ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А. Морозова , Н.Н. Ченцов

МАТРИЦЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СУПЕРМАТРИЦЫ

Препринт № 84 за 1973г

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

МАТРИЦЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СУПЕРМАТРИЦЫ

Москва, 1973 г.

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются общие конечномерные схемы некоммутативной теории вероятностей с произвольными центрами алгебры наблюдаемых. Введено понятие марковского оператора, отображающего один объект теории на другой. Координатное описание такого оператора дается стохастической суперматрицей.

ABSTRACT

The general finitedimensional schemes of noncommutative probability theory having any centres of algebras of observables are considered. The notion of Markov operator which maps an object of the theory in another one is introduced. A coordinate description of such operator is taken by superstochastic matrix.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Многие закономерности микромира носят, как известно, см. [I], [2], статистический характер. Однако, случайные явления микромира не описываются схемами классической (коммутативной) теории вероятностей, поскольку их логика не является булевой, ср. [3], [4]. В настоящей работе мы систематически рассматриваем общие конечномерные схемы теории вероятностей с правилами суперотбора [5]. Их крайними случаями являются схемы с коммутативной алгеброй наблюдаемых (схемы классической теории вероятностей по Колмогорову) и схемы с тривиальным центром алгебры наблюдаемых (схемы по фон Нейману). Цель работы - последовательное введение марковских операторов, отображающих совокупность всех состояний одного объекта в совокупность состояний другого. В коммутативной теории такие операторы задаются прямоугольными стохастическими матрицами. В общей же теории их описывают четырехиндексные стохастические суперматрицы.

В работе рассматривается только теория вероятностей; вопросов механики микромира мы не касаемся. Далее, мы изучаем только конечномерные схемы. Такое ограничение заметно упрощает исследование, позволяя построить теорию до конца. В то же время подобные простейшие модели еще имеют реальный физический смысл, см. [6],[7].

§ I. Вероятностные меры и случайные величины в классической теории вероятностей

Классическая теория вероятностей, см. [8], качественно описывает случайное явление измеримым пространством (Ω, S) всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$ явления с σ-алгеброй S событий, т.е. S-измеримых подмножеств пространства Ω. Каждое наблюдение явления приводит к некоторому исходу ω^* и, тем самым к осуществлению всех событий $C \ni \omega^*$

Количественной характеристикой случайного явления является вероятностная мера $P\{\cdot\}$ на алгебре S. Каждая величина $P\{C\}$ приближенно описывает (в смысле, требующим уточнения) частоту наступления события C в серии независимых наблюдений явления. Таким образом, случайное явление полностью описывается тройкой (Ω, S, P).

С одним и тем модельным пространством (Ω, S) могут быть связаны количественно различные модели случайных явлений. Их совокупность - множество всех вероятностных мер на (Ω, S) мы будем обозначать $Cap(\Omega, S)$, см. [9]. Эти совокупности устроены особенно просто для конечных измеримых пространств (Ω, S), когда Ω разбивается на конечное число непересекающихся атомов. Не ограничивая общности, можно (!) считать атомы алгебры S элементарными исходами (укрупнив в противном случае исходы и упростив тем самым описание объекта). Тогда если $\Omega_n = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, то S есть алгебра $S_n = S(\Omega_n)$ всех подмножеств множества Ω_n.

Каждое распределение вероятностей P на $S(\Omega_n)$ удобно задавать вероятностями исходов ω_i, т.е. набором чисел

$$p_1 = P\{\omega_1\}, \ldots \ldots, p_n = P\{\omega_n\}, \tag{1.1}$$

удовлетворяющих условиям

$$p_i \geq 0, \quad \forall i \;; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1.3}$$

Вероятность любого события C есть тогда

$$P\{C\} = \sum_{\omega \in C} P\{\omega\} \tag{1.4}$$

Совокупность всех распределений вероятностей на Ω естественно рассматривать как единичный симплекс в n-мерном линейном пространстве $\ell_1^{(n)}$ "зарядов" $\mu \leftrightarrow (\mu_1, \dots, \mu_n)$:

$$\mu_i = \mu\{\omega_i\},\ \forall i;\quad \mu\{C\} = \sum_{\omega \in C} \mu\{\omega\},\ \forall C \in S; \tag{1.5}$$

с ℓ_1 - нормой - вариацией $|\mu|$ заряда $\mu\{\cdot\}$:

$$|\mu|^+ = \sup_C \mu\{C\},\quad |\mu|^- = -\inf_C \mu\{C\}, \tag{1.6}$$

$$|\mu| = \sum_\omega |\mu\{\omega\}| = |\mu|^+ + |\mu|^-. \tag{1.7}$$

Заметим, что схематизируя одно и то же случайное явление, мы можем по-разному выбирать нумерацию исходов. При этом получаются алгебраически изоморфные представления, отличающиеся перестановкой координат, так сказать, перекоординатизацией.

Любая S -измеримая числовая функция f на пространстве Ω задает при данном распределении $P\{\cdot\}$ исходов (числовую) случайную величину. Таким образом, случайная величина задается распределением вероятностей $Pf^{-1}\{\cdot\}$ на σ-алгебре $\mathbb{B}$ борелевских множеств числовой прямой (или на несколько более широкой алгебре $\mathbb{B}^*$ абсолютно лебеговых множеств).

Имеет смысл говорить о P -вероятности события $\{\omega : a' \le f(\omega) < a''\}$ и о математическом ожидании случайной величины

$$\mathbb{M}_P f = \langle\!\langle f, P \rangle\!\rangle = \int_\Omega f(\omega) P\{d\omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} x Pf^{-1}\{dx\}, \tag{1.8}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега. Если только интеграл (I.8) существует, среднее арифметическое значений $f(\omega^{(1)}),\ldots$ $\ldots, f(\omega^{(N)})$, полученных по наблюдавшимся независимо исходам $\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(N)}$, весьма вероятно будет близким к $\mathbb{M}_p f(\omega)$.

Так как множество событий образует булеву σ-алгебру, то можно рассматривать также события

$$\{\omega : a_1' \le f_1(\omega) < a_1'', \ldots\ldots, a_m' \le f_m(\omega) < a_m''\},$$

описываемые через одновременное поведение нескольких случайных величин.

При конечных алгебрах $S(\Omega_n)$ случайная величина задается n-мерным вектором

$$f(\cdot) \leftrightarrow (f_1, \ldots, f_n); \quad f_k = f(\omega_k), \quad \forall k. \tag{1.9}$$

Математическое ожидание случайной величины при конечном пространстве элементарных исходов всегда существует:

$$\ll f, P \gg = \sum_{i=1}^{n} f_i\, p_i = \int_{\Omega_n} f(\omega) P\{d\omega\}. \tag{1.10}$$

Следует сразу отметить, что изображать случайные величины векторами по (I.9) не всегда удобно. В ряде вопросов, см. например [9], § I0, их естественнее ассоциировать с диагональными матрицами по правилу

$$f \leftrightarrow diag\{f_k\} \tag{1.11}$$

устанавливающему изоморфизм кольца измеримых функций и кольца диагональных матриц. Соответственно, распределения вероятностей и заряды также надо описывать диагональными матрицами

$$P \leftrightarrow \mathrm{diag}\{p_k\}, \qquad \mu \leftrightarrow \mathrm{diag}\{\mu_k\} \tag{1.12}$$

Пространство зарядов на $S(\Omega_n)$ оказывается модулем над алгеброй $S(\Omega_n)$ - измеримых функций

$$f\mu \leftrightarrow \mathrm{diag}\{f_k\mu_k\}. \tag{1.13}$$

§ 2. Состояния и наблюдаемые в некоммутативной теории

Как мы только что видели, в элементарной теории вероятностей случайные величины (при данном пространстве исходов) естественно ассоциируются с диагональными матрицами соответствующего размера, а вероятностные законы - также с диагональными матрицами того же размера, удовлетворяющим условиям неотрицательности и нормированности. Прежде чем описывать общую многоматричную схему приведем, следуя классическим работам [10], [2] и [11], простейшее матричное обобщение схемы коммутативной теории.

Конечное пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ заменяется на конечномерное гильбертово (т.е. унитарное) пространство $\mathcal{H}$. Вместо способа нумерации исходов необходимо фиксировать в $\mathcal{H}$ ортонормированную систему координат.

И числовые случайные величины, которые будут теперь именоваться наблюдаемыми, и распределения вероятностей, получающие названия состояний, будут эрмитовыми операторами, действующими в $\mathcal{H}$. В фиксированной системе координат они будут описываться эрмитовыми матрицами, т.е. матрицами вида

$$A = (a^i_j)^n_{i,j=1} \; ; \quad a^i_j = \overline{a^j_i} \; , \quad \forall i,j \; ; \tag{2.1}$$

с комплексными, вообще говоря, элементами. Диагональные элементы в силу (2.I) обязательно вещественные, $a^i_i = \overline{a^i_i}$.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными многоиндексными величинами. Они всегда будут таковы, что одновременная замена всех верхних индексов на нижние и обратно переводит такую величину в комплексно-сопряженную, например,

$$x^i = \overline{x_i} \; ; \qquad \varkappa^{ik}_{jl} = \overline{\varkappa^{jl}_{ik}} \; . \tag{2.2}$$

Таким образом, операция $*$, состоящая в "транспонировании" и одновременном переходе к комплексно сопряженным величинам будет оставлять тензоры с парными индексами неизменными:

$$A^* = A \; .$$

Поскольку мы будем рассматривать много видов умножений матриц и суперматриц, правило Эйнштейна никогда применяться не будет, и все знаки суммирования всегда будут выписываться.

Как обычно, будем говорить, что эрмитова матрица $A=(a^i_j)^n_{i,j=1}$ неотрицательно определена, $A \geqslant 0$, если

$$\sum_{i,j=1}^n a^i_j x_i x^j \geqslant 0 \, , \qquad \forall \{x_1, \ldots, x_n\} \tag{2.3}$$

Если эрмитова матрица неотрицательно определена, то её диагональные элементы a^i_i не только вещественны, но и неотрицательны,

$$A \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad a^i_i \geqslant 0 \, , \quad \forall i \; . \tag{2.4}$$

Эрмитова матрица $\wp = (p^i_j)$ будет задавать состояние объекта, т.е. вероятностный закон, если

$$\rho \geqslant 0 ; \tag{2.5}$$

$$Sp\, \rho = \sum_{i=1}^{n} p_i^i = 1 . \tag{2.6}$$

Такие матрицы ρ , следуя фон Нейману [9], обычно называют матрицами плотности, а отвечающие им операторы - операторами плотности. В этой работе нам часто будет удобнее говорить о них, как о матрицах и операторах состояния.

Математическое ожидание - среднее значение наблюдаемой A в состоянии ρ вводится формулой

$$\ll \rho, A \gg = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^i p_j^i = \sum_{i,j=1}^{n} a_j^i p_i^j =$$

$$= Sp(A\rho) = Sp(\rho A) = A * \rho . \tag{2.7}$$

обобщающей классическое правило (I.I0). Таким образом, ожидается, что среднее арифметическое независимых наблюдений "величины" у одинаковых объектов, каждый раз находившихся перед измерением в состоянии ρ , будет примерно равно $\ll \rho, A \gg = Sp(A\rho) = Sp(\rho A)$.

Конечно, кроме средней величины наблюдаемой A очень интересно знать , какие именно значения будут регистрироваться при наблюдениях нашими приборами. Оказывается, что могут быть зарегистрированы только величины $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$ - собственные числа матрицы A , см. ниже § 3.

Рассмотрим теперь некоторые специальные случаи. Если матрица ρ - диагональная, то по (I.I2) ей соответствует обычный вектор вероятностей исходов, ибо тогда условия неотрицательности (2,5) и нормированности (2.6) в силу (2.4) дают (I.2) и (I.3). Таким образом, если ограничиться лишь диагональными "матрицами плотности" ρ и диагональными матрицами наблюдаемых, мы оказываемся в рамках классической теории вероятностей.

Мыслимы и промежуточные случаи, когда матрица $\wp$ - ящичная, с нулевыми недиагональными ящиками, например,

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc|cc}
p_1^1 & p_2^1 & & & & & \\
p_1^2 & p_2^2 & & 0 & & & 0 \\
\hline
 & & p_3^3 & p_4^3 & p_5^3 & & \\
 & 0 & p_3^4 & p_4^4 & p_5^4 & & 0 \\
 & & p_3^5 & p_4^5 & p_5^5 & & \\
\hline
 & 0 & & 0 & & p_6^6 & p_7^6 \\
 & & & & & p_6^7 & p_7^7
\end{array}\right)
$$

Оказалось, что объектами последовательной теории должны быть именно совокупности ящичных матриц с фиксированными размерами квадратных диагональных ящиков. Соответствующую совокупность наблюдаемых - "случайных величин" - будут образовывать все эрмитовы матрицы того же размера и того же ящичного строения. Класс таких ящичных схем был введен Виком, Уайтменом и Вагнером [5], указавшими их конкретные физические приложения.

В последовательной аксиоматической теории надо было бы сперва дать определение "логики высказываний" - недистрибутивного аналога булевой "алгебры событий", и лишь затем объяснить, что такое "распределение вероятностей" на подобной "логике". Другая возможность - определить некоммутативную алгебру "наблюдаемых", - аналог алгебры "случайных величин", и определять вероятностный закон, как нормированный неотрицательный линейный функционал на алгебре наблюдаемых. Оба эти подхода требуют мотивированного выбора исходных аксиом и предварительного, хотя бы и небольшого, вывода простейших свойств моделей.

Мы же начинаем прямо с обобщения аналитического описания объектов в классической теории вероятностей и математической статистике. Формальный путь оказывается короче, а все аналогии - совершенно наглядными, ср. [12].

Перейдем теперь к точным формулировкам. Мы считаем, что простейшее (редуцированное) описание каждого объекта нашей теории сводится к заданию набора $\{\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_s\}$ координатизированных унитарных пространств, их количесва s и размерностей $m_1,\dots,m_s$. Унитарное пространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{H}_s$ - прямую сумму $\mathcal{H}$. мы будем называть абстрактным гильбертовым пространством объекта, а сами $\mathcal{H}_v$ - когерентными подпространствами.(или секторами).

Далее, состоянием объекта назовем любой набор $\{\rho_1,\dots,\rho_s\}$ неотрицательных эрмитовых опереторов ρ_v, действующих каждый на своем $\mathcal{H}_v$ с матрицами

$$\rho_v=\rho_v^* ;\qquad \rho_v\geq 0 ,\quad \forall v ; \tag{2.8}$$

при условии нормировки

$$\sum_{v=1}^{s} Sp\,\rho_v = 1 . \tag{2.9}$$

Совокупность всех таких наборов $\{\rho_1,\dots,\rho_s\}$ будет полной совокупностью состояний объекта. В силу изоморфизма всех унитарных пространств одинаковой размерности она определяется набором размерностей $(m_1,\dots,m_s)=\vec{m}$. Мы будем её сокращенно обозначать $Cas(\vec{m})$=Collection of all states. Она определяет объект с точностью до изоморфизма подпространств $\mathcal{H}_v$.

При указанном описании любой $\vec{m}$-набор матриц эрмитовых операторов A_v, действующих каждый в своем пространстве $\mathcal{H}_v$ задает наблюдаемую A. Математическое ожидание - среднее значение наблюдаемой A в состоянии ρ объекта определим формулой

$$\mathcal{M}_\rho A = \sum_{\nu=1}^{s} Sp(A_\nu \rho_\nu) = \ll \rho, A \gg \qquad (2.10)$$

В коммутативном случае § I числовое описание векторов вероятностей и случайных величин было не единственным, а зависело от выбора нумерации исходов. При перенумерации соответствующие координаты просто переставлялись. Еще больше допустимых редуцированных описаний существует в некоммутативной теории. Ясно, что перенумерация когерентных подпространств приводит к алгебраически изоморфному описанию объекта, поскольку соотношения (2.8), (2.9) и (2.10) инвариантны относительно перенумерации. При такой операции совокупность $Cas(\vec{m})$ взаимно-однозначно отобразится на $Cas(\vec{n})$, где компоненты $(n_1, \dots, n_s)$ суть соответственно переставленные размерности $(m_1, \dots, m_s)$.

Далее, при унитарной перепараметризации унитарного подпространства $\mathcal{H}_\nu$,матрица B любого оператора преобразуется по правилу

$$B \to B_U = U^{-1} B U , \qquad (2.11)$$

где U - унитарная матрица перехода от старых координат к новым,

$$U^* U = \mathbb{1} = U U^* , \quad U^* = U^{-1} .$$

Отсюда, эрмитова матрица переходит в эрмитову,

$$(B_U)^* = (U^* B U)^* = U^* B^* U^{**} = U^* B U .$$

При любом преобразовании (2.II) величина следа не изменяется (см. ниже), а произведение матриц переходит в произведение преобразованных. Поэтому соотношения (2.8)-(2.10) останутся справедливыми, если в каждом $\mathcal{H}_\nu$ провести унитарную перекоординатизацию. А так как унитарные преобразования обратимы, $U^{-1} = U^*$, то (2.II) определит взаимно-однозначное соответствие между совокупностями всех состояний (и всех наблюдаемых) в обоих описаниях. Тем самым доказана

Лемма 2.I. Перенумерация когерентных подпространств и унитарная перекоординатизация каждого из них приводит к алгебраически изоморфному описанию объекта.

Отметим свойства следа, использованные нами. Каковы бы ни были прямоугольные матрицы B и C размеров $m\times n$ и $n\times m$ соответственно,

$$Sp(BC)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j^i c_i^j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} b_j^i c_i^j\Big) = Sp(CB), \tag{2.12}$$

ср(2.7). Из (2.I2) следует, что при перекоординатизации (2.II)

$$Sp\,\rho_U = Sp(U^{-1}\rho U)=Sp(UU^{-1}\rho)=Sp\,\rho, \tag{2.13}$$

$$Sp(A_U \rho_U)=Sp(U^{-1}AUU^{-1}\rho U)=Sp(UU^{-1}A\rho)=Sp(A\rho), \tag{2.14}$$

безразлично являются ли A и ρ эрмитовыми или нет. Наконец, не меняет следа операция транспонирования матрицы $A\to A^T$,

$$\overset{T}{a}{}_j^i = a_i^j, \quad \forall\, i,j,$$

$$Sp\,A^T=\sum_i \overset{T}{a}{}_i^i=\sum_i a_i^i = Sp\,A. \tag{2.15}$$

Пусть $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_t$, $\{B_v\}_{v=1}^{t}$ - набор эрмитовых операторов, каждый из которых действует на своём $\mathcal{H}_v$. Выберем в $\mathcal{H}$ ортонормированный базис, являющийся объединением базисов в подпространствах. И пусть при этом $I(v)=\{j:\ \theta(v)<j\le\theta(v+1)\}$ - список номеров ортов базиса, лежащих в $\mathcal{H}_v$, $v=1,\ldots,t$. Сопоставим набору $\{B_v\}$ оператор B, действующий в $\mathcal{H}\ni h=$ $=h_1+\ldots+h_t$, где $h_v\in\mathcal{H}_v$, по правилу

$$Bh = B_1 h_1 + \ldots + B_t h_t .$$

Линейность оператора B следует из линейности составляющих. В выбранном базисе он записывается диагонально-ящичной матрицей, причём v-ый ящик совпадает с матрицей $B_v = (\overset{v}{b}{}^k_l)$, а соответствующие элементы $b^i_j = \overset{v}{b}{}^{i-\theta(v)}_{j-\theta(v)}$, $i,j \in I(v)$, $v = 1,\ldots,t$.

Все остальные элементы матрицы B равны нулю. Эти матрица, очевидно, эрмитова; эрмитов тогда и сам оператор B.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{\theta(t+1)} b^i_j x_i x^j = \sum_{v=1}^{t} \sum_{i,j\in I(v)} b^i_j x_i x^j = \sum_{v=1}^{t} \sum_{k,l=1}^{\theta(v+1)-\theta(v)} \overset{v}{x}_k \overset{v}{x}{}^l \overset{v}{b}{}^k_l .$$

Она неотрицательна тогда и только тогда, когда неотрицательна каждая из форм-слагаемых. Отсюда условия $\{B \geq 0\}$ и $\{B_v \geq 0,\ \forall v\}$ эквивалентны. Далее, $Sp\, B = \sum_v Sp\, B_v$. Если теперь $\{B_v\}$ и $\{C_v\}$ – два набора эрмитовых операторов, то в силу известных, см. [13], правил перемножения блочных матриц $BC \leftrightarrow \{B_v C_v\}_{v=1}^{t}$. Значит, для наблюдаемой A и состояния ρ имеем $Sp(A\rho) = \sum_v Sp(A_v \rho_v)$. Таким образом, нами доказана

<u>Лемма</u> 2.2. Пусть набор размерностей $\vec{m}$ разбит на s' групп, $m'_u = m_{u,1} + \ldots + m_{u,t(u)}$, $u = 1,\ldots,s'$. Тогда совокупность $Cas(\vec{m})$ может быть алгебраически изоморфно вложена в совокупность $Cas(\vec{m}')$, где положено $\mathcal{H}'_u = \mathcal{H}_{u,1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{u,t(u)}$, $u = 1,\ldots,s'$.

В частности, любая совокупность $Cas(\vec{m})$ алгебраически изоморфно вкладывается в $Cas(n)$, где $n = m_1 + \ldots + m_s$.

Подчеркнем, что если в лемме 2.1. речь шла о наложении, в лемме 2.2. рассматривается вложение. Описывая диагонально-ящичные матрицы в терминах более широкого класса матриц надо уметь охарактеризовать в этих же терминах исходный класс. Пусть P_v – проекционный оператор из $\mathcal{H}$ в пространство $\mathcal{H}_v$. Он записывается матрицей P_v с единичным диагональным ящиком на v-ом месте и остальными нулевыми. Если B отвечает набору $\{B_v\}$, то

$$B = \sum_v P_v B P_v ,$$

и обратно, так как сумма справа описывает матрицу, в которой сохранены от B диагональные ящики, а все остальные заменены нулевыми. Заметив это, мы можем сделать какую угодно унитарную перекоординатизацию $\mathcal{H}$. Правило (2.I6) выделит нам нужные наблюдаемые и состояния. Поэтому, мы без оговорок будем вкладывать $Cos(\vec{m})$ в $Cos(n)$, употребляя сквозную нумерацию (очень удобно опускать лишний индекс блока); соответственно, будем говорить о наборах $\{P_v\}$ и $\{A_v\}$ как $\vec{m}$ - составных эрмитовых операторах.

§ 3. Чистые и смешанные состояния.

Изучим, как в терминах абстрактного гильбертова пространства объекта можно описать аналоги элементарных исходов наблюдения классической теории вероятностей.

Пусть $\mathcal{H}$ -унитарное пространство комплексной размерности $Dim\ \mathcal{H} = n$ с фиксированной системой унитарных координат. Его элементы можно отождествить с матрицами-столбцами координат. Мы будем называть их кэт-векторами и писать

$$(x^j)_{j=1}^n = |x\rangle$$

Скалярное произведение двух кэт-векторов $|y\rangle$ и $|x\rangle$ будет обозначаться

$$\langle y|x\rangle = \sum_{j=1}^n \bar{y}^j x^j = \sum_{j=1}^n y_j x^j ,$$

где матрица-строка $\langle y| = (y_1, \dots, y_n)$ -бра-вектор по терминологии Дирака см. [6], $*$ - сопряженный кэт-вектору $|y\rangle$, с составляющими $y_1 = \overline{y^1}, \dots, y_n = \overline{y^n}$. Очевидно

$$\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle} .$$

Когда выполнено любое из равносильных равенств

$$\langle y|x\rangle = 0 \iff \langle x|y\rangle = 0,$$

векторы $|x\rangle$ и $|y\rangle$ ортогональны.

Комплексную прямую $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ можно задать направляющим вектором $|x\rangle$ единичной длины, $\langle x|x\rangle = 1$. Тогда $\mathcal{L} = \{|y\rangle : |y\rangle = \lambda|x\rangle, \forall\lambda \in \mathbb{C}\}$. Направляющий вектор определяется с точностью до комплексного множителя c, $|c| = 1$. Линейный оператор ортогонального проектирования $P = P_{\mathcal{L}}$ на прямую $\mathcal{L}$ задается эрмитовой матрицей

$$|x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} x^1 x_1 & x^1 x_2 \dots & x^1 x_n \\ x^2 x_1 & x^2 x_2 \dots & x^2 x_n \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ x^n x_1 & x^n x_2 \dots & x^n x_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

не зависящей от выбора направляющего вектора. Аналогично, если $\mathcal{F}$ - линейное подпространство пространства $\mathcal{H}$, а $|x^{(1)}\rangle, \dots, |x^{(k)}\rangle$ - некоторый его ортонормированный базис, то матрица

$$P_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{k} |x^{(i)}\rangle\langle x^{(i)}| \tag{3.2}$$

задает оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{F}$, проектирующий $\mathcal{H}$ на $\mathcal{F}$, причем все векторы $|x\rangle \in \mathcal{F}$ остаются неподвижными, а все векторы из ортогонального дополнения $\mathcal{F}^{\perp}$ - подпространства

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{|y\rangle : \langle x|y\rangle = 0, \quad \forall|x\rangle \in \mathcal{F}\}$$

переходят в нуль-вектор. Матрица (3.2) при фиксированной системе координат в $\mathcal{H}$ не зависит от конкретного выбора базиса в $\mathcal{F}$. Но если унитарно перекоординатизировать всё $\mathcal{H}$, выбрав первые $Dim\,\mathcal{F}$ ортов нового базиса внутри $\mathcal{F}$, то матрица оператора $P_{\mathcal{F}}$ будет иметь дианональный вид

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{\mathcal{F}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

где $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}$ - единичная подматрица. Таким образом, каждому линейному подпространству $\mathcal{F}$ взаимно-однозначно отвечает эрмитов оператор проектирования P на него, причем $P^2 = P$ и

$$Sp\,P = Dim\,\mathcal{F}$$

Если $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ есть единичный оператор в $\mathcal{H}$, то оператор $\mathbb{1} - P_{\mathcal{F}}$ есть ортопроектор на $\mathcal{F}^{\perp}$ - на ортогональное дополнение к $\mathcal{F}$.

Справедливо, см. [13], следующее фундаментальное предложение.

Теорема 3.1. о спектральном разложении. Для каждого эрмитова оператора A, действующего в конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$, можно указать $n = Dim\,\mathcal{H}$ попарно ортогональных прямых $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ с операторами $P_1, \ldots, P_n$ проектирования на них так, что

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \,, \qquad (3.3)$$

где α_i - собственные числа оператора A, обязательно действительные, засчитываемые столько раз, какова их кратность.

Если среди собственных значений есть кратные, то система собственных прямых определяется неоднозначно. Пусть $P^{(u)}$ - ортопроектор на собственное пространство $\mathcal{H}_u$ оператора A, отвечающее точке $\alpha^{(u)}$ его спектра $\Lambda(A)$, т.е. пространство всех векторов $|x\rangle$, для которых $A|x\rangle = \alpha^{(u)}|x\rangle$. Тогда в каноническом спектральном разложении

$$A = \sum_u \alpha^{(u)} P^{(u)} \tag{3.4}$$

получающемся из (3.3) группировкой слагаемых по (3.2), операторы $P^{(u)}$ определены уже однозначно. Все собственные пространства $\mathcal{H}_u$ попарно ортогональны. На каждом $\mathcal{H}_u$ оператор A действует как скалярный оператор, кратный единичному.

Оператор $\sum_u P^{(u)} = \sum_i P_i$ в базисе из собственных векторов имеет единичную матрицу, сложившуюся из единичных блоков; значит в любом базисе

$$P^{(u)} P^{(v)} = \mathbb{0}, \quad u \neq v; \quad \sum_u P^{(u)} = \mathbb{1}$$

Это представление называется разложением единицы, ассоциированным со спектральным разложением (3.3).

Таким образом, каждый эрмитов оператор унитарно эквивалентен диагональному. Он также алгебраически изоморфен $\vec{w}$ - составному оператору со скалярными составляющими; здесь $(w_1, \ldots, w_s)$ - кратности его собственных значений.

Все сказанное выше справедливо и для составных эрмитовых операторов. Только здесь каждый из составляющих операторов нужно отдельно приводить к каноническому виду. Нельзя группировать отвечающие одному и тому же собственному числу α собственные прямые, если они принадлежат разным когерентным подпространствам. Таким образом, фиксация ящичного строения оператора может влиять на форму канонического разложения (3.4).

Прежде чем применять спектральную теорему к матрицам состояния, напомним два важных свойства неотрицательно определенных эрмитовых матриц.

Лемма 3.2. I) Все диагональные элементы b_k^k эрмитовой матрицы $B \geq \mathbb{0}$ также неотрицательны, $b_k^k \geq 0, \forall k$. Если матрица B дианональна, это свойство достаточно для неотрицательности B.

II) Если эрмитова матрица $B \geqslant 0$, а элемент b^k_k, то при всех j $b^j_k = 0 = b^k_j$

<u>Доказательство</u>. Выберем в качестве набора (x^j) набор (δ^{jk}), где $\delta^{kk}=1$, $\delta^{jk}=0$ при $j \neq k$. Тогда

$$0 \leqslant \sum_{i,j} b^i_j x_i x^j = 1 \cdot b^k_k \cdot 1$$

что и требовалось. Обратно, если $b^k_k > 0\ \forall k$, $b^k_j = 0\ \forall j \neq k$, то при любых (x^j)

$$\sum_{j,k} x_j b^j_k x^k = \sum_k x_k b^k_k x^k = \sum_k b^k_k |x^k|^2 \geqslant 0.$$

Наконец, пусть $b^k_k = 0$. Положим $x^j = 1$, $x^k = t$, $x^i = 0\quad \forall i \neq j, k.$ Тогда

$$B(t) = \sum_{j,k} x_j b^j_k x^k = t^2 b^j_j + 2t \operatorname{Re} b^j_k \geqslant 0.$$

Поскольку при $t=0$ неотрицательный двучлен $B(t)$ достигает минимума, то необходимо

$$B'(0) = 2 \operatorname{Re} b^j_k = 0.$$

Аналогично, полагая $x^j = 1$, $x^k = t\sqrt{-1}$, $x^i = 0\ \forall i \neq j, k$, приходим к выводу, что $2 \operatorname{Im} b^j_k = 0$. Значит $b^j_k = 0 = b^k_j$

Неотрицательные квадратичные формы можно умножать на неотрицательные числа и складывать между собой, - результат будет неотрицательной формой. Поэтому, неотрицательно определенные эрмитовы матрицы образуют выпуклый конус в линейном пространстве эрмитовых матриц, соответственно, $\vec{m}$ -составных эрмитовых матриц.

<u>Лемма</u> 3.3. Совокупность $Cas(\vec{m})$ всех состояний объекта образует выпуклое множество в линейном пространстве $\vec{m}$ -составных эрмитовых матриц.

Доказательство. Усреднение с неотрицательными весами матриц вероятностей будет неотрицательно определенной матрицей. По линейности следа след усреднения также будет равен единице, что и требуется

Лемма 3.4. Всякая матрица $\rho \in Cas(\vec{m})$, $n = m_1 + \ldots + m_s$, является усреднением

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, |x^{(j)}><x^{(j)}|; \quad \pi_j \geq 0 \;\; \forall j; \quad \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1 \tag{3.5}$$

проекторов (3.I) с попарно ортогональными векторами

$$<x^{(j)} \, | \, x^{(k)}> = \delta^{jk}, \tag{3.6}$$

принадлежащих каждый одному из когерентных подпространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s$.

Обратное утверждение также справедливо.

Доказательство. Разложение (3.5) с условием (3.6) следует из теоремы о спектральном разложении. В базисе из $|x^{(j)}>$ матрица ρ приобретает диагональный вид $diag\,\{\pi_j\}$, откуда $\pi_j \geq 0$ по лемме 3.2. Наконец, поскольку в этом базисе $1 = Sp\,\rho = \sum_j \pi_j$, условия из (3.5) выполнены. Обратное утверждение следует из леммы 3.3. и неотрицательности любого проектора (3.I), вытекающей из леммы 3.2.

Теорема 3.5. Матрицы $\rho \in Cas(\vec{m})$ максимального ранга $n = m_1 + \ldots + m_s$ суть внутренние точки выпуклого множества $Cas(\vec{m})$. Матрицы меньших рангов принадлежат его границе. Все матрицы ранга 1 имеют вид (3.I) и являются его крайними точками.

Доказательство. Матрицы максимального ранга имеют отличный от нуля детерминант. И детерминант, и собственные числа матрицы суть непрерывные функции её элементов, задающих её линейные координаты в пространстве матриц. Отсюда следует первое утверждение.

У матрицы меньшего ранга хотя бы одно из чисел π_j равно нулю. Заменим это π_k на сколь угодно близкое к нулю отрицательное число $\pi_k' = -\varepsilon$, соответственно слегка увеличив все остальные, чтобы сохранить единичный след. Тогда матрица изменится сколь угодно мало, а

$$\langle x^{(k)} | \sum_j \pi_j' | x^{(j)} \rangle \langle x^{(j)} | x^{(k)} \rangle = \pi_k' | \langle x^{(k)} | x^{(k)} \rangle |^2 = -\varepsilon < 0,$$

что доказывает второе утверждение.

Пусть $\operatorname{rank} \rho = 1$. Переход к другому базису не меняет ранга матрицы. В собственном базисе ρ имеет диагональный вид. Значит, ранг единица может быть лишь когда все $\pi_j = 0$, кроме одного. Это и значит, что ρ имеет вид (3.I).

Предположим теперь, что $\rho = \alpha Q + \beta R$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $Q, R \in Cas(\vec{m})$ и что $\operatorname{rank} \rho = 1$. Приведем ρ к диагональному виду, причем будем считать $\rho_k^k = 1$. Все остальные элементы, в том числе диагональные, равны нулю. Отсюда

$$\alpha \sum_{j \neq k} q_j^j + \beta \sum_{j \neq k} r_j^j = \sum_{j \neq k} \rho_j^j = 1 - \rho_k^k = 0.$$

В левой части все слагаемые неотрицательны, а множители $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Значит, $q_j^j = r_j^j = 0$ при всех $j \neq k$. Но тогда по лемме 3.2 при $j \neq k$ и все $q_i^j = r_j^i = 0$ при всех i, и все $q_i^j = r_i^j = 0$ при всех i. Это означает, что только $q_k^k > 0$ и только $r_k^k > 0$. Значит, $\rho = Q = R$, поскольку $q_k^k = Sp\, Q = 1 = Sp\, R = r_k^k$. Но это и означает, что ρ – крайняя точка выпуклого множества $Cas(\vec{m})$, т.е. что ρ не лежит ни на каком интервале, соединяющем точки этого множества. Теорема доказана.

Состояния ρ, описываемые матрицами ранга 1, называются чистыми состояниями объекта. Их характеристический признак: $\rho^2=\rho$; для всех остальных матриц состояния $\rho^2<\rho$. Каждое чистое состояние может быть также задано комплексной прямой $\mathcal{L}$ – неподвижной прямой проектора ρ. Наконец, прямую $\mathcal{L}$, как мы уже видели, можно описать направляющим вектором $|x>$ единичной длины, заданным с точностью до фазового множителя, равного по модулю единице. Этот вектор называют ψ-вектором состояния. Он обязательно должен принадлежать одному из когерентных подпространств $\mathcal{H}_u$ абстрактного пространства.

Чистые состояния являются аналогами вырожденных законов распределения коммутативной теории, когда с вероятностью единица выпадает один и тот же исход. Если объект находится в чистом состоянии с ψ-вектором $|x>$, и этот вектор является собственным для наблюдаемой A, $A|x>=\alpha|x>$, то результатом измерения будет всегда число α.

Все остальные состояния ρ являются смешанными. Здесь можно лишь говорить, что объект с вероятностями $\pi_j=\pi_j(\rho)$ находится в чистых состояниях, определяемых разложением (3.5), т.е. в состояниях, описываемых собственными векторами оператора ρ. И если наблюдаемая A имеет общий с состоянием ρ базис собственных векторов, то результатом α измерения A может быть любое из собственных значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем вероятности наблюсти каждое из них суть $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Пусть в результате наблюдения было получено значение α – простое собственное число, отвечающее единственному чистому состоянию с ψ-вектором $|x>$, $A|x>=\alpha|x>$. Тогда результат наблюдения показывает, что объект "на самом деле" находится в этом чистом состоянии. Если $|x>$ является собственным вектором для какой-то наблюдаемой B,

$B|x\rangle=\beta|x\rangle$, то измерение B у нашего объекта даст именно значение β . В частности, повторные измерения A дадут то же значение α , что и в первый раз, конечно, при условии, что между актами измерения объект не подвергался внешним воздействиям.

Таким образом, спреведлив принцип соответствия: пока и наблюдаемые и состояния имеют общий базис собственных векторов, все происходит точно так, как в классической теории вероятностей. Применим даже формальный аппарат теории. Только предварительно все матрицы надо привести в общем собственном базисе к диагональному виду и переделать их в векторы по рецептам (I.II) и (I.I2).

Хорошо известна, см. [I3] .

Теорема 3.6 о коммутирующих операторах. Для того, чтобы два или более эрмитовых оператора допускали общий собственный базис, необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали друг с другом.

Это утверждение очевидным образом справедливо и для составных эрмитовых операторов. Значит, в ситуациях, описываемых классической теорией вероятностей, мы имеем дело с коммутирующими наблюдаемыми и операторами состояния. Поэтому, её можно называть коммутативной теорией вероятностей, в отличие от общей, некоммутативной теории, где коммутативность не обязательна.

Пусть теперь объект находится в чистом состоянии с ψ - вектором $|x\rangle$, а мы хотим измерить наблюдаемую C , для которой вектор $|x\rangle$ собственным не является. Тогда нельзя говорить о значении C в состоянии $|x\rangle\langle x|$. Измерение C даст случайным образом одно из собственних значений γ_k оператора C , каждое с вероятностью

$$\pi_k = Sp(|x\rangle\langle x|\,|z^{(k)}\rangle\langle z^{(k)}|)=|\langle x|z^{(k)}\rangle|^2. \qquad (3.7)$$

При этом взаимодействие с измеряющим прибором переведет объект в новое чистое состояние с ψ-вектором $|z^{(k)}>$, со всеми вытекающими последствиями. Все наблюдаемые, для которых $|z^k>$ является собственным вектором, получают определенные собственные значения. Все остальные – нет, и если мы захотим узнать значение какой-либо из них – читай этот абзац сначала. В частности, если исходный вектор $|x>$ был собственным для наблюдаемой A, то вероятность получить теперь прежнее значение α равна $|<x|z^{(k)}>|^2 \cdot |<z^{(k)}|x>|^2 = \pi_k^2$. Полная же вероятность получить старое значение α, проделав по дороге измерение C, равна $\sum_k \pi_k^2$. Так как $|x>$ не является собственным для C, то все $\pi_k < 1$. Поскольку $\sum \pi_k = 1$ по теореме Пифагора, то эта вероятность $\sum_k \pi_k^2 < 1$. Таким образом, измерение величины C привело к неконтролируемым случайным изменениям в наблюдаемом значении A.

Существуют красивые опыты, демонстрирующие этот эффект, см. [6], [7]. На пути частиц ставят селектор, "измеряющий" их характеристику A и поглощающий те и только те из них, у которых эта величина принимает собственное значение α, отвечающее собственному вектору $|x>$. Если на такой селектор направить поток частиц, находящихся в чистом состоянии с ψ-вектором $|x>$, то весь поток будет задержан. Но если перед этим селектором поставить второй, пропускающий только частицы со значением γ_k величины C и собственным вектором $|z^{(k)}>$, неперпендикулярным $|x>$, $|<x|z^{(k)}>|^2 = \pi_k > 0$, то часть потока будет проходить оба селектора. И доля проходящих частиц будет равна как раз $\pi_k(1-\pi_k)$.

Когда исходное состояние объекта является чистым, $\rho = |x><x|$, формулу (2.10) для ожидаемого среднего значения величины C можно привести к виду

$$\ll \rho, C \gg = <x|C|x> = \sum_{i,j} x_i c_j^i x^j \qquad (3.8)$$

Для доказательства (3.8) разложим векторы $\langle x|$ и $|y\rangle = C|x\rangle$ по собственному базису оператора C,

$$\langle x| = \sum_k \langle z^{(k)}|x\rangle \langle z^{(k)}|; \quad |y\rangle = \sum_k \gamma_k \langle x|z^{(k)}\rangle |z^{(k)}\rangle,$$

и при подсчете $\langle x|y\rangle$ воспользуемся (3.7):

$$\langle x|C|x\rangle = \sum_k \gamma_k \langle z^{(k)}|x\rangle\langle x|z^{(k)}\rangle = \sum_k \gamma_k \Pi_k =$$

$$= Sp\left(|x\rangle\langle x| \sum \gamma_k |z^{(k)}\rangle\langle z^{(k)}|\right) = \langle\langle \wp, C\rangle\rangle$$

Если ψ -вектор исходного чистого состояния объекта принадлежал когерентному подпространству $\mathcal{H}'$, то при всех последующих измерениях объект может переходить в чистые состояния только из $\mathcal{H}'$. Чистые состояния из других когерентных подпространств ортогональны чистым состояниям из $\mathcal{H}'$, и вероятность перехода (3.7) в них равна нулю. Это одно из проявлений правила суперотбора Вика, Уайтмена и Вигнера [5]. (Если объект подвергнуть воздействию, он может перейти из одного состояния в другое. В квантовой механике существуют правила отбора см, [6], сильно ограничивающие возможности переходов. Правила суперотбора являются в квантовой механике одного объекта абсолютными запретами, см. [14]).

Таким образом, прямые $\mathcal{L}$, лежащие в когерентных попространствах из $\mathcal{H}$, и только они являются аналогами элементарных исходов коммутативной теории. Отвечающее $\mathcal{L}$ чистое состояние $\wp$ аналогично вырожденному распределению, "сосредоточенному" на одном из элементарных исходов. Все наблюдаемые, для которых прямая $\mathcal{L}$ является собственной, имеют в состоянии $\wp$ детерминированное значение, именно, соответствующе собственное значение. Однако, и в этом отличие от коммутативной теории, существуют, вообще говоря, наблюдаемые, для которых прямая $\mathcal{L}$ не является собственной. Говорить об их величине в состоянии $\wp$ не имеет смысла. Попытка измерить подобную величину C превратит чистое состояние

$\rho = |x><x|$ в смесь чистых состояний с собственными для оператора C ψ - векторами $|z^{(k)}>$. Это значит, что объект неконтролируемым образом перейдет в одно из чистых состояний $|z^{(k)}><z^{(k)}|$. Соответствующие вероятности перехода Π_k задаются по (3.7) через коэффициенты разложения исходного ψ-вектора по базису $|z^{(k)}>$. Обратно, для любого базиса $|z^{(k)}>$ когерентного подпространства $\mathcal{H}'$ существует чистое состояние $|x>$, превращающееся при соответствующих условиях в смесь из $|z^{(k)}>$ с наперед заданными вероятностями состояний $|z^{(k)}>$. Это явление носит название суперпозиции состояний.

Особенно простой вид имеет связь между матрицами плотности $\rho^{(in)}$ и $\rho^{(out)}$ исходного состояния и получающегося из него смешанного состояния, когда $|z^{(k)}>$ являются координатными ортами:

$$\rho^{(in)} = \begin{pmatrix} K_1^1 & K_2^1 & \dots & K_n^1 \\ K_1^2 & K_2^2 & \dots & K_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1^n & K_2^n & \dots & K_n^n \end{pmatrix}, \quad \rho^{(out)} = \begin{pmatrix} K_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_n^n \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

- от матрицы $\rho^{(in)}$ остается одна диагональ.

§ 4. Алгебра наблюдаемых.

Совокупность наблюдаемых каждого объекта является линейным пространством над полем вещественных (но не комплексных!) чисел. Оно становится упорядоченным, если в согласии с (2.3) принять, что

$$A \geqslant B \iff <x|A|x> \geqslant <x|B|x> \quad \forall |x>. \qquad (4.1)$$

В упорядоченном линейном пространстве эрмитовых операторов спектральный радиус

$$\|A\| = \max_i |\alpha_i| \; ; \quad \alpha_i : \; \det|A - \alpha_i \mathbb{1}| = 0, \tag{4.2}$$

задает естественную норму, согласованную с упорядоченностью:

$$\mathbb{O} \leq A \leq B \; \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|.$$

При этом $\|A\|$ является минимальным положительным числом λ, для которого

$$-\lambda \cdot \mathbb{1} \leq A \leq \lambda \cdot \mathbb{1} .$$

Здесь $\mathbb{1}$ – единичный оператор. Для составных эрмитовых операторов $A = \{A_1, \ldots, A_s\}$

$$\|A\| = \max_u \|A_u\| = \max_{u,j} |\alpha_{u,j}|; \; \alpha_{u,j} : \det|A_u - \alpha_{u,j} \mathbb{1}_u| = 0. \tag{4.3}$$

Величина нормы (4.3) не меняется при изоморфных вложениях объкта, при которых набор операторов заменяется одним диагонально-ящичным оператором. Упорядоченное линейное пространство всех $\vec{m}$-составных эрмитовых операторов с нормой (4.3) мы будем обозначать $Herm(\vec{m})$.

Строение эрмитова оператора определяется его каноническим спектральным разложением. Кратные единичному скалярные операторы в любом базисе записываются диагональными матрицами с одним и тем же скаляром (своим единственным собственным значением) на диагонали. Диагональный вид с одним единичным и остальными нулевыми блоками имеют и диагонально-ящичные матрицы проекторов на когерентные подпространства. Линейные комбинации этих проекторов образуют центр алгебры наблюдаемых; они и только они коммутируют с любым составным эрмитовым оператором $A \in Herm(\vec{m})$.

Рассмотрим алгебру проекторов, принадлежащих совокупности $Herm(\vec{m})$. Они проектируют только на линейные оболочки прямых из когерентных подпространств, т.е. только на допустимые подпространства $\mathcal{F}$, с базисами из векторов, принадлежащих $\bigcup_i \mathcal{H}_i$.

Каждый проектор взаимно однозначно соответствует своему подпространству проектирования, или, если угодно набору $\{\mathcal{F}_v\}_{v=1}^{s}$

$\mathcal{F}_v = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}_v$. Допустимые подпространства $\mathcal{F}$ (или наборы $\{\mathcal{F}_v\}$) являются аналогами событий коммутативной теории, а проекторы P на них - аналогами характеристических функций события, принимающих значение 1 на исходах, благоприятствующих событию и 0 на остальных.

Двум событиям $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ можно поставить в соответствие их нижнюю грань - пересечение $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}''$ или набор $\{\mathcal{F}'_v \cap \mathcal{F}''_v\}$, с составным проектором $P_1 \wedge P_2$. Когда операторы P_1 и P_2 проектирования на $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ коммутируют, $P_1 P_2 = P = P_2 P_1$ тогда $P_1 \wedge P_2 = P$. В общем же случае $P_1 \wedge P_2$ можно записать лишь как монотонный предел

$$\lim_{\nu\to\infty} (P_1 P_2 P_1)^\nu = P_1 \wedge P_2 = \lim_{\nu\to\infty} (P_2 P_1 P_2)^\nu \tag{4.4}$$

Проектор $P_1 \wedge P_2$ является наибольшим в смысле (4.I) среди проекторов, меньших как P_1, так и P_2. Аналогично, можно рассмотреть верхнюю грань $P_1 \vee P_2$ - проектор, больший и P_1 и P_2, но меньший любого проектора, большего как P_2, так и P_2. Проектор $P_1 \vee P_2$ есть проектор на векторную сумму $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ пространств $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ - линейную оболочку их объединения $\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$. Справедливо тождество

$$P_1 \vee P_2 = 1 - \left((1-P_1) \wedge (1-P_2)\right), \tag{4.5}$$

- аналог подобного закона в булевых алгебрах.

Упорядоченная совокупность проекторов с операциями $\wedge$ и $\vee$ образует "логику" объекта - модулярную решетку с ортодополнениями, см. [I5]. Операции $\wedge$ и $\vee$ уже не дистрибутивны, как в коммутативной теории; выполнен лишь ослабленный вариант закона дистрибутивности.

В коммутативной теории два события несовместимы (дизъюнктны), когда пусто множество элементарных исходов, благоприятствующих каждому из них. Их дизъюнктные аналоги описываются коммутирующими проекторами с нулевым произведением. Но существует еще один тип несовместимости - несовместимость из-за несогласованности, когда проекторы, отвечающие событиям, не коммутируют. Бессмысленно говорить о булевском пересечении или объединении таких событий, раз одновременно они не могут рассматриваться. Любая коммутирующая система проекторов, как следует из теоремы 3.5, образует булеву алгебру, так что логика порождаемой ими подалгебры наблюдаемых являются булевой.

Согласно теореме 3.I утверждение "значение $\alpha(A)$ наблюдаемой A принадлежит борелевскому множеству G вещественной оси" является событием с проектором

$$\sum_{\alpha^{(u)}\in G} P^{(u)}. \tag{4.6}$$

Для двух наблюдаемых, вообще говоря, это не так; утверждение "точка $(\alpha(A), \beta(B))$ принадлежит прямоугольнику $G\times F$ плоскости" будет событием лишь когда коммутируют проекторы $\sum_{\alpha^{(u)}\in G} P^{(u)}$ и $\sum_{\beta^{(v)}\in F} P^{(v)}$. Поэтому, понятие функции от наблюдаемых является более сложным, чем классическое поятие борелевской функции от случайных величин. Нужны специальные процедуры интерпретации функции действительного переменного с операторными аргументами, см. [16], [17].

Для коммутирующих наблюдаемых всё сводится к классическому случаю. В частности, поскольку целые степени одного и того же оператора коммутируют, можно говорить о степенях наблюдаемой и о полиномах от неё. Далее, для любой борелевской функции, заданной на спектре $\Lambda(A)$ наблюдаемой A с каноническим разложением (3.4), естественно определяется наблюдаемая

$$f(A)=\sum_{u} f(\alpha^{(u)})P^{(u)} \qquad (4.7)$$

В частности, для неотрицательных эрмитовых операторов существует неотрицательный же квадратный корень.

Матричное произведение AB двух эрмитовых матриц A и B будет эрмитовым, $(AB)^*=AB$, тогда и только тогда, когда эти матрицы коммутируют:

$$AB=BA=B^*A^*=(AB)^* \ ; \qquad AB=(AB)^*=B^*A^*=BA .$$

Так что в некоммутативном случае уже понятие произведения наблюдаемых нуждается в истолковании; скажем AB есть $A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA)$.

Пространство наблюдаемых образует неассоциативную алгебру относительно бинарной операции

$$(A,B)\to i(AB-BA)=i[A,B],$$

выражающейся через коммутатор операторов. Она антикоммутативна, $i[A,B]=-i[B,A]$, а взамен ассоциативности удовлетворяет тождеству Якоби:

$$[[A,B],C]+[[C,A],B]+[[B,C],A]=0.$$

Всюду до сих пор нам было безразлично, рассматриваем ли мы эрмитовы матрицы с комплексными или только с действительными элементами. Но последняя операция - существенно комплексная.

Интересно, см. [18], найти естественную систему аксиом, определяющую объекты нашей теории (в смысле § 2) и, с точностью до изоморфизма, только их. Такие описания пока удалось дать либо в терминах алгебры проекторов, либо в терминах обертывающей алгебры совокупности наблюдаемых, т.е. выходя за пределы алгебры наблюдаемых.

Пусть $\mathfrak{A}$ - C^*- алгебра, т.е. полная нормированная алгебра над полем комплексных чисел с заданной в ней инволюцией $*$. Система аксиом C^*-алгебры, связывающая операции сложения, умножения на число, умножения, инволюции и взятия нормы, имеет очень естественный вид, см. [19], [20], [21]. Всякая конечномерная C^*-алгебра изоморфна прямой сумме нескольких полных матричных алгебр с обычными операциями сложения, умножения и сопряжения $*$, причём число слагаемых равно размерности центра алгебры. Далее, наблюдаемыми объявляются самосопряженные элементы $A = A^*$, неотрицательными наблюдаемыми - элементы вида $B = A^* A$. Таким образом, алгебра наблюдаемых может быть представлена как алгебра $Herm(\vec{m})$ всех диагонально-ящичных эрмитовых матриц с фиксированными размерами и положениями ящиков.

Совокупность состояний при таком подходе вводится очень просто. На $\mathfrak{A}$, как на линейном пространстве над полем комплексных чисел, рассматриваются линейные функционалы. Функционалы ρ, принимающие неотрицательные вещественные значения на неотрицательных наблюдаемых и нормированные условием $\rho(\mathbb{1}) = 1$, где $\mathbb{1}$ - единица алгебры $\mathfrak{A}$, декретируются распределениями вероятностей - состояниями, см. [19], [27]. При этом как легко видеть, состояния определяются через вещественные функционалы на самой алгебре наблюдаемых - упорядоченном пространстве $Herm$ над полем вещественных чисел.

По аналогии с коммутативной теорией будем называть вещественнозначные функционалы на пространстве $Herm$ <u>мерами</u>, а вещественное линейное пространство их - пространством $Var(\vec{m})$.

<u>Теорема</u> 4.1. Каждой мере Q на пространстве $Herm(\vec{m})$ однозначно соответствует $\vec{m}$-составной эрмитов оператор $(Q_1, \ldots, Q_s)$, действующий по формуле

$$Q(A)=\sum_{v=1}^{s} Sp(A_v Q_v)=\ll Q, A \gg, \qquad (4.8)$$

и обратно.

Доказательство. Об[illegible] е утверждение почти очевидно. Проведем унитарную перекоординатиза[illegible]ю когерентных подпространств, приводящую каждое Q_v к диагональному виду. В этом представлении

$$Sp(AQ)=\sum_k a_k^k q_k^k,$$

что есть вещественное число, так как диагональные элементы эрмитовых матриц вещественны.

В каждой эрмитовой матрице можно выделить вещественную и мнимую части,

$$A=R_A+S_A\sqrt{-1}; \qquad R^T=R, \qquad S^T=-S,$$

с соответственно симметрической и кососимметрической вещественными матрицами R и S. Отсюда по (2.12) и (2.15)

$$Sp(RS)=Sp(SR)=Sp(R^T S^T)=-Sp(RS).$$

Значит, $Sp(RS)=Sp(SR)=0$, и

$$\ll A,B \gg = Sp(AB)=Sp(R_A R_B)-Sp(S_A S_B)=$$

$$=\sum_{i,j}(Re\, a_j^i)(Re\, b_j^i)+\sum_{i,j}(Im\, a_j^i)(Im\, b_j^i) \qquad (4.9)$$

Скалярное произведение (4.9) превращает линейное пространство составных эрмитовых матриц в евклидово вещественное пространство. Это пространство двойственно самому себе. Значит, каждый вещественный линейный функционал на нём задается своим набором эрмитовых матриц, а значения его определяются формулой (4.8). Поскольку исходная топология конечномерного пространства $Herm$ и его евклидова топология совпадают, то (4.8) описывает все функционалы.

Рассмотрим подробнее упорядоченные пространства наблюдаемых и мер.

Условимся говорить, что эрмитовы операторы A_1 и A_2 дизъюнктны, если $A_1 A_2 = \mathbb{O}$. Так как нулевой оператор эрмитов, то эти операторы коммутируют, $A_2 A_1 = \mathbb{O}$, и имеют общий собственный базис. Для каждого общего собственного вектора $|x^{(j)}>$ имеем $\alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(2)} = 0$, т.е. если $A|x^{(j)}> \neq 0$, то обязательно $A_2|x^{(j)}>=0$, и наоборот. Аналогично, если попарно дизъюнктны несколько операторов $A_1, \ldots, A_\ell$, то по меньшей мере $\ell-1$ из них отображают общий собственный вектор в нулевой. Следовательно, в подходящих системах координат матрицы этих операторов расцепляются. А все пространство разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathcal{H}^{(1)}, \ldots, \mathcal{H}^{(\ell)}$ и еще, быть может, $\mathcal{H}^{(0)}$ инвариантных для каждого оператора, причем

$$A_k|x>=0 \qquad \forall |x> \in \mathcal{H}^{(j)}, \quad j \neq k.$$

<u>Лемма</u> 4.2. Всякая эрмитова матрица A однозначно раскладывается в разность

$$A = A^+ - A^-$$

неотрицательных дизъюнктных матриц

$$A^+ = \sum_{\alpha_j > 0} \alpha_j |a^{(j)}><a^{(j)}| \; ; \qquad A^- = -\sum_{\alpha_j < 0} \alpha_j |a^{(j)}><a^{(j)}| ,$$

где α_j - собственные числа матрицы A, $|a^{(j)}>$ - отвечающие им орты собственного базиса.

<u>Доказательство</u>. Разбив слагаемые в спектральном разложении

$$A = \sum_j \alpha_j |a^{(j)}><a^{(j)}| = \sum_i \alpha^{(i)} P^{(i)}$$

на две группы с $\alpha^{(i)} > 0$ и с $\alpha^{(i)} < 0$, получим искомое разложение. Обратно, если есть дизъюнктное разложение $A = B - C$,

$B, C > \mathbb{O}$, то эти матрицы должны иметь общий собственный базис, причем в нем преобразованные матрицы B и C должны расщеплять-ся. Значит, собственные значения B совпадают с положительными собственными значениями A, т.е. $B = A^+$. Аналогично, $C = A^-$.

Пусть $\vec{m}$ -составная матрица Q задает меру Q, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ - её собственные числа, занумерованные в единую последовательность, а $|x^{(j)}>$ - отвечающие им собственные векторы. Построим дизъюнктные матрицы:

$$Q^+ = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j |x^{(j)}><x^{(j)}|; \quad Q^- = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j |x^{(j)}><x^{(j)}|, \tag{4.10}$$

и назовем неотрицательные меры Q^+ и Q^-, положительной и отрицательной частями меры Q. Величины

$$|Q|^+ = Sp\, Q^+; \quad |Q|^- = Sp\, Q^-; \quad |Q| = \sum_j |\varkappa_j| = |Q|^+ + |Q|^- \tag{4.11}$$

назовем положительной, отрицательной и полной следовыми вариацией меры Q. Наконец, построим проекторы

$$P_Q^+ = \sum_{\varkappa_j > 0} |x^{(j)}><x^{(j)}|, \quad P_Q^- = \sum_{\varkappa_j < 0} |x^{(j)}><x^{(j)}|, \tag{4.12}$$

$$P_Q^0 = \sum_{\varkappa_j = 0} |x^{(j)}><x^{(j)}|$$

на положительное, отрицательное и нулевое подпространства приведения Q.

Теорема 4.3. Каждая составная мера Q единственным образом представима в виде разности неотрицательных дизъюнктных мер:

$$Q = Q^+ - Q^-$$

Доказательство. Применив лемму 4.2 к матрицам операторов, действующих на когерентных подпространствах, объединим положительные части в набор Q^+, а отрицательные - в набор Q^-.

Лемма 4.4. Для всякой составной меры Q и любого проектора P

$$-|Q|^{-} \leq \ll Q, P \gg \leq |Q|^{+} , \qquad (4.13)$$

причем равенство слева достигается на P_Q^{-}, а справа – на P_Q^{+}.

Следствие. Свертка неотрицательной меры Q и неотрицательной наблюдаемой A неотрицательна,

$$Q \geq \mathbb{O}, \quad A \geq \mathbb{O} \Rightarrow \ll Q, A \gg \geq 0.$$

Обратно,

$$\forall A \geq 0, \quad \ll Q, A \gg \geq 0 \Rightarrow Q \geq 0.$$

Доказательство. Перейдем к какому-либо собственному базису проектора P. Если P – проектор на k-мерное подпространство, то

$$\ll Q, P \gg = \sum_{j=1}^{k} (\overset{+}{q}{}^j_j - \overset{-}{q}{}^j_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \overset{+}{q}{}^j_j = |Q^{+}| = |Q|^{+}$$

Знак равенства достигается лишь когда $\overset{-}{q}{}^j_j = 0$ при $j \leq k$, а $\overset{+}{q}{}^j_j = 0$ при $j > k$. Именно так будет, если $P = P_Q^{+}$, $\ll Q, P_Q^{+} \gg = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j = |Q|^{+}$. Более подробный анализ показывает, что неравенство обращается в равенство на всех проекторах P, удовлетворяющих неравенству $P_Q^{+} \leq P \leq \mathbb{1} - P_Q^{-}$.

Аналогично рассматривается левое неравенство (4.13).

Для вывода следствия разложим $A = \sum_i \alpha^{(i)} P^{(i)}$, где все собственные значения $\alpha^{(i)} \geq 0$. Тогда по (4.13)

$$\ll Q, A \gg = \sum_i \alpha^{(i)} \ll Q, P^{(i)} \gg \geq 0$$

ввиду того, что $|Q|^{-} = 0$ при $Q \geq \mathbb{O}$. Наоборот, если $\ll Q, P_Q^{-} \gg \geq 0$, то по (4.13) $|Q|^{-} = 0$ и $Q \geq \mathbb{O}$.

Теорема 4.5. Все три вариации удовлетворяют неравенству треугольника:

$$|Q_1+Q_2| \leq |Q_1|+|Q_2|. \tag{4.14}$$

Полная следовая вариация меры является нормой в линейном пространстве мер, двойственной к норме (4.3) в пространстве наблюдаемых,

$$|Q| = \max_{\|A\|=1} |\langle\langle Q, A\rangle\rangle| . \tag{4.15}$$

Следствие. Вариации являются выпуклыми функционалами от меры.

Доказательство. Возьмем проектор $P=P^+_{Q_1+Q_2}$. По лемме 4.4

$$|Q_1+Q_2|^+ = \langle\langle Q_1+Q_2, P\rangle\rangle = \langle\langle Q_1^+, P\rangle\rangle +$$

$$+\langle\langle Q_2^+, P\rangle\rangle - \langle\langle Q_1^-, P\rangle\rangle - \langle\langle Q_2^-, P\rangle\rangle \leq$$

$$\leq |Q_1^+|^+ + |Q_2^+|^+ - |Q_1^-|^- - |Q_2^-|^- = |Q_1|^+ + |Q_2|^+ .$$

Аналогично доказывается неравенство для отрицательной вариации. Складывая их, получаем неравенство треугольника (4.14) для полной вариации.

Положительная однородность вариации очевидна. Наконец, в собственном базисе оператора A

$$|\langle\langle Q, A\rangle\rangle| = |\sum_j \overset{+}{q}{}^j_j \alpha_j - \sum_j \bar{q}^j_j \alpha_j| \leq \max|\alpha_j| \cdot \sum_j (\overset{+}{q}{}^j_j + \bar{q}^j_j) =$$

$$= \|A\|(Sp\, Q^+ + Sp\, Q^-) = \|A\| \cdot |Q|.$$

Неравенство превращается в равенство при $A = P^+_Q - P^-_Q$. Это дает (4.15).

Утверждение следствия вытекает из неравенства треугольника. При $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta=1$

$$|\alpha Q_1 + \beta Q_2| \leq |\alpha Q_1| + |\beta Q_2| = \alpha|Q_1| + \beta|Q_2|,$$

так как вариации положительно однородны.

Таким образом, объект полностью определяется упорядоченным нормированным пространством своих наблюдаемых, причем это пространство может рассматриваться как своего рода алгебра. Далее, пространство наблюдаемых взаимно однозначно отвечает двойственному пространству мер, а последнее оказывается линейной оболочкой совокупности состояний объекта.

И наблюдаемые, и меры описываются эрмитовыми операторами. Различие между ними было бы логично подчеркивать, помещая у мер, скажем, индексы справа от коренной буквы, а у наблюдаемых - слева. Тогда было бы ясно, что перекрестная свертка $Q * A = \langle\langle Q, A \rangle\rangle$ проводится между величинами разной природы. Это замечание следует иметь в виду в дальнейшем, когда мы столкнемся с многоиндексными величинами, которые по части индексов будут вести себя как наблюдаемые, а по остальным как меры.

Умножение наблюдаемых плохо сцеплено с упорядоченностью. Так, при $\mathbb{O} < A < B$ еще нельзя утверждать, что и $A^2 < B^2$, см. [13]. Можно только умножать обе части неравенства $A \leq B$ на множитель $C \geq \mathbb{O}$, когда C коммутирует как с A, так и с B. Ибо тогда $AC = \sqrt{C} A \sqrt{C} \leq \sqrt{C} B \sqrt{C} = BC$. В отличие от этого всегда $Q * A \geq 0$, если только $Q \geq \mathbb{O}$ и $A \geq \mathbb{O}$.

Для коммутирующих наблюдаемых сохраняются в силе все привычные соотношения для случайных величин. Каноническое спектральное разложение (3.4) задает наблюдаемую A как случайную величину, принимающую значения $\alpha^{(d)} \in \Lambda(A)$ с вероятностями $\langle\langle \rho, P^{(d)} \rangle\rangle = \rho * P^{(d)}$. Здесь $\Lambda(A)$ - спектр оператора A, ρ - оператор плотности, т.е. оператор вероятностей чистых состояний объекта. Функции этой случайной величины также являются наблюдаемыми. Разброс наблюдаемых значений A в состоянии ρ объекта характеризуется дисперсией

$$\mathbb{D}_\rho A = \langle\langle \rho, A^2 \rangle\rangle - \langle\langle \rho, A \rangle\rangle^2 \qquad (4.16)$$

Здесь A^2 - наблюдаемая, причем она принимает значения $[\alpha^{(j)}]^2$, когда A принимает значения $\alpha^{(j)}$.

§ 5. Произведения вероятностных законов.

В классической теории вероятностей мы можем рассматривать два или несколько случайных явлений как одно, более сложное явление. Если $\Omega^{(k)} = \{\overset{k}{\omega}_1, \ldots, \overset{k}{\omega}_{\nu(k)}\}$ - соответствующие пространства элементарных исходов, то пространством всех мыслимых элементарных исходов сложного явления будет произведение $\bigtimes_k \Omega^{(k)}$ - множество всех упорядоченных пар или последовательностей $(\overset{1}{\omega}_{j_1}, \overset{2}{\omega}_{j_2}, \ldots)_{j_k=1}^{\nu(k)}$. Рассмотрим сейчас схему перемножения объектов в некоммутативной теории.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - два конечномерных унитарных пространства с ортонормированными базисами $\{|x^{(j)}>\}_{j=1}^{\nu}$ и $\{|y^{(k)}>\}_{k=1}^{n}$ соответственно. Образуем формальные произведения элементов.

$$|w> = |x> \otimes |y> = |x \otimes y>$$

и всевозможные линейные комбинации из них с комплексными коэффициентами. При этом $\otimes$ - умножение будем считать линейным по каждому аргументу:

$$|(\lambda x' + \mu x'') \otimes y> = \lambda |x' \otimes y> + \mu |x'' \otimes y>,$$
$$|x \otimes (\lambda y' + \mu y'')> = \lambda |x \otimes y'> + \mu |x \otimes y''>.$$

При таком соглашении каждая формальная сумма однозначно разлагается по базису

$$|w^{(jk)}> = |x^{(j)}> \otimes |y^{(k)}>; \quad j = 1, \ldots, \nu, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (5.1)$$

Построенное линейное пространство $\mathcal{W} = \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ размерности νn называется тензорным произведением $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. В нем можно ввести скалярное произведение, положив для

$|w'\rangle = |x' \otimes y'\rangle$ и $|w''\rangle = |x'' \otimes y''\rangle$

$$\langle w' | w'' \rangle = \langle x' | x'' \rangle \cdot \langle y' | y'' \rangle, \tag{5.2}$$

а для линейных комбинаций доопределив его по линейности. Базис $|w^{(jk)}\rangle$ оказывается ортонормированным относительно такого скалярного произведения. Этим устанавливаетсяя унитарность пространства $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Если в пространствах - сомножителях перейти к новым ортонормированным базисам $\{|\xi^{(j)}\rangle\}$ и $\{|\eta^{(k)}\rangle\}$, индуцированный базис $\{|\xi^{(j)} \otimes \eta^{(k)}\rangle\}$ снова будет ортонормированным, так что произойдет лишь унитарная перепараметризация $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Аналогичным образом определим тензорное произведение систем унитарных пространств $\{\mathcal{X}_u\}_{u=1}^{s}$ и $\{\mathcal{Y}_v\}_{v=1}^{t}$. Примем, что оно будет системой унитарных пространств $\{\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v\}_{u,v=1}^{u=s,\, v=t}$

Соответственно, когда первый и второй объекты описываются системами унитарных подпространств $\{\mathcal{X}_u\}$ и $\{\mathcal{Y}_v\}$, будем описывать сложный объект, "состоящий" из обоих объектов, системой тензорных произведений $\{\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v\}$. Векторы из этих подпространств отвечают чистым состояниям сложного объекта. В частном случае, когда когерентные подпространства обеих систем одномерны, их тензорное произведение сводится к системе st также одномерных подпространств. Таким образом, когда системы - сомножители могут быть истолкованы как пространства исходов, их "тензорное произведение" отвечает произведению пространств исходов.

Пусть $\mathcal{X} = \bigotimes_u \mathcal{X}_u$, $\mathcal{Y} = \bigotimes_v \mathcal{Y}_v$. Тогда $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} = \bigotimes_{u,v} (\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v)$. Поэтому, естественное вложение когерентных подпрограств в абстрактное пространство объектов инвариантно относительно тензорного перемножения. Занумеруем подряд базисные орты подпространств $\mathcal{X}_u$ а также подпространств $\mathcal{Y}_v$. Векторы $|w^{(jk)}> = |x^{(j)} \otimes y^{(k)}>$, выстроенные в лексикографическом порядке, образуют репер пространства $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, составленный из реперов когерентных подпространств $\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v$. Если потребуется, можно отказаться от двойной нумерации, и нумеровать и орты, и пространства всего одним числом. Это затруднит восприятие специальной структуры произведения, но и только.

Совершенно аналогично, отправляясь от формальных произведений

$$|w> = |x> \otimes |y> \otimes |z> = |x \otimes y \otimes z>,$$

вводится тензорное произведение $\mathcal{W}$ трех унитарных пространств $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, а также четырех и т.д. Операция тензорного умножения, очевидно, ассоциативна, - в конечном итоге векторы из $\mathcal{W}$ суть линейные комбинации ортов

$$|w^{(jkl)}> = |x^{(j)}> \otimes |y^{(k)}> \otimes |z^{(l)}> = |x^{(j)} \otimes y^{(k)} \otimes z^{(l)}>.$$

Соответственно с нумерацией базиса тензорного произведения приходится вводить сложную нупераци в матрицах операторов. Скажем, если $\mathcal{H}$ - эрмитов оператор на пространстве $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, то его матрица в естественном базисе будет иметь вид

$$\left(\varkappa^{ik}_{jl} \right)^{i,j=m;\, k,l=n}_{i,j,k,l=1} , \qquad \varkappa^{ik}_{jl} = \overline{\varkappa^{jl}_{ik}} ,$$

в согласии с правилом (2.2).

Может случиться, что пространства-сомножители имеют разный смысл, ср. конец этого §, так что разумные перекоординатизации $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ сводятся к перекоординатизации сомножителей (чтобы подчеркнуть это, мы будем иногда даже писать в матрице одну пару индексов слева, а другую - справа от коренной буквы, а сами матрицы именовать суперматрицами. Тогда имеет смысл рассматривать операции вида

$$Ж \to Ш, \qquad ш^{ik}_{jl} = ж^{ik}_{lj} \tag{5.3}$$

$$Ж \to Щ, \qquad щ^{ik}_{jl} = ж^{il}_{jk} \tag{5.4}$$

Для двухпариндексных эрмитовых матриц эти операции также переводят эрмитовы матрицы в эрмитовы, как и операция транспонирования $A \to A^T$ обычных эрмитовых матриц

$$A \to B = C\,; \quad b^i_j = a^j_i\,, \quad c^i_j = \overline{a^i_j} \tag{5.5}$$

Для двухпариндексных эрмитовых матриц $Ж$ наряду с неотрицательностью по совокупности индексов, которая здесь именуется, см. [22], суперположительностью

$$\langle w|Ж|w\rangle \geq 0, \qquad \forall |w\rangle \in \mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}, \tag{5.6}$$

можно рассмотреть парную неотрицательность

$$\langle x\otimes y|Ж|x\otimes y\rangle \geq 0, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{X}, \ \forall|y\rangle\in\mathcal{Y}, \tag{5.7}$$

т.е. неотрицательность её квадратичной формы на множестве векторов из $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$, которую только и будем называть неотрицательностью таких операторов. Неотрицательность (5.8), в отличие от суперположительности (5.7) сохраняется при операциях (5.3) и (5.4). Заметим, что если операцию транспонирования (5.5) квадратных матриц записать двухпариндексной суперматрицей, то она будет неотрицательна в смысле (5.7), но не в смысле (5.6).

Пусть A - матрица оператора на $\mathcal{X}$, B - на $\mathcal{Y}$. Их кронекеровским произведением $\mathcal{K} = A \times B$ называется, см. [13], [23], матрица с элементами

$$\varkappa_{jl}^{ik} = a_j^i b_l^k \tag{5.8}$$

Она будет матрицей оператора на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. При лексикографической записи, когда индексы, относящиеся к $\mathcal{X}$ считаются старшими, матрица $A \times B$ приобретает блочный вид

$$\begin{pmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_2^1 \ldots a_m^1 b_n^1 \\ a_1^1 b_1^2 & a_1^1 b_2^2 \ldots a_m^1 b_n^2 \\ \ldots & \ldots \\ a_1^m b_1^n & a_1^m b_2^n \ldots a_m^m b_n^n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1^1 B & \ldots & a_m^1 B \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_1^m B & \ldots & a_m^m B \end{array}\right), \tag{5.9}$$

Если же считать этот индекс младшим, то матрицу $A \times B$ надо записывать в виде

$$\begin{pmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_2^1 b_1^1 \ldots a_m^1 b_n^1 \\ a_1^2 b_1^1 & a_2^2 b_1^1 \ldots a_m^2 b_n^1 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_1^m b_1^n & a_2^m b_1^n \ldots a_m^m b_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A b_1^1 & \ldots & A b_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A b_1^n & \ldots & A b_n^n \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Представления (5.4) и (5.5) изоморфны, так как одно получается из другого при перенумерации координат пространства $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

<u>Теорема</u> 5.I. Матрица $\mathcal{K} = A \times B$ будет эрмитовой, если таковы матрицы A и B. Она будет суперположительной при $A \geq 0$ и $B \geq 0$. Собственные значения γ_{ik} матрицы $\mathcal{K}$

суть попарные произведения $\gamma_{ik} = \alpha_i \beta_k$ собственных чисел A и B,

$$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\|, \qquad Sp\, \mathcal{K} = Sp\, A \cdot Sp\, B.$$

<u>Доказательство</u>. Имеем $\varkappa^{ik}_{jl} = a^i_j \cdot b^k_l = \bar{a}^j_i \cdot \bar{b}^l_k = \overline{\varkappa^{jl}_{ik}}$, что доказывает эрмитовость произведения. Для проверки неотрицательности проведем унитарную перекоординатизацию $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, перейдя к базисам из собственных ортов A и B. Тогда матрица $A \times B$ будет иметь диагональный вид с диагональными элементами $\varkappa^{ik}_{ik} = \gamma_{ik} = \alpha_i \beta_k$. Отсюда, по лемме 3.2, $A \times B \geqslant \mathbb{O}$ тогда и только тогда, когда $A \geqslant \mathbb{O}$ и $B \geqslant \mathbb{O}$. Далее,

$$\|A \times B\| = \max_{i,k} |\alpha_i \beta_k| = \max_i |\alpha_i| \cdot \max_k |\beta_k| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Наконец,

$$Sp\,(A \times B) = \sum_{i,k} \alpha_i \beta_k = \Big(\sum_i \alpha_i\Big)\Big(\sum_k \beta_k\Big) = (Sp\, A) \cdot (Sp\, B).$$

Утверждения теоремы очевидным образом переносятся на составные эрмитовы операторы. Поэтому, если A – наблюдаемая для первого объекта, B – наблюдаемая для второго, то оператор $\mathcal{K} = A \times B$ будет наблюдаемой с $\|\mathcal{K}\| = \|A\| \cdot \|B\|$ для сложного объекта. Аналогично, если P –состояние первого объекта, Q – второго, то $R = P \times Q$ есть состояние сложного объекта. Соответствующие единой нумерации ортов в $\mathcal{X}$ и в $\mathcal{Y}$ их матрицы (5.4) или (5.5) имеют нулевые недиагональные блоки, а диагональные блоки сами оказываются диагонально-ящичными подматрицами.

Заметим, что операция (5.3) кронекеровского умножения является самой "широкой" операцией умножения матриц. Если для матриц A и B имеет смысл обычное умножение $AB = C$:

$$c_k^i = \sum_j a_j^i b_k^j ;$$

или скалярное умножение $A * B = \langle\langle A, B \rangle\rangle = Sp(AB)$:

$$A * B = \sum_{i,j} a_j^i b_i^j ,$$

то они получаются из $A \times B$ сверткой. Отметим, что здесь суммирование при свертке по паре или парам равных индексов, находящихся "в косом положении" друг относительно друга.

Рассмотрим свертки эрмитовых операторов более подробно. Пусть $\mathcal{H} = \left(\varkappa_{jlt}^{iks} \right)_{i,j,k,l \in M}^{s,t \in N}$ - матрица эрмитова оператора на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Мы допускаем, что пространства-множители $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ сами могут быть тензорными произведениями, так что индексы могут быть и векторными.

<u>Лемма</u> 5.2. Перекрестная самосвертка

$$\mathcal{H} \to Щ, \qquad щ_t^s = \sum_{i,j \in M} \varkappa_{jit}^{ijs} \tag{5.11}$$

матрицы $\mathcal{H}$ эрмитова оператора задаёт матрицу $Щ$ эрмитова оператора на $\mathcal{Y}$. Если квадратичная форма матрицы $\mathcal{H}$ неотрицательна на $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'$, где множества $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{Y}'$ содержат хотя бы по одному ортонормированному реперу в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, то квадратичная форма матрицы $Щ$ неотрицательна на $\mathcal{Y}'$. Операция самосвертки линейна.

<u>Доказательство</u>. Поскольку i и j -немые индексы, то

$$щ_s^t = \sum_{i,j} \varkappa_{jis}^{ijt} = \sum_{i,j} \overline{\varkappa_{ijt}^{jis}} = \overline{\sum_{i,j} \varkappa_{jit}^{ijs}} = \overline{щ_t^s} .$$

Далее, при любых s и t элемент $щ_t^s$ не изменяется при любой унитарной перекоординатизации U пространства $\mathcal{X}$, $U^{-1} = U^*$. Пусть в новых координатах оператор $\mathcal{H}$ имеет матрицу $(\tilde{\varkappa})$.

$$\tilde{\varkappa}^{iks}_{jlt} = \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} u^i_\alpha u^k_\mu u^\beta_j u^\nu_l \varkappa^{\alpha\mu s}_{\beta\nu t}$$

Поскольку для унитарной матрицы $\mathcal{U}$ будет $\sum_\gamma u^i_\gamma u^\gamma_l = \delta^i_l$, то

$$\sum_{i,j} \tilde{\varkappa}^{ijs}_{jit} = \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} \varkappa^{\alpha\mu s}_{\beta\nu t} \Big(\sum_i u^i_\alpha u^\nu_i\Big)\Big(\sum_j u^\beta_j u^j_\mu\Big) = \sum_{\alpha,\beta} \varkappa^{\alpha\beta s}_{\beta\alpha t} = щ^s_t$$

При перекоординатизации же $\mathcal{Y}$ матрица $Щ$ преобразуется соответствующим образом вслед за матрицей $\mathcal{Ж}$. Значит, самосвертка определяет оператор.

Наконец, для проверки неотрицательности перейдем к базисным реперам, указанным в условии. Пусть $|y\rangle \in \mathcal{Y}'$. Так как

$$щ^s_t = \sum_{i,j} \varkappa^{ijs}_{jlt} = \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} \varkappa^{\alpha\mu s}_{\beta\nu t} \delta^i_\alpha \delta^\beta_j \delta^j_\mu \delta^\nu_i ,$$

$$\langle y|Щ|y\rangle = \sum_{i,j} \langle x^{(i)} \otimes x^{(j)} \otimes |\mathcal{Ж}| x^{(i)} \otimes x^{(j)} \otimes y\rangle \geqslant 0,$$

где $|x^{(k)}\rangle$ – базисные орты в $\mathcal{X}$, $|x^{(k)}\rangle \in \mathcal{X}'$, $\forall k$.

Линейность самосвертки очевидна. Лемма доказана.

Рассмотрим еще одну тензорную операцию – операцию ошпуривания, т.е. свертки по парным индексам, стоящим один над другим. Пусть

$$\mathcal{Ж} = \left(\varkappa^{ik}_{jl}\right)^{k,l \in N}_{i,j \in M}$$ – матрица эрмитова оператора на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Операция ошпуривания по $\mathcal{Y}$ -индексам задается формулой

$$\mathcal{Ж} \to Щ = Sp_{\mathcal{Y}} \mathcal{Ж} \; ; \quad щ^i_j = \sum_{k \in N} \varkappa^{ik}_{jk} , \quad \forall i,j \in M. \qquad (5.12)$$

Здесь $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ сами могут быть тензорными произведениями, а индексы – векторными. Рассмотрим оператор $\mathcal{Ж} \times \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$, где $\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$ – единичный оператор на $\mathcal{Y}$.

Поскольку

$$ш_j^i = \sum_{k \in N} ж_{jk}^{ik} = \sum_{k,l \in N} ж_{jl}^{ik} \delta_k^l , \qquad \forall i,j \in M, \tag{5.13}$$

то ошпуривание можно представить как перекрестную свертку

$$Sp\, \mathcal{Ж} = Щ = \mathcal{Ж} * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$$

или перекрестную самосвертку кронекеровского произведения $\mathcal{Ж} \times \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$ по $\mathcal{Y}$-индексам.

Теорема 5.3. Операция ошпуривания (5.12) по фиксированным парам соответствующих друг другу верхних и нижних индексов линейна, сохраняет эрмитовость и величину следа. Когда форма $\langle w|\mathcal{Ж}|w\rangle$ неотрицательна на множестве $\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'$, где $\mathcal{Y}'$ содержит ортонормированный репер $\mathcal{Y}$, то $\langle x|Щ|x\rangle$ неотрицательна на $\mathcal{X}'$.

Доказательство. Линейность и эрмитовость вытекают из теоремы 5.1. и леммы 5.2. Далее, на множестве $\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}' \subset \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}$ справедливо $\langle x \otimes y \otimes y|\mathcal{Ж} \times \mathbb{1}_y|x \otimes y \otimes y\rangle = \langle x \otimes y|\mathcal{Ж}|x \otimes y\rangle\langle y|y\rangle \geq 0$ Поэтому неотрицательность $\langle x|Щ|x\rangle$ на $\mathcal{X}'$ следует из леммы 5.2. Наконец,

$$Sp\, Щ = \sum_i ш_i^i = \sum_i \sum_k ж_{ik}^{ik} = Sp\, \mathcal{Ж} .$$

Теорема доказана.

Разумеется, утверждения теоремы справедливы и для составных эрмитовых операторов. Соответствующий составной оператор $\{Щ_u\}$ на системе $\{\mathcal{X}_u\}$ мы будем называть $\mathcal{X}$-проекцией (или проекцией на первый объект) составного оператора $\{\mathcal{Ж}_{uv}\}$ на системе $\{\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v\}$.

Лемма 5.4. Проекция состояния сложного объекта на первый объект есть состояние первого объекта. Если состояние сложного объекта есть $R = P \times Q$, то его проекция на первый объект есть P.

<u>Доказательство.</u> Проектируя оператор состояния, действующий на когерентном подпространстве $\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v$, мы получаем неотрицательный эрмитов оператор $Щ_{uv}$ на подпространстве $\mathcal{X}_u$. Сумма $Щ_u = \sum_v Щ_{uv} \geq 0$, $Sp Щ_u = \sum_v Sp Щ_{uv}$. Отсюда, суммарный след равен единице. Значит, проекция состояния – состояние.

Рассмотрим теперь матрицу

$$r_{jl}^{ik} = p_j^i q_l^k ; \quad \sum_k q_k^k = 1, \quad \sum_i p_i^i = 1,$$

оператора $R = P \times Q$ во всем абстрактном пространстве $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Имеем $щ_j^i = \sum_k r_{jk}^{ik} = p_j^i \sum_k q_k^k = p_j^i$, что и утверждалось.

Обозначим $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$ единичный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{Y}$. Операторы вида $A \times \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$, где A – произвольный эрмитов оператор, действующий на $\mathcal{X}$, образуют подалгебру, изоморфную алгебре всех эрмитовых операторов на $\mathcal{X}$. Это очевидно, если воспользоваться матричной записью (5.5), матрица $A \times \mathbb{1}$ будет диагонально-ящичной, из n стоящих на диагонали блоков A. Если же воспользоваться записью (5.4), то получится блочная матрица с блоками $a_j^i \mathbb{1}$. Совершенно аналогично, если $\{\mathcal{X}_u\}$ и $\{\mathcal{Y}_v\}$ – системы когерентных подпространств, A_u и $\mathbb{1}_v$ – эрмитовы операторы на соответствующих пространствах, то составные операторы

$$A \times \mathbb{1} = \{ A_u \times \mathbb{1}_v \} \tag{5.15}$$

образуют представление алгебры наблюдаемых объекта $Cas(\vec{m})$, $Dim\, \mathcal{X}_u = m_u$, $u = 1, \ldots, s$. При этом для любого состояния R сложного объекта

$$\ll A \times \mathbb{1}, R \gg_{\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}} = \ll A, P \gg_{\mathcal{X}} \tag{5.16}$$

где P – $\mathcal{X}$ - проекция состояния R.

Поэтому $\mathcal{X}$ -проекции состояний сложного объекта естественно считать состояниями первого объекта, а наблюдаемые вида (5.15),-наблюдаемыми, относящимися к первому объекту.

Векторы $|w>$ из каждого когерентного подпространства $\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v$ описывают чистые состояния сложного объекта. Среди них будут состояния с ψ -векторами вида $|w>=|x>\otimes|y>$, когда первый находится в чистом состоянии с ψ -вектором $|x>$, а второй - с ψ -вектором $|y>$. Но если размерность и $\mathcal{X}_u$ и $\mathcal{Y}_v$ строго больше единицы, то будут и более сложно выглядящие чистые состояния с ψ -векторами вроде

$$|w> = \frac{1}{\sqrt{2}}|x^{(1)}>\otimes|y^{(2)}> + \frac{1}{\sqrt{2}}|x^{(2)}>\otimes|y^{(1)}>$$

Проекция такого чистого состояния будет смесью состояний $|x^{(1)}>$ и $|x^{(2)}>$ с вероятностями $1/2$.

Объединяя два объекта в один сложный объект мы неявно предполагали, что можем различать, который из них первый, а какой - второй. Но в сложном объекте, состоящем из двух или более тождественных объектов, мы различить объекты не можем. Соответственно, абстрактным пространством будет не вся тензорная "степень" исходного пространства, а только часть её, см. [23] .

Подпространство пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, порожденное всеми векторами вида

$$|w>=|x>\otimes|y>+|y>\otimes|x> ; \quad |x>,|y> \in \mathcal{H},$$

описание которых не меняется при перенумерации объектов, называют симметрическим тензорным произведением $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H}$. Аналогично, симметрическим тензорным произведением $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H} \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}$ r одинаковых пространств $\mathcal{H}$ называют замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$, состоящее изо всех векторов, описание которых не изменяется при любой перенумерации объектов.

Подпространство пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, порожденное всеми векторами вида

$$|w\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle - |y\rangle \otimes |x\rangle ; \quad |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H},$$

описание которых после перенумерации объектов отличается от старого на множитель -1, называют антисимметрическим произведением $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H}$. Аналогично, антисимметрическим тензорным произведением $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H} \circledA \ldots \circledA \mathcal{H}$ z одинаковых пространств $\mathcal{H}$ называют замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$, состоящее из всех векторов, описание которых меняет знак при любой нечетной перестановке номеров у объектов.

Все различные типы частиц микромира разделяются на два класса - класс бозонов, у которых при объединении в сложный объект происходит симметрическое перемножение одинаковых когерентных подпространств, и класс фермионов, с антисимметрическим перемножением. Поскольку и симметрическое и антисимметрическое тензорные произведения можно вложить в соответствующее полное тензорное произведение, мы будем пользоваться этой возможностью, каждый раз рассматривая только совокупности распределений вероятностей, "сосредоточенных" на указанных подпространствах, и только симметричные наблюдаемые.

Поскольку два ψ-вектора, отличающиеся лишь фазовым множителем, в частности знаком, отвечают одному и тому же чистому состоянию, матрицы плотности (3.I) как симметрического, так и антисимметрического чистых состояний являются симметричными относительно перенумераций. Следовательно и для смешанных состояний части матрицы плотности, отвечающие одинаковым когерентным подпространствам тождественных частиц, симметричны относительно перенумерации последних.

Никаких других типов "перемножения" когерентных подпространств (или, как говорят, "статистик" одинаковых частиц) встретится не может. Если матрица плотности чистого состояния сложного объекта не меняется при перестановке номеров двух частиц, его ψ - вектор самое большее умножается на число c, $|c| = 1$. Та же самая перестановка, проделанная вторично, приводит к исходной нумерации, следовательно, $c^2 = 1$. Значит, или $c = +1$, или $c = -1$. Естественно принять, что число c непрерывно зависит от ψ-вектора. Так как когерентное подпространство связно, то c постоянно. Таким образом, статистика либо симметрична, либо антисимметрична.

Мы видели, что когда из нескольких исходных объектов составляется сложный объект, он описывается тензорным произведением пространств, отвечающих исходным объектам. Но нам приходится рассматривать тензорные произведения, имеющие несколько иное происхождение. Тензорное произведение $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ естественно отвечает пространству линейных операторов, отображающих пространство $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ (а также операторов, отображающих $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{X}$). Так, пространство $m \times n$ -прямоугольных матриц описывает линейные отображения пространства векторов-столбцов размера m в аналогичное n-мерное пространство. Разумеется, в подобном тензорном произведении имеют смысл только базисы, образованные векторами из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. В следующем параграфе мы встретимся с линейными операторами, отображающими пространство эрмитовых операторов на $\mathcal{X}$ в аналогичное другое, т.е. фактически с элементами пространства $\mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$.

§ 6. Марковские операторы и стохастические супарматрицы

Одним из центральных понятий классической теории вероятностей является понятие переходной вероятности (переходного распределения вероятностей), см. [24], [9]. Основная цель настоящей работы - описать это понятие в некоммутативной теории.

Напомним классическое определение. Пусть даны два конечных множества $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ и $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Переходная вероятность из Ω в $\mathcal{E}$ задается стохастической матрицей $\Pi = (\pi_{ik})_{i,k=1}^{i=\nu, k=n}$, т.е. матрицей, удовлетворяющей условиям:

$$\pi_{ik} \geq 0, \qquad \forall i, k \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_{ik} = 1, \qquad \forall i \tag{6.2}$$

Каково бы ни было начальное распределение $Q = (q_i)_{i=1}^{\nu}$ исходов ω, матрица Π задает конечное распределение $R = Q\Pi$ с вероятностями атомов

$$r_k = \sum_{i=1}^{\nu} q_i \pi_{ik}, \qquad \forall k. \tag{6.3}$$

Матрица-столбец (r_k) есть свертка матрицы-столбца (q_i) и прямоугольной матрицы (π_{ik}) по индексу i.

При каждом i столбец $(\pi_{ik})_{k=1}^{\nu}$ задает условное распределение перехода. Поэтому, Q и Π задают по формуле полной вероятности распределение врοятностей переходов $\{\omega \to \varepsilon\}$, т.е. совместное распределение P пар $(\omega, \varepsilon) \in \Omega \times \mathcal{E}$

$$p_{ik} = q_i \pi_{ik}; \quad i = 1, \dots, \nu, \quad k = 1, \dots, n, \tag{6.4}$$

– своего рода косое произведение Q на Π. При этом, согласно (6.3) распределение R есть проекция P на второй объект, а исходное распределение Q – проекция P на первый объект:

$$\forall i, \quad q_i = \sum_k q_i \pi_{ik} = \sum_k p_{ik} \; ; \quad q_i = \sum_{k,j} p_{jk} \delta_{ji} \tag{6.5}$$

Свойство (6.3) является характеристическим свойством стохастической матрицы. Любое линейное отображение совокупности всех распределений вероятностей на Ω в аналогичную совокупность на $\mathcal{E}$, описывается стохастической матрицей, и обратно. Действительно, каждый столбец матрицы, задающей такое преобразование, должен быть в вектором вероятностей атомов $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

В некоммутативной теории понятие условной вероятности расщепляется. Поэтому, нельзя ожидать, что весь комплекс свойств стохастических матриц удастся перенести и на суперматрицы. Мы будем отправляться от характеристического свойства (6.3).

Пусть $\{\mathcal{X}_u\}_{u=1}^{s}$ и $\{\mathcal{Y}_v\}_{v=1}^{t}$ – два набора координатизованных когерентных подпространств размерностей $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ и $\vec{m} = (m_1, \dots, m_t)$, $\mathcal{X} = \bigoplus_u \mathcal{X}_u$, $\mathcal{Y} = \bigoplus_v \mathcal{Y}_v$. Назовем марковским оператором из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$ набор эрмитовых операторов Π_{uv}, действующих каждый соответственно в $\mathcal{X}_u \otimes \mathcal{Y}_v$ и удовлетворяющих условиям

$$\Pi_{uv} \geqslant 0 \, , \qquad \forall u, v \quad ; \tag{6.6}$$

$$\sum_{v=1}^{t} \Pi_{uv} * \mathbb{1}_v = \mathbb{1}_u \, , \; \forall u \quad ; \tag{6.7}$$

где $\mathbb{1}_u$ и $\mathbb{1}_v$ – единичные операторы на $\mathcal{X}_u$ и на $\mathcal{X}_v$, а под неотрицательностью понимается раздельная неотрицательность (5.7). Соответствующий набор двухпариндексных эрмитовых матриц

$$\left\{ \left(\Gamma^{uv}{}^{jk}_{il} \right)^{i,j=\mu_u;\, k,l=m_v}_{i,j;\, k,l=1} \right\}^{u=s,\, v=t}_{u,v=1} \tag{6.8}$$

мы назовем стохастической суперматрицей. Обозначая δ^{α}_{β} единичную матрицу, можно переписать условия (6.6) и (6.7) в матричной форме

$$\langle x\otimes y|\Pi_{uv}|x\otimes y\rangle \geq 0, \ \forall|x\rangle \in \mathfrak{X}_u, \ \forall|y\rangle \in \mathfrak{Y}_v, \forall u,v; \tag{6.9}$$

$$\sum_{v=1}^{t}\sum_{k=1}^{m_v} \Gamma^{uv}{}^{jk}_{ik} = \delta^j_i \quad ; \forall i,j; \quad \forall u. \tag{6.10}$$

Как видно, формулы (6.6) и (6.7) обобщают (6.I) и (6.2), переходя в них, когда все когерентные подпространства одномерны.

Операторы Π_{uv} по второй паре индексов ведут себя как меры, а по первой – как наблюдаемые. Мы уже отмечали, в конце § 3, что для различения наблюдаемых и мер следовало бы в матрице, описывающей наблюдаемую, помещать индексы слева от коренной буквы. Такая запись сделала бы особенно наглядной запись суперстохастической матрицы

$$ {}^{i}_{j}\Pi^{k}_{l} = \Pi^{jk}_{il} \tag{6.11}$$

Здесь $\binom{i}{j}$ – входной "алфавит", $\binom{k}{l}$ – выходной. Свертка $*$ происходит между индексами одного уровня, но расположенных по разную сторону от коренной буквы:

$$\overset{v}{r}{}^{k}_{l} = \sum_u \sum_{i,j} \overset{u}{q}{}^{i}_{j} \cdot {}^{i}_{j}\overset{uv}{\Pi}{}^{k}_{l} \ ; \qquad \forall k,l, \ \forall v; \tag{6.12}$$

так что свертка тоже является своего рода перекрестной.

Для сравнения запишем в такой же форме (6.3):

$$r_k = \sum_i q_i \cdot {}_i\Pi_k \ , \quad \forall k.$$

Но уж очень трудно воспринимать символ, окруженный индексами со всех сторон (впрочем, от индексов на самой букве мы избавимся). Поэтому, мы пишем индексы i и j справа, но с "переворотом", см. (6.II). При таком перевороте эрмитовость сохраняется, ср. (5.3).

Определенная в терминах матриц операция $*$ перекрестной свертки является операцией между операторами. Это вытекает из теоремы 5.I и леммы 5.2, примененной к оператору $Ш \times Щ$, поскольку $Ш * Щ$ получается из $Ш \times Щ$ перекрестной самосверткой.

<u>Теорема</u> 6.I. Каждый марковский оператор Π из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$ линейно отображает совокупность $Cas(\vec{\mu})$ всех распределений вероятностей Q на $\{\mathcal{X}_u\}$ в совокупность $Cas(\vec{m})$ всех распределений вероятностей R на $\{\mathcal{Y}_v\}$, $\{Q_u\} \xrightarrow{\Pi} \{R_v\}$, по формуле

$$R_v = \sum_{u=1}^{s} Q_u * \Pi_{uv} \quad , \quad \forall v \; ; \tag{6.13}$$

где перекрестная свертка идет по индексам первого объекта.

<u>Дополнение</u>. Та же формула (6.I3) задает линейное отображение Π вещественного пространства $Var(\vec{\mu})$ всех мер на $\{\mathcal{X}_u\}$ в пространство $Var(\vec{m})$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим кронекерово произведение $Q_u \times \Pi_{uv}$, из которого $Q_u * \Pi_{uv}$ получается перекрестной самосверткой по индексам первого объекта. Отсюда по лемме 5.2. $Q_u * \Pi_{uv}$ – эрмитов оператор на $\mathcal{Y}_v$, а отображение Π –линейно. Поскольку

$$\forall |x\rangle \in \mathcal{X}_u \, , \; \forall |y\rangle \in \mathcal{Y}_v \, , \; \langle x \otimes x \otimes y | Q_u \times \Pi_{uv} | x \otimes x \otimes y \rangle =$$

$$= \langle x | Q_u | x \rangle \langle x \otimes y | \Pi_{uv} | x \otimes y \rangle \geqslant 0 ,$$

то по лемме 5.2, $Q_u * \Pi_{uv} \geqslant \mathbb{O}$, ср. ниже (6.I5). Значит мера переходит в меру. Операции $*$ перекрестной свертки, проводимые по индексам разных объектов, коммутируют ввиду их линейности. Отсюда

$$\sum_{v=1}^{t} Sp\, R_v = \sum_{v=1}^{t} R_v * 1_v = \sum_{u=1}^{s} Q_u * \left(\sum_{v=1}^{t} \Pi_{uv} * 1_v\right) =$$

$$= \sum_{u=1}^{s} Q_u * 1_u = \sum_{u=1}^{s} Sp\, Q_u = 1.$$

Значит, гиперплоскость $\{Q : Sp\, Q = 1\}$ отображается в гиперплоскость $\{R : Sp\, R = 1\}$. Следовательно распределение вероятностей переходит в неотрицательную нормированную меру, т.е. тоже в распределение вероятностей. Теорема доказана.

Теорема 6.2. Любому линейному отображению Φ вещественного пространства $Var(\vec{\mu})$ в пространство $Var(\vec{m})$, при котором совокупность $Cas(\vec{\mu})$ отображается в совокупность $Cas(\vec{m})$, сопоставляется, и притом единственным образом, марковский оператор Π из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$, порождающий по (6.13) это отображение.

Дополнение. Формула (6.13) задает также единственное линейное отображение комплексной оболочки $Var(\vec{\mu})$ в комплексную оболочку $Var(\vec{m})$, совпадающее с Φ на $Var(\vec{\mu})$.

Доказательство. Линейное отображение Φ набора операторов $\{Q_u\}$ в набор операторов $\{R_v\}$ задается системой линейных отображений Φ_{uv}:

$$R_v = \sum_{u=1}^{s} \Phi_{uv}(Q_u)\,; \qquad \forall v\ .$$

Как и при доказательстве теоремы 4.1 перейдем к вещественным линейным координатам в пространстве эрмитовых операторов на $\mathcal{X}_u$, – величинам $\rho_j^i = Re\, q_j^i$ при $i \le j$, а также $\sigma_j^i = Im\, q_j^i$ при $i < j$. Каждому базисному симметричному оператору $Э(i,j)$ и кососимметричному оператору $Ю(i,j)$, где

$$Э^i_j(i,j)=Э^j_i(i,j)=1\ ,\quad i\le j\ ;\quad Ю^i_j(i,j)=-Ю^j_i(i,j)=\sqrt{-1}\ ,\qquad i<j\ ;$$

а все остальные элементы - нули, отвечают эрмитовы матрицы их образов $Ш(i,j)$ и $Щ(i,j)$ на $\mathcal{Y}_v$. Следовательно

$$Э(i,j)*\Pi_{uv}=Ш(i,j),\quad {}^i_j\Pi^k_l+{}^j_i\Pi^k_l=ш^k_l(i,j),\quad i<j\ ;$$

$$Ю(i,j)*\Pi_{uv}=Щ(i,j),\quad {}^i_j\Pi^k_l-{}^j_i\Pi^k_l=-\sqrt{-1}\ щ^k_l(i,j),\quad i<j.$$

Отсюда находим единственные возможные значения

$$\begin{aligned}
&{}^i_j\Pi^k_l=\frac{1}{2}\,ш^k_l(i,j)-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ щ^k_l(i,j)\ , && i<j\\
&{}^i_i\Pi^k_l=ш^k_l(i,i)\ , && i=j\\
&{}^i_j\Pi^k_l=\frac{1}{2}\,ш^k_l(j,i)+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ щ^k_l(j,i), && i>j
\end{aligned}\qquad (6.14)$$

Проверим, что $\left({}^i_j\Pi^k_l\right)$ - эрмитова. При $i<j$

$${}^j_i\Pi^l_k=\frac{1}{2}\,ш^l_k(i,j)+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\ щ^l_k(i,j)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\overline{ш^k_l(i,j)}-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{-1}\right)\overline{щ^k_l(i,j)}={}^i_j\Pi^k_l\ .$$

При $i=j$ очевидно ${}^i_i\Pi^l_k=ш^l_k(i,i)=\overline{ш^k_l(i,i)}={}^i_i\Pi^k_l$. Переформировав матрицу $\left({}^i_j\Pi^k_l\right)$ в эрмитову же матрицу $\left(\Pi^{jk}_{il}\right)$ по (6.II), приходим к эрмитову оператору Π_{uv} . Заметим, что матрицу $\left(\Gamma^{uv\,jk}_{il}\right)$ мы определили единственным возможным образом в классе всех двухпариндексных суперматриц, необязательно эрмитовых.

При любом $P=|x\rangle\langle x|$, где $|x\rangle\in\mathcal{X}_u$, $\langle x|x\rangle=1$, справедливо тождество

$$\langle y|P*\Pi_{uv}|y\rangle=\sum_{k,l} y_k y^l \Big(\sum_{i,j} x^i x_j\, \Gamma^{uv\,jk}_{\;il}\Big)=$$

$$=\langle x\otimes y|\Pi_{uv}|x\otimes y\rangle. \qquad (6.15)$$

Так как $P*\Pi_{uv}=R_v\geqslant \mathbb{O}, \forall P$, по условию теоремы, то неравенство (6.9) необходимо.

Наконец, пусть $A_u=\mathbb{1}_u-\sum\limits_{v=1}^{t}(\Pi_{uv}*\mathbb{1}_v)$, и пусть $A|x\rangle=\alpha|x\rangle$. Тогда для $P=|x\rangle\langle x|$, где $\langle x|x\rangle=1$,

$$1=\sum_{v=1}^{t} Sp\, R_v=P*\Big(\sum_{v=1}^{t}\Pi_{uv}*\mathbb{1}_v\Big)=$$

$$=1-P*A_u=1-\langle x|A|x\rangle=1-\alpha.$$

Значит, $\alpha=0$ и весь спектр A_u состоит из одного нуля. Отсюда $A_u=\mathbb{O}$, т.е. (6.7) справедливо. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 6.3. Каждый марковский оператор Π из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$ определяет линейное отображение Π^T нормированного пространства $Herm(\vec{m})$ всех наблюдаемых B на $\{\mathcal{Y}_v\}$ в пространство $Herm(\vec{\mu})$ наблюдаемых A на $\{\mathcal{X}_u\}$, $\{B_v\}\to\{A_u\}$ по формуле

$$A_u=\sum_{v=1}^{t}\Pi_{uv}*B_v\ , \qquad \forall u\ ; \qquad (6.16)$$

где перекрестная свертка идет по индексам второго объекта. Отображение Π^T не увеличивает норму, сохраняет неотрицательность и переводит набор единиц $\{\mathbb{1}_v\}$ в набор единиц $\{\mathbb{1}_u\}$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим кронекерово произведение $\Pi_{uv}\times B_v$, из которого $\Pi_{uv}*B_v$ получается перекрестной самосвёрткой по индексам второго объекта. Отсюда, по лемме 5.2 $\Pi_{uv}*B_v$ – эрмитов оператор на $\mathcal{X}_u$, а отображение Π^T линейно. Таким образом,

формула (6.I6) определяет наблюдаемую $A \in Herm(\vec{\mu})$. В силу тождества

$$\forall |x\rangle \in \mathcal{X}_u, \quad \forall |y\rangle \in \mathcal{Y}_v, \quad \langle x\otimes y \otimes y | \Pi_{uv} * B_v | x \otimes y \otimes y\rangle =$$

$$= \langle x\otimes y | \Pi_{uv} | x\otimes y\rangle \langle y | B_v | y\rangle,$$

когда $B_v \geqslant \mathbb{O}$, также по лемме 5.2 и свертка $\Pi_{uv} * B_v \geqslant \mathbb{O}$. Значит $\mathbb{O} \leqslant B \Rightarrow A \geqslant \mathbb{O}$. Далее, переход $\{\mathbb{1}_v\} \to \{\mathbb{1}_u\}$ входит в определение марковости (6.7) оператора Π .

Так как отображение Π^T сохраняет неотрицательность, то оно переводит больший оператор в больший, $B_1 \geqslant B_2 \Rightarrow \Pi^T B_1 \geqslant \Pi^T B_2$ По определению спектрального радиуса, см. (4.2) и (4.3),

$$-\|B\| \cdot \mathbb{1}_v \leqslant B_v \leqslant \|B\| \cdot \mathbb{1}_v, \qquad \forall v. \tag{6.17}$$

Отсюда для $A = \Pi^T B$

$$-\|B\| \cdot \mathbb{1}_u \leqslant A_u \leqslant \|B\| \cdot \mathbb{1}_u, \qquad \forall u. \tag{6.18}$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant \|B\|$. Теорема доказана.

Теорема 6.4. Любому линейному отображению Φ вещественного пространства $Herm(\vec{m})$ в пространство $Herm(\vec{\mu})$, которое сохраняет неотрицательность и переводит набор единиц $\{\mathbb{1}_v\}$ в набор единиц $\{\mathbb{1}_u\}$, сопоставляется, и притом единственным образом марковский оператор Π из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$, порождающий по (6.I6) это отображение.

Дополнение. Формула (6.I6) задает также единственное линейное отображение комплексной оболочки $Herm(\vec{m})$ в комплексную оболочку $Herm(\vec{\mu})$, совпадающее с Φ на $Herm(\vec{m})$.

Доказательство в основном следует доказательству теоремы 6.2. Линейное отображение набора $\{B_v\}$ в набор $\{A_u\}$ задается системой линейных отображений Φ_{uv} :

$$A_u = \sum_{v=1}^{t} \Phi_{uv}(B_v), \quad \forall u .$$

Построим эрмитов оператор, осуществляющий Φ_{uv}. Перейдем к вещественным линейным координатам в пространстве эрмитовых операторов на $\mathcal{Y}_v$ - величинам $\rho_\ell^k = Re\, b_\ell^k$ при $k \le \ell$ и $\sigma_\ell^k = Im\, b_\ell^k$ при $k < \ell$. Каждому базисному симметричному оператору $Э(k,\ell)$ и кососимметричному оператору $Ю(k,\ell)$, где

$$Э_\ell^k(k,\ell) = Э_k^\ell(k,\ell) = 1,\ k \le \ell;\ Ю_\ell^k(k,\ell) = -Ю_k^\ell(k,\ell) = \sqrt{-1},\ k < \ell,$$

а все остальные элементы - нули, отвечают эрмитовы матрицы их образов $Ш(k,\ell)$ и $Щ(k,\ell)$. Исходя из этого, определим переходную матрицу $(\Pi_{jk}^{i\ell})$ следующим единственным образом

$$\Pi_{jk}^{i\ell} = \frac{1}{2}\, ш_j^i(k,\ell) - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\, щ_j^i(k,\ell), \quad k < \ell;$$

$$\Pi_{jk}^{ik} = ш_j^i(k,k), \quad k = \ell; \tag{6.18}$$

$$\Pi_{jk}^{i\ell} = \frac{1}{2}\, ш_j^i(k,\ell) + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\, щ_j^i(k,\ell), \quad k > \ell;$$

решив для этого при $k < \ell$ систему

$$\Pi_{uv} * Э(k,\ell) = Ш(k,\ell), \quad \Pi_{jk}^{i\ell} + \Pi_{j\ell}^{ik} = ш_j^i(k,\ell), \quad k < \ell;$$

$$\Pi_{uv} * Ю(k,\ell) = Щ(k,\ell), \quad \Pi_{jk}^{i\ell} - \Pi_{jk}^{i\ell} = -\sqrt{-1}\, щ_j^i(k,\ell), \quad k < \ell.$$

Проверка эрмитовасти $(\Pi_{jk}^{i\ell})$ аналогична проведенной в доказательстве теоремы 6.2. Подчеркнем, что матрицу $({}^{uv}\Pi_{jk}^{i\ell})$ мы определили единственным возможным образом в классе всех двухпар-индексных суперматриц, необязательно эрмитовых.

Далее, при любом $P=|y\rangle\langle y|$, где $|y\rangle\in\mathcal{Y}_v$, $\langle y|y\rangle=1$, справедливо тождество

$$\langle x|\Pi_{uv}*P|x\rangle=\sum_{i,j}x_i\,x^j\Big(\sum_{k,l}y^k y_l\,\Pi^{uv\,il}_{jk}\Big)=$$

$$=\langle x\otimes y|\Pi_{uv}|x\otimes y\rangle \qquad (6.19)$$

Так как $P\geqslant\mathbb{O}$ и тогда $\Pi_{uv}*P=A_u\geqslant\mathbb{O},\ \forall P$, по условию теоремы, то неравенство (6.9) необходимо.

Наконец, условие теоремы $\{\mathbb{1}_v\}\xrightarrow{\Phi}\{\mathbb{1}_u\}$ по доказанной интерпретации Φ_{uv} совпадает с системой равенств (6.7). Таким образом, набор $\{\Pi_{uv}\}$ удовлетворяет определению марковского оператора из $\{\mathcal{X}_u\}$ в $\{\mathcal{Y}_v\}$. Его действие на операторы $B\in Herm(\vec{m})$, определенное (6.16), совпадает с отображением Φ, так как это совпадение имеет место для операторов базиса. Теорема доказана.

Обращаем внимание, что в вещественной теории, когда рассматриваются эрмитовы матрицы только с вещественными элементами, марковский оператор Π, осуществляющий отображение Φ, определяется неоднозначно. Это же замечание относится к теореме 6.2.

Выше мы отмечали, что не все свойства стохастических матриц найдут аналог у суперматриц. В частности, нет аналога совместному распределению (6.4). Формально это вытекает из следующих соображений. Произведение $q_i\,\Pi_{ik}$ должно перейти в свертку Q^i_j и Π^{jk}_{il} по одной паре соответствующих индексов, иначе результат будет зависеть от системы координат. Чтобы сохранить эрмитовость, прибегнем к симметризованной свертке

$$\overset{uv}{R}{}^{ik}_{jl} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \overset{u}{Q}{}^{i}_{\alpha} \overset{uv}{\Gamma}{}^{\alpha k}_{jl} + \frac{1}{2}\sum_{\beta} \overset{u}{Q}{}^{\beta}_{j} \overset{uv}{\Gamma}{}^{ik}_{\beta l} \,; \quad \left(\overset{uv}{R}{}^{ik}_{jl}\right) = \mathcal{P}_{uv}$$

Легко подсчитать, что составные операторы $\{Q_u\}$ и $\{R_v\}$ оказываются проекциями составного оператора $\{\mathcal{P}_{uv}\}$. Но операторы $\mathcal{P}_{uv}$ не буду , вообще говоря, неотрицательными, - симметризованное произведение неотрицательных операторов не обязано быть неотрицательно.

Подобно тому, как свертка матрицы со столбцом описывает действие линейного оператора на вектор, перекрестная свертка эрмитовой суперматрицы с эрмитовой матрицей удобно описывает действие линейного оператора на пространстве эрмитовых матриц. Далее, свертка (матричное произведение) двух стохастических матриц описывает последовательное выполнение соответствующих операторов и также есть стохастическая матрица. Перекрестная свертка стохастических суперматриц также есть стохастическая суперматрица, отвечающая композиции марковских операторов. Доказательство этого факта легко вытекает из теорем 6.I. и 6.2, а также леммы 5.2. Более того, стохастические суперматрицы, подобно стохастическим матрицам, образуют категорию. Подробное исследование этой категории будет проведено нами в другом месте.

Покажем сейчас, что вложение когерентных подпространств в их прямую сумму, рассмотренное в § 2, см. лемму 2.2, позволяет записать набор $\{\Pi_{uv}\}$ суперматриц единой суперматрицей.

Пусть $\{\mathcal{X}_u\}_{u=1}^{s}$ и $\{\mathcal{Y}_v\}_{v=1}^{t}$ - две набора когерентных подпространств, $\mathcal{X} = \bigoplus_u \mathcal{X}_u$, $\mathcal{Y} = \bigoplus_v \mathcal{Y}_v$. Таким образом, элементарными исходами объявляются прямые абстрактных пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ обоих объектов, лежащие в подпространствах (или, как говорят в таком случае, в когерентных секторах) $\mathcal{X}_u$, $u = 1, \dots, s$, соответственно $\mathcal{Y}_v$, $v=1,\dots,t$. Пусть комплекнсые размерности этих подпространств суть $\mu_1,\dots,\mu_s$ и $m_1,\dots,m_t$. Объединим ортонормированные базисы всех $\mathcal{X}_u$, соответственно, всех $\mathcal{Y}_v$ в единые последовательности, занумеровав их подряд. Только такие базисы мы и будем связывать с объектами.

Идет ли речь о векторе $|x>\in\mathcal{X}_u$ (а только векторы из $\cup\,\mathcal{X}_u$ имеют смысл), или об операторе A_u из набора, или о супероператоре Π_{uv}, элемент соответствующей матрицы с индексом $i=i_u$ переходит в элемент объединенной матрицы с индексом

$$i_u \to I=\sum_{w=1}^{u-1}\mu_w+i_u \qquad (6.20)$$

Остальные индексы пересчитываются аналогичным образом. При этом, разумеется, на одно место никакие два элемента одновременно петендовать не могут. На незаполненное место ставятся нули.

Пусть M_u - множество номеров ортов, лежащих в $\mathcal{X}_u$,

$$M_u=\Big\{I:\sum_{w=1}^{u-1}\mu_w<I\le\sum_{w=1}^{u}\mu_w\Big\};$$

N_v - аналогичное множество номеров для $\mathcal{Y}_v$. Если в объединенной матрице элемент с индексом $I\in M_u$ и какими-то остальными отличен от нуля, то при фиксированных этих последних все элементы, у которых индекс $I'\bar{\in} M_u$, равны нулю. Поэтому, все свертки происходят поблочно. Вложение, очевидно, линейно. Таким образом, мы можем описывать отвечающие нашим объектам векторы из $\mathcal{X}$ или из $\mathcal{Y}$, операторы из $\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}$ или из $\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}$ и супероператоры из $\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y}$, как имеющие специальную блочную структуру, заданную наборами размерностей $\vec{\mu}$ и $\vec{m}$.

Значит, мы можем задавать марковский оператор Π условием эрмитовости на $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, неравенством $\Pi \geq \mathbb{0}$ и равенством

$$\Pi * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}} = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} ,$$

при том дополнительном условии, что его суперматрица (Π^{jk}_{il}) имеет блочный характер, - отличны от нуля только элементы с номерами из

$$\bigcup_{u,v=1}^{u=s,\, v=t} M_u \times M_u \times N_v \times N_v \qquad (6.22)$$

Формулировки этого абзаца дают полное определение стохастической суперматрицы. Отметим, что различные частные случаи таких суперматриц уже давно рассматривались в литературе, см. [13] , [25] , [26] , также [27] .

Институт прикладной математики АН СССР

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Zs. Physik , 37 (1926)
2. Neumann von J., Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math.-Phys., S , 245, 273 (1927).
3. Feynman R.P., The Concept of Probability in Quantum Mecanics. Proc. 2d Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Berkeley, 1951.
4. Feynman R.P., Hibbs A.R., Quantum Mechanics and Path Integrals. N.Y. , 1959 (Русск. перевод, 1968).
5. Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E.P., Phys. Rev., 88, № 1 (1952), 101-105.
6. Dirac P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, 4 ed., Oxford, 1958 (Русск. перевод, 1960).
7. Kaempffer F.A., Concepts in Quantum Mechanics, N.Y., L, 1965.
8. Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей, М., 1936 (Нем. перевод, 1933).
9. Ченцов Н.Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., 1972.
10. Neumann von J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932 (Русск. перевод, 1964).
11. Ландау Л.Д., Zs. Physik , 45 (1927), 430.
12. Gudder S., Axiomatic Quantum Mechanics and Generalized Probability Theory, . Probabilistic Methods in Applied Mathematics, v.2, N.Y., L., 1969.
13. Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, N.Y., 1960 (Русск. перевод, 1969).
14. Поливанов М.К., Сушко В.Н., Хоружий С.С., Аксиомы алгебры наблюдаемых и понятие поля, ТМФ, 16, № 1 (1973), 3-20.

15. Varadarajan V.S., Geometry of Quantum Theory, v.I, Princeton, 1968.

16. Agarwal G.S., Wolf E., Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics, I, II, III, Phys. Rev., D, 2, № 4 (1970), 2160-2225.

17. Киржниц Д.А., Полевые методы теории многих частиц, Приложение Б, М., 1963.

18. Jordan P., Comm.mathem. Phys. , 9 (1968), 279-292.

19. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969.

20. Наймарк М.А., Нормированные кольца, М., 1968.

21. Гельфанд И.М., Наймарк М.А., Мат.сб. 12 (1943), 197

22. Schwartz L., Application of Distributions to the Study of Elementary Particles in Relativistic Quantum Mechanics, California, 1961 (Русск.перевод, 1964).

23. MacKey G.W., The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, N.Y., 1963 (Русск.перевод, 1965).

24. Loève M., Probability Theory, N.Y., 1955 (Русск.перевод, 1962).

25. Bellman R., On a Generalization of Classical Probability Theory, I, Markoff Chains, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 39 (1953), 1075-1077.

26. Haynesworth E.V., Quasi-stochastic Matrices, Duke Mathem. J., 22 (1955), 15-24.

27. Haag R., Kastler D., An Algebraic Approach to Quantum Field Theory, J. Math. Phys.,5, № 7 (1964), 848-861.

№ Т-17507 от "16" X 1973 г. Заказ № 2174 Тираж 130 экз

Ордена Ленина институт прикладной математики
Москва, Миусская пл., 4