ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А. Морозова , Н.Н. Ченцов

УНИТАРНЫЕ ЭКВИВАРИАНТЫ СЕМЕЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВ

Препринт № 52 за 1974 г

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А.Морозова,Н.Н.Ченцов

УНИТАРНЫЕ ЭКВИВАРИАНТЫ СЕМЕЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВ

Москва , 1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрены инварианты и коварианты семейства линейных подпространств относительно группы унитарных преобразований всего пространства. Введено понятие контактов, обобщающее понятие пересечения пространств.
Выяснено строение логики унитарных ковариантов семейства подпространств.

THE UNITARY EQUIVARIANTS OF A FAMILY OF SUBSPACES (ABSTRACT)

The invariants and covariants of afamily of linear subspaces under the group of all unitary transformations of whole space are considered. The notion of contacts, generalizing the notion of the meet of subspaces, is introduced. For a family of subspaces the structure of logic of its unitary covariants is found out.

ВВЕДЕНИЕ

Логику событий в некоммутативной теории вероятностей принято см. [1], описывать решёткой всех замкнутых подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$ (или некоторыми специальными ее подрешётками) с обычными операциями векторного сложения подпространств $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ и пересечения $\mathcal{F}'\cap\mathcal{F}''$, а также перехода от $\mathcal{F}$ к ортогональному дополнению $\mathcal{F}^{\perp}$. Однако, этих операций „$+$", „$\cap$", „$\perp$" оказывается недостаточно для построения последовательной теории.

Пусть подпространства $\mathcal{R}_\alpha$ отвечают некоторому семейству событий. С этим семейством естественно связана "логика" $\mathbb{K}$ его унитарных ковариантов:

$$\mathcal{F}\in\mathbb{K} \text{ iff } [U\{\mathcal{R}_\alpha\}=\mathcal{R}_\alpha, \quad \forall\alpha]\Rightarrow(U\{\mathcal{F}\}=\mathcal{F}).$$

Другое естественное описание порожденной логики $\mathbb{K}$ позволяет дать коммутаторная теорема фон Неймана, см. напр. [2], стр.28. Пусть $\mathfrak{A}$ – минимальная $\mathbb{C}^*$ – алгебра, содержащая все ортопроекторы $P_{\mathcal{R}_\alpha}$. Тогда

$$\mathcal{F}\in\mathbb{K} \quad \text{iff} \quad P_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{A}.$$

Порожденная логика $\mathbb{K}$, вообще говоря, оказывается существенно шире минимальной содержащей всей $\mathcal{R}_\alpha$ решётки $\mathbb{L}$ с операциями „$+$", „$\cap$", „$\perp$".

В этой работе предложено обобщить операцию пересечения двух подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Определяется целая серия псевдоконтактов $\mathcal{F}\,ⓣ\,\mathcal{G}$, где $t\in\mathbb{C}$, или $t=\infty$. При этом

$$\mathcal{F}\,ⓣ\,\mathcal{G}=\mathcal{G}\,ⓣ\,\mathcal{F}.$$

Далее, всегда

$$\mathcal{F}\,ⓣ\,\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}; \qquad \mathcal{F}\,ⓣ\,\mathcal{G}\subseteq\mathcal{G}.$$

Для двух прямых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ средний контакт $\mathcal{L}_1\,ⓞ\,\mathcal{L}_2$ является биссектрисой угла между ними.

В работе описано строение любой возможной $\mathbb{C}$ – логики $\mathbb{K}$ в конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$, т.е. класса $\mathbb{K}$ подпространств $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$, замкнутого относительно всех операций „$+$", „ⓣ", „$\perp$". Доказано, что логика всех унитарных ковариантов любого семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ подпространств образует $\mathbb{C}$ – логику, притом минимальную $\mathbb{C}$ – логику, содержащую все $\mathcal{R}_\alpha$.

Таким образом, именно $\mathcal{C}$ = логики и только их фактически рассматривают в элементарных вопросах некоммутативной теории вероятностей, см.наш обзор в [3] .

Отметим, что аналогичные более узкие классы всех унитарно-антиунитарных ковариантов семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ описываются более сложно. А сами ковариангы уже не удается построить, отправляясь от исходных $\mathcal{R}_\alpha$, с помощью только унарных и бинарных ковариантных операций.

Для краткости при ссылках на препринт [3] к номеру теоремы или формулы спереди добавляется римская единица. Обозначения из [3] по возможности сохранены.

Мы благодарны И.М.Гельфанду, М.И.Граеву и Ф.И.Карпелевичу за полезное обсуждение понятия контактов.

§ I. Унитарные инварианты пары линейных подпространств.

Пусть $\mathcal{H}$ - конечномерное унитарное пространство со скалярным произведением $\langle x | y \rangle$. Требуется указать полную систему унитарных инвариантов пары его подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Эта задача многомерной геометрии была решена (для вещественного пространства) еще сто лет тому назад К.Жорданом [4], см. также [5]. Мы рассмотрим эту задачу несколько подробнее, чем в [5], уделяя особое внимание случаям вырождения, и выведем полезные для нас следствия.

Пусть $P_{\mathcal{F}}$ и $P_{\mathcal{G}}$ - ортопроекторы на подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Образуем эрмитов оператор

$$Q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{F}} \; ; \qquad Q_{\mathcal{F}}\{\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Очевидно, что спектр оператора $Q_{\mathcal{F}}$, т.е. его собственные числа $\varkappa_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ и их кратности $\operatorname{rank} E_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$, фигурирующие в каноническом спектральном разложении:

$$P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{F}} = Q_{\mathcal{F}} = \sum_{\nu} \varkappa_{\mathcal{F}}^{(\nu)} E_{\mathcal{F}}^{(\nu)} \tag{I.I}$$

ср.(I.3.4), будут инвариантами пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ относительно группы унитарных преобразований. Сложнее показать, что дополнив этот набор числами $\operatorname{Dim} \mathcal{F}$ и $\operatorname{Dim} \mathcal{G}$ мы получим полную систему инвариантов.

Построим наряду с $Q_{\mathcal{F}}$ еще и эрмитов оператор

$$Q_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{G}} \; ; \qquad Q_{\mathcal{G}}\{\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{G} \; ;$$

со спектральным разложением

$$P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{G}} = Q_{\mathcal{G}} = \sum_{\nu} \varkappa_{\mathcal{G}}^{(\nu)} E_{\mathcal{G}}^{(\nu)} . \tag{I.2}$$

Оба оператора, $Q_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{G}}$, неотрицательны и не превосходят единицы,

$$\mathbb{O} \leq Q_{\mathcal{F}} \leq \mathbb{1} , \qquad \mathbb{O} \leq Q_{\mathcal{G}} \leq \mathbb{1} , \tag{I.3}$$

где неравенство определяется (I.2.3) через неравенство квадратичных форм. В самом деле поскольку $\mathbb{O} \leq P_{\mathcal{F}} \leq \mathbb{1}$, $\mathbb{O} \leq P_{\mathcal{G}} \leq \mathbb{1}$, то

$$P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}} \le \|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}\|\cdot \mathbb{1} \le \|P_{\mathcal{F}}\|^2\|P_{\mathcal{Y}}\|\cdot\mathbb{1} = \mathbb{1};$$

$$\langle x|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = \langle z|z\rangle \ge 0; \qquad |z\rangle = P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle$$

Ввиду (I.3) собственные числа $\varkappa_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ и $\varkappa_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}$ также удовлетворяют аналогичным неравенствам. Перенумеровав их в порядке убывания, получаем

$$1 = \varkappa^{(0)} > \varkappa^{(1)} > \ldots > \varkappa^{(s)} > \varkappa^{(s+1)} = 0, \quad s = s(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) \tag{I.4}$$

Для стандартности обозначений условимся считать, что 1 и 0 всегда являются собственными числами, но их кратность может быть равной нулю. Остальные собственные числа будут засчитываться только при положительной кратности, так что может оказаться , что $s(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = 0$.

Изучим собственные подпространства операторов $Q_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{Y}}$ и покажем, что их спектры одинаковы, и, таким образом, в (I.4) следует понимать $\varkappa_{\mathcal{F}}^{(\nu)} = \varkappa^{(\nu)} = \varkappa_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}$.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $|x\rangle \ne 0$ и

$$Q_{\mathcal{F}}|x\rangle = \varkappa|x\rangle, \qquad \varkappa \ne 0. \tag{I.5}$$

Тогда обязательно $|x\rangle \in \mathcal{F}$. И если обозначить $P_{\mathcal{Y}}|x\rangle := |y\rangle \in \mathcal{Y}$, то при том же $\varkappa$

$$Q_{\mathcal{Y}}|y\rangle = \varkappa|y\rangle \tag{I.6}$$

причем $|y\rangle \ne 0, \quad P_{\mathcal{F}}|y\rangle = \varkappa|x\rangle$.

СЛЕДСТВИЯ. а).Собственные числа $\varkappa^{(\nu)}$ у операторов $Q_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{Y}}$ одинаковы.

б) Размерности собственных подпространств $E_{\mathcal{F}}^{(\nu)}\{\mathcal{H}\}$ и $E_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}\{\mathcal{H}\}$ совпадают.

в)

$$\mathcal{F}_\nu := E_{\mathcal{F}}^{(\nu)}\{\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{F}; \quad \mathcal{Y}_\nu := E_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}\{\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{Y}; \quad \nu \ne s+1, \tag{I.7}$$

г) Линейные операторы $[\text{æ}^{(\nu)}]^{-1/2} P_{\mathcal{Y}}$ и $[\text{æ}^{(\nu)}]^{-1/2} P_{\mathcal{F}}$ осуществляют линейное взаимно-однозначное соответствие $\overset{I}{\leftrightarrow}_{\nu}$ между $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$. Соответствие изометрично,

$$\langle u_1|u_2\rangle = [\text{æ}^{(\nu)}]^{-1/2}\langle u_1|v_2\rangle = \langle v_1|v_2\rangle, \quad \forall |u_j\rangle \overset{I}{\leftrightarrow} |v_j\rangle \qquad (1.8)$$

<u>Доказательство.</u> Оператор $P_{\mathcal{F}}$ проектирует любой вектор на подпространство $\mathcal{F}$. Значит, $P_{\mathcal{F}}(P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle) = \text{æ}|x\rangle \in \mathcal{F}$. Если $\text{æ} \neq 0$, то и $|x\rangle \in \mathcal{F}$, что дает первую часть (1.7). Но тогда $P_{\mathcal{F}}|x\rangle = |x\rangle$, откуда

$$\text{æ}|x\rangle = P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|x\rangle = P_{\mathcal{F}}|y\rangle = P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|y\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{æ}P_{\mathcal{Y}}|x\rangle = P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|y\rangle \Rightarrow \text{æ}|y\rangle = Q_{\mathcal{Y}}|y\rangle.$$

Но последнее и утверждается в (1.6). По дороге мы получили $P_{\mathcal{F}}|y\rangle = \text{æ}|x\rangle \neq 0$, откуда и $|y\rangle \neq 0$. Теорема доказана.

В силу симметрии посылки и вывода, при $\text{æ} \neq 0$ из (1.6) следует (1.5). Значит, отличная от нуля точка спектра одного оператора будет точкой спектра другого. Кроме того, доказаны оба включения (1.7).

В формулировке теоремы векторы $|x\rangle$ и $|y\rangle = P_{\mathcal{Y}}|x\rangle$ связаны несимметрично, $|x\rangle = \text{æ}P_{\mathcal{F}}|y\rangle$. Но если положить

$$\text{æ}^{-1/2}P_{\mathcal{Y}}|u\rangle = |v\rangle \in \mathcal{Y}_\nu, \qquad |u\rangle \in \mathcal{F}_\nu,$$

то $\text{æ}^{-1/2}P_{\mathcal{F}}|v\rangle = |u\rangle$; справедлив и обратный вывод. Значит, указанные операторы осуществляют взаимно-однозначное соответствие $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$ при $\nu \neq s+1$, т.е. при $\text{æ}^{(\nu)} \neq 0$. Это соответствие сохраняет скалярное произведение

$$\langle v_1|v_2\rangle = \text{æ}^{-1/2}\langle v_1|P_{\mathcal{Y}}|u_2\rangle = \text{æ}^{-1/2}\langle v_1|u_2\rangle =$$

$$= \text{æ}^{-1}\langle u_1|P_{\mathcal{Y}}|u_2\rangle = \text{æ}^{-1}\langle u_1|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|u_2\rangle = \langle u_1|u_2\rangle,$$

что доказывает следствие г.

Установленная изометрия $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$ при $\nu \neq s+1$ показывает, что

$$\operatorname{rank} E_{\mathcal{F}}^{(\nu)} = \operatorname{Dim}\mathcal{F}_\nu = m(\nu) = \operatorname{Dim}\mathcal{Y}_\nu = \operatorname{rank} E_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}, \quad \nu \neq s+1.$$

И для $Q_{\mathcal{F}}$ и для $Q_{\mathcal{Y}}$ сумма размерностей всех канонических собственных подпространств равна $Dim\,\mathcal{H}$. Так как в этих суммах все слагаемые, кроме быть может отвечающего $\varkappa^{(s+1)}=0$, совпадают, то совпадают и последние слагаемые. Значит, следствие а) и б) установлены. $\boxtimes$

Чтобы упростить формулы, положим

$$\rho_\nu=\sqrt{\varkappa^{(\nu)}},\quad \alpha_\nu=\sqrt{\frac{1+\rho_\nu}{2}},\quad \beta_\nu=\sqrt{\frac{1-\rho_\nu}{2}};\qquad (\text{I.9})$$

$$1=\rho_0>\rho_1>\ldots>\rho_s>\rho_{s+1}=0;$$

$$1=\alpha_0>\alpha_1>\ldots>\alpha_s>\alpha_{s+1}=\frac{1}{2}=\beta_{s+1}>\beta_s>\ldots>\beta_1>\beta_0=0.$$

ЛЕММА I.2. При $1\le\nu\le s$ каждый ортонормированный базис $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}^{(\nu)}=\{|x_\nu^{(i)}>\}_{i=1}^{m(\nu)}$ подпространства $\mathcal{F}_\nu$ вместе с отвечающим ему по следствию г. теоремы I.I ортонормированным базисом $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}=\{|y_\nu^{(i)}>\}_{i=1}^{m(\nu)}$ порождает ортонормированный базис $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}^{(\nu)}$ $2m(\nu)$-мерного пространства $\mathcal{F}_\nu+\mathcal{Y}_\nu$ по формулам

$$|u_\nu^{(j)}>=\frac{1}{2\alpha_\nu}|x_\nu^{(j)}>+\frac{1}{2\alpha_\nu}|y_\nu^{(j)}>,\quad j=1,\ldots,m(\nu);\qquad (\text{I.10})$$

$$|v_\nu^{(k)}>=\frac{1}{2\beta_\nu}|x_\nu^{(k)}>-\frac{1}{2\beta_\nu}|y_\nu^{(k)}>,\quad k=1,\ldots,m(\nu).\qquad (\text{I.11})$$

В этом базисе исходные орты выражаются как

$$|x_\nu^{(i)}>=\alpha_\nu|u_\nu^{(i)}>+\beta_\nu|v_\nu^{(i)}>,\qquad (\text{I.12})$$

$$|y_\nu^{(i)}>=\alpha_\nu|u_\nu^{(i)}>-\beta_\nu|v_\nu^{(i)}>.\qquad (\text{I.13})$$

Примечание. Соответствующие орты исходных базисов связаны соотношением

$$P_{\mathcal{Y}}|x_\nu^{(i)}>=\rho_\nu|y_\nu^{(i)}>,\quad P_{\mathcal{F}}|y_\nu^{(i)}>=\rho_\nu|x_\nu^{(i)}>.\qquad (\text{I.14})$$

Доказательство. По формуле (I.8) следствия г из теоремы I.I. при $j\ne k$

$$0=<x^{(j)}|x^{(k)}>=<y^{(j)}|y^{(k)}>=<x^{(j)}|y^{(k)}>=<y^{(j)}|x^{(k)}>;$$

$$\langle x^{(i)}|x^{(i)}\rangle = 1 = \langle y^{(i)}|y^{(i)}\rangle; \quad \langle x^{(i)}|y^{(i)}\rangle = \rho_\nu = \langle y^{(i)}|x^{(i)}\rangle.$$

Отсюда нетрудно подсчитать, что

$$\langle u^{(i)}|u^{(i)}\rangle = \langle v^{(i)}|v^{(i)}\rangle = 1 = \frac{1+2\rho+1}{4\alpha^2} = \frac{1-2\rho+1}{4\beta^2};$$

$$\langle u^{(i)}|v^{(i)}\rangle = \langle v^{(i)}|u^{(i)}\rangle = 0 = \frac{1+\rho-\rho-1}{4\alpha\beta}.$$

При $j \neq k$ в силу ортогональности исходных базисов и соотношения (I.8)

$$\langle u^{(j)}|u^{(k)}\rangle = \langle u^{(j)}|v^{(k)}\rangle = \langle v^{(j)}|u^{(k)}\rangle = \langle v^{(j)}|v^{(k)}\rangle = 0.$$

Таким образом, векторы $|u_\nu^{(j)}\rangle$ и $|v_\nu^{(k)}\rangle$, $\forall j,k$, образуют ортонормированный репер, лежащий по (I.10) и (I.11) в $\mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$. В силу (I.12) и (I.13) любой вектор $|x\rangle \in \mathcal{F}_\nu$ и любой $|y\rangle \in \mathcal{G}_\nu$ разлагаются по этому реперу. Значит, любой вектор вида $|x\rangle + |y\rangle$ также разложим по реперу, т.е. он образует базис $\mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$. $\boxtimes$

В доказанной лемме мы считали, что $\varkappa^{(\nu)} \neq 0$, $\varkappa^{(\nu)} \neq 1$ т.е. $\nu \neq 0$, $\nu \neq s+1$. Эти собственные подпространства приходится рассматривать особо. Прежде всего, в $(s+1)$ - их собственных пространствах, отвечающих $\varkappa^{(s+1)} = 0$ выделим подпространства

$$\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap E_{\mathcal{F}}^{s+1}\{\mathcal{H}\}; \quad \mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G} \cap E_{\mathcal{G}}^{s+1}\{\mathcal{H}\}. \qquad (I.15)$$

Таким образом, $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$ определены при разных ν разными формулами (I.7) и (I.15), но всегда $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G}_\nu \subseteq \mathcal{G}$. Размерности же $Dim\,\mathcal{F}_{s+1}$ и $Dim\,\mathcal{G}_{s+1}$ могут различаться.

ЛЕММА I.3. Во введенных обозначениях:

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}_0; \quad \mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp; \quad \mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp. \qquad (I.16)$$

Доказательство. Пусть $\varkappa = 1$, $|x\rangle \rightleftarrows |y\rangle$. По (I.8)

$$\langle x|x\rangle = \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = \langle y|y\rangle.$$

Сопоставляя эти скалярные произведения, получаем

$$\langle x-y|x-y\rangle = 0 \Longleftrightarrow |x\rangle = |y\rangle.$$

Значит, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Обратно, для любого $|x\rangle \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$

$$|x\rangle = P_{\mathcal{F}}|x\rangle = P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = Q_{\mathcal{F}}|x\rangle,$$

т.е. $\mathcal{F}\cap\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{F}_0 = \mathcal{Y}_0$. Этим первое соотношение (I.12) установлено.

Пусть теперь $|x\rangle \in \mathcal{F}\cap\mathcal{Y}^{\perp}$. Отсюда

$$0 = P_{\mathcal{Y}}|x\rangle = P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle \Rightarrow P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = 0.$$

Значит, $|x\rangle \in \mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F}\cap E_{\mathcal{F}}^{(s+1)}\{\mathcal{H}\}$. Наоборот, пусть $|x\rangle \in \mathcal{F}_{s+1} \subseteq \mathcal{F}$

$$0 = \langle x|0\rangle = \langle x|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|x\rangle = \langle x|P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{Y}}|x\rangle \Rightarrow P_{\mathcal{Y}}|x\rangle = 0,$$

т.е. $|x\rangle \in \mathcal{Y}^{\perp}$, что дает $|x\rangle \in \mathcal{F}\cap\mathcal{Y}^{\perp}$. Третье соотношение устанавливается аналогично.

ЛЕММА I.4. Собственные подпространства $\mathcal{F}_j$ и $\mathcal{Y}_k$ с различными номерами ортогональны;

$$\mathcal{F}_j \perp \mathcal{Y}_k, \qquad 0 \le j \ne k \le s+1. \tag{I.17}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $|x\rangle \in \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}$, $|y\rangle \in \mathcal{Y}_k \subseteq \mathcal{Y}$, $j \ne k$

$$\varkappa^{(j)}\langle x|y\rangle = \langle x|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}|y\rangle = \langle x|P_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|y\rangle = \varkappa^{(k)}\langle x|y\rangle.$$

Поскольку $\varkappa^{(j)} \ne \varkappa^{(k)}$, то $\langle x|y\rangle = 0$. ⊠

Теперь мы в состоянии описать разложение пространства, индуцируемое парой подпространств.

ЛЕММА I.5. Пусть $\{\mathcal{F}_\nu\}$ и $\{\mathcal{Y}_\nu\}$ – наборы собственных подпространств (I.7) для пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$. Тогда с этой парой связаны три канонических ортогональных разложения:

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_s \oplus (\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}^{\perp}), \tag{I.18}$$

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{Y}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{Y}_s \oplus (\mathcal{Y}\cap\mathcal{F}^{\perp}), \tag{I.19}$$

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}) \oplus \Big\{\bigoplus_{\nu=1}^{s}(\mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu)\Big\} \oplus \mathcal{F}_{s+1} \oplus \mathcal{Y}_{s+1} \oplus (\mathcal{F}+\mathcal{Y})^{\perp} \tag{I.20}$$

Последнее можно кратко записать, как $\mathcal{H} = \bigoplus_{\nu=0}^{s+2}\mathcal{H}_\nu$, если в соответствии с (I.16) обозначить

$$\mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu, \quad 0 \le \nu \le s+1; \quad \mathcal{H}_{s+2} = (\mathcal{F}+\mathcal{Y})^{\perp} \tag{I.21}$$

<u>Доказательство.</u> Для оператора $Q_{\mathcal{F}}$ подпространство $\mathcal{F}$ является инвариантным. Поэтому, $\mathcal{F}$ разбивается в ортогональную сумму собственных своих подпространств. Спектр $Q_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$

может только уменьшиться. Все собственные векторы $|x\rangle \in \mathcal{F}_\nu$ при $\nu \neq s+1$ лежат в $\mathcal{F}$ согласно теореме I.I. От $E_{\mathcal{F}}^{(s+1)}\{\mathcal{H}\}$ в $\mathcal{F}$ входит лишь $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp$. Но именно такое разложение и записано в (I.18), если учесть, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Разложение (I.19) выводится аналогично.

При $j \neq k$ $\mathcal{F}_j \perp \mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_j \perp \mathcal{G}_k$ в силу ортогональности собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. По сходной причине, как доказано в лемме I.4, $\mathcal{F}_j \perp \mathcal{G}_k$ и $\mathcal{F}_k \perp \mathcal{G}_j$. Следовательно, $(\mathcal{F}_j + \mathcal{G}_j) \perp (\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k)$ при $j \neq k$. Значит, все слагаемые разложения (I.20), кроме, может быть, последнего, попарно ортогональны. Каждое из этих слагаемых принадлежит $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ и, стало быть, ортогональны и последнему слагаемому. Кроме того, их сумма $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}+\mathcal{G}$. С другой стороны их сумма $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{F}$, так как указанные члены содержат все слагаемые (I.18). Аналогично, $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{F}+\mathcal{G}$. Значит, $\mathcal{K} = \mathcal{F}+\mathcal{G}$, и правая часть (I.20) есть ортогональное разложение $\mathcal{H}$. ⊠

ЛЕММА I.6. Пусть $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)} = \{|x_\nu^{(i)}\rangle\}_{i=1}^{m}$ – ортонормированный базис подпространства $\mathcal{F}_\nu$, $\nu = 0,1,\dots,s(\mathcal{F},\mathcal{G})$; $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)} = \{|y_\nu^{(i)}\rangle\}_{i=1}^{m(\nu)}$ – соответствующий базис подпространства $\mathcal{G}_\nu$, где $|y\rangle = I_\nu|x\rangle = [æ^{(\nu)}]^{-1/2} P_{\mathcal{G}}|x\rangle$, $Б_{\mathcal{H}}^{(\nu)}$ – базис пространства $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$, построенный по формулам (I.I0) и (I.II). Пусть, далее, $Б_{\mathcal{F}}^{(s+1)}$, $Б_{\mathcal{G}}^{(s+1)}$, $Б_{\mathcal{H}}^{(s+2)}$ – ортонормированные базисы подпространств $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp$ и $(\mathcal{F}+\mathcal{G})^\perp$.

Тогда

$$Б_{\mathcal{F}} = \bigcup_{\nu=0}^{s+1} Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}, \quad Б_{\mathcal{G}} = \bigcup_{\nu=0}^{s+1} Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}, \quad Б_{\mathcal{H}} = \bigcup_{\nu=0}^{s+2} Б_{\mathcal{H}}^{(\nu)} \qquad (I.22)$$

суть ортонормированные базисы соответственно $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, где принято $Б_{\mathcal{H}}^{(0)} = Б_{\mathcal{F}}^{(0)} = Б_{\mathcal{G}}^{(0)}$; $Б_{\mathcal{H}}^{(s+1)} = Б_{\mathcal{F}}^{(s+1)} + Б_{\mathcal{G}}^{(s+1)}$.

<u>Доказательство</u>. Так как отображение I_ν согласно следствию г из теоремы I.I. является изометрией, то $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$ – также ортонормированный базис, но в $\mathcal{G}_\nu$. Переход при $1 \le \nu \le s$ от $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ и $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$ к реперу из $2m(\nu)$ векторов по формулам (I.I0) и (I.II) по лемме I.2 дает ортонормированный базис в $\mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$. В пространстве $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ изометрия I_0 совпадает с $P_{\mathcal{F}}$, т.е. переводит $Б_{\mathcal{F}}^{(0)}$ в себя. Значит, $Б_{\mathcal{F}}^{(0)} = Б_{\mathcal{G}}^{(0)} = Б^{(0)}$. Таким образом, для каждого слагаемого из ортогональных разложений леммы I.5 построен ортонормированный базис. Объединяя для каждой ортогональной суммы базисы слагаемых, получаем ортонормированный

базис суммы. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА I.7. Спектральные характеристики ортопроекторов $P_{\mathcal{F}}$ и $P_{\mathcal{Y}}$ и эрмитова оператора $Q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{Y}} P_{\mathcal{F}}$ (или $Q_{\mathcal{Y}} = P_{\mathcal{Y}} P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{Y}}$) дают полную систему унитарных инвариантов пары линейных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Пусть $\dot{\mathcal{F}}$, $\dot{\mathcal{Y}}$ и $\ddot{\mathcal{F}}$, $\ddot{\mathcal{Y}}$ - две пары подпространств с одинаковыми наборами указанных инвариантов. Это означает, в частности, что размерности $Dim\, \mathcal{F}_{\nu}$ всех слагаемых в (I.18), кроме, быть может, последнего $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{Y}^{\perp}$, совпадают. Суммы всех размерностей равны, $Dim\, \dot{\mathcal{F}} = Dim\, \ddot{\mathcal{F}}$. Значит, совпадают размерности и последних слагаемых. Вывод о размерностях слагаемых в (I.19) тот же самый. Точно так же, в (I.20) первое слагаемое имеет размерность $m(0)$, последующие — $2m(\nu)$, затем у двух предпоследних размерности совпадают по только что доказанному. Так как сумма всех размерностей равна $Dim\, \mathcal{H}$, то совпадают размерности в обоих последних слагаемых.

Построим для каждой тройки $\dot{\mathcal{F}}$, $\dot{\mathcal{Y}}$, $\mathcal{H}$ и $\ddot{\mathcal{F}}$, $\ddot{\mathcal{Y}}$, $\mathcal{H}$ каноническую систему базисов, описанную в лемме I.6. Затем унитарным преобразованием $\mathcal{H}$ наложим один базис $\mathcal{H}$ на другой так, чтобы орты с соответствующими номерами совпали. Если реперы $\dot{\mathcal{F}}$ $\dot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{H}}$ и $\ddot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{H}}$ совпадут, то по (I.12) и (I.13) совпадут, в силу инвариантности α_{ν} и β_{ν}, см. (I.9), и соответствующие орты $\dot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{F}}$ и $\ddot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{F}}$ и соответствующие орты $\dot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{Y}}$ и $\ddot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{Y}}$. Но раз последовательность всех ортов $|\dot{x}^{(i)}_{\nu}\rangle$ базиса $\dot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{F}}$ совпала с аналогичной последовательностью для $\ddot{Б}^{(\nu)}_{\mathcal{F}}$, то $\dot{\mathcal{F}}$ совпало с $\ddot{\mathcal{F}}$. По аналогичным причинам, из совпадения $|\dot{y}^{(i)}_{\nu}\rangle$ с $|\ddot{y}^{(i)}_{\nu}\rangle$; $\forall i, \nu$, $\dot{\mathcal{Y}}$ совпадает с $\ddot{\mathcal{Y}}$. Значит, обе пары унитарно конгруентны.

Из проведенного доказательства видно, что можно многими способами накладывать одну пару подпространств на конгруентную другую, с точностью до унитарного преобразования $\mathcal{H}$, оставляющего пару $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$ на месте. Такие преобразования образуют группу автоморфизмов - прямую сумму групп соответствующих автоморфизмов каждого из слагаемых в (I.20). Мы отложим ее рассмотрение до параграфа - § 3.

Указанные в теореме I.7 инварианты суть инварианты ортогонального разложения (I.20). Наряду с размерностями слагаемых, для каждого $\mathcal{H}_{\nu} = \mathcal{F}_{\nu} + \mathcal{Y}_{\nu}$, $1 \le \nu \le s$ существует угловой инвариант $\beta_{\nu} = \sqrt{\varkappa^{(\nu)}}$ (для остальных трех слагаемых он тривиален). Число нетривиальных угловых инвариантов не превосходит минимального из чисел $Dim\,\mathcal{F}$, $Dim\,\mathcal{G}$, $Dim\,\mathcal{H}-Dim\,\mathcal{F}$, $Dim\,\mathcal{H}-Dim\,\mathcal{G}$, даже если каждый инвариант $\varkappa^{(\nu)}$ засчитывать столько раз, какова его кратность, см. [4] стр. 104. Для мультиплоскостей, не проходящих через нулевую точку $\mathcal{H}$, к указанным прибавляется еще метрический инвариант – минимальное расстояние между мультиплоскостями, см. там же.

§ 2. Контакты евклидовых подпространств.

В вещественном евклидовом пространстве можно говорить об угле φ между (ненулевыми) векторами, отправляясь от соотношения

$$\langle x|y\rangle = \sqrt{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}\,\cos\varphi \qquad (2.1)$$

При этом $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, когда $\langle x|y\rangle\ge 0$; и $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$, когда $\langle x|y\rangle<0$. В комплексном унитарном пространстве скалярное произведение, вообще говоря, комплексно, $\langle x|y\rangle=\overline{\langle y|x\rangle}$. Поэтому, говорить об угле между векторами нужно с осторожностью. Пусть $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ – два прямые, точнее два одномерных комплексных подпространства, $Dim\,\mathcal{L}=1$. Возьмем на каждой из них по ненулевому вектору и образуем величину

$$\rho^2=\rho^2(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')=\frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle} \qquad (2.2)$$

Эта величина $\rho^2=\varkappa(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')$ не зависит от выбора $|x\rangle$ и $|y\rangle$, – умножая один из них на любое комплексное число $\lambda\ne 0$, мы увеличиваем числитель в $|\lambda|^2$ раз и знаменатель также в $|\lambda|^2$ раз. Для единичных векторов $|x\rangle$ и $|y\rangle$, которые к тому же синфазны, т.е. $\langle x|y\rangle\ge 0$,

$$\rho=\langle x|y\rangle .$$

Добиться синфазности векторов можно умножив $|y\rangle$ на $c=\exp(-i\arg\langle x|y\rangle)$, $|c|=1$, или умножив $|x\rangle$ на $\bar c$, и т.п. Через синфазные векторы $|x\rangle$ и $|y\rangle$ проходит вещественная плоскость, в которой эти векторы образуют угол $\varphi=\arccos\rho$. А лежащие в той же вещественной плоскости антифазные векторы $|x\rangle$ и $|z\rangle=-|y\rangle$, $\langle x|z\rangle=-\rho$ образуют тупой угол

$$\pi-\varphi=\arccos(-\rho)=\arccos\langle x|z\rangle .$$

Во всех остальных случаях скалярное произведение комплексно. Но углом между $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ называют именно

Если только прямые $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ не перпендикулярны, отношение синфазности единичных направляющих векторов задает изометрию $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$, – частный случай изометрии следствия г из теоремы I.I.

Сходным образом, углом между прямой $\mathcal{L}$ и подпространством $\mathcal{K}$ называют угол φ между $\mathcal{L}$ и ее проекцией $\mathcal{L}_o$ на $\mathcal{K}$. Тогда $\rho^2=\cos^2\varphi$ есть максимум (2.2) по всем векторам $|x>\in\mathcal{L}$, $|y>\in\mathcal{K}$, т.е. углом φ называют именно минимальный угол между $\mathcal{L}$ и прямыми $\mathcal{L}'$ из $\mathcal{K}$. Ортопроекцией любого ненулевого вектора $|x>\in\mathcal{L}$ на $\mathcal{K}$ будет вектор

$$P_{\mathcal{K}}|x>=|w>\in\mathcal{K}$$

обладающий свойством

$$<x-w|z>=0, \qquad \forall|z>\in\mathcal{K}. \tag{2.3}$$

Отсюда, при $|z>=|w>$, получаем, что

$$<x|w>=<w|w>\geqslant 0,$$

т.е. вектор и его проекция синфазны, и в этом случае справедлива вещественная формула (2.I). Если же взять антифазный вектор $|z>=-P_{\mathcal{K}}|x>$, то $<x|z>=-\rho\sqrt{<x|x><z|z>}$, т.е. в вещественной плоскости, проходящей через $|x>$ и $P_{\mathcal{K}}'|x>$, тупой (в крайнем случае, прямой) угол между $|x>$ и $|z>$ будет равен $\arccos(-\rho)$ [1].

Аналогичным образом можно описать геометрический смысл угловых инвариантов ρ_ν при произвольной паре подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Образуем скалярные произведения

$$<x|v>+<y|u>=\langle\langle z|B|w\rangle\rangle \tag{2.4}$$

для всевозможных векторов $|x>$, $|u>\in\mathcal{F}$; $|y>, |v>\in\mathcal{G}$. Будем смотреть на эту форму, как на полуторалинейную форму от аргументов $|z\rangle\rangle=\{|x>,|y>\}$, $|w\rangle\rangle=\{|u>,|v>\}$ из комплексного пространства $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ со скалярным произведением

$$\langle\langle z|w\rangle\rangle=<x|u>+<y|v>.$$

---

[1] Из условия ортогональности (2.3) вытекает

$$<x-z|x-z>=<x-w|x-w>+<w-z|w-z>, \quad \forall|z>\in\mathcal{K};$$

$$<x-z|x-z>><x-w|x-w>; \quad \forall|z>\in\mathcal{K}, \quad |z>\neq|w>,$$

т.е. $|w>$ минимизирует расстояние от "точки" $|x>$ до $\mathcal{K}$.

Очевидно, (2.4) самосопряжена, антилинейна по первому аргументу $|z\gg$ и линейна по $|w\gg$, а скалярное произведение неотрицательно, так что $\mathcal{F}\times\mathcal{Y}$ наделено нами естественной унитарной структурой $\mathcal{F}\oplus\mathcal{Y}$. Следовательно, форма (2.4) определяет эрмитову квадратичную форму

$$<x|y>+<y|x>=2Re<x|y>=\ll z|B|z\gg, \tag{2.5}$$

порождаемую некоторым эрмитовым оператором B.

Собственные значения формы (2.5) также будут инвариантами пары. Чтобы их вычислить, нет нужды выписывать оператор B. По свойству стационарности формы на собственных векторах, вектор $|x,y\gg$ будет собственным со значением λ, если

$$<x|y>+<y|x>=\lambda<x|x>+\lambda<y|y>,$$

$$<x|v>+<y|u>=0, \quad \forall|u,v\gg:<x|u>+<y|v>=0.$$

Из этого свойства и ортогональности собственных векторов, отвечающих разным значениям, можно получить всю теорию § 1. Уже имея ее, мы можем получить разложение B совсем просто.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть канонические разложения для пары подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ заданы формулами (1.18) - (1.20), $\varkappa^{(\nu)}$ - соответствующие угловые инварианты. Тогда собственными значениями квадратичной формы (2.5) на $\mathcal{F}\times\mathcal{Y}$ являются числа $\pm\rho_\nu=$ $=\pm\sqrt{\varkappa^{(\nu)}}$, и собственные векторы описываются таблицей:

$$\lambda=\pm1=\pm\rho_0: \ |h,\pm h\gg, \ |h>\in\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}=\mathcal{F}_0=\mathcal{Y}_0;$$

$$\lambda=\pm\rho_\nu: \ |x,\pm y\gg, \ \mathcal{F}_\nu\ni|x>\overset{I_\nu}{\rightleftarrows}|y>\in\mathcal{Y}_\nu, \ 1\le\nu\le s;$$

$$\lambda=0=\rho_{s+1}: |x,y\gg, |x>\in\mathcal{F}_{s+1}=\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}^\perp, \ |y>\in\mathcal{Y}_{s+1}=\mathcal{Y}\cap\mathcal{F}^\perp;$$

где изометрия I_ν, указанная в следствии Г из теоремы 1.1, задается формулой

$$|x>\overset{I_\nu}{\rightleftarrows}|y>\Leftrightarrow\{\rho_\nu|y>=P_{\mathcal{Y}}|x>, \rho_\nu|x>=P_{\mathcal{F}}|y> \tag{2.6}$$

СЛЕДСТВИЕ. Каждый вектор $|x>\in\mathcal{F}_\nu$ (соответственно, $|y>\in\mathcal{Y}_\nu$) образует со своей проекцией $P_{\mathcal{Y}}|x>\in\mathcal{Y}_\nu$ (соответственно, $P_{\mathcal{F}}|y>\in\mathcal{F}_\nu$) угол

$$\varphi=\arccos\rho_\nu$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $Б_{\mathcal{F}}$ и $Б_{\mathcal{Y}}$ - согласованные базисы

в $\mathcal{F}$ и в $\mathcal{Y}$, описанные в лемме 1.6. В качестве ортов пространства $\mathcal{F}\times\mathcal{Y}$ возьмем все векторы $|x^{(i,\nu)},0\gg$ и $|0,y^{(i,\nu)}\gg$, $\nu=0,1,\dots,s+1$, очевидно ортогональные и нормированные. Если

$$|u\rangle=\sum_{i,\nu}\xi^{(i,\nu)}|x^{(i,\nu)}\rangle,\quad |v\rangle=\sum_{i,\nu}\eta^{(i,\nu)}|y^{(i,\nu)}\rangle,$$

то

$$2\mathrm{Re}\langle u|v\rangle=\sum_{\nu=0}^{s}\rho_\nu\sum_{i=1}^{m(\nu)}\left(\overline{\xi^{(i,\nu)}}\eta^{(i,\nu)}+\xi^{(i,\nu)}\overline{\eta^{(i,\nu)}}\right). \tag{2.7}$$

Приводя каждую скобку к разности квадратов модулей

$$\tfrac{1}{2}(\xi+\eta)(\bar\xi+\bar\eta)-\tfrac{1}{2}(\xi-\eta)(\bar\xi-\bar\eta),$$

и учитывая, что $\langle\langle z|z\rangle\rangle=\sum_{i,\nu}|\xi^{(i,\nu)}|^2+\sum_{i,\nu}|\eta^{(i,\nu)}|^2$,

получаем все утверждения теоремы. Утверждение следствия вытекает из того, что изметрия I_ν выражается по (2.6) через ортопроекции.

ТЕОРЕМА 2.2. Спектральные характеристики эрмитовых квадратичных форм $\langle h|P_{\mathcal{F}}|h\rangle$ и $\langle h|P_{\mathcal{Y}}|h\rangle$ на $\mathcal{H}$ и

$$\langle\langle z|B|z\rangle\rangle=2\mathrm{Re}\langle x|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|y\rangle \text{ на } \underbrace{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}_{\text{унитарных}}\ni|z\gg,$$

$|z\gg=\{|x\rangle,|y\rangle\}$, задают полную систему инвариантов пары подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ унитарного пространства $\mathcal{H}$.

<u>Доказательство.</u> Форма $2\mathrm{Re}\langle x|P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{Y}}|y\rangle$ совпадает с (2.5) на подпространстве $\mathcal{F}\times\mathcal{Y}$, и является ее тривиальным продолжением на все $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. При этом, поскольку на ортогональных дополнениях она полагается нулевой, $\lambda=0$ отвечают новые подпространства собственных векторов вида $|x,0\gg$, $|x\rangle\in\mathcal{F}^\perp$ и $|0,y\gg$, $|y\rangle\in\mathcal{Y}^\perp$, с размерностями $\mathrm{Dim}\,\mathcal{H}-\mathrm{Dim}\,\mathcal{F}$ и $\mathrm{Dim}\,\mathcal{H}-\mathrm{Dim}\,\mathcal{Y}$. Таким образом, размерности этих пространств устанавливаются по спектрам $P_{\mathcal{F}}$ и $P_{\mathcal{Y}}$. Как видно из таблицы теоремы 2.1, вся ненулевая часть спектра относится к пространству $\mathcal{F}\times\mathcal{Y}$ и определяет ненулевую часть спектра $Q_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{Y}}$. Зная размерности всех $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$ при $\nu=0,\dots,s$, и размерности $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$, можно восстановить и размерности $\mathcal{F}_{s+1}$ и $\mathcal{Y}_{s+1}$, т.е. полностью найти спектры $Q_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{Y}}$. Отсюда по теореме 1.7 вытекает наше утверждение.

И в теореме 1.7, и в теореме 2.2 полная система инвариантов получается из рассмотрения нелинейных образований от $P_{\mathcal{F}}$ и $P_{\mathcal{Y}}$. Это неслучайно. Для пары произвольных эрмитовых операторов иначе полной системы инвариантов и не получить. Но для ортопроекторов достаточны и более простые линейные комбинации.

Изучим теперь минимаксы $|\langle x|y\rangle|$ на $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$. Введем в рассмотрение величину

$$\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})=\sup_{\substack{|x\rangle\in\mathcal{F},\ |y\rangle\in\mathcal{G}\\ |x\rangle,|y\rangle\neq|0\rangle}}\frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}, \tag{2.8}$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть взаимное расположение подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ описывается каноническими ортогональными разложениями (I.18) – (I.20) и убывающей последовательностью угловых инвариантов ρ_ν. Обозначим

$$\mathcal{F}^{(k)}=\bigoplus_{\nu=k}^{s+1}\mathcal{F}_\nu\ ;\qquad \mathcal{G}^{(k)}=\bigoplus_{\nu=k}^{s+1}\mathcal{G}_\nu\ ; \tag{2.9}$$

Если $\mathcal{F}_k\neq 0$ и $\mathcal{G}_k\neq 0$, то

$$\rho^2(\mathcal{F}^{(k)},\ \mathcal{G}^{(k)})=\rho_k^2, \tag{2.10}$$

причем соответствующий максимум достигается на всех парах $|x\rangle\in\mathcal{F}_k$, $c\,P_{\mathcal{G}}|x\rangle=|y\rangle\in\mathcal{G}_k$, $0\neq c\in\mathbb{C}$.

ДОБАВЛЕНИЕ. Если $\mathcal{F}_0=\mathcal{G}_0=0$, то $\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho_1^2$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $Б_{\mathcal{F}}$ и $Б_{\mathcal{G}}$ – согласованные базисы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, описанные в лемме I.6. Если

$$|x\rangle=\sum_{\nu=k}^{s+1}\sum_j\xi^{(j,\nu)}|x^{(j,\nu)}\rangle,\quad |y\rangle=\sum_{\nu=k}^{s+1}\sum_j\zeta^{(j,\nu)}|y^{(j,\nu)}\rangle,$$

то, по неравенству Коши и монотонности ρ_ν, $|\langle x|y\rangle|^2=$

$$=\Big|\sum_{\nu=k}^{s+1}\rho_\nu\sum_j\overline{\xi^{(j,\nu)}}\zeta^{(j,\nu)}\Big|^2\leq\Big(\sum_{\nu=k}^{s+1}\rho_\nu\sum_j|\xi^{(j,\nu)}|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{\nu=k}^{s+1}\rho_\nu\sum_j|\zeta^{(j,\nu)}|^2\Big)\leq$$

$$\leq\rho_k^2\Big(\sum_{\nu=k}^{s+1}\sum_j|\xi^{(j,\nu)}|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=k}^{s+1}\sum_j|\zeta^{(j,\nu)}|^2\Big)=\rho_k^2\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle.$$

Чтобы это неравенство обратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы во-первых $\xi^{(j,\nu)}=0=\zeta^{(j,\nu)}$ при $\nu\geq k+1$ И во-вторых, чтобы $\zeta^{(j,k)}=c\,\xi^{(j,k)}$, где c не зависит от j. Этим (2.10) установлено. Связь $\zeta^{(j,k)}$ и $\xi^{(j,k)}$ и связь базисов $Б_{\mathcal{F}}^{(k)}$ и $Б_{\mathcal{G}}^{(k)}$ дает связь между $|x\rangle$ и $|y\rangle$. Утверждение добавления очевидно. ⊠

Таким образом, мы можем получить угловые инварианты ρ_ν и канонические разложения, рассматриваемая минимаксы $\langle u|v\rangle\langle v|u\rangle$

на множестве пар единичных векторов $|u\rangle \in \mathcal{F}$, $|v\rangle \in \mathcal{Y}$. Сперва находим какую-либо пару $|u^{(1)}\rangle$, $|v^{(1)}\rangle$, реализующую максимум в (2.8). Затем строим ортогональные разности $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \ominus \mathcal{K}_1$, $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \ominus \mathcal{L}_1$, где $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{L}_1$ – прямые с направляющими векторами $|u^{(1)}\rangle$ и $|v^{(1)}\rangle$. Затем ищем максимум (2.7) для пары $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{Y}'$, строим $\mathcal{F}''$ и $\mathcal{Y}''$ и т.д. В итоге получаем всю цепочку значений $\varkappa^{(\nu)} = \rho_\nu^2$, причем каждое собственное число $\varkappa^{(\nu)}$ встретится столько раз, какова его кратность. Такой прием был использован в курсовой работе Ф.И.Карпелевича (МГУ,1949 г.)

Величина $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$, заданная формулой (2.8) является одной из важнейших характеристик взаимного расположения подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$. Как вытекает из леммы 1.5 и теоремы 2.3

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{Y} \neq 0 \iff \rho(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = 1, \qquad (2.11)$$

$$\mathcal{F} \perp \mathcal{Y} \iff \rho(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = 0. \qquad (2.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Условимся говорить, что подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ контактируют, но не пересекаются, когда

$$0 < \rho(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) < 1; \qquad (2.13)$$

т.е. когда они не ортогональны, но и не пересекаются, так что $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{Y}) = \rho_1 > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Когда подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ контактируют, но не пересекаются, будем называть подпространства $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \shortparallel \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{F} \cap\!\shortmid \mathcal{Y}$ канонических разложений контактом $\mathcal{F}$ с $\mathcal{Y}$ и контактом $\mathcal{Y}$ с $\mathcal{F}$. Подпространство $\mathcal{F}_1 + \mathcal{Y}_1$ условимся называть контактным пространством.

Контакт $\mathcal{F} \shortparallel \mathcal{Y}$ является подпространством векторов из $\mathcal{F}$, наиболее близких к $\mathcal{Y}$, т.е. образующих с $\mathcal{Y}$ минимальный угол. Для каждого $|x\rangle \in \mathcal{F} \shortparallel \mathcal{Y}$ найдется $|y\rangle \in \mathcal{Y}$ (даже $|y\rangle \in \mathcal{F} \cap\!\shortmid \mathcal{Y}$), дающий максимум отношения в (2.8). Когда же пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ пересекаются, подобным свойством обладают векторы из $\mathcal{F} \cap \mathcal{Y}$. Каждый из них образует сам с собой, а стало быть и с $\mathcal{F}$ и с $\mathcal{Y}$ нулевой угол. Поэтому, расширяя терминологию, иногда удобно назвать $\mathcal{F} \cap \mathcal{Y}$ контактом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$. Тогда следует принять $\mathcal{F} \shortparallel \mathcal{Y} = \mathcal{F} \cap\!\shortmid \mathcal{Y} = \mathcal{F} \cap \mathcal{Y} \neq 0$. Чтобы подчеркнуть качественную разницу, можно называть $\mathcal{F} \cap \mathcal{Y}$ контактом нулевого порядка. Развивая аналогию, мы изредка будем говорить о всех $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$

(кроме $\mathcal{F}_{s+1} \perp \mathcal{G}_{s+1}$), как о контактах ν -ого порядка. Но, как правило нас будут интересовать наиболее близкие части $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Контакты $\mathcal{F} | \cap \mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \cap | \mathcal{G}$ являются несимметричным обобщением пересечения. Симметричным обобщением оказывается биссектриса между контактами. Рассмотрим множество векторов

$$\mathcal{F} \Cap \mathcal{G} := \{ |z\rangle = |x\rangle + |y\rangle : \mathcal{F}_1 \ni |x\rangle \overset{I_1}{\rightleftarrows} |y\rangle \in \mathcal{G}_1 \}, \qquad (2.14)$$

где изометрия I_1 задана (2.6). Это множество, очевидно, есть линейное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Когда подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, но не пересекаются, будем называть подпространство (2.14) средним контактом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Средний контакт состоит из векторов, наиболее близких одновременно как к $\mathcal{F}$, так и к $\mathcal{G}$. Каждый вектор $|z\rangle \in \mathcal{F} \Cap \mathcal{G}$ образует как с $\mathcal{F}$, так и с $\mathcal{G}$ один и тот же угол.

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \arccos \sqrt{\frac{1+\rho_1}{2}}.$$

Когда пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ пересекаются, естественно считать $\mathcal{F} \Cap \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

В § 4 мы введем целую серию промежуточных контактов и псевдоконтактов, зависящих от параметра t, и изучим решетки подпространств с операциями „+", „$\Cap$", „$\perp$".

Нас все время интересовал минимальный угол φ между подпространствами. Но часто интересен максимальный угол θ. Его синус $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ называется раствором $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$:

$$d^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1 - \left[\min \left\{ \inf_{|y\rangle \in \mathcal{G}} \frac{\langle y | P_{\mathcal{F}} | y \rangle}{\langle y | y \rangle}, \inf_{|x\rangle \in \mathcal{F}} \frac{\langle x | P_{\mathcal{G}} | x \rangle}{\langle x | x \rangle} \right\} \right]^2 \qquad (2.15)$$

ТЕОРЕМА 2.4. Если $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp = 0$ и $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp = 0$, то

$$d^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1 - \rho_s^2 < 1; \quad \theta = \arccos \rho_s, \quad s = s(\mathcal{F}, \mathcal{G});$$

и обратно.

Доказательство сходно с доказательством теоремы 2.3. Литературные ссылки см. [6], [7]. Расстояние $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ задает метрику на множестве подпространств унитарного или евклидова пространства, см. [6]. Это множество разбивается на компоненты, состоящие каждая из всех подпространств какой-либо размерности.

В условиях теоремы 2.4 подпространства имеют одинаковую размерность, $\mathcal{D}im\,\mathcal{F}=\mathcal{D}im\,\mathcal{G}$; они проектируются друг в друга, и между ними устанавливается естественная изометрия, см. [7] .

Определим при $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{R}$ ортогональную разность $\mathcal{R}\ominus\mathcal{K}$ формулой

$$\mathcal{R}\ominus\mathcal{K}=\mathcal{R}\cap\mathcal{K}^{\perp}. \tag{2.16}$$

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ - подпространства. Тогда

$$P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\}=P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\ominus(\mathcal{G}\cap\mathcal{F}^{\perp})\}=\mathcal{F}\ominus(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp}). \tag{2.17}$$

Доказательство. Согласно (1.18) $\mathcal{G}=(\bigoplus_{y=0}^{s}\mathcal{G}_y)\oplus(\mathcal{G}\cap\mathcal{F}^{\perp})$. По (2.6) $P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}_y\}=\mathcal{F}_y$ при $y\leq s$; $P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\cap\mathcal{F}^{\perp}\}=0$. А по свойству собственных подпространств, $\mathcal{F}_j\perp\mathcal{F}_k$ при $j\neq k$. Отсюда

$$P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\}=P_{\mathcal{F}}\{\bigoplus_{y=0}^{s}\mathcal{G}_y\}=\bigoplus_{y=0}^{s}\mathcal{F}_y$$

что и утверждалось. Нетрудно дать и непосредственное доказательство леммы, исходя из тождеств

$$\mathcal{G}\oplus\{(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{G}^{\perp}\}=\{(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{G}\}\oplus\{(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{G}^{\perp}\}=\mathcal{F}+\mathcal{G}\supseteq\mathcal{F}$$

среднее из которых есть соотношение модулярности (условной дистрибутивности) „ $+$ " и „ $\cap$ " .

§ 3. Унитарные коварианты пары линейных подпространств.

Унитарные преобразования пространства $\mathcal{H}$ образуют группу $\mathcal{U}(\mathcal{H})=\mathcal{U}(n)$, где $n=\mathcal{D}im\,\mathcal{H}$. Унитарные автоморфизмы семейства подпространств $\{\mathcal{R}_\alpha\}$, т.е. преобразования $U\in\mathcal{U}(\mathcal{H})$, которые отображают каждое $\mathcal{R}_\alpha$ на $\mathcal{R}_\alpha$, $\forall\alpha$, образуют, очевидно, некоторую подгруппу

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}\,|\,\{\mathcal{R}_\alpha\})=\{U:\,UU^*=1=U^*U;\ U\mathcal{R}_\alpha=\mathcal{R}_\alpha,\forall\alpha\} \tag{3.1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Подпространство $\mathcal{K}$ мы будем называть унитарным ковариантом[1] семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$, если оно инвариантно относительно подгруппы $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$:

$$U\{\mathcal{K}\}=\mathcal{K}\ ,\qquad \forall U\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}), \tag{3.2}$$

т.е. если любое преобразование из подгруппы $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$ отображает $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}$. В групповых терминах $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})\subseteq\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{K})$.

---

1) Сравнение понятий ковариантa в групповых, полугрупповых и категорных геометриях см. [8] , § 4.

Тривиальным (не только унитарным, но и аффинным) ковариантом пары подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ является $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$. Только унитарными (но не аффинными ковариантами) будут экстремальные подпространства $\mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap\!|\,\mathcal{G}$, и вообще все $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$, $1\leq\nu\leq s(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Очевидно, что пересечение, сумма и ортогональное дополнение для унитарных коваринтов снова будут унитарными ковариантами. Ниже мы выясним строение группы $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$ и, исходя из этого, опишем структуру всех ковариантов пары подпространств.

ЛЕММА 3.1. Каждое $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$ коммутирует с ортопроектором на любой ковариант семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$

СЛЕДСТВИЕ. Ортопроекция одного коварианта на другой снова является ковариантом.

Доказательство. Чтобы имело место равенство $P_{\mathcal{K}}|x\rangle=|w\rangle\in\mathcal{K}$, необходимо и достаточно ортогональности (2.3). Раз $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$, то и $V^*\{\mathcal{K}\}=\mathcal{K}$, ибо $V^*=V^{-1}$. Поэтому,(2.3) равносильно условию

$$\overline{\langle z|V|x-w\rangle}=\langle x-w|V^*|z\rangle=0,\qquad\forall|z\rangle\in\mathcal{K}.$$

Отбрасывая черту, получаем по (2.3), что $P_{\mathcal{K}}V|x\rangle=V|w\rangle$.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$ – коварианты. По доказанному

$$VP_{\mathcal{K}}\{\mathcal{B}\}=P_{\mathcal{K}}V\{\mathcal{B}\}=P_{\mathcal{K}}\{\mathcal{B}\},\qquad\forall V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}).\ \boxtimes$$

ЛЕММА 3.2. Ортогональные слагаемые канонических разложений (1.18) - (1.20) все являются ковариантами.

СЛЕДСТВИЕ.

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu,\mathcal{G}_\nu)\supseteq\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G}),\qquad\forall\nu\tag{3.3}$$

Доказательство. В теореме 2.3 дана геометрическая минимаксная характеризация всех $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$. Поэтому, унитарные преобразования группы $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$ должны отображать и эти подпространства, и их ортогональные дополнения, и их суммы и ортогональные разности каждое на себя.

Впрочем, эту ковариантность можно вывести из инвариантности операторов $Q_{\mathcal{F}}=P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{G}}P_{\mathcal{F}}$ и $Q_{\mathcal{G}}=P_{\mathcal{G}}P_{\mathcal{F}}P_{\mathcal{G}}$ и их канинических спектральных разложений.

ЛЕММА 3.3. Изометричное соответствие (2.6) между ковариантами $\mathcal{F}_\nu\overset{I_\nu}{\rightleftarrows}\mathcal{G}_\nu$, $\nu\leq s(\mathcal{F},\mathcal{G})$ коммутирует со всяким унитарным преобразованием $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu,\mathcal{G}_\nu)$;

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\nu \ni |x\rangle & \rightleftarrows & |y\rangle \in \mathcal{G}_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_\nu \ni |u\rangle & \rightleftarrows & |v\rangle \in \mathcal{G}_\nu \end{array} \qquad (3.4)$$

<u>Доказательство.</u> Соответствие $I_\nu |x\rangle = |y\rangle$ между $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$ устанавливается ортопроектором $P_{\mathcal{G}}$, точнее, оператором $\rho_\nu^{-1/2} P_{\mathcal{G}}$. Но на $\mathcal{F}_\nu$ его действие совпадает с действием $P_{\mathcal{G}_\nu}$. По лемме 3.1, примененной к паре $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$, получаем что $UP_{\mathcal{F}_\nu} = P_{\mathcal{F}_\nu} U$, $UP_{\mathcal{G}_\nu} = P_{\mathcal{G}_\nu} U$, $\forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu, \mathcal{G}_\nu)$. Ввиду (3.3) из (2.6) следует (3.4). ☒

ТЕОРЕМА 3.4. В каждом каноническом для пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ортонормированном базисе (1.22):

$$Б_{\mathcal{H}} = \bigcup_{\nu=0}^{s+2} Б_{\mathcal{H}}^{(\nu)}, \qquad \mathcal{H} = \bigoplus_{\nu=0}^{s+2} \mathcal{H}_\nu,$$

описанном в лемме 1.6, матрица любого преобразования $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}, \mathcal{G})$ имеет блочно-диагональный вид:

$$U = \sum_{\nu=0}^{s+2} UP_{\mathcal{H}_\nu} = \sum_{\nu=0}^{s+2} P_{\mathcal{H}_\nu} UP_{\mathcal{H}_\nu} \qquad (3.5)$$

Первый и последний блоки задают унитарные преобразования соответственно $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ и $(\mathcal{F} + \mathcal{G})^\perp$, которые могут быть любыми их унитарными преобразованиями.

Предпоследний блок распадается на два подблока, описывающих унитарные преобразования соответственно $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp$ и $\mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp$; на эти унитарные преобразования также не накладывается никаких других ограничений.

Остальные блоки описывают унитарные преобразования подпространств $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$, $1 \le \nu \le s$, переводящие в себя как $\mathcal{F}_\nu$, так и $\mathcal{G}_\nu$. Каждое такое преобразование полностью задается унитарным преобразованием $\mathcal{F}_\nu$ на $\mathcal{F}_\nu$. И наоборот, всякому унитарному преобразованию $\mathcal{F}_\nu$ отвечает I_ν – соответствующее преобразование $\mathcal{G}_\nu$ и индуцируемое ими преобразование их суммы $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu$.

<u>Доказательство.</u> Блочно-диагональный вид вытекает из того, что по лемме 3.2 каждое $\mathcal{H}_\nu$ преобразуется в себя. Формула (3.5) следует из перестановочности U со всеми $P_{\mathcal{H}_\nu}$, идемпотентности ортопроекторов и разложения $\mathbb{1} = \sum_\nu P_{\mathcal{H}_\nu}$.

Так как каждый базис $Б_{\mathcal{H}}^{(\nu)}$ подпространства $\mathcal{H}_\nu$ остается после действия U ортонормированным же базисом $\mathcal{H}_\nu$, то переход описывается унитарной матрицей. Действие U на $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$ описывается только соответствующим блоком. Поэтому, он должен перевести исходный базис $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ снова в ортонормированный базис подпространства $\mathcal{F}_\nu$.

Докажем теперь, что всякое унитарное преобразование с матрицей описанного типа принадлежит $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$. Выберем образы $Б_{\mathcal{H}}^{(0)}$, $Б_{\mathcal{H}}^{(s+2)}$, $Б_{\mathcal{F}}^{(s+1)}$ и $Б_{\mathcal{G}}^{(s+1)}$ произвольными ортонормированными базисами в соответствующих подпространствах. Таким путем можно получить любое унитарное преобразование каждого. Затем выберем по произвольному ортонормированному базису в $\mathcal{F}_\nu$, $1\le\nu\le s$. Далее, по лемме 1.6 получим из них сначала базисы $\mathcal{G}_\nu$, а затем и $\mathcal{H}_\nu$, см. формулы (2.6), (1.10) и (1.11). Таким образом, мы построили по ортонормированному базису во всех $\mathcal{H}_\nu$, $\oplus\mathcal{H}_\nu=\mathcal{H}$. Ввиду взаимной ортогональности $\mathcal{H}_\nu$ их объединение будет базисом ортов в $\mathcal{H}$. Тем самым, искомое преобразование U построено. Оно переводит базис $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ каждого $\mathcal{F}_\nu$ снова в базис этого же подпространства $\mathcal{F}$, $\oplus\mathcal{F}_\nu=\mathcal{F}$. Значит, $U\{Б_{\mathcal{F}}\}\subset\mathcal{F}$, $U\{\mathcal{F}\}=\mathcal{F}$. Аналогично, $U\{\mathcal{G}\}=\mathcal{G}$. $\boxtimes$

Из теоремы 3.4 следует масса выводов о строении группы $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$ и связанных с нею групп.

КОРОЛЛАРИЙ 3.5. Для того, чтобы унитарное преобразование U отображало $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}$ необходимо и достаточно, чтобы оно отображало каждое $\mathcal{F}_\nu$ на $\mathcal{F}_\nu$ и каждое $\mathcal{G}_\nu$ на $\mathcal{G}_\nu$:

$$U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})=\bigcap_{\nu=0}^{s+1}U(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu,\mathcal{G}_\nu)=\bigcap_{\nu=0}^{s+1}\{U(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu)\cap U(\mathcal{H}|\mathcal{G}_\nu)\} \tag{3.6}$$

<u>Доказательство.</u> Необходимость вытекает из (3.3). По теореме 3.4 достаточно, чтобы базисы всех $\mathcal{F}_\nu$, $0\le\nu\le s+1$ оставались в своих $\mathcal{F}_\nu$, а им I_ν – соответствующие базисы $\mathcal{G}_\nu$, $1\le\nu\le s$ оставались в $\mathcal{G}_\nu$. Последнее обеспечено ввиду перестановочности I_ν, установленной леммой 3.3. $\boxtimes$

Выделим в $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$ подгруппы

$$U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})_k:=\{U\in U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G}):U|h\rangle=|h\rangle\ \forall|h\rangle\in\mathcal{H}_\nu,\forall\nu\ne k\} \tag{3.7}$$

состоящие из тех и только тех преобразований, которые действуют тождественно на всех $\mathcal{H}_\nu$, исключая (может быть) свое, и еще подгруппу $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{Y})_{s+2} := U(\mathcal{H}|\mathcal{H}_{s+2})$.

КОРОЛЛАРИЙ 3.6. Группа $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{Y})$ разлагается в прямое произведение своих подгрупп $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{Y})_k$. Если обозначить

$$U^{(\nu)} = P_{\mathcal{H}_\nu} U P_{\mathcal{H}_\nu}\ , \quad U_k = U^{(k)} + \sum_{\nu\neq k} P_{\mathcal{H}_\nu}\ , \tag{3.8}$$

то преобразование U раскладывается в произведение

$$U = U_0 U_1 \dots U_{s+2}\ ; \qquad U_j U_k = U_k U_j\ , \quad \forall j, k\ . \tag{3.9}$$

Доказательство. Формулы (3.9) выводятся перемножением (3.8) с учётом (3.5) и дизъюнктности

$P_{\mathcal{H}_j} P_{\mathcal{H}_k} = P_{\mathcal{H}_k} P_{\mathcal{H}_j} = \mathbb{O}$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $\mathcal{H} = \oplus\, \mathcal{H}_\nu$ – каноническое разложение (1.20) для пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$. Для любого коварианта $\mathcal{K}$ этой пары

$$P_{\mathcal{H}_j}\{\mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{K}\ , \quad \forall j\ . \tag{3.10}$$

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{\nu=0}^{s+2} \mathcal{K}_\nu\ ; \quad \mathcal{K}_\nu := P_{\mathcal{H}_\nu}\{\mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{H}_\nu\ , \quad \forall \nu. \tag{3.11}$$

ДОБАВЛЕНИЕ. При этом

$$\mathcal{K}_{s+1} = \mathcal{K}'_{s+1} \oplus \mathcal{K}''_{s+1}\ ; \quad \mathcal{K}'_{s+1} = P_{\mathcal{F}_{s+1}}\{\mathcal{K}\},\ \mathcal{K}''_{s+1} = P_{\mathcal{Y}_{s+1}}\{\mathcal{K}\}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} \ni |u\rangle = \sum_\nu |u_\nu\rangle$, $|u_\nu\rangle = P_{\mathcal{K}_\nu}|u\rangle$. Возьмем унитарное преобразование, которое переводит базис $Б^{(k)}_{\mathcal{H}}$ в себя, а орты остальных базисов $Б^{(\nu)}_{\mathcal{H}}$, а также $Б^{(\nu)}_{\mathcal{F}}$ и $Б^{(\nu)}_{\mathcal{Y}}$, умножает на минус единицу. Соответствия I_ν при этом сохраняются. Отсюда, $V \in U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{Y})$ по теореме 3.4, и $V\{\mathcal{K}\} = \mathcal{K}$, $V|u\rangle \in \mathcal{K}$. С другой стороны, $V|v\rangle = -|v\rangle$ при $|v\rangle \in \mathcal{H}_\nu$, $\forall \nu \neq k$; $V|v\rangle = |v\rangle$, $|v\rangle \in \mathcal{H}_k$.

Следовательно,

$$\mathcal{K} \ni \left(\tfrac{1}{2}|u\rangle + \tfrac{1}{2} V|u\rangle\right) = |u_k\rangle = P_{\mathcal{H}_k}|u\rangle\ , \quad \forall |u\rangle \in \mathcal{K}.$$

Это эквивалентно формуле (3.10).

Раз $\mathcal{K}_\nu \subseteq \mathcal{K}$, $\forall \nu$, то $\mathcal{K} \supseteq \bigoplus_\nu \mathcal{K}_\nu$. С другой стороны $\mathcal{K} = \mathbb{1}\{\mathcal{K}\} = \left(\sum_\nu P_{\mathcal{K}_\nu}\right)\{\mathcal{K}\} \subseteq \bigoplus_\nu \mathcal{K}_\nu$. Это дает (3.11).

Утверждение (3.12) выводится аналогично. $\boxtimes$

Таким образом, изучение строения любого коварианта $\mathcal{K}$ сводится к рассмотрению его составляющих $\mathcal{K}_\nu$. Составляющие $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}'_{s+1}$, $\mathcal{K}''_{s+1}$, $\mathcal{K}_{s+2}$ устроены очень просто. Если, например, $\mathcal{K}_0 \ni |u\rangle \neq |0\rangle$, то орбита вектора $|u\rangle$, т.е. множество

$$\mathcal{O}_u = \{|v\rangle = U|u\rangle, \quad \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})\} \tag{3.13}$$

образует сферу пространства $\mathcal{H}_0$ радиуса $r = \sqrt{\langle u|u\rangle}$. По ковариантности $\mathcal{K} \ni |u\rangle$ должно быть $\mathcal{O}_u \subseteq \mathcal{K}_0$. Тогда и ее линейная оболочка $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{H}_0$ тоже. Значит $\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}_0$. Для остальных трех указанных ковариантов дело обстоит также.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Назовем ковариант $\mathcal{K}$ пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ минимальным, если всякий другой ковариант $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ либо сводится к нулю, $\mathcal{R} = 0$, либо совпадает с самим $\mathcal{K}$, $\mathcal{R} = \mathcal{K}$.

Используя этот термин, можно дать полученным выше утверждениям следующую формулировку:

ЛЕММА 3.8. Подпространства $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp$, $\mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp$, $\mathcal{H}_{s+2} = (\mathcal{F} + \mathcal{G})^\perp$ являются минимальными ковариантами пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Такая простота вызвана тем, что группы $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})_k$ при $k = 0$, $s+1$, $s+2$ содержат унитарные группы преобразований указанных пространств целиком. Группы же $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})_k$ при $1 \le k \le s$ много уже унитарных групп преобразований $\mathcal{H}_k$. Они, как мы строго покажем ниже, описываются двукратными представлениями унитарных преобразований $\mathcal{F}_k$.

Фиксируем числа a и b и рассмотрим множество

$$\{|z\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle : \mathcal{F}_\nu \ni |x\rangle \overset{I_\nu}{\rightleftarrows} |y\rangle \in \mathcal{G}_\nu\} \tag{3.14}$$

где $|x\rangle$ и $|y\rangle$ связаны биекцией (2.6). По линейности $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$ это линейное пространство зависит только от отношения $a : b$. Для упрощения записи введем параметр $t = \frac{a-b}{a+b}$ вообще говоря, комплексный; когда $a : b = -1 : 1$ будем писать $t = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Условимся обозначать

$$\mathcal{K}_\nu(t) := \{|z\rangle = \frac{1+t}{2}|x\rangle + \frac{1-t}{2}|y\rangle \; ; \; \mathcal{F}_\nu \ni |x\rangle \overset{I_\nu}{\rightleftarrows} |y\rangle \in \mathcal{G}_\nu\}$$

ЛЕММА 3.9. Линейное подпространство $\mathcal{K}_\nu(t)$ является ковариантом пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$, а также пары $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$. В обоих случаях оно является минимальным ковариантом. Если $t_1 \neq t_2$, $1 \le \nu \le s$, то $\mathcal{K}_\nu(t_1) \cap \mathcal{K}_\nu(t_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu, \mathcal{Y}_\nu) \supseteq \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}, \mathcal{Y})$. Тогда $U|ax + by\rangle = a|u\rangle + b|v\rangle$, где $|x\rangle \in \mathcal{F}_\nu$, $|y\rangle \in \mathcal{Y}_\nu$ связаны диаграммой со своими U – образами $|u\rangle \in \mathcal{F}_\nu$, $|v\rangle \in \mathcal{Y}_\nu$. Отсюда, $a|u\rangle + b|v\rangle = |au + bv\rangle \in \mathcal{K}_\nu(t)$.

Пусть теперь ковариант $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\nu(t)$. Тогда либо $\mathcal{K} = 0$, либо существует ненулевой вектор

$$\frac{1+t}{2}|x\rangle + \frac{1-t}{2} I_\nu |x_0\rangle = |z_0\rangle \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}_\nu \ni |x_0\rangle \neq |0\rangle.$$

Согласно теореме 3.4 подгруппа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}, \mathcal{Y})_\nu \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\nu, \mathcal{Y}_\nu)$ действует на $\mathcal{F}_\nu$ как унитарная группа пространства $\mathcal{F}_\nu$. Поэтому, $\mathcal{K}$ содержит всю орбиту вектора $|z_0\rangle$, т.е. все векторы вида $|z\rangle = \frac{1+t}{2}|x\rangle + \frac{1-t}{2} I_\nu |x\rangle$, при $\langle x|x\rangle = \langle x_0|x_0\rangle$. Наконец, по линейности $\mathcal{K}$ содержит и все кратные таких векторов, т.е. просто $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_\nu(t)$.

Так как $\mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{Y}_\nu = 0$ при $1 \le \nu \le s$, то каждый вектор $|z\rangle \in (\mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu)$ раскладывается единственным образом в сумму $|u\rangle \in \mathcal{F}_\nu$ и $|v\rangle \in \mathcal{Y}_\nu$. Пусть $|z\rangle \in \mathcal{K}(t_1) \cap \mathcal{K}(t_2)$, тогда

$$\frac{1+t_1}{2}|x_1\rangle = \frac{1+t_2}{2}|x_2\rangle, \quad \frac{1-t_1}{2} I_\nu |x_1\rangle = \frac{1-t_2}{2} I_\nu |x_2\rangle,$$

т.е. $t_1 = t_2$, либо $|z\rangle = |0\rangle$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.10. Для унитарного ковариантa $\mathcal{K}$ пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$, принадлежащего подпространству $\mathcal{H}_\nu$ канонического разбиения, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu$, существуют только три возможности:

а) $\mathcal{K} = 0$; б) $\exists t \in \mathbb{C}: \mathcal{K} = \mathcal{K}_\nu(t)$; в) $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\nu$.

Доказательство. Возможность а) тривиальна. Далее будем считать, что $\mathcal{K} \ni |u\rangle \neq |0\rangle$.

Пересечение двух ковариантов – снова ковариант. Поэтому, из минимальности $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{Y}_\nu$, установленной в лемме 3.9, вытекают следующие предложения:

$$(\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_\nu \neq 0) \Rightarrow (\mathcal{K} \supseteq \mathcal{F}_\nu); \quad (\mathcal{K} \cap \mathcal{Y}_\nu \neq 0) \Rightarrow (\mathcal{K} \supseteq \mathcal{Y}_\nu);$$
$$[(\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_\nu \neq 0) \,\&\, (\mathcal{K} \cap \mathcal{Y}_\nu \neq 0)] \Rightarrow (\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}_\nu); \tag{3.15}$$

справедливые для любого коварианта пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{Y}_\nu \subseteq \mathcal{K}$, но $\mathcal{Y}_\nu \neq (\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_\nu)$. Тогда существует ненулевой вектор $|u\rangle \in [(\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_\nu) - \mathcal{Y}_\nu]$. Раз $|u\rangle \in \mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu$, то $|u\rangle = |x\rangle + |y\rangle$ при некоторых $|x\rangle \in \mathcal{F}_\nu$, $|x\rangle \neq |0\rangle$, $|y\rangle \in \mathcal{Y}_\nu \in \mathcal{K}$. Отсюда, по линейности $\mathcal{K}$, $|u\rangle - |y\rangle = |x\rangle \in \mathcal{K}$. Ввиду (3.15) $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}_\nu$. Таким образом, мы пришли к следующему заключению:

$$[(\mathcal{K} \cap \mathcal{Y}_\nu \neq 0) \& (\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_\nu \neq \mathcal{Y}_\nu)] \Rightarrow (\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}_\nu) \qquad (3.16)$$

Постараемся теперь выяснить строение ковариантов $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\nu$ отличных от O, $\mathcal{F}_\nu$, $\mathcal{Y}_\nu$, $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{F}_\nu + \mathcal{Y}_\nu$. У подобного коварианта должен существовать ненулевой вектор $|z\rangle = |x\rangle + |y\rangle$ с ненулевыми составляющими $|x\rangle \in \mathcal{F}_\nu$, $|y\rangle \in \mathcal{Y}_\nu$. В противном случае $\mathcal{K} = O, \mathcal{Y}_\nu, \mathcal{F}_\nu$. Составляющие определяются однозначно. Ввиду линейности $\mathcal{K}$, можно считать $\langle x|x\rangle = 1$. Также не ограничивая общности, согласно теореме 3.4 можно считать, что орт $|x\rangle$ выбран за первый орт канонического базиса $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$, т.е. $|x\rangle = |x_\nu^{(1)}\rangle$. Это позволит упростить обозначения. Разложим вектор $|y\rangle$ по I_ν – соответствующему базису $Б_{\mathcal{Y}}^{(\nu)}$:

$$|z\rangle = |x_\nu^{(1)}\rangle + b_z |y_\nu^{(1)}\rangle + |w\rangle; \quad |w\rangle \in \mathcal{Y}_\nu, \quad \langle y_\nu^{(1)}|w\rangle = 0.$$

Совершим теперь преобразование U, переводящее

$$U|x_\nu^{(1)}\rangle = -|x_\nu^{(1)}\rangle, \quad U|y_\nu^{(1)}\rangle = -|y_\nu^{(1)}\rangle,$$

и тождественное на всех остальных ортах (кроме, разумеется, $|u_\nu^{(1)}\rangle$, $|v_\nu^{(1)}\rangle$) канонических базисов $Б_{\mathcal{F}}$, $Б_{\mathcal{Y}}$, $Б_{\mathcal{H}}$. Очевидно, U переводит эти базисы снова в ортонормированные базисы пространств $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{H}$, т.е. $U \in \mathbb{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}, \mathcal{Y})$

Но
$$\mathcal{K} \ni U|z\rangle = -|x_\nu^{(1)}\rangle - b_z |y_\nu^{(1)}\rangle + |w\rangle.$$

Складывая $|z\rangle + U|z\rangle = 2|w\rangle$, получаем, что $|w\rangle \in (\mathcal{K} \cap \mathcal{Y}_\nu)$. Если $|w\rangle \neq |0\rangle$, то, ввиду минимальности $\mathcal{Y}_\nu$ и суждения (3.16), либо $\mathcal{K} = \mathcal{Y}_\nu$, либо $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\nu$. Значит в интересующих нас случаях обязательно $|w\rangle = |0\rangle$. Это дает

$$|z\rangle = |x\rangle + b_z I_\nu |x\rangle, \quad \forall |z\rangle \in \mathcal{K} \qquad (3.17)$$

если учесть линейность и возможность выбора системы координат.

Фиксируем исходный вектор $|z\rangle$. Линейная оболочка его орбиты O_z образует минимальный содержащий $|z\rangle$ ковариант – ковариант $\mathcal{K}_\nu\left(\frac{1-b}{1+b}\right)\subseteq\mathcal{K}$. Допустим на минуту, что $\mathcal{K}\neq\mathcal{K}_\nu\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$. Значит по (3.17) должен найтись ненулевой вектор $|u\rangle\in\mathcal{K}$, имеющий вид $|u\rangle=|x\rangle+b'I_\nu|x\rangle$, где $b'\neq b$, но с тем же самым ненулевым $|x\rangle$, что и у некоторого $|z\rangle\in\mathcal{K}_\nu\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$. Но тогда разность $(b-b')I_\nu|x\rangle=|v\rangle\in\mathcal{G}_\nu$.
По суждению (3.16) с учётом (3.17) это дало бы $\mathcal{K}=\mathcal{H}_\nu$, что противоречит сделанному предположению. Значит, $\mathcal{K}=\mathcal{K}_\nu(t)$ при некотором t. ⊠

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $\mathcal{H}=\bigoplus\mathcal{H}_\nu$ – каноническое разложение (1.20) для пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Любой ковариант $\mathcal{K}$ этой пары подпространств единственным образом можно представить в виде (3.11):

$$\mathcal{K}=\bigoplus_{\nu=0}^{s+2}\mathcal{K}_\nu,$$

где $\mathcal{K}_\nu$ могут быть только следующими:

$$\mathcal{K}_\nu=0,\ \mathcal{H}_\nu\ ;\quad \nu=0;\ \nu=s+2.$$

$$\mathcal{K}_\nu=0,\ \mathcal{K}_\nu(t_\nu),\ \mathcal{H}_\nu;\ t_\nu\in\mathbb{C}\ \text{или}\ t_\nu=\infty;\ 1\leq\nu\leq s.$$

$$\mathcal{K}_\nu=0,\ \mathcal{F}_{s+1},\ \mathcal{G}_{s+1},\ \mathcal{H}_{s+1}\ ;\quad \nu=s+1.$$

Доказательство. Разложение (3.11) выведено в теореме 3.7. Строение $\mathcal{K}_\nu$ при $\nu=0$, $\nu=s+1$, $\nu=s+2$ установлено в добавлении к теореме 3.7 и в лемме 3.8. Строение $\mathcal{K}_\nu$ при $1\leq\nu\leq s$ дано в теореме 3.10. ⊠

Рассмотрим важнейшие частные случаи. Очевидно, $\mathcal{K}_\nu(1)=\mathcal{F}_\nu$, $\mathcal{K}_\nu(-1)=\mathcal{G}_\nu$. Далее, $\mathcal{K}_\nu(0)$ – "биссектриса" меньшего из углов между $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$, а $\mathcal{K}_\nu(\infty)$ – ортогональная ей "биссектриса" большего из углов между $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$. Фактически с этими ковариантами мы имели дело и ранее. Ковариант $\mathcal{K}_1(0)$ двух контактирующих, но не пересекающихся подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ был назван в определении 2.3 средним контактом $\mathcal{F}\wedge\mathcal{G}$. С подпространствами $\mathcal{K}_\nu(0)$ и $\mathcal{K}_\nu(\infty)$ связаны построенные § 1 канонические базисы.

ЛЕММА 3.12. Орты $|u_\nu^{(i)}\rangle$, построенные по формуле (1.10) для базиса $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}^{(\nu)}$, $1\leq\nu\leq s$, образуют базис $\mathcal{B}_0^{(\nu)}$ подпространства $\mathcal{K}_\nu(0)\subset\mathcal{H}_\nu$. Орты $|v_\nu^{(i)}\rangle$, построенные по формуле (I.II), образуют базис $Б_\infty^{(\nu)}$ подпространства $\mathcal{K}_\nu(\infty)\subset\mathcal{H}_\nu$. Вместе

$$Б_0^{(\nu)}\cup Б_\infty^{(\nu)}=Б_{\mathcal{H}}^{(\nu)};\quad \mathcal{H}_\nu=\mathcal{K}_\nu(0)\oplus\mathcal{K}_\nu(\infty), \tag{3.18}$$

Доказательство. В формуле (I.10) коэффициенты $\frac{1}{2\alpha_\nu}:\frac{1}{2\alpha_\nu}=1:1$, т.е. $t=0$. Значит, $|u_\nu^{(j)}>\in\mathcal{K}_\nu(0)$, $\forall_j$. Аналогично, $|v_\nu^{(j)}>\in\mathcal{K}_\nu(\infty)$, $\forall_j$. Покажем, что любой вектор $|u>\in\mathcal{K}_\nu(0)$ может быть разложен по подбазису $Б_0^{(\nu)}$. Пусть

$$|u>=\frac{1}{2\alpha_\nu}|x>+\frac{1}{2\alpha_\nu}|y>,\qquad |x>\overset{I_\nu}{\rightleftarrows}|y>.$$

Разложим $|x>$ по базису $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$, $|y>$ — по I_ν-соответствующему базису $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$. Ввиду I_ν - соответствия коэффициенты разложения с одинаковыми номерами j совпадают. Таким образом, $|u>$ раскладывается по линейно независимым векторам

$$|u_\nu^{(j)}>=\frac{1}{2\alpha_\nu}|x_\nu^{(j)}>+\frac{1}{2\alpha_\nu}|y_\nu^{(j)}>$$

Значит, $Б_0^{(\nu)}$ - ортонормированный базис $\mathcal{K}_\nu(0)$, и часть ортонормированного базиса $\mathcal{H}_\nu$. Аналогично, $Б_\infty^{(\nu)}$ - базис $\mathcal{K}_\nu(\infty)$, и остальная часть базиса $\mathcal{H}_\nu$. Следовательно, ортогональны и натянутые на них подпространства, в сумме дающие все $\mathcal{H}_\nu$. $\boxtimes$

Два контактирующих подпространства $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$, наклоненные друг к другу под всюду постоянным углом $\arccos\rho_\nu$, порождают естественное сечение подпространств $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$ плоскостями. Каждая из таких плоскостей

$$\mathcal{P}_x=\{|z>=\xi|x>+\zeta|y>:\forall\xi,\zeta\in\mathbb{C},\ |x>\overset{I_\nu}{\rightleftarrows}|y>\}, \tag{3.19}$$
$$P_{\mathcal{G}}|x>=\rho_\nu|y>,\quad P_{\mathcal{F}}|y>=\rho_\nu|x>,$$

натянута на пару I_ν - соответствующих векторов. Таким образом, каждой прямой $\mathcal{L}\subset\mathcal{F}$ соответствует плоскость $\mathcal{P}$ натянутая на $\mathcal{L}$ и ее проекцию $P_{\mathcal{G}}\{\mathcal{L}\}$.

У ортогональных слагаемых $\mathcal{K}_\nu(0)$ $\mathcal{K}_\nu(\infty)=\mathcal{H}_\nu$ эта естественная связь между прямыми исчезает. Её надо задать дополнительно. Мы будем задавать её посредством сплетающего оператора $\mathcal{J}_\nu$ — инволютивного унитарного оператора, переводящего орты базиса $Б_0^{(\nu)}$ в орты базиса $Б_\infty^{(\nu)}$ с теми же номерами, и обратно:

$$\mathcal{J}_\nu|u_\nu^{(j)}>=|v_\nu^{(j)}>;\quad \mathcal{J}_\nu|v_\nu^{(j)}>=|u_\nu^{(j)}>;\quad \forall_j, \tag{3.20}$$

и сохраняющего все остальные орты базиса $Б_{\mathcal{H}}$.

Заметим, что сплетающий оператор J_ν позволяет восстановить по формулам (I.12) и (I.13) соответствие I_ν векторов подпространств $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$, а не только соответствие прямых, как пучок плоскостей (3.19). В последнем же способе для определения соответствующих ортов надо дополнительно воспользоваться условием синфазности.

С помощью оператора J_ν очень удобно переформулировать определение (3.14) ковариантa $\mathcal{K}_\nu(t)$ при $t \neq \infty$:

$$\mathcal{K}_\nu(t) := \{|z\rangle = \alpha_\nu |u\rangle + t\beta_\nu J_\nu |u\rangle,\ \forall |u\rangle \in \mathcal{K}_\nu(0)\} \tag{3.21}$$

В самом деле, такое выражение для $|z\rangle$ при базисном векторе $|u_\nu^{(\omega)}\rangle$ вытекает из связей (I.10) – (I.13) между ортами и определения (3.20) оператора J_ν . Для остальных $|u\rangle$ справедливость представления вытекает из линейности J_ν .

ТЕОРЕМА 3.13. Для пары подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ существует каноническое разложение

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \oplus [(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp) \oplus (\mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp)] \oplus \tag{3.22}$$

$$\oplus (\mathcal{F} + \mathcal{G})^\perp \oplus \left[\bigoplus_{\nu=1}^{s} (\mathcal{K}_\nu(0) \oplus \mathcal{K}_\nu(\infty))\right].$$

Любое преобразование $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}\,|\,\mathcal{F}, \mathcal{G})$ однозначно разлагается в произведение коммутирующих унитарных преобразований, действующих только на своем слагаемом:

$$U = U_0 U'_{s+1} U''_{s+1} U_{s+2} U'_1 U''_1 \dots U'_s U''_s , \tag{3.23}$$

где первые четыре множителя и все U'_ν , $1 \le \nu \le s$, описывают какие угодно унитарные преобразования своих слагаемых, независимые друг от друга, а каждое U''_ν при $1 \le \nu \le s$ связано с U'_ν сплетающим оператором (3.20):

$$U''_\nu = J_\nu U'_\nu J_\nu \ ; \quad J_\nu^2 = 1 , \qquad 1 \le \nu \le s \tag{3.24}$$

В любом каноническом базисе $Б_{\mathcal{H}}$ каждый $2m(\nu)$ – мерный блок диагонально-блочной матрицы $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}\,|\,\mathcal{F}, \mathcal{G})$, отвечающий $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{K}_\nu(0) \oplus \mathcal{K}_\nu(\infty)$ при $1 \le \nu \le s$, распадается на два совершенно идентичных $m(\nu)$ – мерных блока.

Доказательство. Возьмем разложение (3.9) любого U из нашей группы и уточним строение сомножителей U_ν при $1 \le \nu \le s+1$. Согласно одному из утверждений теоремы 3.4 $U_{s+1} = U'_{s+1} U''_{s+2}$, где первый множитель задает любое унитарное преобразование $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp$, а второй – независимое преобразование подпространства $\mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\perp$, ортогонального $\mathcal{F}_{s+1}$.

Далее, рассмотрим действие на ковариант $\mathcal{F}_\nu$ в каноническом базисе $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$, $1 \le \nu \le s$. По лемме 3.3 действие U на ковариант $\mathcal{G}_\nu$ в I_ν – соответствующем базисе $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$ описывается той же самой унитарной матрицей, что и на $\mathcal{F}_\nu$. В силу формул (I.10) и (I.11) действие U на $\mathcal{K}_\nu(0)$ и $\mathcal{K}_\nu(\infty)$ в базисах $Б_0^{(\nu)}$ и $Б_\infty^{(\nu)}$ также описывается той же матрицей. Значит,

$$U_\nu = U'_\nu J_\nu U'_\nu J_\nu = J_\nu U'_\nu J_\nu U'_\nu . \quad \boxtimes$$

В § I мы построили канонический базис $Б_{\mathcal{H}}$ пространства $\mathcal{H}$ исходя из базисов $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ ковариантов $\mathcal{F}_\nu$, а также связанных с ними базисов $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$. Опишем сейчас обратное построение.

ТЕОРЕМА 3.14. В каноническом разложении (3.22) первые четыре слагаемых раскладываются каждое в ортогональную сумму прямых $\mathcal{L}_{\nu,j}$, направляющими которых служат орты базисов этих слагаемых. Слагаемые же $\mathcal{K}_\nu(0) \oplus \mathcal{K}_\nu(\infty)$ раскладываются каждое в ортогональную сумму плоскостей $\mathcal{P}_{\nu,j}$, натянутых каждая на орт $|u_\nu^{(j)}\rangle$ любого базиса $Б_0^{(\nu)}$ и связанный с ним сплетающим оператором J_ν орт $|v_\nu^{(j)}\rangle$, где $J_\nu Б_0^{(\nu)}$ дает базис $Б_\infty^{(\nu)}$. Синфазный с $|v_\nu^{(j)}\rangle$ орт $|x_\nu^{(j)}\rangle$ прямой $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}_{\nu,j}$ и антифазный с $|v_\nu^{(j)}\rangle$ орт $|y_\nu^{(j)}\rangle$ прямой $\mathcal{G} \cap \mathcal{P}_{\nu,j}$ дают орты I_ν – соответствующих базисов $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ и $Б_{\mathcal{G}}^{(\nu)}$.

Орты из $Б_{\mathcal{F}}^{(0)} = Б_{\mathcal{G}}^{(0)}$, $Б_{\mathcal{F}}^{(s+1)}$, $Б_{\mathcal{G}}^{(s+1)}$ совпадают с направляющими ортами соответственно $\mathcal{L}_{0,j}$, $\mathcal{L}'_{s+1,j}$, $\mathcal{L}''_{s+1,j}$. Этим базисы $Б_{\mathcal{F}}$ и $Б_{\mathcal{G}}$ заданы полностью.

Доказательство. Выбор ортонормированного базиса $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ определяет по (I.10) однозначно выбор $Б_0^{(\nu)}$, причем разным $Б_{\mathcal{F}}^{(\nu)}$ отвечают разные $Б_0^{(\nu)}$, так что это соответствие биективно. Поэтому, сплетающий оператор J_ν, подставленный в (I.12), полностью определяет обратное соответствие. Положительность коэффициента β_ν при $|v_\nu^{(j)}\rangle$ приводит к синфазности. Остальные утверждения очевидны. ⊠

§ 4. Решетки и логики подпространств унитарного подпространства.

Как известно, система всех линейных подпространств $\mathcal{F}$ конечномерного унитарного пространства $\mathcal{H}$ является алгебраической решеткой с обычными операциями векторного сложения подпространств $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ (т.е. взятия линейной оболочки объединения $\mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$) и пересечения $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}''$, а также перехода к ортогональному дополнению $\mathcal{F}^{\perp}$. Такая система операций является слишком бедной. Простой пример двух прямых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ показывает, что решетка с ортодополнениями

$$\{0, \mathcal{L}_1; \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1^{\perp}, \mathcal{L}_2^{\perp}, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{H} = \mathcal{L}_1^{\perp} + \mathcal{L}_2^{\perp}\}.$$

порожденная $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ с помощью указанных операций, не содержит такого важного их унитарного ковариянта как биссектриса $\mathcal{L}_1 \circledcirc \mathcal{L}_2$ А как нам кажется, ср. [2] , стр. 28, интересные для квантовой логики решетки подпространств должны содержать вместе каждой парой подпространств и все ее унитарные ковариянты (или только унитарно-антиунитарные ковариянты, см. § 6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Условимся называть ковариант $\mathcal{K}_1(t)$, см. определение 3.3, пары контактирующих, но не пересекающихся подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, где $t \in \mathbb{C}$ либо $t = \infty$, ср.(3.14), t - псевдоконтактом $\mathcal{F} \textcircled{t} \mathcal{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Для пересекающихся подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ полагаем $\mathcal{F} \textcircled{t} \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ при всех t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. При $-1 \leq t \leq +1$ мы будем называть соответствующий t - псевдоконтакт промежуточным контактом, или просто t - контактом.

Как мы увидим далее, выделение класса промежуточных контактов необходимо, так как именно они допускают удобное истолкование в терминах ортопроекторов. Кроме того, они являются не только унитарными ковариантами, но и унитарно-антиунитарными ковариантами контактирующих подпространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Система $\mathbb{K}$ линейных подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$ будет называться $\mathcal{C}$ - логикой, если выполнены условия

1^0 $O \in \mathbb{K}$, $\mathcal{H} \in \mathbb{K}$.

2^0 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{K} \Rightarrow (\mathcal{F} + \mathcal{G}) = \mathcal{K} \in \mathbb{K}$

3^0 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{K} \Rightarrow (\mathcal{F} \textcircled{t} \mathcal{G}) = \mathcal{B}_t \in \mathbb{K}$, $\forall t \in \mathcal{C} + \infty$.

4^0 $\mathcal{F} \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathcal{F}^{\perp} \in \mathbb{K}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Система $\mathbb{K}$ линейных подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$ будет называться квазилогикой, если выполняются условия 2^0 и 3^0, а вместо условий 1^0 и 4^0 выполнены их ослабленные варианты

1^* $O \in \mathbb{K}$.

4^* $\mathbb{K} \ni \mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \in \mathbb{K} \Rightarrow (\mathcal{F} \ominus \mathcal{G}) \in \mathbb{K}$.

Очевидно, всякая логика есть квазилогика. Наоборот, в конечномерном пространстве $\mathcal{H}$ каждая квазилогика $\mathbb{K}$ имеет максимальный элемент $\mathcal{H}'_{\mathbb{K}}$, так что система подпространств $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$ образует некоторую логику в $\mathcal{H}'_{\mathbb{K}}$. Поэтому, описание строения квазилогик мы легко получим из описания строения логик.

ЛЕММА 4.1. Квазилогика $\mathbb{K}$ является решеткой относительно операций „$+$", „$\cap$", содержащей все ортогональные разности своих элементов.

СЛЕДСТВИЕ. Ортопроекция одного подпространства квазилогики на другое также принадлежит квазилогике.

<u>Доказательство</u>. По принципу двойственности

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \{[(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}] + [(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}]\},$$

что доказывает утверждение леммы.

Следовательно, правая часть равенства (2.17) принадлежит $\mathbb{K}$ что и утверждается в следствии. ⊠

В отличие от операции пересечения операция контактирования "многозначна", или, лучше сказать, существует целое семейство операций контактирования, зависящее от одного параметра. Изучим относительное расположение двух псевдоконтактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Условимся говорить, что подпространства $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ перпендикулярны, если

$$\{\mathcal{R} \ominus (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})\} \perp \{\mathcal{S} \ominus (\mathcal{S} \cap \mathcal{R})\},$$

т.е. когда их инвариант $s(\mathcal{R},\mathcal{P})=0$.

Таким образом, ортогональные подпространства являются частным случаем перпендикулярных. Условие перпендикулярности можно записать в любой из трех равносильных форм:

$$\{\mathcal{R}\ominus(\mathcal{R}\cap\mathcal{P})\}\perp\mathcal{P}\Longleftrightarrow\mathcal{R}\perp\{\mathcal{P}\ominus(\mathcal{P}\cap\mathcal{R})\}\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\{\mathcal{R}\ominus(\mathcal{R}\cap\mathcal{P})\}\perp\{\mathcal{P}\ominus(\mathcal{P}\cap\mathcal{R})\}. \qquad (4.1)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, но не пересекаются, $0<\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho<1$. Плоскость (3.19):

$$\mathcal{P}_x=\{|w\rangle=\xi|x\rangle+\eta|y\rangle,\ \rho|y\rangle=P_{\mathcal{G}}|x\rangle,\ \forall\xi,\eta\in\mathbb{C}\},$$

натянутая на любую пару I_1 – соответствующих ортов $|x\rangle\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, $|y\rangle\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, $\rho|x\rangle=P_{\mathcal{F}}|y\rangle$, перпендикулярна каждому псевдоконтакту $\mathcal{F}\circledast\mathcal{G}$.

<u>Доказательство.</u> Плоскость $\mathcal{P}_x$ и ковариант $\mathcal{K}_1(t)$ пересекаются по прямой

$$\mathcal{L}_{x,t}:=\{|z\rangle=\lambda a|x\rangle+\lambda\rho^{-1}bP_{\mathcal{G}}|x\rangle;\ \forall\lambda\in\mathbb{C}\}, \qquad (4.2)$$

т.е. по прямой с направляющим вектором $|z_0\rangle=a|x\rangle+bI_1|x\rangle$

Пусть $a|u\rangle+bI_1|u\rangle=|w\rangle\in\mathcal{K}_1(t)$, $|u\rangle\in\mathcal{F}_1$, причем $\langle w|z\rangle=0$.
Здесь и далее $t=\frac{a-b}{a+b}$. По формулам (1.8)

$$0=\langle w|z\rangle=(\bar a a+\rho\bar a b+\rho a\bar b+\bar b b)\langle u|x\rangle.$$

Выписанная полуторалинейная форма положительна. Значит

$$0=\langle u|x\rangle=\langle u|y\rangle=\langle v|x\rangle=\langle v|y\rangle,$$

где обозначено $I_1|x\rangle=|y\rangle$, $I_1|u\rangle=|v\rangle$, и мы опять воспользовались формулами (1.8). Следовательно, $\mathcal{P}_x$ ортогонально $\mathcal{K}_1(t)\ominus\mathcal{L}_{x,t}$.

ЛЕММА 4.3. Пусть подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, но не пересекаются, $0<\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho<1$. Любые два их псевдоконтакта $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ наклонены друг к другу под всюду одинаковым углом с косинусом

$$\tau=\frac{|\bar a\alpha+(\bar a\beta+\bar b\alpha)\rho+\bar b\beta|}{\sqrt{|a|^2+(\bar a b+\bar b a)\rho+|b|^2}\ \sqrt{|\alpha|^2+(\bar\alpha\beta+\bar\beta\alpha)\rho+|\beta|^2}} \qquad (4.3)$$

Здесь $t=\frac{a-b}{a+b}$, $\tau=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Если a, b, α, β выбраны так, что оба корня в (4.3) равны единице, то вектор $\alpha|x>+\beta I_1|x>=|v>\in\mathcal{K}_1(\tau)$ проектируется на $\mathcal{K}_1(t)$ в вектор $\tau c(a|x>+bI_1|x>)$, где $|c|=1$,

$$\arg c=\arg\{\bar a\alpha+(\bar a\beta+\bar b\alpha)\rho+\bar b\beta\}. \tag{4.4}$$

СЛЕДСТВИЕ. σ – псевдоконтакт неортогональных псевдоконтактов $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ является также псевдоконтактом $\mathcal{K}(\theta)$ исходных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$, причем θ вещественно при вещественных σ, t и τ. Далее, σ-псевдоконтакт $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{K}(1)=\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}$ совпадает с σ-псевдоконтактом $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $|u>=a|x'>+b|y'>$, $|v>=\alpha|x''>+\beta|y''>$, $|y>=I_1|x>$, где $|x>\in\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}$. Условие равенства обоих корней единице равносильно тому, что для $<x|x>=1$ будет $<u|u>=1$ и $<v|v>=1$, так как под корнем стоит как раз нужное скалярное произведение, см. соотношения (1.8).

Из леммы 4.2 вытекает, что проекции векторов из $\mathcal{K}_1(\tau)$ на $\mathcal{K}_1(t)$ лежат в картинных плоскостях (3.19); нужно лишь подобрать фазу из условия синфазности вектора и его проекции. Поэтому, примем $|x'>=c|x'''>$, где $|c|=1$, а фаза пока не определена. Составим эрмитову форму (2.5) для $\mathcal{K}_1(t)\times\mathcal{K}_1(\tau)$:

$$<u|v>+<v|u>=$$

$$=\bar c[\bar a\alpha+(\bar a\beta+\bar b\alpha)\rho+\bar b\beta]<x'''|x''>+$$

$$+c[a\bar\alpha+(a\bar\beta+b\bar\alpha)\rho+b\bar\beta]<x''|x'''>,$$

где при вычислениях мы воспользовались формулами (1.8). Если выбрать $\arg c$ согласно (4.4), то оба множителя становятся равными и положительными, а сама форма приводится к виду

$$\tau[<x'''|x''>+<x''|x'''>],$$

заданной на $(\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}) \times (\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G})$. Поскольку $\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}$ наклонено к самому себе всюду под нулевым углом, то собственные значения последней формы очевидны: $\lambda = \pm \gamma$. По теореме 2.1 отсюда следует утверждение леммы. $\boxtimes$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Подпространство $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$ мы будем называть минимальным элементом квазилогики $\mathbb{K}$, если всякое другое содержащееся в $\mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ либо сводится к нулевому, $\mathcal{K} = 0$, либо совпадает с самим $\mathcal{F}$, $\mathcal{K} = \mathcal{F}$.

ЛЕММА 4.4. Каждый элемент $\mathcal{G}$ квазилогики разлагается в ортогональную сумму минимальных элементов. Такое разложение, вообще говоря, неоднозначно и может быть выбрано так, чтобы в него вошел наперед заданный минимальный $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{G} \in \mathbb{K}$. Если $\mathcal{G}$ не минимально, то оно содержит собственные $\mathbb{K}$-подпространства. Ввиду $Dim\, \mathcal{G} < \infty$, среди них найдется минимальное $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{K}$, например, наперед заданное $\mathcal{M}$. Ортогональная разность $(\mathcal{G} \ominus \mathcal{F}_1) \in \mathbb{K}$, $\mathcal{F}_1 \oplus (\mathcal{G} \ominus \mathcal{F}_1) = \mathcal{G}$. Применяя к $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \ominus \mathcal{F}_1$ операцию выделения минимального $\mathcal{F}_2$ и т.д. получаем $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_m$, где цепочка конечна, так как размерности $\mathcal{G}_i$ конечны и строго убывают. $\boxtimes$

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{K}$, причем $\mathcal{F}$ – минимально. Тогда либо $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, либо $\mathcal{F}$ совпадает со своим контактом с $\mathcal{G}$, а также с ортопроекцией $\mathcal{G}$ на $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G} = P_{\mathcal{F}} \{\mathcal{G}\},$$

и тогда контакт $\mathcal{F} \cap\!\!| \mathcal{G}$ также минимален.

СЛЕДСТВИЕ. Неортогональные минимальные пространства совпадают со своими контактами. Они наклонены друг к другу под всюду одинаковым углом и имеют одинаковую размерность.

<u>Доказательство.</u> Так как $\mathcal{F} \supseteq (\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G})$, а $(\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}) \in \mathbb{K}$ по определению квазилогики, то, ввиду минимальности $\mathcal{F}$, либо $\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G} = 0$, что влечет $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, либо $\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G} = \mathcal{F}$. В частности $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, когда $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Согласно следствию г из теоремы 1.1:

$$P_{\mathcal{F}} \{\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}\} = \mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}, \quad P_{\mathcal{G}} \{\mathcal{F} \cap\!\!\!| \mathcal{G}\} = \mathcal{F} \cap\!\!| \mathcal{G},$$

$$\rho^{-2}(\mathcal{F},\mathcal{G})P_{\mathcal{G}}P_{\mathcal{F}}|y\rangle=|y\rangle,\qquad \forall|y\rangle\in(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}).$$

Отсюда $(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\in\mathbb{K}$ по следствию из теоремы 4.1. Далее, если $\mathcal{K}\in\mathbb{K}$ и $\mathcal{K}\subseteq(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$, то $\mathcal{K}=P_{\mathcal{G}}P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{K}\}$, где либо $P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{K}\}=0$, либо $P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{K}\}=\mathcal{F}$ ввиду минимальности $\mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ также минимально.

Обозначим $\mathcal{G}^{(2)}:=\mathcal{G}\ominus(\mathcal{G}\Cap\mathcal{F})$. Как вытекает из лемм 1.4 и 1.5, $\mathcal{G}^{(2)}\perp\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}=\mathcal{F}$. Значит

$P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\}=P_{\mathcal{F}}\{\mathcal{G}\Cap\mathcal{F}\}=\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}=\mathcal{F}.$ $\boxtimes$

ЛЕММА 4.6. Пусть $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ различны и минимальны. Если в $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ существует отличное от них собственное подпространство $\mathcal{B}\in\mathbb{K}$, то $\mathcal{B}$ также минимально и контактирует хотя бы с одним из них. При этом

$$Dim\,\mathcal{F}=Dim\,\mathcal{B}=Dim\,\mathcal{G};\qquad \mathcal{F}+\mathcal{G}=\mathcal{F}+\mathcal{B}=\mathcal{G}+\mathcal{B}.$$

Доказательство. Раз $\mathcal{B}\subset(\mathcal{F}+\mathcal{G})$, то $\mathcal{B}$ не может быть ортогонально одновременно и $\mathcal{F}$, и $\mathcal{G}$. Значит, хоть с одним из них, например, с $\mathcal{F}$, оно контактирует, в частности - пересекается. По лемме 4.5 подпространство $\mathcal{B}\Cap\mathcal{F}$ само минимально. Обозначим $\mathcal{B}^{(2)}=\mathcal{B}\ominus(\mathcal{B}\Cap\mathcal{F})$, тогда $\mathcal{B}^{(2)}\perp\mathcal{F}$ по леммам 1.4 и 1.5. Следовательно, $\mathcal{B}^{(2)}$ контактирует с $\mathcal{G}$, если только $\mathcal{B}^{(2)}\neq 0$. Но тогда

$$Dim\,\mathcal{B}\geqslant Dim(\mathcal{B}\Cap\mathcal{F})+Dim(\mathcal{B}^{(2)}\Cap\mathcal{G})=Dim\,\mathcal{F}+Dim\,\mathcal{G}.$$

Так как $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ минимальны, то $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=0$. Отсюда $Dim\,\mathcal{B}\geqslant Dim\,(\mathcal{F}+\mathcal{G})$, что противоречит строгому включению $\mathcal{B}\subset(\mathcal{F}+\mathcal{G})$. Таким образом, в условиях леммы $\mathcal{B}=\mathcal{B}\Cap\mathcal{F}$ т.е. $\mathcal{B}$ - минимально, $Dim\,\mathcal{B}=Dim\,\mathcal{F}$.

Возможны два случая: или $\mathcal{F}\perp\mathcal{G}$, или $0<\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})<1$. В первом случае $\mathcal{B}$ обязано контактировать и с $\mathcal{G}$, иначе $\mathcal{B}$ придется совпадать с $(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{G}=\mathcal{F}$, что противоречит условию. Повторяя сделанные выше рассуждения, убеждаемся, что в этом случае также и $\mathcal{B}=\mathcal{B}\cap\mathcal{G}$, $Dim\,\mathcal{B}=Dim\,\mathcal{G}$. Во втором случае $Dim\,\mathcal{F}=Dim\,\mathcal{G}$, так что равенство размерностей имеет место в обоих случаях. Так как попарные пересечения $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ сводятся к нулевому вектору, то

$$Dim(\mathcal{F}+\mathcal{B})=Dim\,\mathcal{F}+Dim\,\mathcal{B}=Dim\,\mathcal{F}+Dim\,\mathcal{G}=Dim(\mathcal{F}+\mathcal{G})$$

т.е. $\mathcal{F}+\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}+\mathcal{G}$, а их размерности равны, откуда $\mathcal{F}+\mathcal{B}=\mathcal{F}+\mathcal{G}$. ⊠

Мы уже отмечали в § 3, что изометрия (2.6) между векторами подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, наклоненных друг к другу под всюду постоянным углом $\varphi=\arccos\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$, можно задать пучком плоскостей (3.19). Соответствующие друг другу орты должны лежать в одной плоскости и быть синфазными, т.е. их скалярное произведение должно быть положительно. Эти соображения были использованы в доказательстве леммы 4.3.

Другой способ состоит в задании сплетающего оператора, см. (3.20). В пространстве $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ выбираются два ортогональные псевдоконтакта и указывается соответствие их базисных ортов. В отличие от § 3 здесь мы возьмем за исходный базис $Б_{\mathcal{F}}$, построим по нему сперва базис $Б_{\mathcal{G}}=IБ_{\mathcal{F}}=\rho^{-1}P_{\mathcal{G}}Б_{\mathcal{F}}$, а затем базис $Б_{\mathcal{R}}$ относительного ортогонального дополнения $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, т.е. базис пространства

$$\mathcal{R}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{F}^{\perp}. \qquad (4.5)$$

Именно, положим для пары $\mathcal{F}\ni|x\rangle\overset{I}{\rightleftarrows}|y\rangle\in\mathcal{G}$:

$$J|x\rangle=-ctg\,\varphi\cdot|x\rangle+csc\,\varphi\cdot|y\rangle=|z\rangle\in\mathcal{R}. \qquad (4.6)$$

Тогда вектор $|y\rangle=I|x\rangle$ выражается через $|x\rangle$ и $|z\rangle=J|x\rangle$:

$$|y\rangle=\cos\varphi\cdot|x\rangle+\sin\varphi\cdot|z\rangle,\quad \forall|y\rangle\in\mathcal{G}. \qquad (4.7)$$

Другими словами, пространство $\mathcal{G}$, наклоненное к $\mathcal{F}$ под всюду одинаковым углом φ, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, порождает сплетение J:

$$|x\rangle=sc\,\varphi\cdot P_{\mathcal{F}}|y\rangle\rightleftarrows csc\,\varphi\cdot P_{\mathcal{R}}|y\rangle=|z\rangle,\ \forall|y\rangle\in\mathcal{G}. \qquad (4.8)$$

Как видно из (4.7), если $\mathcal{G}$ наклонено к $\mathcal{F}$ под углом φ, то оно наклонено к $\mathcal{R}$ под всюду одинаковым углом $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Поэтому, по (4.8)

$$\mathcal{J} = I^{(1)} I^{(2)}, \qquad (4.9)$$

где $I^{(1)}$ - естественная изометрия для $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, а $I^{(2)}$ - для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Сплетающим оператором $\mathcal{J}$ ортогональных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$ одинаковой размерности мы будем называть любую изометрию $\mathcal{F} \rightleftarrows \mathcal{R}$. Тогда в соответствующих базисах $Б_{\mathcal{F}}$ и $Б_{\mathcal{R}}$

$$\mathcal{J}|x^{(k)}> = |z^{(k)}>, \qquad \mathcal{J}|z^{(k)}> = |x^{(k)}>, \quad \forall k. \qquad (4.10)$$

ЛЕММА 4.7. Пара наклоненных друг к другу под всюду одинаковым углом $\varphi = \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ задает по (4.6) и (4.8) сплетающий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$ оператор.

<u>Доказательство.</u> По формулам (1.8) и (4.6)

$$<z|z> = (ctg^2\varphi + csc^2\varphi - 2\cos\varphi \, ctg\varphi \, csc\varphi) <x|x> = <x|x>,$$

так что указанное соответствие - изометрия. ☒

ЛЕММА 4.8. Пусть $\mathcal{J}$ сплетает $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$, и пусть $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Существует единственное подпространство $\mathcal{G}_\varphi$

$$\mathcal{G}_\varphi := \{|y> = \cos\varphi \cdot |x> + \sin\varphi \cdot \mathcal{J}|x>; \ \forall |x> \in \mathcal{F}\}, \qquad (4.11)$$

наклоненное к $\mathcal{F}$ под углом φ, (а к $\mathcal{R}$ - под углом $\frac{\pi}{2} - \varphi$), порождающее $\mathcal{J}$ по(4.8). При $\psi \neq \varphi$ любое $\mathcal{G}_\psi$ есть псевдоконтакт $\mathcal{G}_\varphi$ и $\mathcal{F}$, с $-\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} < t < 1$.

<u>Доказательство.</u> Описание (4.11) однозначно вытекает из (4.8) и (4.7). Обозначим

$$\mathcal{G}_\psi := \{|v> = \cos\psi \cdot |x> + \sin\psi \cdot \mathcal{J}|x>, \ \forall |x> \in \mathcal{F}\} =$$

$$= \{|v> = (\cos\psi - \sin\psi \, ctg\varphi)|x> + \sin\psi \, csc\varphi \, I|x>, \forall |x> \in \mathcal{F}\},$$

где $\mathcal{F} \overset{I}{\rightleftarrows} \mathcal{G}_\varphi$, и мы воспользовались формулой (4,6). ☒

ЛЕММА 4.9. Если подпространство $\mathcal{G}$, наклоненное к $\mathcal{F}$ под углом φ, порождает оператор $\mathcal{J}$, сплетающий

$\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$, то сплетающий оператор $e^{i\theta}J$ порождается любым из псевдоконтактов $\mathcal{K}(t)$ подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ при

$$\theta = \arg\frac{b}{a+b\cos\varphi},\ a+b\cos\varphi \neq 0;\quad t=\frac{a-b}{a+b}. \qquad (4.12)$$

Доказательство. По лемме 4.3 псевдоконтакт $\mathcal{K}(t)$ наклонен к $\mathcal{F}=\mathcal{K}(1)$ под постоянным углом. Далее

$$P_{\mathcal{K}}|x\rangle = |v\rangle = rc(a|x\rangle + bI|x\rangle),\ \arg c = \arg(\bar{a}+\bar{b}\rho).$$

Значит, $P_{\mathcal{R}}|v\rangle = rcb\sin\varphi\cdot|z\rangle$, ввиду(4.7).$\boxtimes$

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть K есть C - квазилогика, и пусть K - пространства $\mathcal{F}\neq\mathcal{Y}$ минимальны и контактируют. Всякое собственное K - пространство $\mathcal{B}\subset(\mathcal{F}+\mathcal{Y})$, отличное от $\mathcal{F}+\mathcal{Y}$, есть псевдоконтакт $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$.

СЛЕДСТВИЕ. C - квазилогика определяет сплетающий оператор сплетенных минимальных K - пространств с точностью до скалярного фазового множителя.

Доказательство. По лемме 4,6 подпространство $\mathcal{B}$ также минимально и контактирует либо с $\mathcal{F}$, либо с $\mathcal{Y}$. Предположим, что $\mathcal{F}\cap\mathcal{B}\neq 0$. Будем считать также, что $\mathcal{F}\neq\mathcal{B}$ иначе утверждение теоремы тривиально.По лемме 4.7 существуют два сплетающих $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$ оператора J и J'. Так как оба они осуществляют изометрию $\mathcal{F}$ на $\mathcal{R}$, то $J'=UJ$, где U - унитарное преобразование подпространства $\mathcal{R}$. Пусть $\lambda=e^{i\theta}$ собственное значение U, $\mathcal{R}_\theta$ - отвечающее ему собственное подпространство.

Рассмотрим два подпространства

$$\mathcal{K} := \{|u\rangle = J|z\rangle + e^{i\theta}|z\rangle,\quad \forall|z\rangle\in\mathcal{R}\},$$

$$\mathcal{K}' := \{|v\rangle = J|z\rangle + U|z\rangle,\quad \forall|z\rangle\in\mathcal{R}\}.$$

Первое является псевдоконтактом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}=I\{\mathcal{F}\}$:

$$\mathcal{K} := \{|u\rangle = (1-e^{i\theta}\operatorname{ctg}\varphi)|x\rangle + \csc\varphi\cdot I|x\rangle,\ \forall|x\rangle\in\mathcal{F}\},$$

а второе.- псевдоконтактом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$, см. лемму 4.8. По определению квазилогики $\mathcal{K},\mathcal{K}'\in K$. По лемме 4.6 они минимальны

Их пересечение непусто:

$$\mathcal{K}\cap\mathcal{K}'\supseteq\{|w\rangle=J|z\rangle+e^{i\theta}|z\rangle,\quad\forall|z\rangle\in\mathcal{R}_0\}\neq 0$$

Следовательно, $\mathcal{K}=\mathcal{K}'$, $\mathcal{R}_0=\mathcal{R}$, $J'=e^{i\theta}J$.

Если $\varphi=\arccos\rho(\mathcal{F},\mathcal{Y})$, $\varphi'=\arccos\rho(\mathcal{F},\mathcal{B})$, то

$$\mathcal{B}\ni I'|x\rangle=\cos\varphi'|x\rangle+\sin\varphi' e^{i\theta}|z\rangle= \tag{4.13}$$

$$=(\cos\varphi'-e^{i\theta}\sin\varphi'\operatorname{ctg}\varphi)|x\rangle+e^{i\theta}\sin\varphi'\operatorname{csc}\varphi\cdot I|x\rangle;\ \forall|x\rangle\in\mathcal{F},$$

т.е. $\mathcal{B}$ есть псевдоконтакт $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Два ортогональных минимальных $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ назовем сплетенными, если у $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2$ существует еще одно собственное K - подпространство $\mathcal{Y}$.

ЛЕММА 4.11. Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ – три попарно ортогональных минимальных $\mathbb{K}$ - пространства, и пусть $\mathcal{F}_1$ сплетено с $\mathcal{F}_2$ K-пространством $\mathcal{Y}_{12}$ с оператором J_{12}, а $\mathcal{F}_2$ сплетено с $\mathcal{F}_3$ пространством $\mathcal{Y}_{23}$ с оператором J_{23}. Тогда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ также сплетены, $J_{13}=cJ_{12}J_{23}$, $|c|=1$. Связывающее их K - пространство $\mathcal{Y}_{13}\subset(\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_3)$ может быть выбрано t-псевдоконтактом $\mathcal{Y}_{12}$ и $\mathcal{Y}_{13}$ с вещественным t; при этом $J_{13}=-J_{12}J_{23}$.

<u>Доказательство.</u> Согласно (4.7)

$$\mathcal{Y}_{k2}=\{|y_k\rangle=\cos\varphi_{k2}\cdot J_{k2}|z_k\rangle+\sin\varphi_{k2}\cdot|z_k\rangle,\ \forall|z_k\rangle\in\mathcal{F}_2\}.$$

Составим по рецепту § 2 эрмитову форму (2.5) на $\mathcal{Y}_{12}\times\mathcal{Y}_{23}$:

$$\langle y_1|y_3\rangle+\langle y_3|y_1\rangle=\sin\varphi_{12}\sin\varphi_{23}[\langle z_1|z_3\rangle+\langle z_3|z_1\rangle],$$

сводящуюся к форме на $\mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2$. Собственные числа последней, очевидно, равны $\lambda=\pm\sin\varphi_{12}\sin\varphi_{23}$, а условный максимум достигается на векторах $|z,z\rangle\rangle$. Отсюда, по теореме 2.1, подпространства $\mathcal{Y}_{12}$ и $\mathcal{Y}_{23}$ контактируют и наклонены друг к другу под всюду постоянным углом, а соответствующие векторы можно найти из связи $|z\rangle\rightleftarrows|z\rangle$, т.е.

$$\cos\varphi_{12}\cdot J_{12}|z\rangle+\sin\varphi_{12}|z\rangle\overset{I}{\rightleftarrows}\cos\varphi_{23}J_{23}|z\rangle+\sin\varphi_{23}|z\rangle.$$

Образуем t - псевдоконтакт $\mathcal{Y}_{12}$ и $\mathcal{Y}_{23}$ с весами

$$a:b=(1+t):(1-t)=-\sin\varphi_{23}:\sin\varphi_{13}\ ;\quad t=\frac{\sin\varphi_{12}+\sin\varphi_{23}}{\sin\varphi_{12}-\sin\varphi_{23}}\ :$$

$$\mathcal{G}_{13}:=\{|w\rangle=-\sin\varphi_{23}\cos\varphi_{12}J_{12}|z\rangle+\sin\varphi_{12}\cos\varphi_{23}J_{23}|z\rangle,\ \forall|z\rangle\in\mathcal{F}_2\}.$$

Исключим из этого описания "параметризующий" вектор $|z\rangle\in\mathcal{F}_2$ и сделаем перенормировку коэффициентов с тем, чтобы единичный вектор переходил в единичный. Получим равносильное определение

$$\mathcal{G}_{13}:=\{|w\rangle=-\cos\varphi_{13}J_{12}J_{23}|x_3\rangle+\sin\varphi_{13}|x_3\rangle,\ \forall|x_3\rangle\in\mathcal{F}_3\},$$

где в согласии с (4.7) и (4.6) положено

$$\varphi_{13}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_{12}\cdot\operatorname{ctg}\varphi_{23})>0.$$

Согласно теореме 4.10 любое другое $\mathbb{K}$ - пространство, связывающее $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ должно быть псевдоконтактом $\mathcal{F}_1$ и указанного $\mathcal{G}_{13}$. Отсюда по лемме 4.9 в общем случае $J_{13}=cJ_{12}J_{23}$. ☒

ЛЕММА 4.12. Пусть $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ минимальны, и пусть $\mathcal{F}_1$ контактирует с $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ через $\mathcal{G}_{23}$ сплетено с $\mathcal{F}_3$, а $\mathcal{F}_3$ ортогонально не только $\mathcal{F}_2$, но и $\mathcal{F}_1$. Тогда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ также сплетены. Связывающее их пространство $\mathcal{G}_{13}$ может быть выбрано t - псевдоконтактом $\mathcal{G}_{23}$ и $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ с вещественным значением t; оно порождает сплетающий оператор $-I_{12}J_{23}$.

<u>Доказательство.</u> Согласно (4.7)

$$\mathcal{G}_{23}:=\{|v\rangle=\cos\varphi_{23}|y'\rangle+\sin\varphi_{23}J_{23}|y'\rangle,\ \forall|y'\rangle\in\mathcal{F}_2\}.$$

а по лемме 3.12 и формуле (1.10)

$$\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2:=\{|u\rangle=\frac{1}{2\cos(\varphi_{12}/2)}[|y''\rangle+I_{12}|y''\rangle],\ \forall|y''\rangle\in\mathcal{F}_2\},$$

где J_{23} - сплетающий оператор, I_{12} - оператор естественной изометрии (2.6) между $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, $\cos\varphi_{23}=\rho(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_{23})$, $\cos\varphi_{12}=\rho(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$. Минимальные $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{G}_{23}$ и $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ должны быть наклонены друг к другу под всюду постоянным углом. Распишем их эрмитову форму (2.5), воспользовавшись связями (1.8), до формы на $\mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2$:

$$\langle u|v\rangle+\langle v|u\rangle=\cos\varphi_{23}\cdot\frac{1+\cos\varphi_{12}}{2\cos(\varphi_{12}/2)}[\langle y'|y''\rangle+\langle y''|y'\rangle].$$

Отсюда $\lambda = \pm\cos\varphi_{23}\cdot\cos(\varphi_{12}/2)$, $|y\rangle \mp |y\rangle$, т.е.

$$\cos\varphi_{23}|y\rangle + \sin\varphi_{23} J_{23}|y\rangle \frac{I}{=} \frac{1}{2\cos(\varphi_{12}/2)}\left[|y\rangle + I_{12}|y\rangle\right].$$

Образуем t - псевдоконтакт $\mathcal{Y}_{23}$ и $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ с весами

$$a : b = (1+t) : (1-t) = -1 : 2\cos\varphi_{23}\cos(\varphi_{12}/2);\quad t = \frac{a-b}{a+b}:$$

$$\mathcal{Y}_{13} := \{|w\rangle = \cos\varphi_{23}|x\rangle - \sin\varphi_{23} J_{32} I_{21}|x\rangle,\ \forall |x\rangle \in \mathcal{F}_1\}.$$

Этот псевдоконтакт лежит в подпространстве $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3$, образуя с $\mathcal{F}_1$ постоянный угол $|\varphi_{13}| = \varphi_{23}$, $\varphi_{13} = -\varphi_{23}$. $\boxtimes$

ЛЕММА 4.13. Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... , $\mathcal{F}_m$ - минимальные $\mathbb{K}$ - пространства, и $\mathcal{F}_1$ сплетено в $\mathbb{K}$ с $\mathcal{F}_2$, ... , $\mathcal{F}_m$ операторами J_2 , ... , J_m . Для любого набора направляющих косинусов

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m > 0,\quad (\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 + \dots + (\rho_m)^2 = 1,$$

и любого набора фазовых множителей

$$c_2, \dots, c_m,\quad |c_2| = \dots = |c_m| = 1$$

существует и единственное минимальное $\mathbb{K}$ - пространство $\mathcal{M} \subset \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j$ образующее с каждым $\mathcal{F}_j$ всюду постоянный угол

$$\varphi_j = \arccos\rho_j,\quad \forall j,$$

и такое, что проекции $\mathcal{M}_j = P_{(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_j)}\{\mathcal{M}\}$ сплетают $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_j$ соответственно операторами $c_j J_j$, $J_1 = 1$.

<u>Доказательство.</u> Положим

$$\mathcal{M} := \{|w\rangle = \rho_1|x\rangle + c_2\rho_2 J_2|x\rangle + \dots + c_m\rho_m J_m|x\rangle,\ \forall |x\rangle \in \mathcal{F}_1\}.$$

Очевидно, это подпространство наклонено к каждому $\mathcal{F}_j$ под углом $\arccos\rho_j$. Обратно, всякое подпространство пространства $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j$, образующее со слагаемыми указанные постоянные углы может быть записано в таком виде при некоторых фазовых множителях c_2 , ... , c_m . Далее, очевидно, что

$$\mathcal{M}_j = \{|v\rangle = \rho_1|x\rangle + c_j\rho_j \mathcal{J}_j|x\rangle,\ \ \forall|x\rangle \in \mathcal{F}_1\},$$

и только при таком фазовом множителе связывает $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_j$ сплетающим оператором $c_j \mathcal{J}_j$.

Остается показать по индукции, что $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$. Для $m=1$ это верно по условию. Рассмотрим

$$\mathcal{M}^{(m-1)} := \{|u\rangle = \rho_1'|x\rangle + \ldots + c_{m-1}\rho_{m-1}' \mathcal{J}_{m-1}|x\rangle,\ \ \forall|x\rangle \in \mathcal{F}_1\},$$

где обозначено

$$\rho_k' = \rho_k/r,\ \ \forall k \le m-1;\ r^2 = (\rho_1)^2 + \ldots + (\rho_{m-1})^2,\ \ r^2 + \rho_m^2 = 1.$$

Очевидно, $\mathcal{M}^{(m-1)} \perp \mathcal{F}_m$, кроме того $\mathcal{M}^{(m-1)} \in \mathbb{K}$ по предположению. Так как $\mathcal{M}^{(m-1)}$ контактирует с $\mathcal{F}_1$, а $\mathcal{F}_1$ сплетено в $\mathbb{K}$ с $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{M}^{(m-1)}$ сплетено в $\mathbb{K}$ с $\mathcal{F}_m$ по лемме 4.12 сплетающим оператором $-\mathcal{I}_{m-1}\mathcal{J}_m$, порождаемым $\mathcal{Y}^{(m-1)} \in \mathbb{K}$. Тогда по леммам 4.9 и 4.8 в $\mathcal{M}^{(m-1)} \oplus \mathcal{F}_m$ существует псевдоконтакт $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}^{(m-1)}$ и $\mathcal{Y}^{(m-1)}$ с действительным t , сплетающий $\mathcal{M}^{(m-1)}$ и $\mathcal{F}_m$ оператором $+\mathcal{I}_{m-1}\mathcal{J}_m$, и наклоненный к $\mathcal{M}^{(m-1)}$ под углом $\arccos r$. Поскольку $\mathcal{I}_{m-1}$ связывает

$$|x\rangle \rightleftarrows |u\rangle = \rho_1'|x\rangle + \ldots + c_{m-1}\rho_{m-1}'\mathcal{J}_{m-1}|x\rangle,\ \ \forall|x\rangle \in \mathcal{F}_1,$$

то $\mathcal{I}_m$ связывает

$$|x\rangle \rightleftarrows r|u\rangle + c_m\rho_m \mathcal{J}_m|x\rangle,\ \ \forall|x\rangle \in \mathcal{F}_1,$$

т.е. $\mathcal{I}_m$ связывает $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(m)}$, т.е. $\mathcal{M}^{(m)} \in \mathbb{K}$, как псевдоконтакт, притом нужным образом. Переход от $m-1$ к m проведен. ☒

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Назовем непустое $\mathbb{K}$ - пространство $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ примарным, если:

1° оно является векторной суммой всех минимальных $\mathbb{K}$ - пространств, с ним контактирующих;

2° любые два его ортогональных минимальных $\mathbb{K}$ - подпространства сплетены между собой.

ТЕОРЕМА 4.14. Каждое минимальное $\mathbb{K}$ - пространство содержится в единственном примарном. Любые два различные примарные $\mathbb{K}$ - пространства ортогональны.

<u>Доказательство.</u> Станем говорить, что минимальные $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ связаны в $\mathbb{K}$, если они контактируют или если они ортогональны, но сплетены. Отношение связи рефлексивно и симметрично. Докажем, что оно транзитивно.

Пусть $\mathcal{F}_1$ связано с $\mathcal{F}_2$, а $\mathcal{F}_2$ - с $\mathcal{F}_3$. Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ неортогональны, то они контактируют и, тем самым связаны. Если же они ортогональны, то возможны следующие варианты. 1°. $\mathcal{F}_1$ контактирует с $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ - с $\mathcal{F}_3$. Тогда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ сплетены посредством $\mathcal{F}_2$, т.е. они связаны. 2°. $\mathcal{F}_1$ контактирует с $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ сплетено с $\mathcal{F}_3$. Тогда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ сплетены по лемме 4.12, т.е. они связаны. 3°. $\mathcal{F}_1$ сплетено с $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ контактирует с $\mathcal{F}_3$. Вывод аналогичен предыдущему. 4°. $\mathcal{F}_1$ сплетено с $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ сплетено с $\mathcal{F}_3$. Тогда $\mathcal{F}_1$ сплетено с $\mathcal{F}_3$ по лемме 4.11, т.е. они связаны.

В силу доказанного все минимальные $\mathbb{K}$ - пространства разбиваются на подклассы связанных между собою. Два минимальные $\mathbb{K}$ - пространства разных подклассов ортогональны и не сплетены.

Рассмотрим для каждого подкласса векторную сумму $\mathcal{K} = \sum\limits_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ входящих в него пространств. Так как $\mathrm{Dim}\,\mathcal{K} \leq \mathrm{Dim}\,\mathcal{H}$, то эта сумма совпадает с суммой конечного числа некоторых из слагаемых. Отсюда $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Любое минимальное $\mathbb{K}$ - пространство из другого подкласса ортогонально $\mathcal{K}$, так как ортогонально всем его слагаемым. Значит, условие 1° определения 4.10 выполнено. Условие 2° выполнено по построению подкласса.

Каждое примарное $\mathbb{K}$ - пространство вместе с минимальным $\mathcal{F}$ обязано в силу условия 1° содержать все минимальные $\mathbb{K}$ - пространства одного подкласса с $\mathcal{F}$. С другой стороны, примарное пространство не может содержать минимальных из разных подклассов, так как это противоречило бы условию 2°. Таким образом, сумма каждого подкласса - примарное пространство, и обратно.

Любые два различные примарные пространства ортогональны, так как все слагаемые одного ортогональны всем слагаемым другого. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 4.15. Каждое примарное $\mathbb{K}$ - пространство

$$\mathcal{H}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{H}'), \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{H}').$$

Всякое $\mathbb{K}$ - подпространство $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}'$ имеет вид

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N},$$

и обратно. В частности, минимальные $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{M}$ имеют вид $\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ - прямая.

$$\mathcal{M}_a := \{|w\rangle=\sum_k a_k J_k|x\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}_1\in\mathbb{K}\}= \qquad (4.15)$$
$$=\{|w\rangle=|x\rangle\otimes|a\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}_1\simeq\mathcal{E}\}.$$

Доказательство. Разложим $\mathcal{H}'$ по лемме 4.4 в ортогональную сумму минимальных: $\mathcal{H}'=\bigoplus_{k=1}^{m}\mathcal{F}_k$. Из отличающихся друг от друга скалярным фазовым множителем сплетающих $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_k$, $\forall k$, операторов выберем по представителю J_{1k} , $J_{11}=\mathbb{1}$.Пусть $\{|e_1^{(j)}\rangle\}_{j=1}^{\mu}$ -базис $\mathcal{F}_1$ Тогда $\{|e_k^{(j)}\rangle\}_{j,k=1}^{j=\mu,k=m}$, $|e_k^{(j)}\rangle=J_{1k}|e_1^{(j)}\rangle\}$, будет базисом $\mathcal{H}'$. Рассмотрим μ - мерное унитарное пространство $\mathcal{E}$ с базисом $\{|\mathcal{E}^{(j)}\rangle\}_{j=1}^{\mu}$ и m - мерное унитарное пространство $\mathcal{N}$ с базисом $\{|\mathit{Э}_k\rangle\}_{k=1}^{m}$. Их тензорное произведение $\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}$ можно отождествить с $\mathcal{H}'$, положив $|e_k^{(j)}\rangle=$ $=|\mathcal{E}^{(j)}\rangle\otimes|\mathit{Э}_k\rangle=|\mathcal{E}^{(j)}\otimes\mathit{Э}_k\rangle$, ср. (I. 5.1). Согласно лемме 4.13, каждое минимальное $\mathbb{K}$ - пространство можно представить в "параметрической форме" в виде

$$\mathcal{M}=\{|w\rangle=\sum_{\rho_k>0} c_k\rho_k J_{1k}|x\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}_1\},$$

где $|c_k|=1$, $\forall k$; $\sum_k(\rho_k)^2=1$, и обратно, причем соответствие однозначно, если считать, что $c_{\varkappa}=1$ при $\rho_1=\ldots=\rho_{\varkappa-1}=0$, $\rho_{\varkappa}>0$. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между минимальными $\mathbb{K}$ - пространствами $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{H}'$ и единичными векторами $|a\rangle\in\mathcal{N}$, имеющими в фиксированном базисе первую отличную от нуля координату положительной:

$$\mathcal{M}_a := \{|w\rangle=\sum_k a_k J_{1k}|x\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}_1\}$$

В свою очередь, каждой прямой $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{N}$ отвечает один и только один направляющий единичный вектор такого типа. Тем самым, устанавливаемое соответствие $\mathcal{M}\leftrightarrow\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}\leftrightarrow\mathcal{L}$ справедливо. Это соответствие линейно. Далее, ортогональным векторам $|a'\rangle, |a''\rangle\in\mathcal{N}$ отвечают в силу (I.5.2) ортогональные минимальные $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{M}_{a'}$ и $\mathcal{M}_{a''}$. Так как по лемме 4.4 каждое $\mathcal{B}\in\mathbb{K}$ однозначно раскладывается в ортогональную сумму минимальных, то соотношение

$\mathcal{B} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}(\mathcal{B})$ справедливо для всех $\mathbb{K}$ -пространств $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}'$. ☒

ТЕОРЕМА 4.16. Пусть $\mathbb{K}$ — некоторая $\mathcal{C}$ - квазилогика подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$. Она определяет ортогональное разложение.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^{\ell} \mathcal{H}_i \ ; \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{N}_i \ , \quad \forall i > 0 \ , \tag{4.16}$$

всего пространства на примарные (и еще $\mathcal{H}_0$). Любое $\mathbb{K}$ - пространство $\mathcal{Y}$ представимо в форме

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_i), \ \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_i = \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{A}_i(\mathcal{K}), \ \forall i > 0 \tag{4.17}$$

Наоборот, любой набор $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{N}_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, определяет по (4.17) некоторое $\mathbb{K}$ - пространство.

ДОБАВЛЕНИЕ. $\mathcal{H}_0$ сводится к нулю тогда и только тогда, когда $\mathbb{K}$ — логика.

Доказательство. Выделим в $\mathcal{H}$ все примарные $\mathbb{K}$ - пространства $\mathcal{H}_i$. По теореме 4.14 все они попарно ортогональны, а их сумма $\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \mathcal{H}_i$ содержит все минимальные, а,стало быть, и все - все $\mathbb{K}$ - пространства. Введем еще $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{\mathbb{K}}$. Мы получили разложение (4.16), где $\mathcal{H} \in \mathbb{K}$ в том и только том случае, если $\mathcal{H}_0 = 0$.

Рассмотрим любое $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ и $\mathcal{K} \ominus (\mathcal{K} \cap \mathcal{H}_i) = \mathcal{K}^{(i)}$. $\mathbb{K}$-пространство $\mathcal{K}^{(i)}$ не может контактировать с $\mathcal{H}_i$, иначе бы в силу определения примарного $\mathbb{K}$ - пространства, $(\mathcal{K}^{(i)} + \mathcal{H}_i) \cap \mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_i$. Следовательно, $\mathcal{K}^{(i)} \perp \mathcal{H}_i, \ \forall i$. По индукции отсюда выводится справедливость ортогонального разложения (4.17). Представление слагаемых вытекает из теоремы 4.15, также как и обратное утверждение. ☒

§ 5. Логика унитарных ковариантов семейства подпространств.

Как и в § 3, см. (3.1), мы будем через $U(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$ обозначать подгруппу всех унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}$, отображающих на себя каждое из подпространств $\mathcal{R}_\alpha$, $\forall\alpha$. Наша цель - изучить систему всех ковариантов семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\{\mathcal{G}_\beta\}$ - некоторое семейство ковариантов семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$, и пусть $\mathcal{K}$ - ковариант семейства $\{\mathcal{G}_\beta\}$. Тогда $\mathcal{K}$ — ковариант исходного семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$, и

$$U(\mathcal{H}|\{\mathcal{G}_\beta\}) \supseteq U(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}) \tag{5.1}$$

Доказательство. Каковы бы ни были $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathcal{H}$ справедливо

$$U(\mathcal{H}|\{\mathcal{F}_\gamma\}) = \bigcap_\gamma U(\mathcal{H}|\mathcal{F}_\gamma). \tag{5.2}$$

Так как из определения коварианта (3.2) следует, что ковариантность $\mathcal{G}$ равносильна включению

$$U(\mathcal{H}|\mathcal{G}) \supseteq U(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}), \tag{5.3}$$

то из (5.2) получаем, что

$$U(\mathcal{H}|\mathcal{K}) \supseteq U(\mathcal{H}|\{\mathcal{G}_\beta\}) =$$

$$= \bigcap_\beta U(\mathcal{H}|\mathcal{G}_\beta) \supseteq U(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}). \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 5.2. Система всех унитарных ковариатов семейства подпространств является $\mathcal{C}$ - логикой.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - коварианты:

$$U\{\mathcal{K}_i\} = \mathcal{K}_i, \quad i = 1,2, \quad \forall U \in U(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\}).$$

Отсюда вытекает, что для каждого U из подгруппы

$$U\{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2\} = U\{\mathcal{K}_1\} + U\{\mathcal{K}_2\} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2.$$

Поскольку унитарное преобразование переводит ортогональные подпространства в ортогональные, то

$$\mathcal{H}=U\{\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}\}=U\{\mathcal{K}\}\oplus U\{\mathcal{K}^{\perp}\}=\mathcal{K}+U\{\mathcal{K}^{\perp}\},$$

откуда $U\{\mathcal{K}^{\perp}\}=\mathcal{K}^{\perp}$ по единственности ортодополнения.

Ковариантность пересечения ковариантов совершенно очевидна. Сложнее доказать ковариантность псевдоконтактов. Так как контакты $\mathcal{F}\,\mathit{l}\!\cap\,\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap\!\mathit{l}\,\mathcal{G}$ пары ковариантов суть ковариантны этой пары, то, по лемме 5.1, они являются ковариантами исходного семейства. Согласно лемме 3.3 устанавливаемое с помощью ортопроекторов изометрическое соответствие I_1 коммутирует с преобразованиями группы $U(\mathcal{H}|\mathcal{F},\mathcal{G})$ и, подавно, с преобразованиями исходной более узкой по (5.1) подгруппы. Так как $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}\,\mathit{l}\!\cap\,\mathcal{G}$ при всех рассматриваемых преобразованиях U отображается на себя, то на себя по тому же закону U отображается на себя и псевдоконтакт

$$\mathcal{K}(t):=\{|w\rangle=a|x\rangle+b\,I_1|x\rangle,\ \forall|x\rangle\in\mathcal{F}\,\mathit{l}\!\cap\,\mathcal{G}\}.\ \boxtimes$$

Очевидно, что пересечение двух и, вообще, любого числа $\mathcal{C}$ - логик — снова является $\mathcal{C}$ - логикой , поскольку операции „$+$", „$\oplus$", „$\perp$" определены на решетке всех подпространств. Поэтому, пересечение всех логик, содержащих подпространства $\mathcal{R}_\alpha$, $\forall\alpha$, будет минимальной логикой, содержащей все $\mathcal{R}_\alpha$. Ее элементы можно получить из 0 и исходных $\mathcal{R}_\alpha$ с помощью операций „$+$", „$\oplus$", „$\perp$", применяя их во всевозможных конечных сочетаниях и комбинациях. Поэтому, эту логику естественно назвать логикой, порожденной семейством $\{\mathcal{R}_\alpha\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Минимальную логику, содержащую все $\mathcal{R}_\alpha$, условимся обозначать $\mathbb{K}(\{\mathcal{R}_\alpha\})$.

ТЕОРЕМА 5.3. Логика $\mathbb{K}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ содержит все ковариантны пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ. Система всех ковариантов пары подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ является минимальной логикой, содержащей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Доказательство. Строение любого ковариантa пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ описано таблицей теоремы 3.11. Нам достаточно показать, что к $\mathbb{K}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ принадлежат все ортогональные слагаемые $\mathcal{K}_\nu$.

Как вытекает из теоремы 2.3

$$\mathcal{F}^{(k-1)} \underset{1}{\cap} \mathcal{G}^{(k-1)} = \mathcal{F}_k\,, \quad \mathcal{F}^{(k-1)} \underset{2}{\cap} \mathcal{G}^{(k-1)} = \mathcal{G}_k, \quad 1 \le k \le s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \tag{5.4}$$

где $\mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}$, $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$, а при $1 \le k \le s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + 1$

$$\mathcal{F}^{(k)} = \mathcal{F}^{(k-1)} \ominus \mathcal{F}_k\,, \qquad \mathcal{G}^{(k)} = \mathcal{G}^{(k-1)} \ominus \mathcal{G}_k\,. \tag{5.5}$$

Отсюда, по индукции вытекает, что все $\mathcal{F}_k^{(k)}$ и $\mathcal{G}_k^{(k)}$ принадлежат $\mathbb{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, все $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{G}_k$ и $\mathcal{H}_k = \mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k$, $k \le s+1$, также принадлежат $\mathbb{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, и что $\mathcal{H}_{s+2} = (\mathcal{F} + \mathcal{G})^{\perp} \in \mathbb{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Далее, по определению (3.19) всякий ковариант

$$\mathcal{K}_\nu(t) = \mathcal{F}^{(\nu-1)} \underset{t}{\cap} \mathcal{G}^{(\nu-1)} \in \mathbb{K}; \quad t \in \mathbb{C} + \infty\,. \tag{5.6}$$

Таким образом, все возможные слагаемые принадлежат $\mathbb{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Так как система всех ковариантов, согласно теореме 5.2, является $\mathbb{C}$ – логикой, и так как она содержится в минимальной логике $\mathbb{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, то она совпадает с последней. $\boxtimes$

Наряду с унитарными подгруппами, преобразующими в себя конечную систему подпространств мы можем рассмотреть подгруппы унитарных преобразований, переводящих в себя все подпространства некоторого класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathbb{K}$ – логика. Условимся обозначать $\mathbb{U}(\mathcal{H} \mid \mathbb{K})$ подгруппу унитарных преобразований, переводящих в себя каждый элемент логики.

Заметим, что согласно лемме 5.1

$$\mathbb{U}(\mathcal{H} \mid \mathbb{K}\{\mathcal{R}_\alpha\}) = \mathbb{U}(\mathcal{H} \mid \{\mathcal{R}_\alpha\}). \tag{5.7}$$

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{H}_i$ – разложение $\mathcal{H}$ на примарные $\mathbb{K}$ – пространства. Тогда любое преобразование $U \in \mathbb{U}(\mathcal{H} \mid \mathbb{K})$ раскладывается в произведение

$$U = U_1 \ldots U_\ell\,; \quad U_i U_j = U_j U_i\,, \quad \forall i, j, \tag{5.8}$$

коммутирующих унитарных преобразований

$$U_k = U^{(k)} + \sum_{\nu \ne k} P_{\mathcal{H}_\nu}\,, \quad U^{(\nu)} = P_{\mathcal{H}_\nu} U P_{\mathcal{H}_\nu}\,, \tag{5.9}$$

действующих каждое только на свое $\mathcal{H}_k$.

СЛЕДСТВИЕ. Группа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ разлагается в свободное произведение групп $\mathcal{U}(\mathcal{H}_i|\mathbb{K}\cap\mathcal{H}_i)$

Доказательство. Согласно лемме 3.1, для каждого

$$V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_l)\supseteq\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$$

имеем

$$UP_{\mathcal{H}_k}=UP_{\mathcal{H}_k}P_{\mathcal{H}_k}=P_{\mathcal{H}_k}UP_{\mathcal{H}_k}.$$

Как доказано в теореме 4.14, примарные пространства попарно ортогональны. Это дает

$$P_{\mathcal{H}_i}P_{\mathcal{H}_k}=P_{\mathcal{H}_k}P_{\mathcal{H}_i}=\mathcal{O},\quad\forall i\neq k;\quad V=\sum_i P_{\mathcal{H}_i}VP_{\mathcal{H}_i}.$$

Перемножая равенства (5.9) с учётом выведенных соотношений получаем (5.8). ⊠

ЛЕММА 5.5. Пусть $\mathcal{J}$ - сплетающий оператор минимальных $\mathbb{K}$ - пространств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Тогда соответствие $\mathcal{J}$ коммутирует со всяким унитарным преобразованием $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$

Доказательств. Пусть минимальное $\mathbb{K}$ - пространство $\mathcal{Y}$ связывает $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, порождая по (4.9) сплетающий оператор $\mathcal{J}=I^{(1)}I^{(2)}$. Так как $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_1,\mathcal{Y},\mathcal{F}_2)\supseteq\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$, то любое $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ коммутирует, как с $I^{(1)}$, так и с $I^{(2)}$ по лемме 3.3.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $\mathcal{H}$ - примарное $\mathbb{K}$ - пространство, $\mathcal{H}=\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}$ - его представление (4.16), $\mathcal{H}=\bigoplus_{j=1}^{m}\mathcal{F}_j$ - одно из его ортогональных разложений. Группа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ изоморфна полной группе $\mathcal{U}(\mathcal{E})$. Каждому унитарному $V\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)\simeq\mathcal{U}(\mathcal{E})$ ставится в соответствие оператор $U=\bigoplus_{j=1}^{m}(\mathcal{J}_j V\mathcal{J}_j)$, где $\mathcal{J}_j$ - оператор, сплетающий $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_j$, и обратно, $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ ставится в соответствие сужение V на $\mathcal{F}_1$.

СЛЕДСТВИЕ. Группа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ для произвольной C-логики $\mathbb{K}$ изоморфна свободному произведению полных унитарных подгрупп $\mathcal{U}(\mathcal{E}_i)$, где $\mathcal{H}=\bigoplus_i(\mathcal{E}_i\otimes\mathcal{N}_i)$ - разложение $\mathcal{H}$ на примарные $\mathbb{K}$ - пространства.

Доказательство. Каждому $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}\,|\,\mathbb{K})$ ставится в соответствие его ограничение $V = V_1$ на инвариантное подпространство $\mathcal{F}_1$, а также аналогичные $V_2, \ldots, V_m$. Так как, по лемме 5.5, U сохраняет соответствие J_j, то $V_j = J_j V J_j$. По лемме 3.1 для каждого $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathcal{F}_j) \supseteq \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$

$$UP_{\mathcal{F}_j} = P_{\mathcal{F}_j} U \simeq V_j \ ; \quad P_{\mathcal{F}_j} P_{\mathcal{F}_k} = \mathbb{O}, \quad \forall j \neq k,$$

откуда для $U = \sum_j UP_{\mathcal{F}_j}$ получаем искомое представление. $\boxtimes$

Как доказано в теореме 5.2, система всех унитарных ковариантов некоторого семейства $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ образует логику. На минуту условимся обозначать ее $\mathbb{K}'(\{\mathcal{R}_\alpha\})$. Очевидно, она содержит минимальную логику $\mathbb{K}(\{\mathcal{R}_\alpha\})$. Наша цель - доказать, что она совпадает с этой логикой.

ЛЕММА 5.7. Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{H}_i$ - разложение пространства в сумму примарных $\mathbb{K}$ - пространств. Тогда для любого коварианта $\mathcal{R} \in \mathbb{K}'$

$$P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{R}\} \subseteq \mathcal{R}, \quad \forall i \tag{5.10}$$

СЛЕДСТВИЕ. Каков бы ни был ковариант $\mathcal{R} \in \mathbb{K}'$, справедливо разложение

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{R}\} \tag{5.11}$$

Доказательство. Пусть T_i - блочно-диагональное унитарное преобразование, действующее как отражение в нуле на $\mathcal{H}_i$, т.е. $|x\rangle \to -|x\rangle \in \mathcal{H}_i$, и тождественное на остальных примарных пространствах. Ввиду $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ это отображение унитарно. Далее, оно переводит в себя каждое $\mathbb{K}$ - пространство, целиком содержащееся в одном из примарных, так как действует на него либо как тождественное, либо как отражение в нуле. Значит, оно переводит в себя все минимальные $\mathbb{K}$ - пространства. Но тогда оно переводит в себя и все $\mathbb{K}$ - пространства, включая исходные $\mathcal{R}_\alpha$, ввиду разложения

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{Y}\} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij} \subseteq \mathcal{Y}_i} \mathcal{F}_{ij} \xrightarrow{T_i} \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij} \subseteq \mathcal{Y}_i} \mathcal{F}_{ij},$$

где $\mathcal{Y}_i = P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{Y}\}$, а $\mathcal{F}_{ij}$ - минимальны.

Пусть теперь $\mathcal{R} \in \mathbb{K}'$ и

$\mathcal{B} \ni |w> = |u> + |v>, \quad |u> \in \mathcal{H}_i, \quad |v> \in (\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_i).$

Тогда,раз $T_i \in \mathcal{U}(\mathcal{H}|\{\mathcal{R}_\alpha\})$,то

$\mathbb{K}' \ni \mathcal{B} \ni |z> = T|w> = -|u> + |v>.$

Следовательно,принадлежит подпространству $\mathcal{B}$

$\frac{1}{2}|w> - \frac{1}{2}T_i|w> = |u> \Rightarrow P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{B}.$

Из (5.10) вытекает, что $\mathcal{B} \supseteq \bigoplus_{i=1}^{\ell} P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{B}\}$.Обратное включение очевидно, ввиду $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{\ell} P_{\mathcal{H}_i}$. $\boxtimes$

ЛЕММА 5.8. Всякое минимальное $\mathbb{K}$ - пространство $\mathcal{M}$ является одновременно минимальным $\mathbb{K}'$- пространством.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_i \in \mathbb{K}$. По теореме 5.6 любое унитарное преобразование $\mathcal{M}$ однозначно продолжается до унитарного преобразования всего примарного пространства $\mathcal{H}_i$, скажем, неподвижного на остальных $\mathcal{H}_j$, $j \neq i$.Отсюда орбитой любого отличного от нулевого вектора $|x> \in \mathcal{M}$ будет вся сфера подпространства $\mathcal{M}$ радиуса $\sqrt{<x|x>}$, а ее линейной оболочкой - само $\mathcal{M}$. Значит, любой ковариант, пересекающийся с $\mathcal{M}$, содержит это $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 5.9. Система $\mathbb{K}'(\{\mathcal{R}_\alpha\})$ всех унитарных ковариантов семейства подпространств $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ совпадает с минимальной $\mathbb{C}$ - логикой $\mathbb{K}(\{\mathcal{R}_\alpha\})$, порожденный этим семейством.

<u>Доказательство.</u> Нам надо показать, что любой ковариант $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Предположим сперва, что $\mathcal{K}$ минимально в $\mathbb{K}'$. Пусть $\mathcal{K}$ контактирует по крайней мере с $\mathcal{H}_i$, примарным в $\mathbb{K}$. Если оно контактирует еще с одним $\mathcal{H}_k$, то по лемме 5.7 оно разлагается в ортогональную сумму по крайней мере двух своих проекций, и, тем самым, оно не минимально. Значит, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_i$ при некотором i . Тем самым выполнено условие 1° примарности $\mathcal{H}_i$ в $\mathbb{K}'$.

Разложим $\mathcal{H}_i = \bigoplus_{j=1}^{\mu_i} \mathcal{F}_{ij}$ в сумму минимальных $\mathbb{K}$ - пространств, сплетенных между собою. По лемме 5.8 они являются также минимальными $\mathbb{K}'$- пространствами, сплетенными в $\mathbb{K}'$. Любое минимальное в $\mathbb{K}'$ пространство $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_i$ контактирует хотя бы с одним из $\mathcal{F}_{ij}$, а потому, по леммам 4.11 и 4.12, либо контактирует, либо сплетено с любым другим $\mathbb{K}'$ - минимальным

$\mathcal{M}' \subset \mathcal{H}_i$. Тем самым, выполнено и условие 2°, так что $\mathcal{H}_i$ является также $\mathbb{K}'$ - примарным. Согласно теореме 4.15 каждое минимальное $\mathcal{M} \in \mathbb{K}'$ единственным образом представляется в виде

$$\mathcal{M}_a := \{|w\rangle = \sum_{j=1}^{m_i} q_j J_j |x\rangle, \ \forall |x\rangle \in \mathcal{F}_1\}, \quad \mathcal{F}_1 \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}',$$

где сплетающие операторы J_j те же, что и для $\mathbb{K}$, поскольку и все $\mathcal{F}_j \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$, и все связующие $\mathcal{G}_{ij} \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ также. Значит, $\mathcal{M} \in \mathbb{K}'$ влечет, что $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$.

Произвольный ковариант $\mathcal{K}$ раскладывается в ортогональную сумму $\mathbb{K}'$ - минимальных, т.е. в сумму $\mathbb{K}$ - пространств. Тем самым $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ по определению логики. ☒

Рассмотрим приложения построенной теории. Пусть $\mathcal{G}$ - некоторая группа унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}$, т.е. некоторая подгруппа группы $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Как обычно, подпространство $\mathcal{K}$ называется $\mathcal{G}$ - инвариантным, если оно инвариантно для любого $U \in \mathcal{G}$:

$$U\{\mathcal{K}\} = \mathcal{K}, \qquad \forall U \in \mathcal{G}. \tag{5.12}$$

ТЕОРЕМА 5.10. Система $\mathbb{K}$ всех $\mathcal{G}$ - инвариантных подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$ образует $\mathcal{C}$ - логику.

<u>Доказательство.</u> Любой ковариант $\mathcal{K}$ семейства $\mathbb{K}$ всех $\mathcal{G}$ - инвариантных подпространств сам является $\mathcal{G}$ - инвариантным подпространством, поскольку $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ по определению, см. (3.1) и (5.12). Следовательно, $\mathbb{K}$ - является семейством всех ковариантов семейства $\mathbb{K}$. Но такая система — обязательно $\mathcal{C}$ - логика, см. лемму 5.2 и теорему 5.9. ☒

Заметим, что группа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K}(\mathcal{G})) \supseteq \mathcal{G}$, причем возможно строгое включение. Исходную группу $\mathcal{G}$ можно взять, например, дискретной. А группа $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K})$ обязательно изоморфна свободному произведению нескольких полных унитарных групп. Переход от $\mathcal{G}$ к $\mathcal{U}(\mathcal{H}|\mathbb{K}(\mathcal{G}))$ удобно описывать в терминах $\mathcal{C}^*$ - алгебр .

§ 6. $\mathcal{C}$ - логики и проблема П.Иордана.

Напомним, что в элементарной некоммутативной теории вероятностей множество состояний объекта описывается набором $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s\}$ унитарных пространств, называемых когерентными подпространствами (или секторами) абстрактного гильбертова пространства объекта $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i$,см. напр. [3] , § 2. Событиям отвечают всевозможные подпространства $\mathcal{C}$ пространства $\mathcal{H}$, имеющие вид

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{C}_i \quad ; \quad \mathcal{C}_i = P_{\mathcal{H}_i}\{\mathcal{C}\}, \quad \forall i. \tag{6.1}$$

ТЕОРЕМА 6.1. Любая $\mathcal{C}$ - логика $\mathbb{K}$ подпространств унитарного пространства изоморфна логике событий некоторого объекта.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ - логика $\mathbb{K}$ подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$ определяет ортогональное разложение (4.16):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{H}_i \; ; \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{N}_i \; , \quad \forall i,$$

всего пространства на примарные. Рассмотрим объект,описываемый набором $\{\mathcal{N}_1 \; , \dots , \; \mathcal{N}_\ell\}$, с абстрактным пространством $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{N}_i$. Поскольку, согласно теореме 4.16, все элементы $\mathcal{C}$ - логики представимы в виде (4.17):

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{A}_i(\mathcal{K})),$$

они все находятся во взаимно-однозначном соответствии с подпространствами

$$\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{A}_i(\mathcal{K}) = \mathcal{A}_{\mathbb{K}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}. \tag{6.2}$$

Минимальным элементам $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ отвечают прямые $\mathcal{L} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{N}_i\right)$. Всюду одинаковый угол между такими $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ равен углу между их образами $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ ввиду (4.15).

Таким образом, если у нас есть некоторый объект и мы фиксируем только несколько его "да - нет свойств",то построив $\mathcal{C}$ - логику,порожденную фиксированными событиями, мы получим описание нового, более узкого объекта. Правда, описание будет неэкономным, но,тем не менее, это будет описание объекта некоммутативной теории вероятностей. Его можно упростить по схеме (6.2), получив уже редуцированное описание.

В ряде последних работ, см.например, [9] , П.Иордан ставил вопрос о привлечении нетрадиционных математических структур, в частности, неассоциативных алгебр, для описания объектов квантовой логики. Наша работа является частичным ответом на этот вопрос. Правда, замена операции пересечения целой серией операций уводит далеко от простейших обобщений булевых алгебр. Но ясно, что раз система ковариантов конечного семейства несовместимых событий континуальна, то, допуская лишь конечное число различных основных операций невозможно построить всякий ковариант из исходных подпространств за конечное число шагов. Если же допустить еще предельный переход в метрике (2.15), то в описании $\mathcal{C}$ – логик можно ограничиться операциями "+", "$\widehat{\sqrt{2}}$", "$\perp$", где вместо $t=\sqrt{-2}$ можно взять любое иррациональное чисто мнимое число. Тот факт, что унитарные коварианты любого конечного (на самом деле и бесконечного тоже) семейства могут быть построены из исходных подпространств бинарными ковариантными операциями, кажется достаточно исключительным. Как следует из результатов работы [10], для ковариантов полной линейной группы ситуация совершенно иная. Впрочем, уже для построения унитарно-антиунитарных ковариантов необходимо прибегать к тернарным операциям.

Мы не умеем описывать $\mathcal{C}$= логики системой аксиом (если только не вводить их через $\mathcal{C}^*$= алгебры). Это существенный недостаток по сравнению с подходом Вардаражана [11], где логика событий определяется как модулярная решетка с ортодополнениями, в которой все максимальные строго монотонные цепочки событий имеют одинаковую длину.

Наш операционалистский подход имеет свои преимущества. В частности, построение контакта приводится к аналитически очень прозрачной задаче возмущения проектора. Возможно также "конструировать" автоматы для"осуществления" операций $\mathcal{C}$ = логики, типа устройства, указанного в [12], 6-8.

Наши сомнения относятся не к методу, а к самому объекту: насколько естественно считать логику унитарных ковариантов аналогом булевой алгебры, порожденной семейством событий? Дело в том, что описание объектов некоммутативной теории вероятностей дается с точностью до унитарного или антунитарного, см. [13], преобразования координат. Часто о втором типе преобразований забывают (в частности, он не упомянут в § 2 препринта [3]). Если же этот факт учитывать, то с семейством событий надо скорее связывать более узкую систему унитарно-антиунитарных ковариантов. Такая система, вообще говоря, уже не будет $\mathcal{C}$ = логикой. Имеются косвенные математические соображения (связанные с теорией стохастических суперматриц, как преобразователей информации), что естественным объектом являются именно $\mathbb{R}$ = логики. Этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

Институт прикладной математики АН СССР

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

I. G.Birkhoff, J.von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann.Math. 37, (1936), 823-835.

2. I.Segal, Mathematical Problems of Relativistic Physics, AMS, Providence, 1963 (русский перевод 1968)

3. Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов, Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы, Препринт ИПМ № 84 (1973) 3-67.

4. C.Jordan, Essai sur la geometrie a "n" dimensions, Bull. Soc. Math. de France, t.3, Annee 1874-75, 103-174 (IV. Invariants angulaires, 122-138).

5. П.А.Широков, Тензорные исчисления, ч.I, Алгебра тензоров, ОНТИ - ГТТИ, Л - М, 1937 (см.§ 31, п.5)

6. И.М.Глазман, Ю.И.Любич, Конечномерный линейный анализ в задачах, Наука, М, 1969.

7. T.Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966 (Русск.перевод, 1972)

8. Н.Н.Ченцов, Статистические решающие правила и оптимальные выводы, Наука, М., 1972.

9. P.Jordan, Über das Verhältnis der Theorie der Elementarlänge zur Quanten theorie, Commun.math.Phys., 9 (1968), 272-292.

10. И.М.Гельфанд, В.А.Пономарев, ДАН, 197, №4 (1971), 762-765; Задачи линейной алгебры и классификации четверок подпространств конечномерного векторного пространства, Препринт ИПМ № 6 (1971), 3-99.

II. V.S. Varadajn, Geometry of Quantum Theory, v.I, Princeton, I968.

I2. J.M. Jauch, Foundation of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, London, I968.

I3. E.P. Wigner, Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, N.-Y, I959.
(русск. перевод I96Iг.)