит K^* . Из предложений 4.2 и 4.3 следует, что величина $\Phi(f_\tau^s)$ не убывает при $s \to \infty$ и $\tau \to \infty$. Обозначим через G_Φ^* множество всех тех функций $f \in S(0,\infty)$, для которых $f(t) = f^*(t)$ п.в. и

$$\sup\{\Phi(f_\tau^s) : s > 0,\ \tau > 0\} < \infty .$$

Расширим область определения с.н.ф. Φ , положив для каждой функции

$$\Phi(t) = \lim_{s,\tau \to \infty} \Phi(f_\tau^s) .$$

Обозначим через G_Φ множество всех тех $f \in S(0,+\infty)$ для которых $f^* \in G_\Phi^*$, и положим $\Phi(t) = \Phi(f^*)$ для каждого $f \in G_\Phi$. Множество G_Φ назовем естественной областью определения с.н.ф. Φ . Наша ближайшая цель - показать, что G_Φ с нормой $\Phi(\cdot)$ есть вполне симметричное пространство с условиями (B) и (C). Доказательство этого факта будет состоять из нескольких шагов. Всюду далее Φ -

некоторый с.н.ф., G_Φ - его естественная область определения.

Лемма 4.4. Пусть $g\in K^*$, f - финитная функция из $L_1(0,\infty)$, совпадающая со своей перестановкой. Если
$$\int_0^\tau g(t)dt < \int_0^\tau f(t)dt$$
для всех $\tau>0$, то найдется такое $s>0$, что
$$\int_0^\tau g(t)dt < \int_0^\tau f^s(t)dt$$
для всех $\tau>0$.

Доказательство. Согласно одной лемме А.Меклера (см. [23], гл. 2, § 2), найдется такая последовательность положительных чисел $\{\tau_n\}$, что $\tau_n\to 0$ и
$$\int_{\tau_n}^\tau g(t)dt < \int_{\tau_n}^\tau f(t)dt$$
для всех $\tau>\tau_n$, $n\in N$. Будем считать, что $f(t)$ неограничена, так как в противном случае утверждение очевидно. Тогда $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\infty$, и потому найдется такое $\alpha>0$, что при $0<t\le\alpha$
$$f(t)>\|g\|_\infty=\lim_{t\to\infty} g(t).$$
Зафиксируем номер k, при котором $\tau_k<\alpha$, и положим $s=f(\tau_k)$.

На интервале (τ_k,∞) функции $f^s(t)$ и $f(t)$ совпадают, поэтому

$$\int_{\tau_k}^{\tau} g(t)\,dt < \int_{\tau_k}^{\tau} f(t)\,dt = \int_{\tau_k}^{\tau} f^s(t)\,dt.$$

для всех $\tau > \tau_k$. На интервале $(0, \tau_k]$ имеем $g(t) < f^s(t)$, поэтому

$$\int_0^{\tau} g(t)\,dt < \int_0^{\tau} f^s(t)\,dt$$

при $0 < \tau \leq \tau_k$. Таким образом,

$$\int_0^{\tau} g(t)\,dt < \int_0^{\tau} f^s(t)\,dt$$

для всех $\tau > 0$.

Л е м м а 4.5. Имеет место включение

$$G_\Phi \subset L_1(0,\infty) + L_\infty(0,\infty).$$

В частности, каждая функция из G_Φ локально интегрируема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество K с нормой $\Phi(\cdot)$ является симметричным пространством (не банаховым). В силу теоремы 4.I [I3, стр. I24] , в доказательстве которой полнота несущественна, пространство K вложено в $L_1(0,\infty) + L_\infty(0,\infty)$. Пусть δ - константа вложения и $f \in G^*_\Phi$. Тогда

$$\|f^s_r\|_{L_1+L_\infty} \leq \delta\Phi(f^s_r) \leq \delta\Phi(f),$$

откуда

$$\sup_{s,r>0} \|f_r^s\|_{L_1+L_\infty} \le \delta\Phi(f)$$

Так как $f_r^s \uparrow f$ и в $L_1(0,\infty)+L_\infty(0,\infty)$ выполнены условия (B) и (C) [63], мы имеем $f\in L_1(0,\infty)+L_\infty(0,\infty)$ и $\|f\|_{L_1+L_\infty} \le \delta\Phi(f)$. Пространство $L_1(0,\infty)+L_\infty(0,\infty)$ симметрично, поэтому оно содержит все множество G_Φ.

Предложение 4.6. Пусть $f\in G_\Phi^*$, $g=g^*\in S(0,\infty)$ и $g\prec f$. Тогда $g\in G_\Phi$ и $\Phi(g)\le\Phi(t)$

Доказательство. а) Предположим, что $g(t)$ – неограниченная функция. Тогда для любого $s>0$

$$\int_0^\tau g^s(t)\,dt < \int_0^\tau g(t)\,dt$$

при всех $\tau>0$. Для произвольных положительных чисел s, r и τ имеем

$$\int_0^\tau g_r^s(t)\,dt < \int_0^\tau g_r(t)\,dt \le \int_0^\tau f_r(t)\,dt .$$

В силу леммы 4.4 существует такое $s'>0$, что

$$\int_0^\tau g_r^s(t)\,dt < \int_0^\tau f_r^{s'}(t)\,dt .$$

Согласно определению 4.I, отсюда следует, что $\Phi(g_r^s)\le \Phi(f_r^{s'})$, поэтому

$$\Phi(g_r^s) \le \sup_{r,s'>0} \Phi(f_r^{s'}) = \Phi(f) < \infty .$$

Таким образом, $g \in G_{\Phi}^{*}$ и $\Phi(g) \leq \Phi(f)$.

б) Пусть $g \in K^{*}$ и носитель $g(t)$ лежит в интервале $(0,\tau]$. Введем функцию $h(t)=f(t)+\varepsilon\chi_{(0,\tau]}(t)$,

где ε - произвольное положительное число. Тогда для всех $\tau>0$

$$\int_0^{\tau} g(t)\,dt < \int_0^{\tau} h(t)\,dt .$$

Согласно лемме 4.4, существует такое $s'>0$, что для всех $\tau>0$ и для произвольного $\tau'>\tau$

$$\int_0^{\tau} g(t)\,dt < \int_0^{\tau} h_{\tau'}^{s'}(t)\,dt .$$

Отсюда, согласно определению 4.I и предложению 4.3, следует

$$\Phi(g) \leq \Phi(h_{\tau'}^{s'}) \leq \Phi(f_{\tau'}^{s'}) + \varepsilon\Phi(\chi_{(0,\tau]}) .$$

В силу произвольности ε имеем

$$\Phi(g) \leq \Phi(f_{\tau'}^{s'}) \leq \Phi(f) .$$

в) Если $g(t)$ - ограниченная функция, то для любого $\tau>0$ функция $g_{\tau}(t)$ принадлежит K^{*} . Согласно предыдущему пункту, $\Phi(g_{\tau}) \leq \Phi(f)$, откуда $\Phi(g) \leq \Phi(f)$.

П р е д л о ж е н и е 4.7. G_{Φ} - симметричное пространство на $(0,+\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что G_{Φ} - линейное пространство. Для этого убедимся в том, что множество G_{Φ}^{*} является конусом. Пусть $f \in G_{\Phi}^{*}$ и $\alpha > 0$. Согласно предложению 4.3, $(\alpha f)^s = \alpha f^{\frac{s}{\alpha}}$ для $s>0$, поэтому

$$\sup_{s,\tau>0} \Phi\left[(\alpha f)^s_\tau\right] = \sup_{s,\tau>0}\left[\alpha \Phi(f^{\frac{s}{\alpha}}_\tau)\right] = \alpha \Phi(f) < \infty$$

т.е. $\alpha f \in G^*_\Phi$. Пусть $f, g \in G^*_\Phi$. В силу предложения 4.3, $(f+g)^s \le f^s + g^s$ при $s>0$, следовательно,

$$\Phi\left[(f+g)^s_\tau\right] \le \Phi(f^s_\tau + g^s_\tau) \le \Phi(f^s_\tau) + \Phi(g^s_\tau)$$

и

$$\sup_{s,\tau>0} \Phi\left[(f+g)^s_\tau\right] \le \Phi(f) + \Phi(g) < \infty .$$

Таким образом, G^*_Φ - конус.

Для произвольного числа α и функции $f \in G_\Phi$ имеем $f^* \in G^*_\Phi$ и $(\alpha f)^* = |\alpha| f^* \in G^*_\Phi$. Следовательно, $\alpha f \in G_\Phi$. Если $f, g \in G_\Phi$, то $f^* + g^* \in G^*_\Phi$, и поскольку

$$\int_0^\tau (f+g)^*(t)\,dt \le \int_0^\tau f^*(t)\,dt + \int_0^\tau g^*(t)\,dt$$

для всех $\tau > 0$, то $f+g \in G_\Phi$. Следовательно, G_Φ - линейное пространство.

Попутно мы показали, что для любого числа α и всех $f, g \in G_\Phi$

$$\Phi(\alpha f) = |\alpha| \Phi(t) \text{ и } \Phi(f+g) \le \Phi(f) + \Phi(g) .$$

Кроме того, очевидно, что если $f(t)$ - ненулевая функция из G_Φ , то у ее перестановки найдется ненулевая срезка, поэтому $\Phi(t)>0$. Таким образом, функционал является нормой на G_Φ .

Пространство G_Φ , по определению, вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит все равноизмеримые с ней функции из $S(0,\infty)$, а значения Φ постоянны на каждом классе равноизмеримых функций. Следовательно, G_Φ - симметричное пространство.

Следующее утверждение является очевидным следствием предложения 4.6.

П р е д л о ж е н и е 4.8. Пространство G_Φ является вполне симметричным.

Далее всюду в этом пункте будем предполагать, что с.н.ф. Φ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(\chi_{(0,\varepsilon]})=0, \tag{4.1}$$

т.е. фундаментальная функция пространства G_Φ непрерывна в нуле.

П р е д л о ж е н и е 4.9. Пусть $\{f_n\}\subset K^*$ и $f_n\uparrow f\in K^*$. Тогда $\Phi(f)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(f_n)=\sup\limits_n\Phi(f_n)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что $\Phi(f)\geq\sup\limits_n\Phi(f_n)$. Установим обратное неравенство: $\Phi(f)\leq\sup\limits_n\Phi(f_n)$. Пусть носитель функции $f(t)$ содержится в интервале $(0,\tau]$, $\tau>0$. Согласно теореме Егорова, для любого $\varepsilon>0$ в интервале $(0,\tau]$ найдется такое измеримое множество A , что $\mu(A)<\varepsilon$ и $f_n\to f$ равномерно на множестве $(0,\tau]\setminus A$. Это означает, что по произвольному $\delta > 0$ можно выбрать номер n_0 так, чтобы для всех $n \geq n_0$ выполнялось неравенство

$$f(t) \leq f_n(t) + \delta \chi_{(0,\tau]}(t) + \|f\|_\infty \chi_A(t).$$

Тогда

$$\Phi(f) \leq \Phi(f_n) + \delta \Phi(\chi_{(0,\tau]}) + \|f\|_\infty \Phi(\chi_{(0,\varepsilon]}).$$

Второе и третье слагаемые в правой части неравенства можно сделать сколь угодно малыми в силу произвольности δ и ε и условия (4.I). Следовательно, $\Phi(f) \leq \sup\limits_n \Phi(f_n)$.

Предложение 4.Ю. Пусть $\{f_n\}$ - возрастающая последовательность неотрицательных функций из G_Φ и $\sup\limits_n \Phi(f_n) < \infty$. Тогда в G_Φ найдется такая функция $f(t)$, что $f_n \uparrow f$ и $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$.

Доказательство. а) Предположим сначала, что $\{f_n\} \subset G^*_\Phi$. Так как G_Φ - нормированное идеальное пространство, то оно непрерывно вложено в пространство всех измеримых функций на $(0,\infty)$, снабженное топологией сходимости по мере ([II], стр. I39). Ограниченность последовательности $\{f_n\}$ по норме в G_Φ влечет ее ограниченность по мере, из которой следует существование такой измеримой функции $f(t)$ на $(0,+\infty)$, что $f_n \uparrow f$ ([II], стр. 97). Поскольку все функции $f_n(t)$ невозрастающие, функция $f(t)$ также не возрастает, поэтому $f \in S(0,+\infty)$. Переход от функции $f(t)$ к функции $f^*(t)$ связан с изменением значений $f(t)$ в точках, где она разрывна слева. У монотонной функции не более чем счетное множество точек разрыва, поэтому $f(t)=f^*(t)$ почти всюду.

Очевидно, что $(f_n)_r^s \uparrow f_r^s$ при $n\to\infty$ для любых положительных r и S. В силу предложения 4.9 $\Phi(f_r^s)=\sup\limits_n \Phi[(f_n)_r^s]$. Отсюда

$$\sup_{r,s>0}\Phi(f_r^s)=\sup_{r,s>0}\sup_n \Phi[(f_n)_r^s]=\sup_n \Phi(f_n)<\infty .$$

Следовательно, $f\in G_\Phi^*$.

б) Пусть $\{f_n\}\subset G_\Phi$ удовлетворяет условиям предложения. Тогда последовательность $\{f_n^*\}$ удовлетворяет условиям пункта а), поэтому в G_Φ^* найдется такая функция $g(t)$; что $f_n^*\uparrow g$ и $\Phi(f_n)=\Phi(f_n^*)\to\Phi(g)$. Положим $f(t)=\sup\limits_n f_n(t)$. Тогда $f\in S(0,+\infty)$ и $f^*(t)=g(t)$ (см. § I, п.2). Отсюда следует, что $f\in G_\Phi$ и

$$\Phi(f)=\Phi(g)=\lim_{n\to\infty}\Phi(f_n).$$

С л е д с т в и е 4.II. Пусть $\{f_n\}\subset G_\Phi$ и $0\le f_n\uparrow f\in G_\Phi$. Тогда $\Phi(f_n)\to\Phi(f)$.

Т е о р е м а 4.I2. Пусть Φ - с.н.ф. с условием (4.I). Тогда G_Φ с нормой $\Phi(\cdot)$ есть симметричное пространство с условиями (В) и (С). Обратно, пусть E - симметричное пространство на $(0,+\infty)$ с условиями (В) и (С). Тогда найдется такой с.н.ф. Φ, что $E=G_\Phi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть теоремы установлена в предложениях 4.7, 4.I0 и в следствии 4.II. Докажем вторую часть. Пусть E - симметричное пространство на $(0,+\infty)$ с условиями (B) и (C). Из максимальности пространства E следует, что оно вполне симметрично ([13], стр. 142). Поэтому функционал

$$\Phi(t) = \|f\|_E , \ f \in K^*$$

является симметрическим нормирующим функционалом. Совпадение пространств E и G_Φ по составу следует из определения G_Φ и условия (B) в E, а совпадение норм - из условия (C).

2. Пусть A - полуконечная непрерывная алгебра фон Неймана счетного типа, τ - точный нормальный полуконечный след на A, Φ - симметрический нормирующий функционал с условием (4.1). Обозначим через E_Φ множество всех таких $x \in C(A,\tau)$, что $\tilde{x} \in G_\Phi^*$, и положим $\|x\|_\Phi = \Phi(\tilde{x})$. Поскольку Φ удовлетворяет условию (4.1), то норма в G_Φ порядково полунепрерывна и монотонно полна, поэтому, согласно [103], $(E_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ - вполне симметричное пространство на (A,τ). Легко видеть, что пространство $\tilde{E}_\Phi$ совпадает с G_Φ, поэтому в силу следствия 2.6 в E_Φ выполнены условия (B) и (C).

Т е о р е м а 4.13. Если симметричное пространство E на (A,τ) удовлетворяет условиям (B) и (C), то $E = E_\Phi$ для некоторого с.н.ф. Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ) с условиями (B) и (C). Рассмотрим пространство $\tilde{E}$. Согласно следствию 2.6, в $\tilde{E}$ выполнены условия (B) и (C), поэтому в силу теоремы 4.12 $\tilde{E} = G_\Phi$

для некоторого с.н.ф. Φ . Очевидно, что $\widetilde{E}_\Phi = G_\Phi$, поэтому $E = E_\Phi$.

Пусть $\mathcal{P}_0$ – по-прежнему есть множество проекторов $p \in A$, для которых $\tau(p) < \infty$. Обозначим через $E_\Phi^{(0)}$ замыкание в E_Φ идеала $\mathcal{F}$ элементарных операторов из A .

Предложение 4.I4. Пусть след τ сепарабелен. Тогда $E_\Phi^{(0)}$ является сепарабельным симметричным пространством на (A,τ) .

Доказательство. Симметричность пространства $E_\Phi^{(0)}$ вытекает из утверждения 2.8 [I03] , а сепарабельность следует из теоремы 3.5.

Симметрический нормирующий функционал Φ назовем мононормирующим (ср. [7] , стр. II6), если для любого $f \in G_\Phi^*$ выполнены следующие условия:

I) $\lim\limits_{s\to\infty} \Phi[f(t+s)] = \lim\limits_{s\to\infty} \Phi[f\chi_{(s,\infty)}] = 0$

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \Phi[(f-\lambda)^+] = 0$.

Из утверждения 2.9 [I03] вытекает следующее

Предложение 4.I5. Пространство E_Φ совпадает с $E_\Phi^{(0)}$ тогда и только тогда, когда с.н.ф. Φ мононормирующий.

Теорема 4.I6. Симметричное пространство E на (A,τ) удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $E \approx E_\Phi^{(0)}$ для некоторого с.н.ф. Φ с условием (4.I).

Доказательство. Пусть в E выполнено условие (A). Согласно теореме 2.3, в $\widetilde{E}$ выполнено условие (A), поэтому оно сепарабельно [II] и, следовательно, вполне симметрично [I3, стр. I42]. Кроме того, фундаментальная функция пространства $\widetilde{E}$ непрерывна в нуле. Таким образом, функционал, заданный на K^* равенством $\Phi(f) = \|f\|_{\widetilde{E}}$, является симметрическим нормирующим функционалом с условием (4.I). Рассмотрим соответствующее пространство E_Φ и покажем, что $E = E_\Phi^{(0)}$. Действительно, E изометрично вложено в E_Φ, так как $\widetilde{E}$ совпадает с замыканием $L_1(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$ в G_Φ. Поэтому замыкания идеала $\mathcal{F}$ в E и в E_Φ совпадают. Но $\mathcal{F}$ плотно в E в силу леммы 3.3, следовательно, $E = E_\Phi^{(0)}$.

Обратно, пусть $E = E_\Phi^{(0)}$ для некоторого с.н.ф. Φ с условием (4.I). Тогда, согласно утверждению 2.9 [I03], для любого оператора $x \in E$ его перестановка $\widetilde{x}(t)$ является пределом своих верхних и правых срезок в пространстве $\widetilde{E}$. Пусть $\overline{K}$ - замыкание множества K ограниченных функций с носителями конечной меры. Так как множество K является линейным симметричным подмножеством в $\widetilde{E}$, то, согласно лемме 4.4 [5, стр. I28] ($\overline{K}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$) есть симметричное пространство. Перестановка любой функции из $\widetilde{E}$ принадлежит $\overline{K}$, поэтому $\overline{K} = \widetilde{E}$. С другой стороны, каждую функцию из K можно аппроксимировать последовательностью конечнозначных функций, сходящейся в норме пространства $L_1(0,\infty) \cap L_\infty(0,\infty)$, а значит, и в норме $\widetilde{E}$. Таким образом, в $\widetilde{E}$ плотны конечнозначные функции. Согласно теореме 4.8 [I3, стр.I40], пространство $\widetilde{E}$ сепарабельно, поэтому в нем выполнено условие (A) [II]. В силу теоремы 2.3 в E выполнено условие (A).

Следствие 4.17. Всякое сепарабельное симметричное пространство E на (A,τ) совпадает с некоторым пространством $E_{\Phi}^{(0)}$.

Следствие 4.18. Симметричное пространство на (A,τ) удовлетворяет условиям (A), (B) и (C) тогда и только тогда, когда $E=E_{\Phi}$ для некоторого мононормирующего с.н.ф. Φ с условием (4.1).

§ 5. Симметричные пространства на атомических алгебрах фон Неймана

Пусть A – σ – конечная атомическая алгебра фон Неймана. Она может быть представлена в виде C^* – прямой суммы $A=\prod_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n – σ – конечные факторы типа I. Каждая алгебра A_n изоморфна алгебре $B(H_n)$ всех линейных ограниченных операторов в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H_n. Таким образом, можно считать, что $A=\prod_{n=1}^{\infty} B(H_n)$ и A действует в гильбертовом пространстве $H=\prod_{n=1}^{\infty} H_n$.

На алгебре A естественно рассматривать след τ, который является сужением канонического следа в $B(H)$. В этом случае алгебра $C(A,\tau)$ совпадает с A, а $C_0(A,\tau)$ – с алгеброй всех компактных операторов из A.

Перестановка $\tilde{x}(t)$ произвольного оператора $x\in A$ естественным образом отождествляется с последовательностью $\mu(x)=\{\mu_n(x)\}$, где

$$\mu_n(x)=\int_{n-1}^{n}\tilde{x}(t)\,dt=\tilde{x}(n).$$

Последовательность $\mu(x)$ совпадает с последовательностью S - чисел оператора x [7]. Если x - компактный оператор, то она состоит из собственных значений оператора $|x|$, расположенных в убывающем порядке и с учетом кратностей.

Всякое симметричное пространство на (A,τ) есть двусторонний идеал в A (не обязательно собственный). Если $A=B(H)$, то класс симметричных пространств на (A,τ), отличных от A, совпадает с классом симметрично-нормированных идеалов Шаттена - фон Неймана [7, 9].

Предположим, что симметричное пространство E на (A,τ) содержит некомпактный оператор x. Из определения S - чисел следует, что $\mu_n(x)>\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$ и всех номеров n. Это означает, что оператор $\varepsilon\mathbb{1}$ принадлежит E и, следовательно, $E=A$. Поэтому для всех пространств E, отличных от A, имеет место включение $E\subset C_0(A,\tau)$. При этом $C_0(A,\tau)$ относительно операторной нормы само является симметричным пространством на (A,τ). Мы будем для краткости обозначать его через C_0.

П р е д л о ж е н и е 5.I. В пространстве C_0 выполнено условие (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}\subset C_0$, $x_n\downarrow 0$. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем такой проектор $p\in A$, что

$\|px_1p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$, а проектор $q = 1 - p$ конечномерен. Так как $qx_nq \downarrow 0$, то в силу конечномерности алгебры qAq имеем $\|qx_nq\|_\infty \to 0$. Выберем номер n_0 так, чтобы при $n > n_0$ выполнялось неравенство $\|qx_nq\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда для таких номеров в силу неравенства $x_n \le 2(px_np + qx_nq)$ получим $\|x_n\|_\infty < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_\infty = 0$.

Следствие 5.2. Если $\{x_n\} \subset C_0$, $x_n \downarrow 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mu_k(x_n) = 0$$

для каждого номера k .

Пусть l_∞ - пространство всех ограниченных последовательностей комплексных чисел и $\xi = \{\xi_n\} \in l_\infty$. Введем функцию

$$d_\xi(\lambda) = \mathrm{card}\{n : |\xi_n| > \lambda\},\ \lambda > 0$$

и положим

$$\xi_n^* = \inf\{\lambda > 0 : d_\xi(\lambda) < n\}.$$

Последовательность $\xi^* = \{\xi_n^*\}$ называется перестановкой последовательности ξ . Если последовательность ξ рассматривать как функцию на множестве натуральных чисел, алгебра всех подмножеств которого снабжена считающей мерой, то ее перестановка (в смысле § I) - ступенчатая функция на $(0, +\infty)$ - естественным образом отождествляется с последовательностью ξ^* .

Банахово пространство последовательностей $C \subset \ell_\infty$ называется симметричным, если из того, что $\xi \in C$, $\eta \in \ell_\infty$ и $\eta_n^* \leq \xi_n^*$ для всех номеров n, следует, что $\eta \in C$ и $\|\eta\|_C \leq \|\xi\|_C$.

Пусть E - симметричное пространство на (A, τ). Обозначим через $\widetilde{E}$ совокупность всех таких последовательностей $\xi \in \ell_\infty$, что $\xi^* = \mu(x)$ для некоторого оператора $x \in E$, и положим в этом случае $\|\xi\|_{\widetilde{E}} = \|x\|_E$. Если $\{e_n\}$ - максимальный набор попарно ортогональных минимальных проекторов из A, то подалгебра фон Неймана $B \subset A$ порожденная последовательностью $\{e_n\}$, изоморфна алгебре ℓ_∞. Легко видеть, что пространство $E_B = E \cap B$ с нормой $\|\cdot\|_E$ является симметричным пространством на (B, τ). При этом для любого оператора $x \in E$ найдется оператор $y \in E_B$, равноизмеримый с x, т.е. такой, что $\mu(x) = \mu(y)$. Ясно, что изоморфизм между B и ℓ_∞ взаимно однозначно отображает E_B на $\widetilde{E}$, сохраняя равноизмеримость, частичный порядок на эрмитовых частях и значения функционалов $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$. Отсюда. в частности, следует, что $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})$ - симметричное пространство последовательностей. В дальнейшем мы будем отождествлять пространства $\widetilde{E}$ и E_B и считать элементы этих пространств одновременно операторами из A и последовательностями из ℓ_∞. Заметим, что если определить $\widetilde{E}$ как пространство функций на $(0, +\infty)$ (см. § 2), то оно не будет симметричным пространством.

Предложение 5.3. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ). Следующие условия эквивалентны:

1. Норма в E порядково непрерывна.
2. Норма в $\widetilde{E}$ порядково непрерывна.

Доказательство. 1 $\Longrightarrow$ 2. Если норма в E порядково непрерывна, то $E \neq A$ и поэтому $E \subset C_0$. Пусть $\{x_n\} \subset \widetilde{E}$ и $x_n \downarrow 0$ в $\widetilde{E}$. Можно считать, что $\widetilde{E}$ - подпространство в E. Предположим, что $x = \inf\limits_n x_n$ в E. Тогда $\mu_k(x) \leq \mu_k(x_n)$ для всех номеров n, k. Так как $x_n^* \downarrow 0$ (здесь x_n^* - перестановка последовательности $x_n \in \widetilde{E}$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_k(x_n) = 0$ для каждого номера k. Следовательно, $x=0$, т.е. $x_n \downarrow 0$ в E и потому $\|x_n\|_E = \|x_n\|_{\widetilde{E}} \longrightarrow 0$.

2 $\Longrightarrow$ 1. Если в $\widetilde{E}$ выполнено условие (A), то $\widetilde{E} \subset C_0$ и поэтому $E \subset C_0$. Пусть $\{x_n\} \subset E$ и $x_n \downarrow 0$. Тогда последовательность $\{\mu(x_n)\}$ есть подмножество $\widetilde{E}$ и, согласно следствию 5.2 $\mu(x_n) \downarrow 0$. В силу порядковой непрерывности нормы в $\widetilde{E}$ имеем $\|\mu(x_n)\|_{\widetilde{E}} \to 0$ и $\|x_n\|_E \longrightarrow 0$.

Лемма 5.4. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ). Тогда симметричные пространства последовательностей $(E')^\sim$ и $(\widetilde{E})'$ совпадают.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 2.5.

Следствие 5.5. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ).

I. E максимально тогда и только тогда, когда максимально $\widetilde{E}$.

2. Пространства E' и E''' совпадают.

3. В пространстве E' выполнены условия (B) и (C).

Предложение 5.6. Пусть $E \subset C_0$ - симметричное пространство на (A,τ) . Следующие условия эквивалентны:

I. Норма в E монотонно полна.

2. Норма в $\widetilde{E}$ монотонно полна.

Доказательство. I $\Longrightarrow$ 2. Пусть $\{x_n\} \subset \widetilde{E}$ $0 \le x_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|x_n\|_{\widetilde{E}} < \infty$. Существует такой оператор $x \in E$, что $x_n \uparrow x$. Так как $x_n, x \in C_0$ и $(x - x_n) \downarrow 0$, то в силу предложения 5.I $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\|_\infty = 0$. Поскольку $\{x_n\} \subset B$, а алгебра B замкнута по норме в A , то $x \in \widetilde{E} = B \cap E$.

2 $\Longrightarrow$ I. Пусть в $\widetilde{E}$ выполнено условие (B). Тогда $\widetilde{E}$ совпадает с $(\widetilde{E})''$ по составу и нормы в этих пространствах эквивалентны. Из леммы 5,4 следует, что E и E'' совпадают по составу и имеют эквивалентные нормы. Но, согласно следствию 5.5, в E'' выполнено условие (B), значит, оно выполнено и в E .

Следующие два утверждения доказываются аналогично предложениям 5.3 и 5.6.

Предложение 5.7. Пусть $E \subset C_0$ - симметричное пространство на (A,τ) . Следующие условия эквивалентны:

I. Норма в E порядково полунепрерывна.

2. Норма в $\widetilde{E}$ порядково полунепрерывна.

П р е д л о ж е н и е 5.8. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ). Следующие условия эквивалентны:

1. E вполне симметрично.
2. $\widetilde{E}$ вполне симметрично.

З а м е ч а н и е 5.9. В условиях предложений 5.6 и 5.7 мы для удобства исключили случай $E=A$. Тем не менее, и в пространстве A и в соответствующем пространстве $\ell_\infty=\widetilde{A}$ условия (B) и (C) выполнены.

Приведем теперь критерий сепарабельности симметричного пространства.

П р е д л о ж е н и е 5.10. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ). Следующие условия эквивалентны:

1. В E выполнено условие (A);
2. В E плотно множество конечномерных операторов из A;
3. Пространство E сепарабельно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1 $\Longrightarrow$ 2. Пусть x - оператор из E, $x=u|x|$ - его полярное разложение, и пусть

$$|x|=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)p_k -$$

разложение в ряд Шмидта (см. [7]) оператора $|x|$.

Если x_n - n - й отрезок этого ряда, то $\{ux_n\}$ - последовательность конечномерных операторов, сходящаяся к x по норме пространства E в силу ее порядковой непрерывности.

2 $\Longrightarrow$ 3. Пусть Ω - какое-либо счетное множество векторов, плотное в H, а S - множество всех конечномерных операторов из $B(H)$ вида $y=\sum_n(\cdot,\varphi_n)\psi_n$, где φ_n и ψ_n принадлежат Ω.

Нетрудно убедиться, что замыкание в E счетного множества $S \cap E$ содержит все конечномерные операторы из E.

$3 \Longrightarrow 1$. Пусть E сепарабельно. Тогда сепарабельно его подпространство $\tilde{E}$. Согласно [II], в $\tilde{E}$ выполнено условие (A), поэтому в силу предложения 5.3 в E выполнено условие (A).

ГЛАВА II

ИЗОМЕТРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 6. Положительные изометрии

В этом параграфе A и B - конечные непрерывные алгебры фон Неймана, τ и ν - точные нормальные следы на A и B соответственно.

Пусть E - симметричное пространство на (A,τ). Будем говорить, что E обладает строго монотонной нормой, если для $x, y \in E$ из $|y| \leq |x|$ и $|x| \neq |y|$ следует, что $\|y\|_E \neq \|x\|$. Примерами пространств со строго монотонной нормой могут служить пространства Лоренца $\Lambda_\psi(A,\tau)$, построенные по строго возрастающим функциям $\psi(t)$ (см. лемму 7.4), а также пространства Орлича $L_M(A,\tau)$ [25], когда N - функция $M(t)$ строго выпукла (см. [59, 96]).

Всюду далее E - симметричное пространство на (A,τ), F - вполне симметричное пространство на (B,ν) со строго монотонной нормой. Через $S(x)$ обозначается носитель оператора $|x|$.

Теорема 6.1. Пусть $U: E \to F$ - положительная изометрия. Тогда существуют единственные положительный оператор b, присоединенный к B, и йорданов изоморфизм Φ алгебры A на C^*- подалгебру в B такие, что b коммутирует с $\Phi(x)$ для всех $x \in A$, $S(b) = \Phi(\mathbb{1})$ и

$$U(x) = b\,\Phi(x)$$

для всех $x \in A$.

Доказательство теоремы 6.I использует следующие три леммы.

Л е м м а 6.2. Пусть x и y - положительные операторы из $L_1(A,\tau)$. Тогда

I) $(x-y) \prec (x+y)$;

2) $(x-y)^{\sim}=(x+y)^{\sim}$ тогда и только тогда, когда $xy=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_0 - максимальная коммутативная $*$ -подалгебра в A , содержащая спектральное семейство оператора $x-y$. Алгебра A_0 изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega,\mu)$ для некотсрого непрерывного пространства с конечной мерой (Ω,μ), и оператор $x-y$ можно отождествить с некоторой функцией $f(\omega)\in L_1(\Omega,\mu)$. Тогда для фиксированного $t\in(0,1]$ найдется такое измеримое множество $\Omega_t\subset\Omega$, что $\mu(\Omega_t)=t$ и

$$\int_0^t f^*(s)\,ds=\int_{\Omega_t}|f(\omega)|\,d\mu .$$

Найдутся такие измеримые дизъюнктные множества $\Omega_1,\Omega_2\subset\Omega$, что $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega_t$, $f\chi_{\Omega_1}\geqslant 0$ и $f\chi_{\Omega_2}\leq 0$. Пусть p_1 и p_2 - проекторы из A_0 , соответствующие характеристическим функциям χ_{Ω_1} и χ_{Ω_2}. Имеем

$$\int_0^t (x-y)^{\sim}(s)\,ds=\int_0^t f^*(s)\,ds=\int_{\Omega_1} f(\omega)\,d\mu-\int_{\Omega_2} f(\omega)\,d\mu=$$

$$=\tau(p_1(x-y))-\tau(p_2(x-y))\leq\tau((p_1+p_2)(x+y)) .$$

Согласно теореме 3.3 [I02],

$$\tau((p_1+p_2)(x+y))\leq$$

$$\leq \int_0^1 (P_1+P_2)^{\sim}(s)(x+y)^{\sim}(s)\,ds = \int_0^t (x+y)^{\sim}(s)\,ds.$$

Таким образом, $(x-y) \prec (x+y)$ в силу произвольности t.

2) Если $xy=0$, то $|x+y|^2 = x^2+y^2 = |x-y|^2$ и, следовательно, $(x-y)^{\sim} = (x+y)^{\sim}$. Обратно, пусть $(x-y)^{\sim} = (x+y)^{\sim}$. Тогда $\|x-y\|_1 = \|x+y\|_1$.

Используя обозначения пункта I) для $\Omega_t = \Omega$, получим

$$\tau((P_1+P_2)(x+y)) = \tau(x+y) = \|x+y\|_1 = \|x-y\|_1 =$$

$$= \int_{\Omega_1} f(\omega)\,d\mu - \int_{\Omega_2} f(\omega)\,d\mu = \tau((P_1-P_2)(x-y)),$$

откуда следует, что $P_2 x = P_1 y = 0$. Далее $xy = (P_1+P_2)xy = P_1 xy$. Но $P_1(x-y) = (x-y)P_1$, поэтому $P_1 x = x P_1$, следовательно, $P_1 xy = x P_1 y = 0$. Таким образом, $xy=0$.

З а м е ч а н и е 6.3. Из доказательства леммы фактически следует, что для положительных $x, y \in L_1(A,\tau)$ равенство $\|x-y\|_1 = \|x+y\|_1$ равносильно тому, что $xy=0$.

Л е м м а 6.4. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ из $L_1(0,1)$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $f=f^*$, $g=g^*$;

2) $f \prec g$;

3) $\|f\|_1 < \|g\|_1$.

Тогда в $L_1(0,1)$ найдется ненулевая функция $h(t) \geq 0$ такая, что $(g-h) = (g-h)^*$ и $f \prec (g-h)$.

Доказательство. Положим $t_0=1$, если $g(t)$ строго положительна, и $t_0=\inf\{t\in(0,1):g(t)=0\}$ в противном случае. Пусть

$$H(t)=\int_0^t (g-f)(s)ds.$$

Согласно условию леммы, $H(1)>\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$ и $H(t)$ убывает на интервале $(t_0,1)$ в случае, когда $t_0<1$. Следовательно, $H(t_0)>\varepsilon$ и в силу непрерывности функции $H(t)$ существует такое число $t_1<t_0$, что $H(t)>\varepsilon$ для всех $t\in(t_1,1)$. Выберем $t_2>t_1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{t_2}^1 g(s)ds<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $h(t)=g(t)\chi_{(t_2,1)}(t)$. Тогда $g-h=g\chi_{(0,t_2]}$ и очевидно, $(g-h)=(g-h)^*$. Имеем при $t\in(0,t_2]$

$$\int_0^t (g-h)(s)ds-\int_0^t f(s)ds=\int_0^t (g-f)(s)ds\geqslant 0.$$

Далее, для всех $t\in(t_2,1)$

$$\int_0^t (g-h)(s)ds-\int_0^t f(s)ds=\int_0^t (g-f)(s)ds-\int_{t_2}^t g(s)ds>\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

Таким образом, $f\prec(g-h)$.

Замечание 6.5. Оператор T, действующий в $L_1(A,\tau)$, называется абсолютным сжатием, если $\|T(x)\|_1\leq\leq\|x\|_1$ для всех $x\in L_1(A,\tau)$ и $\|T(x)\|_\infty\leq\|x\|_\infty$ для всех $x\in A$. Это эквивалентно тому, что $T(x)\prec x$ для всех $x \in L_1(A,\tau)$ [103]. Из леммы 6.4 вытекает, что абсолютное сжатие, являющееся изометрией в каком-либо вполне симметричном пространстве на (A,τ) со строго монотонной нормой, является также L_1 - изометрией.

Лемма 6.6. Пусть $F \subset L_1(B,\nu)$ - вполне симметричное пространство со строго монотонной нормой, x и y - положительные операторы из F. Тогда $\|x-y\|_F = \|x+y\|_F$ в том и только в том случае, если $xy=0$.

Доказательство. Предположим, что $\|x-y\|_F = \|x+y\|_F$, но $xy \neq 0$. Согласно лемме 6.2, $(x-y) \prec (x+y)$, откуда $\|x-y\|_1 \leq \|x+y\|_1$. В силу замечания 6.3 здесь возможно только строгое неравенство.

Пусть B_0 - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в B, содержащая спектральное семейство оператора $x+y$. Алгебра B_0 отождествляется с алгеброй $L_\infty(\Omega,\mu)$ для некоторого непрерывного пространства с конечной мерой (Ω,μ). Согласно [56], существует такое сохраняющее меру отображение $\pi : \Omega \to (0,1)$, что $x+y = (x+y)^\sim \circ \pi$. По лемме 6.4 существует такая ненулевая функция $h(t) \geqslant 0$, что функция $(x+h)^\sim - h$ совпадает со своей перестановкой и $(x-y)^\sim \prec (x+y)^\sim - h$. Положим $z = [(x+y)^\sim - h] \circ \pi$. Тогда $0 \leq z \leq x+y$, $z \neq x+y$ и $(x-y) \prec z$. Имеем $\|x-y\|_F \leq \|z\|_F < \|x+y\|_F$. Полученное противоречие показывает, что $xy=0$. Достаточность вытекает из леммы 6.2.

Доказательство теоремы 6.1. Для каждого проектора $p \in A$ положим $\Phi(p) = s(U(p))$. Если

p и q - проекторы из A и $pq=0$, то $\|p+q\|_E = \|p-q\|_E$ и, следовательно, $\|U(p)+U(q)\|_F = \|U(p)-U(q)\|_F$. Согласно лемме 6.6, $U(p)U(q)=0$. Это означает, что $\Phi(p)\Phi(q)=0$, поэтому $\Phi(p+q) = \Phi(p)+\Phi(q)$. Оставшаяся часть доказательства следует схеме доказательства теоремы 2 из [104] и приводится здесь для полноты изложения.

Для всякого самосопряженного простого оператора

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \in A \quad \text{положим} \quad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi(p_k).$$

При этом $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$, $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$,

$\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Phi(x+y) = \Phi(x)+\Phi(y)$ для коммутирующих самосопряженных простых операторов $x, y \in A$.

Пусть $x \in A$ - самосопряженный оператор и $f_n(t)$ - такая последовательность ступенчатых функций, что $f_n(0)=0$ и f_n сходится равномерно к функции $f(t)=t$ на спектре оператора x. В этом случае $\Phi(x)$ определим как равномерный предел в B последовательности простых операторов $\Phi(f_n(x))$.

Если p - проектор из A, то $U(p)\Phi(p) = U(p)$ и $U(\mathbb{1}-p)\Phi(p) = 0$, поэтому $U(p) = U(\mathbb{1})\Phi(p)$. Следовательно, $U(x) = U(\mathbb{1})\Phi(x)$ для всякого самосопряженного простого оператора $x \in A$. Если x - произвольный самосопряженный оператор из A и f_n - те же ступенчатые функции, что и выше, то из неравенства

$$\|U(\mathbb{1})(\Phi(x)-\Phi(f_n(x)))\|_F \le \|U(\mathbb{1})\|_F \cdot \|\Phi(x)-\Phi(f_n(x))\|_\infty$$

мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \| U(\mathbb{1})\Phi(x) - U(\mathbb{1})\Phi(f_n(x)) \|_F = 0$$

или $\lim_{n\to\infty} \| U(\mathbb{1})\Phi(x) - U(f_n(x)) \|_F = 0$. Кроме того, $\lim_{n\to\infty} \| x - f_n(x) \|_F = 0$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x) - U(f_n(x)) \|_F = 0,$$

т.е. $U(x) = U(\mathbb{1})\Phi(x)$.

Для самосопряженных $x, y \in A$ имеем

$$U(\mathbb{1})\left[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\right] = U(x+y) - U(x) - U(y) = 0.$$

Так как носитель оператора $\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)$ содержится в носителе $\Phi(\mathbb{1})$ оператора $U(\mathbb{1})$, то $\Phi(x+y) = \Phi(x)+\Phi(y)$. Таким образом, Φ - вещественно-линейный оператор на самосопряженной части A и в силу его равномерной непрерывности по-прежнему имеют место равенства $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$ и $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$. Продолжим Φ до комплексно-линейного равнсмерно непрерывного отображения алгебры A, положив $\Phi(x+iy) = \Phi(x) + i\Phi(y)$ для самосопряженных $x, y \in A$. Тогда $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ и $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$ для всех $x \in A$, т.е. Φ - йорданов морфизм.

Положим $b = U(\mathbb{1})$. Для любого проектора $p \in A$ имеем $b\Phi(p) = U(p) = \Phi(p)b$, следовательно, b коммутирует с $\Phi(x)$ для каждого самосопряженного простого оператора $x \in A$. Отсюда легко получить, что $b\Phi(x) = \Phi(x)b$ для любого $x \in A$. Теорема доказана.

Л е м м а 6.7. Пусть E - симметричное пространство на (A,τ) с порядково полунепрерывной нормой. Если $\{x_\alpha\}\subset E$ и $0\le x_\alpha\uparrow x\in E$, то $\|x_\alpha\|_E\longrightarrow\|x\|_E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $e_\alpha(\lambda)$ спектральную функцию оператора $x-x_\alpha$. Поскольку $e_\alpha^\perp(\lambda)\le$ $\le\frac{1}{\lambda}(x-x_\alpha)$, $(x-x_\alpha)\in L_1(A,\tau)$ и $\tau(x-x_\alpha)\longrightarrow 0$, то $\tau(e_\alpha^\perp(\lambda))\longrightarrow 0$ для каждого фиксированного $\lambda>0$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\alpha(\varepsilon)$, что $\tau(e_\alpha^\perp(\varepsilon))<\varepsilon$ при $\alpha\geqslant\alpha(\varepsilon)$. Так как $(x-x_\alpha)e_\alpha(\varepsilon)\le$ $\le\varepsilon e_\alpha(\varepsilon)$, то $\|(x-x_\alpha)e_\alpha(\varepsilon)\|_\infty\le\varepsilon$ при $\alpha\geqslant\alpha(\varepsilon)$. Это означает, что $x_\alpha\xrightarrow{\tau}x$. Топология сходимости по мере метризуема, поэтому существует такая последовательность индексов $\alpha_1\le\alpha_2\le\dots\le\alpha_n\le\dots$, что $x_{\alpha_n}\xrightarrow{\tau}x$. Ясно, что $x_{\alpha_n}\uparrow x$. Так как в E выполнено условие (C), то

$$\sup_n\|x_{\alpha_n}\|_E\le\sup_\alpha\|x_\alpha\|_E\le\|x\|_E=\sup_n\|x_{\alpha_n}\|_E,$$

т.е. $\|x_\alpha\|_E\longrightarrow\|x\|_E$.

Далее будем предполагать, что в пространствах E и F выполнено условие (C).

Т е о р е м а 6.8. Пусть $U:E\longrightarrow F$ - положительная изометрия. Тогда существуют единственные положительный оператор b, присоединенный к B, и нормальный йорданов изоморфизм алгебры A на слабо замкнутую $*$ - подалгебру в B такие, что b коммутирует с $\Phi(x)$ для всех $x \in A$, $s(b) = \Phi(\mathbb{1})$ и

$$U(x) = b\Phi(x)$$

для всех $x \in A$.

Доказательство. В силу теоремы 6.I достаточно доказать лишь нормальность Φ. Покажем сначала, что U - нормальное отображение. Пусть $\{x_\alpha\}$ - сеть положительных операторов из E, $x_\alpha \uparrow x \in E$. Тогда $\{U(x_\alpha)\}$ - возрастающая сеть, ограниченная сверху оператором $U(x)$. Существует измеримый оператор $y = \sup\limits_\alpha U(x_\alpha)$, присоединенный к B [101]. Так как пространство $L_1(B,\nu)$ монотонно полно (см., напр., [33]), то $y \in L_1(B,\nu)$. Кроме того, $y \leq U(x)$, поэтому $y \in F$. Предположим, что $y \neq U(x)$. Тогда $\|y\|_F \neq \|U(x)\|_F$. Но в силу порядковой полунепрерывности норм в пространствах E и F

$$\|y\|_F = \lim_\alpha \|U(x_\alpha)\|_F = \lim_\alpha \|x_\alpha\|_E = \|x\|_E = \|U(x)\|_F.$$

Полученное противоречие показывает, что $U(x_\alpha) \uparrow U(x)$.

Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ - сеть положительных операторов из A, $x_\alpha \uparrow x \in A$. Согласно теореме 6.I, $U(x_\alpha) = b\Phi(x_\alpha)$ и $U(x) = b\Phi(x)$, поэтому, обозначая $y_\alpha = b^{\frac{1}{2}}\Phi(x_\alpha)b^{\frac{1}{2}}$ и $y = b^{\frac{1}{2}}\Phi(x)b^{\frac{1}{2}}$, получим $y_\alpha \uparrow y$. Все операторы y_α и y принадлежат кольцу измеримых операторов, присоединенных к алгебре $B_0 = \Phi(\mathbb{1})B\Phi(\mathbb{1})$. Так как в этом кольце существует оператор $b^{-\frac{1}{2}}$, из $y_\alpha \uparrow y$

следует $\Phi(x_\alpha)\uparrow\Phi(x)$.

Следствие 6.9. Пусть положительная изометрия U отображает E на F. Тогда Φ отображает A на B. В этом случае оператор b присоединен к центру B.

Доказательство. $*$ - подалгебра $B_0=\Phi(A)$ слабо замкнута в B, поэтому B - подалгебра фон Неймана в $s(b)Bs(b)$. Так как алгебра B конечна, то $C(B_0,\nu)$ есть $*$ - подалгебра в $C(B,\nu)$. Если $\{y_n\}\subset B_0$, $0\le y_n\uparrow y\in C(B,\nu)$, то $y_n\xrightarrow{\tau} y$ [31, с.244], и поскольку $C(B_0,\nu)$ полно в топологии сходимости по мере, то $y\in C(B_0,\nu)$. Пусть $x\in E$, $x\geqslant 0$ и $\{x_n\}$ - такая последовательность из A, что $0\le x_n\uparrow x$. Тогда последовательность $\{U(x_n)\}$ возрастает и $U(x_n)\le U(x)$, $n\in N$. Следовательно, существует такой $y\in C(B,\nu)$, что $U(x_n)\uparrow y$. Используя условие (C), получим

$$\|y\|_F=\lim_{n\to\infty}\|U(x_n)\|_F=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E=\|x\|_E=\|U(x)\|_E.$$

Так как $y\le U(x)$ и норма в F строго монотонна, то $y=U(x)$, т.е. $U(x_n)\uparrow U(x)$. В силу теоремы 6.8 элементы $U(x_n)$ принадлежат $C(B_0,\nu)$, поэтому и $U(x)\in C(B_0,\nu)$. Поскольку $B\subset F$, то $B=B_0$, т.е. Φ является йордановым изоморфизмом A на B. Ясно, что в этом случае $b=U(\mathbb{1})$ присоединен к центру B.

С л е д с т в и е 6.10. Пусть положительная изометрия U отображает E на F. Если A или B является фактором, то Φ есть изоморфизм или антиизоморфизм, а b пропорционален единице из B, т.е.

$$U(x) = \lambda \Phi(x), \quad x \in A,$$

где λ – положительная константа.

Доказательство вытекает из известного разложения йорданова изоморфизма в прямую сумму морфизма и антиморфизма (см. § 1, п. 3) и из следствия 6.9.

§ 7. Изометрии некоммутативных пространств Лоренца

Всюду в этом параграфе A и B – конечные непрерывные алгебры фон Неймана, τ и ν – точные нормальные конечные следы на A и B соответственно. Будем для удобства считать, что $\tau(\mathbb{1}) = \nu(\mathbb{1}) = 1$.

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Пусть E и F – вполне симметричные $(\ell\kappa)$ - эквивалентные пространства на (A,τ) и (B,τ) соответственно. Линейный оператор $T: L_1(A,\tau) \longrightarrow L_1(B,\nu)$ назовем абсолютным сжатием, если $T(A) \subset B$, $\|T\|_{L_1 \to L_1} \leq 1$ и $\|T\|_{A \to B} \leq 1$.

Л е м м а 7.1. Если $T: L_1(A,\tau) \to L_1(B,\nu)$ – абсолютное сжатие, то $T(E) \subset T(F)$ и $\|T\|_{E \to F} \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $T(x)^{\sim} \prec \tilde{x}$ для любого $x \in L_1(A,\tau)$. Воспользуемся следующим равенством [29, 103]

$$\int_0^t \tilde{x}(s)ds = \inf\{\|a_1\|_1 + t\|a_2\|_\infty\},$$

где точная нижняя грань берется по всем представлениям $x = a_1 + a_2$, $a_1 \in L_1(A,\tau)$, $a_2 \in A$. Имеем

$$\int_0^t [T(x)]^\sim(s)ds = \inf\{\|b_1\|_1 + t\|b_2\|_\infty,\ b_1 + b_2 = T(x)\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|T(a_1)\|_1 + t\|T(a_2)\|_\infty,\ a_1 + a_2 = x\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|a_1\|_1 + t\|a_2\|_\infty,\ a_1 + a_2 = x\} = \int_0^t \tilde{x}(s)ds.$$

Так как пространство $\tilde{E} = \tilde{F}$ вполне симметрично (см. § 2), то мы имеем

$$\|T(x)\|_F = \|T(x)^\sim\|_{\tilde{F}} \leq \|\tilde{x}\|_{\tilde{E}} = \|x\|_E,\ x \in E.$$

Л е м м а 7.2. Пусть норма в пространства E и F порядково полунепрерывна, $\Phi : A \to B$ - йорданов изоморфизм, сохраняющий след, т.е.

$$\nu(\Phi(x)) = \tau(x),\quad x \in A.$$

Тогда $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$ для всех $x \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [104], Φ сохраняет L_1- норму для всех $x \in A$, поэтому его можно продолжить до изометрического оператора $\hat{\Phi} : L_1(A,\tau) \to L_1(B,\nu)$. Кроме того, любой йорданов изоморфизм сохраняет операторную норму [5]. Следовательно, $\hat{\Phi}$ является абсолютным сжатием.

Пусть $x_0 \in A$, $\|x_0\|_E = 1$. Покажем, что $\|\Phi(x_0)\|_F = 1$.

Так как в E выполнено условие (C), то [II,33]

$$\|x_0\|_E = \|x_0\|_{E''} = \sup\{|\tau(x_0 y)| : y \in E', \|y\|_{E'} \le 1\}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой $y_0 \in E'$, что $\|y_0\|_{E'} \le 1$ и $\tau(x_0 y_0) > 1-\varepsilon$. Пространства E' и F' вполне симметричны и (ℓn) - эквивалентны (см. § 2), поэтому, в силу леммы 7.I, $\hat{\Phi}(y_0) \in F'$ и $\|\hat{\Phi}(y_0)\|_{F'} \le 1$. Для $x, y \in A$ имеем

$$\tau(xy) = \frac{1}{2}\tau(xy+yx) = \frac{1}{2}\nu(\Phi(xy+yx)) = \nu(\Phi(x)\Phi(y)).$$

Пусть теперь $y \in L_1(A,\tau)$ и $\{y_n\}$ - такая последовательность из A, что $\|y-y_n\|_1 \to 0$. Тогда для любого

$$\tau(xy) = \lim_n \tau(xy_n) = \lim_n \nu(\Phi(x)\Phi(y_n)) = \nu(\Phi(x)\hat{\Phi}(y)).$$

В силу этого равенства $\nu(\Phi(x_0)\hat{\Phi}(y_0)) > 1-\varepsilon$.
Последнее означает, что

$$\|\Phi(x_0)\|_F = \sup\{|\nu(\Phi(x_0)z)| : z \in F', \|z\|_{F'} \le 1\} = 1.$$

В следующей лемме A_0 - подалгебра фон Неймана в A, E - оператор условного ожидания относительно подалгебры A_0.

Л е м м а 7.3. Для проектора $p \in A$ следующие условия эквивалентны:

I) $E(p)$ - проектор;

2) $p \in A_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $E(p)$ - проектор. Согласно свойствам условного ожидания,

$$E[E(p)pE(p)] = E(p)E[pE(p)] = E(p) = E[E(p)]$$

или

$$E[E(p) - E(p)pE(p)] = 0. \tag{7.I}$$

Так как $E(p)pE(p) \leq E(p)$, то из (7.I) следует $E(p) = E(p)pE(p)$. Из последнего равенства вытекает, что $E(p) \leq p$. Но из свойств условного ожидания следует, что $\tau(E(p)) = \tau(p)$, поэтому $E(p) = p$.

Обратное очевидно, так как если $p \in A_0$, то $p = E(p)$.

Пусть $\psi(t)$ - непрерывная возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, $\psi(0) = 0$, $\Lambda_\psi(A,\tau)$ и $\Lambda_\psi(B,\nu)$ - пространства Лоренца на (A,τ) и (B,ν) соответственно.

Л е м м а 7.4. Для того, чтобы норма в пространстве Лоренца $\Lambda_\psi(A,\tau)$ была строго монотонна, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(t)$ строго возрастала на $[0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\psi(t)$ строго возрастает. Пусть $x, y \in \Lambda_\psi(A,\tau)$, $|x| \leq |y|$ и $|x| \neq |y|$. Тогда $\tilde{x}(t) \leq \tilde{y}(t)$ при всех $t \in (0,1]$ и $\tilde{x}(t) \not\equiv \tilde{y}(t)$. Последнее вытекает из того, что

$$\int_0^1 \tilde{x}(t)\,dt = \tau(|x|) < \tau(|y|) = \int_0^1 \tilde{y}(t)\,dt.$$

Найдется такой интервал $[t_0, t_1]$, $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$, что $\tilde{y}(t) - \tilde{x}(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Имеем

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} - \|x\|_{\Lambda_\psi} =$$

$$= \int_0^1 [\tilde{y}(t) - \tilde{x}(t)]\, d\psi(t) \geqslant \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{y}(t) - \tilde{x}(t)]\, d\psi(t) > 0,$$

так как $\psi(t_1) > \psi(t_0)$.

Обратно, предположим, что $\psi(t)$ постоянна на $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1 \leq 1$. Выберем проекторы $p, q \in A$ так, чтобы $p \leq q$, $\tau(p) = t_0$ и $\tau(q) = t_1$. Тогда

$$\|p\|_{\Lambda_\psi} = \psi(t_0) = \psi(t_1) = \|q\|_{\Lambda_\psi},$$

что противоречит строгой монотонности нормы.
Всюду далее будем предполагать, что функция $\psi(t)$ строго вогнута на $[0,1]$. Очевидно, при этом $\psi(t)$ строго возрастает на $[0,1]$, поэтому норма в пространствах Лоренца, построенных по этой функции, строго монотонна.

Через $\Lambda_\psi(0,1)$ обозначается пространство Лоренца измеримых функций на $(0,1)$ с нормой

$$\|f\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 f^*(t)\, d\psi(t)$$

(см. [II], стр. I55).

Л е м м а 7.5. Пусть $f \in \Lambda_\psi(0,1)$. Если $f \prec \chi_{(0,s]}$ и $f^* \neq \chi_{(0,s]}$, где $0 < s \leq 1$, то $\|f\|_{\Lambda_\psi} < \|\chi_{(0,s]}\|_{\Lambda_\psi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $f^*(t) \leq \chi_{(0,s]}(t)$ при $t \in (0,s]$ и $\lambda = f^*(s) < \chi_{(0,s]}(s) = 1$.

Если $f^*(s)=0$, то утверждение следует из строгой монотонности нормы в $\Lambda_\psi(0,1)$. Считая, что $\lambda=f^*(s)>0$, положим

$$f_1(t)=\begin{cases} f^*(t), & t\in(0,s], \\ \lambda, & t\in(s,\tau], \\ 0, & t\in(\tau,1], \end{cases}$$

где $\tau=\frac{1}{\lambda}\int_s^1 f^*(t)dt+s$. Имеем

$$\int_0^1 f_1(t)dt=\int_0^1 f^*(t)dt,$$

$f_1^*=f_1$ и $f\prec f_1\prec \chi_{(0,s]}$.

Построим функцию $f_2(t)$, удовлетворяющую условиям:

I) $f_1(t)\le f_2(t)\le 1$ при $t\in(0,s]$;

2) $$f_2(t)=\begin{cases} \alpha, & t\in(s,\tau], \\ 0, & t\in(\tau,1], \end{cases}$$

где $0<\alpha<\lambda$;

3) $\int_0^1 f_2(t)dt=\int_0^1 f_1(t)dt$;

4) $f_2^*=f_2$.

Очевидно, $f_2\prec\chi_{(0,s]}$. Покажем, что $f_1\prec f_2$.
Действительно,

$$\int_0^t f_1(t)dt \le \int_0^t f_2(t)\,dt$$

при $t \in (0, s]$,

$$\int_0^t f_1(t)dt = \int_0^t f_2(t)\,dt$$

при $t \in (\tau, 1]$. Пусть $t \in (s, \tau]$. Тогда

$$\int_0^t f_1(t)dt = \int_0^s f_1(t)dt + 1(t-s),$$

$$\int_0^t f_2(t)dt = \int_0^s f_2(t)dt + \alpha(t-s).$$

Следовательно,

$$\int_0^t [f_2(t) - f_1(t)]dt = (1-\alpha)(\tau - s) + (\alpha - 1)(t-s) =$$

$$= (1-\alpha)(\tau - t) \geqslant 0.$$

Далее, положим $\varepsilon = \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\}$, $\theta = \frac{s+\tau}{2}$ и

$$f_3(t) = f_2(t) + \varepsilon\chi_{(s,\theta]}(t) - \varepsilon\chi_{(\theta,\tau]}(t).$$

Тогда $f_3 = f_3^*$ и $f \prec f_1 \prec f_2 \prec f_3 \prec \chi_{(0,s]}$. Имеем

$$\|f_3\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 [f_2(t) + \varepsilon\chi_{(s,\theta]}(t) - \varepsilon\chi_{(\theta,\tau]}(t)]\,d\psi(t) =$$

$$= \|f_2\|_{\Lambda_\psi} + \varepsilon\int_s^\theta d\psi(t) - \varepsilon\int_\theta^\tau d\psi(t) =$$

$$= \|f_2\|_{\Lambda_\psi} + \varepsilon[\psi(\theta) - \psi(s)] - \varepsilon[\psi(\tau) - \psi(\theta)] > \|f_2\|_{\Lambda_\psi},$$

так как $\psi(s) + \psi(\tau) < 2\psi(\theta)$ в силу строгой вогнутости функции $\psi(t)$. Таким образом,

$$\|f\|_{\Lambda_\psi} \leq \|f_2\|_{\Lambda_\psi} < \|f_3\|_{\Lambda_\psi} \leq \|\chi_{(0,s]}\|_{\Lambda_\psi}.$$

Лемма доказана.

Нам понадобится следующая теорема, принадлежащая Ф.Сукочеву [20].

Т е о р е м а 7.6. Множество крайних точек единичного шара пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ состоит из операторов вида

$$x = \frac{1}{\psi(\tau(|v|))} v,$$

где v - ненулевая частичная изометрия из A.

Перейдем к доказательству основного результата параграфа.

Т е о р е м а 7.7. Линейное непрерывное отображение T пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$ является изометрией тогда и только тогда, когда существуют единственные унитарный оператор $u \in B$ и йорданов изоморфизм $\Phi: A \to B$ такие, что

$$\tau(x) = \nu(\Phi(x))$$

и

$$T(x) = u\Phi(x)$$

для всех $x \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть непрерывное линейное отображение T пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$ удовлетворяет при всех $x \in A$ равенству

$$T(x) = u\Phi(x),$$

где $u \in B$ - унитарный оператор, $\Phi : A \to B$ - йорданов изоморфизм, сохраняющий след. В силу леммы 7.2

$$\|T(x)\|_{\Lambda_\psi} = \|u\Phi(x)\|_{\Lambda_\psi} = \|\Phi(x)\|_{\Lambda_\psi} = \|x\|_{\Lambda_\psi}$$

для всех $x \in A$. Так как алгебры A и B плотны в $\Lambda_\psi(A,\tau)$ и $\Lambda_\psi(B,\tau)$ соответственно, а T - непрерывный оператор, то T - изометрия.

Обратно, пусть T - линейная изометрия $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\vartheta)$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi(1) = 1$. Тогда, согласно теореме 7.6, оператор $\mathbb{1}$ является крайней точкой единичного шара пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$. Так как изометрия сохраняет крайние точки единичных шаров, то в силу теоремы 7.6

$$T(\mathbb{1}) = \frac{1}{\psi(\vartheta(|a|))}\, a,$$

где a - частичная изометрия из B. Согласно [69], в B существует такой унитарный оператор u, что $u^* a = |a|$. Введем новую изометрию $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\vartheta)$:

$$U(x) = u^* T(x).$$

Имеем

$$U(\mathbb{1}) = \frac{1}{\psi(\vartheta(p))}\, p,$$

где $p = |a|$. Наша цель - показать, что $p = \mathbb{1}$ и U - положительная изометрия.

Каждому ненулевому проектору $e \in A$ сопоставим унитарный оператор $w \in B$, удовлетворяющий условию $wy = |y|$, где $y = U(\mathbb{1} + e)$, а также изометрию $\Lambda_\psi(A, \tau)$ на $\Lambda_\psi(B, \vartheta)$, задаваемую формулой

$$W(x) = wU(x).$$

В силу теоремы 7.6

$$U(e) = \frac{\psi(\tau(e))}{\psi(\vartheta(|v|))} v,$$

где $v \in B$ - частичная изометрия. Введем обозначения

$$\lambda = \frac{1}{\psi(\vartheta(p))}, \quad \xi = \frac{\psi(\tau(e))}{\psi(\vartheta(|v|))}.$$

Имеем

$$y = U(\mathbb{1} + e) = \lambda p + \xi v,$$

$$|y| = W(\mathbb{1} + e) = \lambda wp + \xi wv.$$

Итак, пусть $e \in A$ - произвольный ненулевой проектор, w, y и v - соответствующие ему операторы из B, ξ - соответствующая константа. Пусть, далее, B_0 - максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в B, содержащая спектральное семейство оператора $|y|$, E - оператор условного ожидания относительно B_0.

Для удобства разобьем доказательство на несколько частей.

Л е м м а 7.8. $E(wp)$ и $E(wv)$ - самосопряженные операторы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$|y| = E(|y|) = \lambda E(wp) + \xi E(wv).$$

Следовательно,

$$\lambda \operatorname{Re} E(\omega p) + \xi \operatorname{Re} E(\omega v) = |y| .$$

Так как $E(\omega p)$ - нормальный оператор, то

$$|E(\omega p)|^2 = (\operatorname{Re} E(\omega p))^2 + (\operatorname{Im} E(\omega p))^2 \geqslant |\operatorname{Re} E(\omega p)|^2 .$$

Если

$$|\operatorname{Re} E(\omega p)| \neq |E(\omega p)| ,$$

то в силу строго монотонности нормы

$$\|\operatorname{Re} E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} < \| E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} .$$

Но в этом случае

$$\|y\|_{\Lambda_\varphi} = \|\lambda \operatorname{Re} E(\omega p) + \xi \operatorname{Re} E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} \leqslant$$

$$\leqslant \|\lambda \operatorname{Re} E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} + \|\xi \operatorname{Re} E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} <$$

$$< \lambda \|E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} + \xi \|E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} .$$

В силу свойств условного ожидания и леммы 7.I имеем

$$\lambda \|E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} + \xi \|E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} \leqslant \lambda \|\omega p\|_{\Lambda_\varphi} + \xi \|\omega v\|_{\Lambda_\varphi} =$$

$$= \|\lambda p\|_{\Lambda_\varphi} + \|\xi v\|_{\Lambda_\varphi} = \|U(\mathbb{1})\|_{\Lambda_\varphi} + \|U(e)\|_{\Lambda_\varphi} =$$

$$= \|\mathbb{1}\|_{\Lambda_\varphi} + \|e\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^1 [\chi_{(0,1]}(t) + \chi_{(0,\tau(e)]}(t)]\, d\varphi(t) =$$

$$= \int_0^1 (\mathbb{1}+e)^{\sim}(t)\, d\varphi(t) = \|\mathbb{1}+e\|_{\Lambda_\varphi} = \|U(\mathbb{1}+e)\|_{\Lambda_\varphi} = \|y\|_{\Lambda_\varphi} .$$

Противоречие показывает, что $|E(\omega p)| = |\mathrm{Re}\, E(\omega p)|$, а это означает, что $\mathrm{Im}\, E(\omega p) = 0$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Im}\, E(\omega v) = 0$.

Л е м м а 7.9. $E(\omega p)$ и $E(\omega v)$ – положительные операторы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $E(\omega p)_- \neq 0$ или $E(\omega v)_- \neq 0$. Тогда в неравенстве

$$\lambda E(\omega p) + \xi E(\omega v) \leq \lambda E(\omega p)_+ + \xi E(\omega v)_+$$

левая часть не равна правой. Отсюда в силу строгой монотонности нормы получаем

$$\|y\|_{\Lambda_\varphi} = \|\lambda E(\omega p) + \xi E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} < \|\lambda E(\omega p)_+ + \xi E(\omega v)_+\|_{\Lambda_\varphi} \leq$$

$$\leq \|\lambda E(\omega p)_+\|_{\Lambda_\varphi} + \|\xi E(\omega v)_+\|_{\Lambda_\varphi} < \|\lambda E(\omega p)\|_{\Lambda_\varphi} +$$

$$+ \|\xi E(\omega v)\|_{\Lambda_\varphi} \leq \|\lambda p\|_{\Lambda_\varphi} + \|\xi v\|_{\Lambda_\varphi} = \|y\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Из полученного противоречия следует, что $E(\omega p) \geqslant 0$ и $E(\omega v) \geqslant 0$.

Л е м м а 7.10. $E(\omega p)$ и $E(\omega v)$ – проекторы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы ωp и ωv суть частичные изометрии, их перестановки являются характеристическими функциями. Если предположить, что

$$E(\omega p)^\sim \neq (\omega p)^\sim$$

или

$$E(\omega v)^\sim \neq (\omega v)^\sim,$$

то, согласно лемме 7.5,

$$\| E(\omega p)\|_{\Lambda_\psi} < \|\omega p\|_{\Lambda_\psi}$$

или

$$\| E(\omega v)\|_{\Lambda_\psi} < \|\omega v\|_{\Lambda_\psi}.$$

В этом случае имеем

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} = \|\lambda E(\omega p) + \xi E(\omega v)\|_{\Lambda_\psi} < \|\lambda p\|_{\Lambda_\psi} + \|\xi v\|_{\Lambda_\psi} = \|y\|_{\Lambda_\psi}.$$

Таким образом, перестановки положительных операторов $E(\omega p)$ и $E(\omega v)$ являются характеристическими функциями, а сами эти оператора - проекторами.

Л е м м а 7.II. $E(\omega p) = p$, $E(\omega v) = |v|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\| E(\omega p)\|_{\Lambda_\psi} \leq \| p\|_{\Lambda_\psi}.$$

Предположение строгого неравенства приводит. как и выше, к противоречию, поэтому $\| E(\omega p)\|_{\Lambda_\psi} = \| p\|_{\Lambda_\psi}$.

Из свойств условного ожидания следует, что

$$E(\omega p) = E(\omega p)^* E(\omega p) = E(p\omega^*) E(\omega p) \leq$$

$$\leq E(p\omega^* \omega p) = E(p).$$

Если $E(\omega p) \neq E(p)$, то в силу строгой монотонности нормы

$$\| p\|_{\Lambda_\psi} = \| E(\omega p)\|_{\Lambda_\psi} < \| E(p)\|_{\Lambda_\psi} \leq \| p\|_{\Lambda_\psi},$$

что невозможно. Следовательно, $E(p) = E(\omega p)$ и, согласно лемме 7.3, $p = E(p) = E(\omega v)$.

Аналогично получаем

$$E(wv) \le E(v^* w^* w v) = E(|v|),$$

откуда следует, что $E(wv) = |v|$.

Л е м м а 7.12. Операторы w и ρ коммутируют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно свойствам условного ожидания,

$$\rho = E(w\rho)E(w\rho)^* \le E(w\rho w^*).$$

Неравенство $\rho \ne E(w\rho w^*)$ приводит к противоречию

$$\|\rho\|_{\Lambda_\psi} < \|E(w\rho w^*)\|_{\Lambda_\psi} \le \|\rho\|_{\Lambda_\psi}$$

следовательно, $\rho = E(w\rho w^*)$. В силу леммы 7.3 $E(w\rho w^*) = w\rho w^*$, значит, $\rho = w\rho w^*$.

Л е м м а 7.13. $w\rho$ и wv – самосопряженные операторы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 7.12 следует, что $w\rho$ – нормальный оператор, поэтому

$$|\mathrm{Re}(w\rho)| \le |w\rho| = \rho \tag{7.2}$$

и

$$\|\mathrm{Re}(w\rho)\|_{\Lambda_\psi} \le \|\rho\|_{\Lambda_\psi}.$$

С другой стороны,

$$\rho = E(w\rho) = \mathrm{Re}\, E(w\rho) = E(\mathrm{Re}(w\rho)),$$

поэтому $\|\rho\|_{\Lambda_\psi} \le \|\mathrm{Re}(w\rho)\|_{\Lambda_\psi}$

Таким образом,

$$\|p\|_{\Lambda_\psi} = \|\operatorname{Re}(\omega p)\|_{\Lambda_\psi}. \tag{7.3}$$

Из (7.2), (7.3) и строгой монотонности нормы следует,что $|\operatorname{Re}(\omega p)| = p$. Опять воспользуемся нормальностью оператора ωp :

$$p = |\omega p| = |\omega p|^2 = (\operatorname{Re}(\omega p))^2 + (\operatorname{Im}(\omega p))^2 =$$
$$= p + (\operatorname{Im}(\omega p))^2.$$

Отсюда $\operatorname{Im}(\omega p) = 0$, т.е. ωp - самосопряженный оператор. Но тогда и $\omega v = \frac{1}{\xi}(|y| - \lambda \omega p)$ тоже самосопряженный оператор.

Л е м м а 7.I4. $\omega p = p$, $\omega v = |v|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\omega p \geq 0$ и $\omega v \geq 0$. Предположим противное, т.е. $(\omega p)_- \neq 0$ или $(\omega v)_- \neq 0$. Тогда

$$|y| = \lambda \omega p + \xi \omega v \leq \lambda (\omega p)_+ + \xi (\omega v)_+,$$

причем

$$\lambda \omega p + \xi \omega v \neq \lambda (\omega p)_+ + \xi (\omega v)_+$$

В силу строгой монотонности нормы получим

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} = \|\lambda \omega p + \xi \omega v\|_{\Lambda_\psi} < \lambda \|(\omega p)_+\|_{\Lambda_\psi} + \xi \|(\omega v)_+\|_{\Lambda_\psi} \leq$$

$$\leq \|\lambda \omega p\|_{\Lambda_\psi} + \|\xi \omega v\|_{\Lambda_\psi} =$$
$$= \|\lambda p\|_{\Lambda_\psi} + \|\xi v\|_{\Lambda_\psi} = \|y\|_{\Lambda_\psi}.$$

Противоречие показывает, что wp и wv - положительные частичные изометрии, т.е. проекторы. Отсюда

$$wp=(wp)^*wp=p,\ wv=(wv)^*wv=v^*v=|v|.$$

Л е м м а 7.15. Проектор p принадлежит центру алгебры B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 7.11 и 7.12 следует, что p коммутирует с w и $|v|$. Следовательно, p коммутирует с $v=w^*|v|$. Это означает, что p коммутирует с образом любого проектора $e\in A$ при отображении U . Так как в $\Lambda_\psi(A,\tau)$ выполнено условие (A), то множество G всевозможных линейных комбинаций проекторов из A плотно в $\Lambda_\psi(A,\tau)$ [26]. Значит, в $\Lambda_\psi(B,\nu)$ плотно множество $U(G)$. Так как проектор p коммутирует с этим множеством, то он коммутирует с каждым оператором из $\Lambda_\psi(B,\nu)$ и поэтому принадлежит центру B .

Л е м м а 7.16. $p=\mathbb{1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть проектор $e\in A$ таков, что $\tau(e)<\frac{1}{2}$, и пусть W - соответствующая ему изометрия $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$. Как показано выше,

$W(\mathbb{1})=\lambda p$, $W(e)=\xi|v|$. Пусть $W(\mathbb{1}-e)=\eta b$ где b - частичная изометрия из B , $\eta=\frac{\psi(\tau(\mathbb{1}-e))}{\psi(\nu(|b|))}$.

Из равенства $b=\frac{\lambda}{\eta}p-\frac{\xi}{\eta}|v|$ следует, что b - самосопряженный оператор, коммутирующий с $|v|$. Покажем, что $|v|\le p$. Введем обозначения:

$$q=|v|\ ,\ r=|b|\ ,\ \alpha=\frac{\xi}{\lambda}\ ,\ \beta=\frac{\eta}{\lambda}\ .$$

Имеем

$$p=\alpha q+\beta b\ . \tag{7.4}$$

Положим $s=q\vee r-p(q\vee r)$. Если $s=0$, то $q\leq p$ и $r\leq p$. Предположим, что $s\neq 0$. Умножая (7.4) на s, получим $\alpha qs=-\beta bs$. Перейдем к модулям:

$$\alpha qs=\beta rs\ . \tag{7.5}$$

Это означает, что $qs=rs$, т.е. $q-pq=r-pr$. Проектор s можно записать в виде

$$s=(q-pq)+(r-pr)-(q-pq)(r-pr),$$

откуда

$$q-pq=r-pr=s\ .$$

В частности, $s=qs=rs$.

Так как $s\neq 0$, то из (7.5) следует, что $\alpha=\beta$, т.е.

$$\frac{\psi(\vartheta(p))\psi(\tau(e))}{\psi(\vartheta(q))}=\frac{\psi(\vartheta(p))\psi(\tau(\mathbb{1}-e))}{\psi(\vartheta(r))}\ .$$

Поскольку $\psi(\tau(e))<\psi(\tau(\mathbb{1}-e))$, то $\vartheta(q)<\vartheta(r)$, т.е. $r-qr\neq 0$. Умножим (7.4) на $r-qr$:

$$p(r-qr)=\beta b(r-qr)\ .$$

Так как $|b(r-qr)|=|b|(r-qr)=r-qr\neq 0$, то $\alpha=\beta=1$. Отсюда $p=q+b$, $b=p-q$ и, наконец, $q-b=2q-p$. Имеем

$$|q-b| = (4q - 4pq + p)^{\frac{1}{2}} = 2(q - pq) + p.$$

Вычислим норму этого оператора:

$$\||q-b|\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 [2(q-pq)+p]^{\sim}(t)\,d\psi(t) =$$

$$= \int_0^1 \left[2\chi_{(0,\partial(q-pq))}(t) + \chi_{(\partial(q-pq),\,\partial(q-pq)+\partial(p))}(t)\right] d\psi(t) =$$

$$= 2\int_0^{\partial(q-pq)} d\psi(t) + \int_{\partial(q-pq)}^{\partial(q-pq)+\partial(p)} d\psi(t) = 2\psi[\partial(q-pq)] + \psi[\partial(q \vee p)] -$$

$$- \psi[\partial(q-pq)] = \psi(\partial(q-pq)) + \psi(\partial(q \vee p)).$$

Имеем

$$1 = \|\mathbb{1}\|_{\Lambda_\psi} = \||e - (\mathbb{1}-e)|\|_{\Lambda_\psi} = \|e \dot{-} (\mathbb{1}-e)\|_{\Lambda_\psi} =$$

$$= \|W(e) - W(\mathbb{1}-e)\|_{\Lambda_\psi} = \|\xi q \dot{-} \eta b\|_{\Lambda_\psi} =$$

$$= \lambda\|q-b\|_{\Lambda_\psi} = \lambda\||q-b|\|_{\Lambda_\psi} =$$

$$= \lambda\{\psi[\partial(q-pq)] + \psi[\partial(q \vee p)]\} =$$

$$= \frac{\psi[\partial(q-pq)]}{\psi[\partial(p)]} + \frac{\psi[\partial(q \vee p)]}{\psi[\partial(p)]} > 1,$$

так как $q - pq = s \neq 0$ по предположению. Полученное противоречие показывает, что $q \leq p$.

Таким образом, для любого проектора $e \in A$ со следом $\tau(e) < \frac{1}{2}$ центральный носитель оператора $U(e)$ не превосходит p . Любой проектор $e \in A$ может быть представлен в виде конечной суммы попарно ортогональных проекторов, след которых меньше $\frac{1}{2}$. Отсюда легко вывести, что центральный носитель оператора $U(e)$ для любого проектора $e \in A$ не превосходит p . Следовательно, центральный носитель любого оператора из множества $U(G)$ (см. лемму 7.I5) не превосходит p .

Пусть $\{x_n\} \subset U(G)$, $\|x_n - \mathbb{1}\|_{\Lambda_\psi} \to 0$. Тогда $\|px_n - p\|_{\Lambda_\psi} \to 0$. Но $px_n = x_n$ для всех $n \in N$, значит $p = \mathbb{1}$.

Лемма 7.I7. U - положительная изометрия.

Доказательство. Согласно леммам 7.I6 и 7.I4, $W = \mathbb{1}$ и

$$U(e) = W(e) = \xi |U| \geqslant 0$$

для любого проектора $e \in A$. Пусть x - положительный оператор из $\Lambda_\psi(A, \tau)$. В G найдется последовательность $\{x_n\}$ положительных операторов, сходящаяся к x по норме $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi}$. Тогда $\|U(x_n) - U(x)\|_{\Lambda_\psi} \to 0$, причем $U(x_n) \geqslant 0$, $n \in N$. Положительная часть всякого симметричного пространства замкнута по норме [26] . Следовательно, $U(x) \geqslant 0$.

Продолжим доказательство теоремы 7.7. Мы показали, что найдется такой унитарный оператор $u \in B$, что $U(x) = u^* T(x)$ – положительная изометрия пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$, причем $U(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Согласно теореме 6.8 и следствию 6,9, существует единственный йорданов изоморфизм Φ алгебры A на B такой, что

$$U(x) = \Phi(x), \quad x \in A.$$

Тогда

$$T(x) = u\,\Phi(x), \quad x \in A.$$

Пусть e – проектор из A. Тогда $\Phi(e)$ проектор в B, и мы имеем

$$\int_0^1 \chi_{(0,\tau(e))}(t)\,d\psi(t) = \|e\|_{\Lambda_\psi} = \|T(e)\|_{\Lambda_\psi} = \\ = \int_0^1 \chi_{(0,\nu(\Phi(e))]}(t)\,d\psi(t).$$

Следовательно, $\psi(\tau(e)) = \psi(\nu(\Phi(e)))$. Так как функция $\psi(t)$ инъективна, то $\tau(e) = \nu(\Phi(e))$. Отсюда вытекает равенство $\tau(x) = \nu(\Phi(x))$ для всех $x \in A$.

Из теоремы 7.7 следует, что если между алгебрами A и B не существует йорданова изоморфизма, то соответствующие пространства Лоренца не изометричны. В частности, если алгебра B коммутативна и пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ и $\Lambda_\psi(B,\nu)$ изометричны, то алгебра A также должна быть коммутативной.

Далее будем предполагать, что функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to+0} t/\psi(t) = 0$.

Т е о р е м а 7.18. Линейное непрерывное отображение T пространства $M^0_\psi(A,\tau)$ на $M^0_\psi(B,\nu)$ является изометрией тогда и только тогда, когда существуют единственные унитарный оператор $w \in B$ и йорданов изоморфизм $J: A \to B$ такие, что

$$\tau(x) = \nu(J(x))$$

и

$$T(x) = wJ(x)$$

для всех $x \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопряженный оператор T^{-1*} к T^{-1} является изометрией пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$. Согласно теореме 7.7

$$T^{-1*}(x) = u\Phi(x)$$

при $x \in A$, где u - унитарный оператор из B, Φ - йорданов изоморфизм A на B, сохраняющий след. В силу леммы 7.2 Φ можно продолжить до изометрии $\hat{\Phi}$ пространства $\Lambda_\psi(A,\tau)$ на $\Lambda_\psi(B,\nu)$. Тогда $\hat{\Phi}^*$ - изометрия пространства $M_\psi(B,\nu)$ на $M_\psi(A,\tau)$. Покажем, что $\hat{\Phi}^*$ отображает пространство $M^0_\psi(B,\nu)$ в $M^0_\psi(A,\tau)$. Для этого достаточно показать, что $\hat{\Phi}^*(x) \in A$ при $x \in B$. Имеем (ср. [97], стр. 321)

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\langle x, y\rangle|,\ y \in B,\ \|y\|_1 \le 1\} =$$

$$= \sup\{|\langle x, \Phi(z)\rangle|,\ z \in A,\ \|z\|_1 \le 1\} =$$

$$= \sup\{|\langle \hat{\Phi}^*(x), z\rangle|,\ z\in A,\ \|z\|_1 \le 1\}.$$

Это означает, что $\hat{\Phi}^*(x) \in A$. Обозначим сужение $\hat{\Phi}^*$ на $M_\psi^0(B,\nu)$ через U. Мы получили, что U - изометрия из $M_\psi^0(B,\nu)$ в $M_\psi^0(A,\tau)$.

Для произвольных $x\in A$, $y\in B$ имеем

$$\langle U^*(x), y\rangle = \langle x, \hat{\Phi}^*(y)\rangle = \langle \Phi(x), y\rangle,$$

откуда следует, что $U^*(x) = \Phi(x)$ для всех $x\in A$.

Имеем при $x\in A$, $y\in B$

$$\langle T^{-1}(y), x\rangle = \langle y, T^{-1*}(x)\rangle = \langle y, u\Phi(x)\rangle =$$

$$= \langle yu, \Phi(x)\rangle = \langle U(yu), x\rangle.$$

Следовательно,

$$T^{-1}(y) = U(yu),\ y\in B. \tag{7.6}$$

Далее,

$$\langle U(\Phi(x)), y\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

поэтому

$$U(\Phi(x)) = x,\quad x\in A. \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) следует, что для $x\in A$

$$T(x) = T[U(\Phi(x))] = T[U(\Phi(x)u^*u)] =$$

$$= T[T^{-1}(\Phi(x)u^*)] = \Phi(x)u^* = wJ(x),$$

где $\mathcal{W} = \mathcal{U}^*$, $J(x) = \mathcal{U}\,\Phi(x)\,\mathcal{U}^*$.

Ясно, что йорданов изоморфизм J сохраняет след, поскольку этим свойством обладает Φ.

Обратно, пусть унитарный оператор $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ и йорданов автоморфизм J алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ удовлетворяют условиям теоремы. Норма в пространствах $M^0_\psi(\mathcal{A},\tau)$ и $M^0_\psi(\mathcal{B},\nu)$ порядково полунепрерывна [II, 33], поэтому в силу леммы 7.2

$$\| J(x)\|_{M_\psi} = \|x\|_{M_\psi}, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Умножение на унитарный оператор сохраняет норму в любом симметричном пространстве, поэтому оператор $T(x) = \mathcal{W} J(x)$ является изометрией.

§ 8. Изометрии симметричных пространств на атомических алгебрах фон Неймана

Пусть X - банахово пространство над полем комплексных чисел. Линейный ограниченный оператор T на X называется эрмитовым, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий [5I]:

I) $\|I + itT\| = 1 + o(t)$, где I - тождественный оператор на X, $t \in \mathbb{R}$;

2) $\|e^{itT}\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$;

3) $f(T(x)) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in X$, $f \in X^*$ таких, что $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$.

Заметим, что для любой изометрии U пространства X на себя оператор UTU^{-1} также является эрмитовым, поскольку

$$\|I + itUTU^{-1}\| = \|I + itT\|, \ t \in \mathbb{R}.$$

Пусть алгебра фон Неймана A и след τ те же, что и в § 5, т.е. $A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} B(H_n)$ для некоторой последовательности H_n сепарабельных гильбертовых пространств, τ - сужение на A канонического следа на $B(H)$, где $H = \prod\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. Для симметричного пространства E на (A, τ) и для $n \in N$ положим

$$E_n = E \cap B(H_n) = \{z_n x, \ x \in E\},$$

где z_n - проектор из $Z(A)$, для которого $z_n(H) = H_n$ (гильбертовы пространства H_n естественным образом отождествляются с замкнутыми подпространствами в H). Очевидно, E_n относительно нормы, индуцированной из E, является симметричным пространством на $B(H_n)$, т.е. симметрично-нормированным идеалом (см. [7]).

Пусть $\xi, \eta \in H$. Через $\xi \otimes \eta$ обозначается одномерный оператор $\zeta \to (\zeta, \eta)\xi$, $\zeta \in H$. Для $x \in E$, $y \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ - множество элементарных операторов из A, положим $\langle x, y \rangle = \tau(y^* x)$.

Всюду в этом параграфе E - сепарабельное симметричное пространство на (A,τ), удовлетворяющее следующему условию: для каждого $n\in N$ норма пространства E_n не пропорциональна норме идеала C_2 операторов Гильберта - - Шмидта в $B(H_n)$ (см. [7]). В частности, это условие выполняется, если все H_n бесконечномерны и норма пространства E не пропорциональна норме $L_2(A,\tau)$.

Цель настоящего параграфа - описать все эрмитовы операторы на пространстве E и с помощью этого получить строение изометрий E. Мы будем использовать следующие два результата из [93].

Лемма 8.I ([93]). Пусть $a,b,c,d\in B(H)$ и $axb=cx+xd$ для всех конечномерных операторов $x\in B(H)$. Тогда a и c или b и d являются скалярными кратными тождественного оператора.

Теорема 8.2 ([93]). Пусть X - сепарабельный симметрично-нормированный идеал в $B(H)$ с нормой, не пропорциональной норме C_2. Линейный оператор T на X является эрмитовым тогда и только тогда, когда существуют такие самосопряженные оператора $a,b\in B(H)$, что

$$T(x)=ax+xb$$

для всех $x\in X$.

Для произвольных $a,b\in A$ и $x\in E$ положим $L_a(x)=ax$, $R_b(x)=xb$. Легко видеть, что L_a и R_b являются ограниченными линейными операторами на E. Обозначим через A_h совокупность всех самосопряженных операторов из A.

Т е о р е м а 8.3. Линейный оператор T на пространстве E является эрмитовым тогда и только тогда, когда существуют такие $a, b \in A_h$, что $T = L_a + R_b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a, b \in A_h$, $T(x) = ax + xb$. Тогда оператор T ограничен, так как

$$\|ax + xb\|_E \leq (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty)\|x\|_E .$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$e^{itT}(x) = e^{ita} \cdot x \cdot e^{itb}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку e^{ita} и e^{itb} - унитарные операторы, то e^{itT} - изометрия пространства E при каждом $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что $\|e^{itT}\| = 1$, т.е. T - эрмитов оператор.

Докажем необходимость. Пусть T - эрмитов оператор на E.

Л е м м а 8.4. Пусть $\xi_1, \eta_1 \in H_n$, $\xi_2, \eta_2 \in H_m$ $(n \neq m)$ и $x_j = \xi_j \otimes \eta_j$. Тогда $\langle T(x_1), x_2 \rangle = 0$.

Доказательство этой леммы почти полностью совпадает с доказательством леммы I из [93].

Л е м м а 8.5. Пусть $x \in A$ и $e = \varphi \otimes \varphi$, где φ - единичный вектор из H_n. Если $\langle x, p \rangle = 0$ для любого одномерного проектора $p \in A$, взаимно ортогонального с e, то существуют такие векторы $\xi, \eta \in H_n$, что

$$x = \varphi \otimes \xi + \eta \otimes \varphi .$$

Доказательство. Пусть p_1 - одномерный проектор из A такой, что $p_1 e = 0$. Алгебра $p_1 A p_1$ * - изоморфна алгебре $\mathbb{C}$, следовательно, $p_1 x p_1 = \alpha p_1$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$. Имеем

$$0 = \langle x, p_1 \rangle = \tau(p_1 x p_1) = \alpha \tau(p_1) = \alpha ,$$

значит, $\alpha = 0$ и $p_1 x p_1 = 0$.

Пусть p_2 - одномерный проектор из A, взаимно ортогональный с p_1 и e. Алгебра $(p_1+p_2)A(p_1+p_2)$ * - изоморфна алгебре 2 х 2 - матриц над полем $\mathbb{C}$. Положим $a = (p_1+p_2)x(p_1+p_2)$. Тогда $a^* = (p_1+p_2) \times x^*(p_1+p_2)$. Предположим, что оператор $b = a + a^*$ отличен от нуля. Тогда найдется такой одномерный проектор $q \leq p_1 + p_2$, что $qb = bq = \alpha q$ для некоторого вещественного $\alpha \neq 0$. Так как $q \in A$ и $qe = 0$, то

$$0 = \tau(q(x+x^*)q) = \tau(q(p_1+p_2)(x+x^*)(p_1+p_2)q) = $$
$$= \tau(qbq) = \alpha \tau(q) = \alpha .$$

Противоречие показывает, что $b = 0$. Аналогично устанавливается, что оператор $c = -i(a - a^*)$ равен нулю. Таким образом $a = \frac{1}{2}(b + c) = 0$

С помощью индукции можно построить в A такую последовательность $\{p_j\}$ попарно ортогональных одномерных проекторов, что $p_j e = 0$ для всех $j \in N$,

$$\mathbb{1} - e = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \quad \text{и} \quad s_n x s_n = 0 \text{ для всех}$$

$n \in N$, где $s_n = \sum_{j=1}^{n} p_j$. Так как последовательность $\{s_n\}$ сходится к $\mathbb{1} - e$ в сильной операторной топологии и $\|s_n\|_\infty = 1$, то последовательность $\{s_n x s_n\}$ сходится в этой топологии к оператору $(\mathbb{1}-e)x(\mathbb{1}-e)$, откуда следует, что $(\mathbb{1}-e)x(\mathbb{1}-e) = 0$. Значит,

$$x = ex + xe - exe.$$

В частности, отсюда вытекает, что $x = z_n x$, т.е. $x \in B(H_n)$.

Пусть $\psi = x(\varphi)$, $\xi = x^*(\varphi)$. Тогда $x^* e = \xi \otimes \varphi$ и $ex = \varphi \otimes \xi$.

Далее, положим $\eta = (\mathbb{1}-e)x(\varphi)$. Так как $xe - exe = (\mathbb{1}-e)xe$, то для $\zeta \in H$ имеем

$$(\mathbb{1}-e)xe(\zeta) = (\mathbb{1}-e)x((\zeta,\varphi)\varphi) = (\zeta,\varphi)\eta,$$

т.е. $(\mathbb{1}-e)xe = \eta \otimes \varphi$.

Таким образом,

$$x = ex + xe - exe = \varphi \otimes \xi + \eta \otimes \varphi.$$

Так как $x \in B(H_n)$, то $\xi = x^*(\varphi) \in H_n$ и

$$\eta=(\mathbb{1}-e)x(\varphi)=(\mathbb{1}-e)z_n x(\varphi)=(z_n-e)x(\varphi)\in H_n.$$

Лемма 8.5 доказана.

Из лемм 8.4 и 8.5 вытекает

Следствие 8.6. Оператор T действует инвариантно в каждом пространстве E_n, $n\in N$.

Обозначим через T_n сужение оператора T на E_n.

Лемма 8.7. Для каждого $n\in N$ оператор T_n является эрмитовым оператором на E_n.

Доказательство. Пусть $x\in E_n$, $f\in E_n^*$ и $f(x)=\|x\|\cdot\|f\|$. В силу теоремы Хана-Банаха f можно продолжить до непрерывного линейного функционала на E с сохранением нормы. Так как оператор T эрмитов, то $f(T_n(x))=f(T(x))\in\mathbb{R}$. Лемма 8.7 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 8.3. Согласно теореме 8.2 и лемме 8,7, существуют такие последовательности самосопряженных операторов $a_n, b_n\in B(H_n)$, что при каждом $n\in N$

$$T_n(x)=a_n x+x b_n\ ,\ x\in E_n.$$

Если последовательности $\|a_n\|_\infty$ и $\|b_n\|_\infty$ ограничены, то операторы $a=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $b=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ принадлежат A_h и $T(x)=ax+xb$, $x\in E$

Предположим, что $\sup_n\|b_n\|_\infty<\infty$ и $\sup_n\|a_n\|_\infty=\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\|a_n\|_\infty>n2^n$.

Для каждого $n \in N$ существует проектор $p_n \in B(H_n)$, коммутирующий с a_n, для которого $|a_n p_n| \geq n 2^n p_n$. В $B(H_n)$ найдется минимальный проектор $e_n \leq p_n$. Имеем

$$\alpha_n e_n a_n e_n \geq n 2^n e_n,$$

где $\alpha_n = \pm 1$. Положим $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} e_n$. Легко видеть, что последовательность s - чисел оператора x принадлежит l_1, а значит, и $\widetilde{E}$ (см. § 5). Следовательно, $x \in E$. В силу предложения 5.9 норма в E порядково непрерывна, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, где $x_n = z_n x = \frac{\alpha_n}{2^n} e_n$, сходится в E к оператору x.

Следовательно,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + x_n b_n).$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n \in E$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in E$ и, в частности, является ограниченным оператором.

Но тогда мы имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} a_n e_n \right\|_\infty = \sup_n \frac{1}{2^n} \| \alpha_n a_n e_n \|_\infty \geq$$

$$\geq \sup_n \frac{1}{2^n} \| \alpha_n e_n a_n e_n \|_\infty = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $\sup_n \| a_n \|_\infty < \infty$.

Аналогично доказывается, что из $\sup\limits_n \|a_n\|_\infty < \infty$ вытекает $\sup\limits_n \|b_n\|_\infty < \infty$.

Предположим теперь, что обе последовательности $\|a_n\|_\infty$ и $\|b_n\|_\infty$ неограничены. Положим $b'_n = b_n + \lambda_n z_n$, $a'_n = a_n - \lambda_n z_n$, подобрав вещественные константы λ_n так, чтобы выполнялись условия: $\sup\{\lambda : e_n(\lambda) = 0\} = 0$, где $e_n(\lambda)$ - спектральная функция оператора b'_n, $n \in N$. При этом

$$T_n(x) = a_n x + x b_n = a'_n x + x b'_n, \quad x \in E_n.$$

Если последовательность $\|a'_n\|_\infty$ ограничена, то, как показано выше, ограничена и последовательность $\|b'_n\|_\infty$. В этом случае операторы $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b'_n$ принадлежат A_h и $T(x) = ax + xb$, $x \in E$.

Предположим, что $\sup\limits_n \|a'_n\|_\infty = \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\|a'_n\|_\infty > 2^n + 1$, $n \in N$. В $B(H_n)$ найдутся такие минимальные проекторы p_n и q_n, что

$$\|p_n a'_n p_n\|_\infty \geqslant 2^n + \frac{1}{2},$$
$$0 \neq \|q_n b'_n q_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

Пусть ξ_n и η_n - единичные векторы из $p_n(H_n)$ и

$q_n(H'_n)$ соответственно. Тогда $p_n a'_n p_n \xi_n = \mu_n \xi_n$,

$q_n b'_n q_n \eta_n = \vartheta_n \eta_n$, где μ_n и ϑ_n - вещественные константы, причем $|\mu_n| \geq 2^n + \frac{1}{2}$, $|\vartheta_n| \leq \frac{1}{2}$.

Положим $x_n = \xi_n \otimes \eta_n$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$. Легко видеть, что $x \in E$. Имеем

$$(p_n a'_n p_n x_n + x_n q_n b'_n q_n)\eta_n = p_n a'_n p_n \xi_n + x_n \vartheta_n \eta_n =$$

$$= \mu_n \xi_n + \vartheta_n \xi_n = (\mu_n + \vartheta_n)\xi_n .$$

Следовательно,

$$\|T_n(x_n)\|_\infty = \|a'_n x_n + x_n b'_n\|_\infty \geq \|p_n a'_n x_n q_n +$$

$$+ p_n x_n b'_n q_n\|_\infty = \|p_n a'_n p_n x_n + x_n q_n b'_n q_n\|_\infty = |\mu_n + \vartheta_n| \geq 2^n .$$

Это означает, что $T(x) \notin E$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Для каждого $x \in A$ положим $x_n = z_n x$, $n \in N$.

Л е м м а 8.8. Пусть T - линейный оператор на E . Операторы T и T^2 являются эрмитовыми тогда и только тогда, когда существует представление $T = L_a + R_b$, где $a, b \in A_h$ и $z(a)z(b) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность вытекает из равенства

$$T^2(x) = a^2 x + x b^2 \quad , \quad x \in E$$

и из теоремы 8.3.

Докажем необходимость. Пусть операторы T и T^2 эрмитовы. Согласно теореме 8.3, существуют такие операторы $a,b,c,d \in A_h$, что

$$T(x) = ax + xb,$$

$$T^2(x) = a^2x + 2axb + xb^2 = cx + xd, \quad x \in E.$$

Из леммы 8.1 следует, что для любого $n \in N$ хотя бы один из операторов a_n и b_n является скалярным кратным z_n, откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 8.9. Пусть T - эрмитов оператор на E и

$$T = L_a + R_b = L_c + R_d,$$

где $a,b,c,d \in A_h$, - два его различных представления. Тогда $a - c = d - b \in Z(A)$.

Доказательство. Для каждого $n \in N$ и $x \in E_n$

$$a_n x + x b_n = c_n x + x d_n$$

или

$$(a_n - c_n)x + x(b_n - d_n) = 0.$$

Согласно лемме 8.1, $a_n - c_n = \lambda_n z_n$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Тогда $x(\lambda_n z_n + b_n - d_n) = 0$ для всех $x \in E_n$, откуда следует, что $d_n - b_n = \lambda_n z_n$. Ясно, что оператор $a - c = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z_n$ ограничен и, следовательно, принадлежит $Z(A)$.

Следствие 8.10. Пусть T - эрмитов оператор на E. Множества индексов $\{n : a_n \notin Z(A)\}$ и $\{n : b_n \notin Z(A)$ не зависят от конкретного представления $T = L_a + R_b$, $a, b \in A_h$.

Теорема 8.11. Пусть U - линейная изометрия пространства E на себя. Тогда существуют единственные йорданов автоморфизм Φ алгебры A, унитарный оператор $u \in A$ и положительный оператор $h \in Z(A)$ с носителем $S(h) = \mathbb{1}$ такие, что

$$U(x) = uh\Phi(x) \ , \quad x \in E$$

Доказательство. Пусть $a \in A_h$. В силу теоремы 8.3 операторы L_a и L_a^2 являются эрмитовыми на E, поэтому UL_aU^{-1} и $UL_a^2U^{-1}$ также эрмитовы операторы на E. Так как $UL_a^2U^{-1} = (UL_aU^{-1})^2$, то, согласно лемме 8.8, существует представление

$$\left.\begin{aligned} &UL_aU^{-1} = L_b + R_c \, , \\ &b, c \in A_h \, , \quad z(b)z(c) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

Положим

$$I_\ell = \bigcup_{a \in A_h} \{n : b_n \notin Z(A)\},$$

$$J_\ell = \bigcup_{a \in A_h} \{n : c_n \notin Z(A)\},$$

где b_n и c_n при каждом $a \in A_h$ соответствуют какому - либо представлению (8.1).

Покажем, что $I_\ell \cap I_\ell = \emptyset$. Действительно, предположим, что

$$UL_aU^{-1} = L_b + R_c,$$

$$UL_{a'}U^{-1} = L_{b'} + R_{c'},$$

$z(b)z(c) = z(b')z(c') = 0$ и существует номер n, для которого $b_n \notin Z(A)$ и $c'_n \notin Z(A)$. Рассмотрим оператор

$$UL_{a+a'}U^{-1} = L_{b+b'} + R_{c+c'}.$$

В силу лемм 8.8 и 8.9 либо $b'_n + b_n \in Z(A)$, либо $c_n + c'_n \in Z(A)$. Если выполнено первое включение, то $b'_n \notin Z(A)$ и потому $c'_n \in Z(A)$, что противоречит предположению. Следовательно, $b_n + b'_n \in Z(A)$. Аналогично устанавливается, что $c_n + c'_n \in Z(A)$. Полученное противоречие показывает, что $I_\ell \cap I_\ell = \emptyset$.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что для любого $a \in A_h$ существует представление

$$\left.\begin{aligned} &UR_aU^{-1} = L_b + R_c, \\ &b, c \in A_h,\ z(b)z(c) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

и что множества

$$I_r = \bigcup_{a \in A_h} \{n : b_n \notin Z(A)\}$$

и

$$J_r = \bigcup_{a \in A_h} \{n : c_n \notin Z(A)\},$$

где b и c_n при каждом $a \in A_h$ соответствуют какому-либо представлению (8.2), дизъюнктны.

Для каждого $a \in A_h$ существуют единственные представления

$$\left.\begin{array}{l} UL_aU^{-1} = L_b + R_c, \\ b_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin I_\ell, \\ z(b)z(c) = 0 \end{array}\right\} \qquad (8.3)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} UR_aU^{-1} = L_b + R_c, \\ c_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin J_{\ }, \\ z(b)z(c) = 0 . \end{array}\right\} \qquad (8.4)$$

Выбирая при каждом $a \in A_h$ именно представления (8.3) и (8.4), мы определим четыре вещественно-линейных отображения — φ, ψ, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ — из A_h в A_h, задаваемых равенствами

$$UL_aU^{-1} = L_{\varphi(a)} + R_{\psi(a)},$$

$$UR_aU^{-1} = L_{\hat{\varphi}(a)} + R_{\hat{\psi}(a)} .$$

Продолжим φ до линейного отображения из A в A, полагая для $a \in A$

$$\varphi(a) = \varphi\left(\frac{a+a^*}{2}\right) + i\varphi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right).$$

Так же поступим и с остальными отображениями.

Положим $p = \sum\limits_{n \in I_\ell} z_n$, $q = 1 - p$. Тогда

$$L_{\varphi(ab)} = L_p U L_{ab} U^{-1} = L_p U L_a L_b U^{-1} = L_p U L_a U^{-1} U L_b U^{-1} =$$

$$= L_p (L_{\varphi(a)} + R_{\psi(a)})(L_{\varphi(b)} + R_{\psi(b)}) = L_{\varphi(a)} L_{\varphi(b)} = L_{\varphi(a)\varphi(b)}$$

и аналогично

$$R_{\psi(ab)} = L_q U L_{ab} U^{-1} = R_{\psi(a)} R_{\psi(b)} = R_{\psi(b)\psi(a)} \,.$$

Отсюда следует, что φ является морфизмом, а ψ - антиморфизмом алгебры A. Аналогично устанавливается, что $\hat{\varphi}$ - морфизм, а $\hat{\psi}$ - антиморфизм.

Покажем, что для любых двух взаимно ортогональных проекторов $e, f \in \mathcal{F}$ их образы $U(e)$ и $U(f)$ взаимно ортогональны, т.е.

$$U(e)^* U(f) = U(e) U(f)^* = 0 . \tag{8.5}$$

Имеем

$$U(e) = U(ee) = U L_e U^{-1} U(e) = \varphi(e) U(e) + U(e) \psi(e), \tag{8.6}$$

$$U(e) = U(ee) = U R_e U^{-1} U(e) = \hat{\psi}(e) U(e) + U(e) \hat{\varphi}(e). \tag{8.7}$$

Аналогично

$$U(f) = \varphi(f) U(f) + U(f) \psi(f), \tag{8.8}$$

$$U(f) = \hat{\psi}(f) U(f) + U(f) \hat{\varphi}(f). \tag{8.9}$$

Предположим, что e и f - минимальные проекторы. Если они центрально ортогональны, то (8.5) легко следует из представлений (8.6) и (8.8):

$$U(e)^*U(f)=\left(\psi(e)U(e)^*+U(e)^*\varphi(e)\right)\left(\varphi(f)U(f)+U(f)\psi(f)\right)=$$

$$=\psi(e)U(e)^*U(f)\psi(f)=\psi(z(e))\psi(e)U(e)^*U(f)\psi(f)\psi(z(f))=$$

$$=\psi(e)U(e)^*U(f)\psi(f)\psi(z(f)z(e))=0,$$

$$U(e)U(f)^*=\varphi(e)U(e)U(f)^*\varphi(f)=$$

$$=\varphi(e)U(e)U(f)^*\varphi(f)\varphi(z(f)z(e))=0.$$

Пусть теперь $z(e)=z(f)=z$. Тогда один из операторов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и один из операторов $\hat{\varphi}(z)$ и $\hat{\psi}(z)$ равны нулю. Следовательно, один из операторов $\varphi(e)$ и $\psi(e)$, а также один из операторов $\hat{\varphi}(e)$ и $\hat{\psi}(e)$ равны нулю.

Предположим, что $\psi(e)=\hat{\varphi}(e)=0$, т.е.

$$UL_eU^{-1}=L_{\varphi(e)},$$

$$UR_eU^{-1}=L_{\hat{\psi}(e)}.$$

Имеем

$$UL_eR_eU^{-1}=UL_eU^{-1}UR_eU^{-1}=L_{\varphi(e)\hat{\psi}(e)},$$

откуда следует, что оператор

$$L_eR_e=U^{-1}L_{\varphi(e)\hat{\psi}(e)}U$$

является эрмитовым оператором на E, что противоречит лемме 8.I и теореме 8.3. Точно так же к противоречию приводит предположение $\varphi(e)=\hat{\varphi}(e)=0$. Таким образом, возможны два случая:

$$1)\quad \varphi(e)=\hat{\varphi}(e)=\varphi(f)=\hat{\varphi}(f)=0,$$

$$2)\quad \varphi(e)=\hat{\varphi}(e)=\varphi(f)=\hat{\varphi}(f)=0.$$

Пусть, например, имеет место I). Тогда из (8.6)-(8.9) получаем

$$U(e)=\varphi(e)U(e)=U(e)\hat{\varphi}(e),$$

$$U(f)=\varphi(f)U(f)=U(f)\hat{\varphi}(f).$$

Следовательно,

$$U(e)^*U(f)=U(e)^*\varphi(e)\varphi(f)U(f)=0,$$

$$U(e)U(f)^*=U(e)\hat{\varphi}(e)\hat{\varphi}(f)U(f)^*=0.$$

Аналогично рассматривается и второй случай. Таким образом, если минимальные проекторы e и f ортогональны, то ортогональны и операторы $U(e)$ и $U(f)$. Легко видеть, что это верно и для произвольных проекторов $e,f\in\mathcal{F}$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы следует схеме, предложенной в [I04] , и приводится здесь для полноты изложения.

Через $\mathcal{P}_0$ обозначается множество всех проекторов из $\mathcal{F}$. Пусть для каждого $e\in\mathcal{P}_0$

$$U(e)=u_e h_e$$

- полярное разложение оператора $U(e)$. Как было показано выше, если $e, f \in \mathcal{P}_0$ и $ef=0$, то $U(e)^* U(f) = U(e)U(f)^* = 0$ или, эквивалентно, $u_e^* u_f = u_e u_f^* = 0$. Отсюда следует, что $u_{e+f} = u_e + u_f$, $h_{e+f} = h_e + h_f$. Положим $\Phi(e) = u_e^* u_e$. Тогда $\Phi(e+f) = \Phi(e) + \Phi(f)$ для взаимно ортогональных проекторов $e, f \in \mathcal{P}_0$. Для каждого самосопряженного оператора $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ из $\mathcal{F}$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $e_k \in \mathcal{P}_0$, $e_k e_j = 0$ при $k \neq j$, положим

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi(e_k).$$

При этом $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$, $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$, $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ для коммутирующих самосопряженных операторов $x, y \in \mathcal{F}$.

Если $e, f \in \mathcal{P}_0$ и $f \leq e$, то $U(f)\Phi(f) = U(f)$, $U(e-f)\Phi(f) = 0$, поэтому $U(f) = U(e)\Phi(f)$. Следовательно,

$$U(x) = U(e)\,\Phi(x)$$

для любого самосопряженного $x \in \mathcal{F}$ с носителем $s(x) \leq e$.

Пусть x, y - самосопряженные операторы из $\mathcal{F}$. Тогда $e = s(x) \vee s(y) \in \mathcal{P}_0$ и

$$U(e)\big(\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)\big)=U(x+y)-U(x)-U(y)=0.$$

Поскольку левый носитель оператора $\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)$ содержится в правом носителе $\Phi(e)$ оператора $U(e)$, то $\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)=0$ Таким образом, Φ - вещественно-линейное отображение самосопряженной части $\mathcal{F}$ в себя. Продолжим Φ до $\|\cdot\|_\infty$ - непрерывного комплексно-линейного отображения, положив

$$\Phi(x+iy)=\Phi(x)+i\Phi(y)$$

для самосопряженных $x,y\in\mathcal{F}$. Имеем $\Phi(x^*)=\Phi(x)^*$ и $\Phi(x^2)=\Phi(x)^2$ для всех $x\in\mathcal{F}$.

Пусть $e,f\in\mathcal{P}_0$ и $f\le e$. Тогда $h_{e-f}\Phi(f)=0$ и $h_f\Phi(f)=h_f$, откуда следует $h_e\Phi(f)=h_f=\Phi(f)h_e$. Значит, h_e коммутирует с $\Phi(x)$ для каждого самосопряженного $x\in\mathcal{F}$ с носителем $s(x)\le e$.

Продолжим Φ на всю алгебру A, определив $\Phi(x)$ как сильный операторный предел $\|\cdot\|_\infty$ - ограниченной сети $\Phi(exe)$, индексированной направленным множеством проекторов $e\in\mathcal{P}_0$. Для каждого $x\in A$ сеть $\Phi(exe)$ сходится в сильной операторной топологии, поскольку

$$\Phi(fxf)=\Phi(fexef)=\Phi(f)\Phi(exe)\Phi(f)$$

при $f\le e\in\mathcal{P}_0$ и объединение образов операторов $\Phi(f)$ для $f\in\mathcal{P}_0$ плотно в образе оператора

$$\Phi(1) = \sup\{\Phi(f),\ f \in \mathcal{P}_0\}.$$

Мы имеем

$$\Phi(exe) = \Phi(e)\Phi(x)\Phi(e)$$

для всех $x \in A$ и $e \in \mathcal{P}_0$.

Поскольку $u_f = u_e \Phi(f)$ при $f \le e \in \mathcal{P}_0$, то оператор u можно определить как предел сети u_e в сильной операторной топологии. При этом $u_e = u\Phi(e)$ для всех $e \in \mathcal{P}_0$.

Легко видеть, что Φ – линейное отображение. Установим его нормальность. Пусть x_α – ограниченная возрастающая сеть элементов из A_h. Тогда $\Phi(x_\alpha)$ также есть ограниченная возрастающая сеть в A_h. Если $x = \lim\limits_\alpha x_\alpha$ (здесь и далее пределы в сильной операторной топологии), то для каждого $e \in \mathcal{P}_0$ имеем

$$\Phi(e)\Phi(x)\Phi(e) = \Phi(exe) = \lim_\alpha \Phi(ex_\alpha e) =$$

$$= \lim_\alpha \Phi(e)\Phi(x_\alpha)\Phi_e = \Phi(e)\lim_\alpha \Phi(x_\alpha)\Phi(e),$$

откуда следует, что $\Phi(x) = \lim\limits_\alpha \Phi(x_\alpha)$.

Далее, для $x \in A_h$ получаем

$$\Phi(x^2) = \lim \Phi(xex) = \lim \Phi(e)\Phi(xex)\Phi(e) =$$

$$= \lim \Phi(exexe) = \lim \Phi(exe)^2 = \Phi(x).$$

Определим теперь оператор h. Пусть для каждого $e \in \mathcal{P}_0$

$$h_e = \int_0^\infty \lambda \, dp_e(\lambda)$$

есть спектральное представление оператора h_e. При этом $\Phi(e) = \mathbb{1} - p_e(+0)$. Поскольку $h_f = h_e \Phi(f)$ при $f \le e$, мы имеем для $\lambda > 0$

$$\mathbb{1} - p_f(\lambda) = \Phi(f)(\mathbb{1} - p_e(\lambda)),$$

и можно определить проектор $p(\lambda)$ как сильный операторный предел сети $p_e(\lambda)$ при $e \uparrow \mathbb{1}$. Положим

$$h = \int_0^\infty \lambda \, dp(\lambda).$$

Тогда для $e \in \mathcal{P}_0$ мы имеем

$$\mathbb{1} - p_e(\lambda) = \Phi(e)(\mathbb{1} - p(\lambda)) \tag{8.10}$$

и $h_e = h\Phi(e)$. Каждый проектор $p(\lambda)$ коммутирует с $\Phi(x)$ для всех $x \in A$.

Пусть $e \in \mathcal{P}_0$. Тогда

$$v(e) = u_e h_e \Phi(e) = u_e h \Phi(e) = u\Phi(e) h \Phi(e) = uh\Phi(e).$$

Отсюда следует, что

$$v(x) = uh\Phi(x) \tag{8.11}$$

для любого $x \in \mathcal{F}$. Согласно предложению 5.9, множество $\mathcal{F}$ плотно в пространстве E, поэтому равенство (8.11) имеет место для всех $x \in E$.

Из (8.10) следует, что $\Phi(e) \leq S(h)$ для любого $e \in \mathcal{P}_0$. Кроме того, из (8.11) и сюръективности изометрии U вытекает, что $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Следовательно, $S(h) = \mathbb{1}$ и подпространство $\bigcup\limits_{e \in \mathcal{P}_0} \Phi(e)(H)$ плотно в H. Из определения оператора u и из равенств (8.11) и $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ нетрудно получить, что u - унитарный оператор.

Пусть $e \in \mathcal{P}_0$, $y = U^{-1}(uhe)$. Имеем

$$U(y) = uh\Phi(y) = uhe,$$

откуда следует, что $\Phi(y) = e$. Так как Φ - нормальное отображение, а $\mathcal{F}$ плотно в A в сильной операторной топологии, то Φ отображает A на себя. Кроме того, из (8.11) следует инъективность Φ. Таким образом, Φ - нормальный йорданов автоморфизм алгебры A. Отсюда, в частности следует, что $h \in Z(A)$.

Единственность Φ, u и h вытекает непосредственно из представления (8.11). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.12. Можно показать, что

$$\Phi(x) = \hat{\varphi}(x) + \psi(x), \quad x \in A.$$

З а м е ч а н и е 8.13. Ясно, что сужение йорданова автоморфизма Φ на $Z(A)$ является йордановым автоморфизмом алгебры $Z(A)$. Следовательно, существует такая перестановка π множества N, что $\Phi(z_n) = z_{\pi(n)}$, где $\{z_n\}$ - последовательность минимальных проекторов из $Z(A)$. Отсюда, в частности, следует, что для каждого $n \in N$ Φ отображает $B(H_n)$ на $B(H_{\pi(n)})$. Поэтому существует унитарный или антиунитарный оператор $v_n : H_n \to H_{\pi(n)}$ такой, что

$$\Phi(x) = v_n x v_n^* \quad , x \in B(H_n) \cdot$$

Легко видеть, что оператор $u_n = u z_n$ при каждом $n \in N$ является унитарным оператором в H_n.

Итак, теорему 8.11 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 8.11'. Пусть U - линейная изометрия пространства E на себя. Тогда существуют перестановка π множества N и последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ такие, что для каждого $n \in N$ v_n - унитарный или антиунитарный оператор, отображающий H_n на $H_{\pi(n)}$, u_n - унитарный оператор на H_n, λ_n - положительное число

$$U(\{x_n\}) = \{\lambda_{\pi(n)} u_{\pi(n)} v_n x_n v_n^*\}, x = \{x_n\} \in E.$$

Замечание 8.14. В случае, когда A совпадает с алгеброй $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, результаты, аналогичные теоремам 8.3 и 8.11, получены в статье А.Соуроура [93], а в случае $A = l_\infty$ - в работе Дж.Арази [47].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан, 1986. 124 с.
2. Бикташева В.А. Вращения пространств $\Lambda(\psi)$ // Вестник ЛГУ. - 1979. - № 13. - С. 116-118.
3. Браверман М.Ш., Семенов Е.М. Изометрии симметричных пространств // Докл. АН СССР. - 1974. - Т. 217. № 2. - С. 257-259.
4. Браверман М.Ш., Семенов Е.М. Изометрии симметричных пространств // Труды НИИ матем. ВГУ. - 1975. - Вып. 17. - С. 7-18.
5. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982. - 512 с.
6. Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я. Банаховы решетки - некоторые банаховы аспекты теории // УМН. - 1979. - Т. 34. Вып. 2. - С. 137-183.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. - 448 с.
8. Зайденберг М.Г. Группы изометрий пространств Орлича // Докл. АН СССР. - 1976. - Т. 227. № 3. - С. 432-436.
9. Зайденберг М.Г. К изометрической классификации симметричных пространств // Докл. АН СССР. - 1977. - Т. 234. № 2. - С. 283-286.

10. Зайденберг М.Г. Специальное представление изометрий функциональных пространств// Иссл. по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1980. - С. 84-91.

11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. - 743 с.

12. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Наука, 1958. - 272 с.

13. Крейн С.Г., Петунин Ю.И, Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. - 400 с.

14. Меджитов А.М. О сепарабельности некоммутативных симметричных пространств // Мат. анал. и алгебра. Ташкент: Изд-во Ташкентского ун-та. 1986. С.38-43.

15. Меджитов А.М. Свойства (A), (B) и (C) для симметричных пространств измеримых операторов. Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 8283-В86. - М.: ВИНИТИ, 1986.- 37 с.

16. Меджитов А.М. Симметричные пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана // Докл. АН УзССР. - 1987. - № 4. - С. 10-12.

17. Меджитов А.М. Порядковые свойства симметричных пространств измеримых операторов // XII школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тезисы докладов. Тамбов. 1987. Ч.2. - С. 8.

18. Меджитов А.М. Симметричные пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тезисы конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока. Новосибирск: НГУ. 1987. - С. 52-54.

19. Меджитов А.М., Сукочев Ф.А. Положительные изометрии некоммутативных симметричных пространств // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат.наук. - 1987. - № 3. - С. 20-25.

20. Меджитов А.М., Сукочев Ф.А. Изометрии некоммутативных пространств Лоренца. - Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 4924-В87. - М.: ВИНИТИ, 1987. - 32 с.

21. Меджитов А.М. Симметричные пространства на атомических алгебрах фон Неймана // Мат. анал., алгебра и теория вероятностей. Ташкент: Изд-во Ташкентского ун-та, 1987.

22. Меджитов А.М. Изометрии симметричных пространств на атомических алгебрах фон Неймана . - Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 4513-В88. - М.: ВИНИТИ, 1988. - 25 с.

23. Меклер А.А. Операторы усреднения по σ - подалгебрам в идеалах пространства $L_1(\mu)$. Дис. на соискание учен. степ. к-та физ.-мат.наук. Ленинград: ЛИАП, 1977. - 96 с.

24. Митягин Б.С., Шварц А.С. Функторы в категориях банаховых пространств // УМН. - 1964. - Т. 19. - С. 65-130.

25. Муратов М.А. Некоммутативные пространства Орлича // Докл. АН УзССР. - 1978. - № 6. - С. 11-13.

26. Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов. Дис. на соискание учен. степ. к-та физ.-мат.наук. Ташкент: ТашГУ, 1979. - 133 с.

27. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968. - 664 с.

28. О в ч и н н и к о в В.И. О S – числах измеримых операторов // Функцион. анализ и его прил. - I970. - Т. 4. Вып. 3. - С. 78-85.

29. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов // Докл. АН СССР. - I970. - Т. I9I. Вып. 4. - С. 769-77I.

30. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов // Труды НИИ матем. ВГУ. - I97I. - Вып. 3. - С. 88-I07.

3I. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А., Х а д ж и е в Д., Ч и л и н В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан, I983. - 303 с.

32. С у к о ч е в Ф.А. Порядковые свойства норм симметричных пространств измеримых операторов // Мат. анал. и теория вероятностей. Ташкент: Изд-во Ташкентского ун-та, I985. - С. 49-54.

33. С у к о ч е в Ф.А. (en) – инвариантные свойства симметричных пространств измеримых операторов // Докл. АН УзССР. - I985. - № 7. - С. 6-8.

34. С у к о ч е в Ф.А. Построение некоммутативных симметричных пространств // Докл. АН УзССР. - I986. - № 8. - С. 4-6.

35. С у к о ч е в Ф.А. Симметричные пространства измеримых операторов на конечных алгебрах фон Неймана. Дис. на соискание учен. степ. к-та физ.-мат.наук. Ташкент: ТашГУ, I987. - I24 с.

36. Т и х о н о в О.Е. Пространства L_p относительно веса на алгебре Неймана // Изв. вузов. Мат. - I982. - № 8. - С. 76-78.

37. Т р у н о в Н.В. О некоммутативном аналоге пространства L_p // Изв.вузов. Мат.- 1979. - № 11. - С.69-77.

38. Т р у н о в Н.В. Пространства L_p , ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана // Конструктивная теория функций и функц. анализ. № 3. Казань. 1981. - С. 88-92.

39. Т р у н о в Н.В., Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I // Изв. вузов. Мат. - 1978. - № 7. -С. 79-- 88.

40. Т р у н о в Н.В., Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, II // Изв. вузов. Мат. - 1978. - № 12. - С.88-- 98.

41. Т р у н о в Н.В. Интегрирование относительно веса на йордановых алгебрах. - Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 4948-84 Деп. - М.: ВИНИТИ, 1984. - 34 с.

42. Ч и л и н В.И. Порядковая характеризация некоммутативных L_p - пространств // Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985. - С. 19-23.

43. Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана // Функц. анализ и его прил. - 1974. - Т.8. - № 3. - С. 89-90.

44. Ш е р с т н е в А.Н. Каждый гладкий вес является l - весом // Изв. вузов. Мат. - 1977. - № 8. - С.88-91.

45. A r a k i H., M a s u d a T. Positive cones and L_p - spaces for von Neumann algebras // Publ. Res. Inst. Math. Sci. - 1982. - V. 18. - P. 339-411.

46. A r a z y J. The isometries of C_p // Israel J. Math.- 1975. - V. 22, No 3-4. - P. 247-256.

47. A r a z y J. Isometries of complex symmetric sequence spaces // Math. Z. - 1985. - V. 188. - P. 427-431.

48. S. B a n a c h. Sur les rotations dans les champs les functions integrables avec p-ieme puissance // Studia Math. - 1930. - V.4. - P. 193-201.

49. B e r k s o n E., F l e m i n g R.J., J a m i s o n J. Groups of isometries on certain ideals of Hilbert space operators // Math. Ann. - 1976. - V. 220. - P. 151-156.

50. B e r k s o n E., F l e m i n g R.J., G o l d s t e i n J., J a m i s o n J. One parameter groups of isometries on C_p // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. - 1979. - V.24. - P. 863-868.

51. B o n s a l l F.F., D u n c a n J. Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, I // London Math. Soc. Lecture Note Series. - No 2. - London: Camb. Univ. Press, 1971.

52. B r o i s e M. Sur certaines applications unitares de l'espace des operateurs de Hilbert - Schmidt // C.R. Acad. Sci. - 1966. - V. 263- - P. 722-725.

53. B r o i s e M. Sur les isomorphismes de certaines algebres de von Neumann // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. - 1966 (1967). - V. 83. - P. 91-111.

54. B r u B., H e i n i c h H. Monotonies des espaces d'Orlicz // C.R. Acad. Sci. - 1985. - V.301, ser.1, No 19. - P. 893-894.

55. C a r o t h e r s N.L., T u r e t t B. Isometries of $L_{p,1}$ // Trans. Amer. Math. Soc. - 1986. - V. 297. - P. 95-103.

56. C h o n g K.H., R i c e N.M. Equimeasurable rearrangement of function // Queen's papers Pure Appl. Math. - 1971. - V.28. - P. 1-177.

57. C i a c h L.J. On the conjugates of some operator spaces, I // Demonstr. Math. - 1985. - V. 18. - P. 537 - 554.

58. C o n n e s A. On the spatial theory of von Neumann algebras // J. Funct. Anal. - 1980. - V. 35. - P.153-164.

59. D i x m i e r J. Formes lineaires sur un anneau d'operateurs // Bull. Soc. Math. France. - 1953. - V.81. - P. 9-39.

60. D i x m i e r J. Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien (Algebres de von Neumann). Paris: Gauthier - Villars, 1969, 367 p.

61. F a c k T., K o s a k i H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacif. J. Math. - 1986. - V. 123. - P. 269-300.

62. F l e m i n g R., G o l d s t e i n J., J a m i s o n J. One parameter groups of isometries on certain Banach spaces // Pacif. J. Math. - 1976. - V. 64. - P. 145-151.

63. F r e m l i n D.H. Stable subspaces of $L_1 + L_\infty$ // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1968. - V. 64.- P.625-643.

64. G o l d s t e i n J.A. Groups of isometries on Orlicz spaces // Pacif.J. Math. - 1973. - V.48.- P.387-393.

65. G r a s l e w i c z R. Isometries of $L_1 \cap L_p$ // Proc. Amer. Math. Soc. - 1985. - V. 93. - P. 493-496.

66. H a a g e r u p U. L_p - spaces associated with an arbutrary von Neumann algebra // Colloq. Int. CNRS. - 1979. - No 274. - P. 175-184.

67. H i l s u m M. Les espaces L_p d'une algebre de von Neumann definies par la derivee spatiale // J.Funct. Anal. - 1981. - V. 40. - P. 151-169.

68. K a d is o n R.V. Isometries of operator algebras // Ann. Math. - 1951. - V.54. - P. 325-338.

69. K a p l a n s k y I. Projections in Banach algebras// Ann. Math. - 1951. - V. 53. - P. 235-249.

70. K a t a v o l o s A. Isometric mappings of non-commutative L_p - spaces // Can. J. Math. - 1976. - V. 28. - P. 1180-1186.

71. K a t a v o l o s A. Are non-commutative L_p - spaces really non-commutative ? // Can. J. Math. - 1981. - V. 33. - P. 1319-1327.

72. K o s a k i H. Non-commutative Lorentz spaces associated with a semifinite von Neumann algebra and applications // Proc. Japan. Acad. - 1981. - V. 57, ser.A, No 6. - P. 303-306.

73. K o s a k i H. Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: non-commutative L_p - spaces // J.Funct. Anal. - 1984. - V.56.- P. 25-79.

74. K u n z e R.A. L_p - Fourier transforms on locally compact unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. - 1958. - V. 89. - P. 519-540.

75. Lamperti J. On the isometries of certain function spaces // Pacif. J. Math. - 1958. - v. 8. - P. 459-466.

76. Lindenstrauss J., Tsafriri L. Classical Banach spaces, II. New-York: Springer Verlag, 1979.

77. Lumer G. Semi-inner-product spaces // Trans. Amer. Math. Soc. - 1961. - V. 100. - p. 29-43.

78. Lumer G. Isometries of Orlicz spaces // Bull.Amer. Math. Soc. - 1962. - V.68. - P. 28-30.

79. Lumer G. On the isometries of reflexive Orlicz spaces // Ann. Inst. Fourier. - 1963. - V. 13. - P. 99-109.

80. McCarthy C. C_p // Israel J. Math. - 1967. - V. 5. - P. 249-271.

81. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators // Ann. Math. - 1936. - V. 37. - P. 116-229.

82. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators, II // Trans. Amer. Math. Soc. - 1937. - V. 41. - P. 208-248.

83. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators, IV // Ann. Math. - 1943. - V. 44. - P.716-808.

84. Nelson E. Notes on non-commutative integration theory // J.Funct. Anal. - 1974. - V.15. - P.103-116.

85. von Neumann J. On rings of operators, III // Ann. Math. - 1940. - V. 41. - P. 94-161.

86. R o l e w i c z S. Metric linear spaces. Warszawa: PWN, 1972.

87. R u s s o B. Isometries of L_p - spaces associated with finite von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. - 1968. - V. 74. - P. 228-232.

88. R u s s o B. Trace preserving mappings of matrix algebras // Duke Math. J. - 1969. - V.36. - P.297-- 300.

89. R u s s o B. Isometries of the trace class // Proc. Amer. Math. Soc. - 1969. - V. 23. - P. 213.

90. S a k a i S. C^* - algebras and W^* - algebras. New-York : Springer Verlag, 1971, 256 p.

91. S c h a t t e n R. Norm ideals of completely continuous operators. Berlin : Springer Verlag, 1960, 81 p.

92. S e g a l I.E. A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. - 1953. - V. 57.-P.401-457.

93. S o u r o u r A. Isometries of norm ideals of compact operators // J. Funct. Anal. - 1981. - V.43.- P.69-77.

94. S t i n e s p r i n g W.F. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. - 1959. - V. 90. - P. 15-56.

95. S t r a t i l a S., Z s i d o L. Lectures on von Neumann algebras. Tunbridge Wells, Kent : Abacus Press, 1979, 477 p.

96. S u n d a r e s a n K. On the strict and uniform convexity of certain Banach spaces // Pacif. J. Math. - 1965. - V. 15. - P. 1083-1086.

97. T a k e s a k i M. Theory of operator algebras, I. New-York: Springer Verlag, 1979, 415 p.

98. T a m K.W. Isometries of certain function spaces // Pacif. J. Math. - 1969. - V. 31. - P. 233-246.

99. T a m P.K. Isometries of L_p - spaces associated with semifinite von Neumann algebras // Trans. Amer. Math. Soc. - 1979. - V. 254. - P. 339-354.

100. U m e g a k i H. Conditional expectation in an operator algebra // Tohoku Math. J. - 1954. - V.6. - P. 177-181.

101. Y e a d o n F.J. Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1973. - V. 74. - P.257-268.

102. Y e a d o n F.J. Non-commutative L_p - spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1975. - V. 77. - P. 91-102.

103. Y e a d o n F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras, II // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1980. - V. 88. - P. 135-147.

104. Y e a d o n F.J. Isometries of non-commutative L_p - spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1981. - V. 90. - P. 41-50.