ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЙОРДАНОВЫЕ ЛОГИКИ

Препринт № 113 за 1975г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

УДК 513.821+512.897+517.11+530.145

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЙОРДАНОВЫ ЛОГИКИ

ELEMENTARY JORDAN LOGICS

Москва, 1975 г.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены логики и квазилогики подпространств конечномерного унитарного пространства $\mathcal{H}$ с операциями векторного сложения, ортогонального вычитания, выделения контактов двух подпространств (некоммутативного обобщенного пересечения), а также когерентного комбинирования изоклинных подпространств. Такие решетки событий появляются вместо булевых алгебр и колец при описании логики квантовых явлений.

Доказано, что для любой замкнутой иордановой алгебры T эрмитовых операторов на $\mathcal{H}$, носители операторов образуют $\mathcal{R}$ - квазилогику. Указано неклассическое тождество, связывающее значения операторно-заданной меры на пучке изоклинных подпространств. Показано, что для любого линейного пространства S таких мер, содержащего с каждой мерой также её положительную и отрицательную части, носители мер тоже образуют $\mathcal{R}$ - квазилогику. Обсуждены различия между $\mathcal{C}$- и $\mathcal{R}$-логиками, квантовыми логиками по фон Нейману и по Йордану.

A B S T R A C T

The paper considers the logics and quasi-logics of the subspaces of a finite-dimensional unitary space $\mathcal{H}$ with vector addition, orthogonal substruction, isolation of contacts (non-commutative generalized meet) of two subspaces, and coherent combination of isocline subspaces as logical operations. Such lattices of events appear instead of Boolean algebras and rings in describing the quantum phenomena logic.

It is proved that for any closed Jordan albegra T of Hermitean operators on $\mathcal{H}$, the carries of operators form a $\mathcal{R}$ - quasi-logic. A non-classical equality connecting the values of an operator-defined measure on a pencil of isocline subspaces is indicated. It is shown that if a linear space S of such measures contains a positive and a negative parts of each $\mu \in S$, then the carriers of S - measures also form a $\mathcal{R}$ - quasi-logic. The differences between $\mathcal{C}$ - and $\mathcal{R}$ - logics, - i.e. the quantum logics according to von Neumann and Jordan respectively - are discussed.

СОДЕРЖАНИЕ

C O N T E N T S

ВВЕДЕНИЕ

Логики Буля, фон Неймана и Йордана.

Эта работа посвящена изучению операций "некоммутативной логики", т.е. логики событий в некоммутативной теории вероятностей. Как и в классической теории вероятностей, от логики событий приходится отличать алгебру суждений о событиях, поскольку последние (например, результаты измерения квантовомеханических величин), как правило, индетерминированы. Соответствующие вероятностные правила вывода являются обобщением статических решающих правил классической статистики.

Здесь мы рассматриваем только логику самих событий. Притом мы ограничиваемся только элементарным случаем, когда эта логика описывается решеткой подпространств конечномерного унитарного пространства.

Чтобы пояснить предмет и методы нашего исследования, напомним классические понятия. Пусть дано какое-то конечное множество $\mathcal{M}$ и класс $\mathbf{B}(\mathcal{M})$ всех его подмножеств. Булевой алгеброй мы называем всякий содержащий $\mathcal{M}$ и $\emptyset$ подкласс $\mathbf{B}'\subseteq\mathbf{B}(\mathcal{M})$, устойчивый относительно булевых логических операций: $\mathbf{I}$ перехода от $\mathcal{A}\in\mathbf{B}'$ к дополнительному множеству $\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}=\bar{\mathcal{A}}$ (отрицание $\mathcal{A}$), $\bar{\bar{\mathcal{A}}}=\mathcal{A}$; $\underline{\overline{III}}$ пересечения $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\mathcal{B}\cap\mathcal{A}$ двух множеств $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{B}'$; $\underline{\overline{II}}$ объединения $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}=\mathcal{B}\cup\mathcal{A}$ двух множеств $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{B}'$; причем эти три операции связаны между собою известной системой тождеств, см. [1], [2], в том числе

$$(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup C=(\mathcal{A}\cup C)\cap(\mathcal{B}\cup C)$$

$$(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\cap C=(\mathcal{A}\cap C)\cup(\mathcal{B}\cap C) \qquad (0.1)$$

$$\overline{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}=\bar{\mathcal{A}}\cap\bar{\mathcal{B}}$$

Очевидно, класс $\mathbf{B}(\mathcal{M})$ всех подмножеств $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ является булевой алгеброй. Справедливо и обратное, в каком-то смысле, утверждение. Для конечного множества $\mathcal{M}$ всякая булева подалгебра $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{M})$ изоморфна булевой алгебре $\mathbf{B}(\mathcal{M}')$ всех подмножеств некоторого своего множества $\mathcal{M}'$. В самом деле, в алгебре $\mathbf{B}'$ можно выделить минимальные элементы, т.е. множества, не имеющие собственных $\mathbf{B}'$-подмножеств; множество $\mathcal{M}'$ минимальных элементов и будет искомым[ж)].

Всякий класс $K = \{C_\alpha\}$ подмножеств $C_\alpha \subseteq \mathcal{M}$ порождает некоторую булеву подалгебру $\mathbf{B}_K$ — минимальную содержащую K булеву алгебру. Легко видеть, что в $\mathbf{B}_K$ входят те и только те подмножества $C \subseteq \mathcal{M}$, которые можно получить из $\varnothing$, $\mathcal{M}$ и всех C_α конечным числом операций I, II, III. Отсюда вытекает следующий полезный вывод. Пусть $\mathcal{M}$ есть множество всех исходов какого-либо явления, и нас интересуют только события C_α и их следствия. Мы можем тогда упростить модель явления, приняв за укрупненные исходы минимальные подмножества подалгебры $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_K$.

Будем теперь рассматривать всевозможные вещественно-значные функции на $\mathcal{M}$ (В теории вероятностей эти функции порождают случайные величины). Среди них будут индикаторы множеств:

$$\chi_{\mathcal{A}}(\omega) = 1 \text{ при } \omega \in \mathcal{A}, \quad \chi_{\mathcal{A}}(\omega) = 0 \text{ при } \omega \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Очевидно, каждому множеству соответствует свой индикатор, и каждая функция, принимающая только значения 0 и 1, является индикатором некоторого множества. При этом $\chi_\varnothing \equiv 0$, $\chi_{\mathcal{M}} \equiv 1$. В терминах кольца $R^{\mathcal{M}}$ всех вещественно-значных функций на $\mathcal{M}$ можно описать эту связь, сказав что существует взаимно-однозначное соответствие между подмножествами множества $\mathcal{M}$ и идемпотентами кольца $R^{\mathcal{M}}$.

Справедлива следующая характеризация булевой подалгебры: Для того, чтобы класс $\mathbf{B}'$ подмножеств множества $\mathcal{M}$ был булевой подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы индикаторы

ж) Чтобы не иметь дело с множеством множеств, можно, например, в каждом минимальном $\mathbf{B}'$-множестве выделить по элементу, и за $\mathcal{M}'$ принять множество этих представителей.

$\mathcal{B}'$ -множеств образовывали полную систему идемпотентов какого-либо содержащего константы подкольца кольца $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$. Поэтому, в частности, множества порожденной классом K булевой подалгебры $\mathcal{B}_K$ отвечают идемпотентам кольца $\mathbb{R}^{(K)}$, порожденного константами и индикаторами K -множеств.

Понятие булевой алгебры множеств естественно возникает при рассмотрении еще одного, казалось бы совершенно независимого круга вопросов. Рассмотрим группу $\mathcal{BIJ}(\mathcal{M})$ всех перестановок элементов множества $\mathcal{M}$. Подмножество $\mathcal{A}$ называется перестановочным ковариантом совокупности $K = \{C_\alpha\}$, если всякая перестановка $\mathcal{T}$, переводящая в себя каждое C_α:

$$(\forall\alpha)(\forall\omega \in C_\alpha)(\exists\omega' \in C_\alpha,\ \omega' = \mathcal{T}(\omega)),$$

переводит в себя также и $\mathcal{A}$. Так вот, для того, чтобы класс K был булевой подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы он содержал все свои перестановочные ковариаиты.

Любопытно проследить ход рассуждений, устанавливающий эквивалентность всех трех характеризаций. Очевидно, множества, отвечающие идемпотентам подкольца с единицей, образуют булеву алгебру, ибо $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$, $\chi_{(A\cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{(A\cup B)} = 1 - (1-\chi_A)(1-\chi_B)$. Далее, каждая перестановка $\mathcal{T}$ порождает линейное преобразование кольца $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ по формуле

$$\mathcal{T}: f(\cdot) \to f(\mathcal{T}(\cdot)).$$

При этом постоянные функции, конечно, не изменяются. Если перестановка $\mathcal{T}$ переводит множество C в себя, и, стало быть, $\bar{C}$ также в себя, то она не изменяет индикаторной функции χ_C : $\chi_C(\mathcal{T}(\cdot)) = \chi_C(\cdot)$, и наоборот. Отсюда, перестановки, переводящие в себя каждое $C_\alpha \in K$, не изменяют все функции порожденного кольца $\mathbb{R}^{(K)}$. Следовательно, любой идемпотент кольца $\mathbb{R}^{(K)}$ должен быть индикатором перестановочного ковариаита совокупности K. Рассмотрим теперь минимальные $\mathcal{B}_K$ - множества. По минимальности, любое $\mathcal{B}_K$ -множество либо не пересекается с минимальным $\mathcal{B}$, либо содержит его целиком. Поэтому перестановка, образованная любой перестановкой элементов $\mathcal{B}$ между собой и тождественной перестановкой элементов из $\bar{\mathcal{B}}$, переводит все $\mathcal{B}_K$ -множества, в том числе все K - множества C_α, в себя. Отсюда вытекает, что если минимальное B_K -множество $\mathcal{B}$ пересекает как множество $\mathcal{A}$, так и его дополнение, то $\mathcal{A}$ не будет K - ковариантом. Значит, любой ковариант раскладывается в объединение минимальных B_K-множеств, с ним пересекающихся, т.е. он также является B_K -множеством.

Задавая на булевой подалгебре $\mathcal{B}'$ вероятностную меру $\wp$, мы получаем вероятностное пространство $(\mathcal{M}, \mathcal{B}', \wp)$. Функции f из кольца $\mathbb{R}^{(\mathcal{B}')}$, т.е. функции, постоянные на каждом минимальном $\mathcal{B}'$ - множестве, становятся случайными величинами. Их математическое ожидание определяется формулой

$$M_\wp f = (\mathcal{B}')\int f(\omega)\wp\{d\omega\} = \sum_j f^{(j)}\wp\{\mathcal{M}_j\}, \qquad (0.2)$$

где $\{\mathcal{M}_j\}$ - полный набор $\mathcal{B}'$ - минимальных множеств, $f^{(j)}$ - значение функции $f(\cdot)$ на $\mathcal{M}_j$. При $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\mathcal{M})$ формулу можно записать в виде

$$M_\wp f = \sum_{\omega\in M} f(\omega)\wp\{\omega\}. \qquad (0.3)$$

Таким образом, каждому распределению вероятностей на $\mathcal{B}'$ отвечает по (0.2) положительный нормированный линейный функционал на $\mathbb{R}^{(\mathcal{B}')}$, и обратно.

Последовательная формализация некоммутативной теории вероятности восходит к фон Нейману, см. [3], [4]. В интересующем нас элементарном случае она выглядит так. Задано конечномерное унитарное пространство $\mathcal{H}$ и его разложение в ортогональную сумму подпространств,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_m, \qquad (0.4)$$

называемых когерентными секторами (или когерентными подпространствами). Рассматривается алгебра $\mathfrak{A} = GL(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m) \subseteq GL(\mathcal{H})$ всех линейных операторов на $\mathcal{H}$, оставляющих каждое $\mathcal{H}_j$ инвариантным. Принадлежащие $\mathfrak{A}$ эрмитовы операторы объявляются наблюдаемыми. Они превращаются в случайные величины, когда на $\mathfrak{A}$ задан неотрицательный нормированный функционал (обычно именуемый состоянием).

В $\mathcal{H}$ удобно воспользоваться ортонормированным базисом, являющимся объединением базисов секторов. В любом таком базисе матрица наблюдаемой будет эрмитовой диагонально-ящичной. Линейный функционал $\wp$ состояния, как нетрудно показать, тоже будет иметь такой же вид. Его матрица должна быть неотрицательно определена, а след должен быть равен единице. Тогда математическое ожидание, т.е. среднее значение наблюдаемой A будет задаваться формулой

$$tr(A\wp) = \sum_{j,k} a_{jk} p_{kj} = \sum_{j,k} \bar{p}_{jk} a_{jk} . \tag{0.5}$$

Первоначально предполагалось, что физически интересны только полные алгебры $GL(\mathcal{H})$ всех линейных операторов, ср. [5], но после веских доводов работы "трех W " [6] , общий случай нескольких когерантных секторов получил права гражданства у физиков. Другой крайний случай, когда число когерентных секторов равно размерности пространства $\mathcal{H}$. Этот случай приводит к коммутативной теории. В самом деле, если интерпретировать кольцо $\mathbb{R}^{(M)}$ вещественно-значных функций как некоторую коммутативную подалгебру алгебры линейных операторов $Hom(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}^M)$ на пространстве $\mathbb{C}^M \supset \mathbb{R}^M$ с эвклидовой метрикой $\sum_{\omega} |x(\omega)|^2$, т.е. грубо говоря, описывать функцию не столбцом значений, а диагональной матрицей, и аналогично записать набор вероятностей исходов, то (0.3) перейдет (0.5).

Эрмитовы идемпотенты из алгебры $GL(\mathcal{H})$ суть ортопроекторы на линейные подпространства унитарного пространства $\mathcal{H}$, и обратно. Поэтому, в основополагающей работе [7] Биркгоф и фон Нейман указали, что объектом "квантовой" логики является решетка подпространств абстрактного унитарного (в общем же случае - гильбертова) подпространства $\mathcal{H}$. Для абстрактного пространства $\mathcal{H}$, составленного по (0.4) из когерентных секторов, надо брать решетку $L(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m)$ из всех подпространств $\mathcal{A}$, представимых в виде суммы

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_m ; \qquad \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{H}_j , \quad \forall j . \tag{0.6}$$

И в решетке $L(\mathcal{H})$, и в её подрешетке $L' = L(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m)$ определены операции: $I)$ перехода от L' - подпространства $\mathcal{A}$ к его ортогональному дополнению $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{A}$, $(\mathcal{A}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{A}$; $\underline{III})$ пересечения $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ двух подпространств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L'$; $\underline{II})$ векторной суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ двух

$\mathcal{L}'$ - подпространств; причем эти три операции связаны между собой тождеством

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp}=\mathcal{A}^{\perp}\cap\mathcal{B}^{\perp} \qquad (0.7)$$

Мы видим, что эти три операции являются аналогами операций в булевой алгебре, а тождество (0.7) есть точный аналог третьего из тождеств (0.1). Точные же аналоги первых двух тождеств (0.1), вообще говоря, несправедливы. Поэтому решетки Биркгофа-фон Неймана называют недистрибутивными решетками (или, по старой терминологии, структурами). Когда они дистрибутивны, то изоморфны булевым алгебрам. В конечномерных решетках Биркгофа-фон Неймана выполняется лишь частный вариант дистрибутивности, так называемый модулярный закон:

$$(\forall\mathcal{A})(\forall\mathcal{B})(\forall\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}):\ (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}+\mathcal{C}), \qquad (0.8)$$

где упорядоченность $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$ равносильна тому, что $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}=\mathcal{C}$, $\mathcal{A}+\mathcal{C}=\mathcal{A}$. В общем бесконечномерном случае рассматривают полную слабо модулярную решетку с ортодополнениями, или, для краткости, крок.

Алгебра $GL(\mathcal{H})$ всех линейных операторов на унитарном пространстве $\mathcal{H}$, равно как и любая её подалгебра $GL(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m)$ является алгеброй с инволюцией $^*: A \to A^*$, $(A^*)^*=A$, где

$$\langle A^*x|y\rangle=\langle x|Ay\rangle, \quad \forall|x\rangle,|y\rangle\in\mathcal{H}. \qquad (0.9)$$

Можно показать, что любая подалгебра из $GL(\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_m)$, устойчивая относительно операции сопряжения (0.9), изоморфна некоторой алгебре $GL(\mathcal{H}_1',\ldots,\mathcal{H}_k')$. Тем самым, алгебраический способ описания оказывается полным в себе.

Совершенно иная картина будет, если мы прибегнем к решеточным операциям.

Пример. Пусть $\mathcal{H}$ - двумерное пространство, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ - две его неортогональные прямые. Ортопроекторы F_1 и F_2 на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ порождают всю алгебру $GL(\mathcal{H})$. Таким образом, любая (проходящая через нуль) прямая плоскости $\mathcal{H}$ отвечает событию, связанному с $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. А минимальная решетка с ортодополнениями, содержащая $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, состоит всего из 6 подпространств:

$$\{0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1^{\perp}, \mathcal{F}_2^{\perp}, \mathcal{H}\} \quad ^{*)} \tag{0.10}$$

В нашей работе [9] было предложено заменить в определении решетки симметричную операцию пересечения целой серией (зависящих от одного комплексного параметра) операций. Когда пересечение отлично от нуля, все они совпадают с пересечением. Но, в отличие от пересечения, все они обращаются в нуль, только если исходные пространства ортогональны. Мы доказали в [9], что возникающие конечномерные решетки подпространств (мы их назвали $\mathcal{C}$ - логиками) уже однозначно соответствуют алгебрам с инволюцией линейных операторов на унитарном пространстве.

Алгебру с инволюцией, порожденную каким-либо семейством линейных операторов, например семейством ортопроекторов $\{F_\alpha\}$, можно описать с помощью коммутаторной теоремы фон Неймана. Надо найти совокупность всех линейных операторов G, коммутирующих со всеми F_α:

$$GF_\alpha = F_\alpha G, \qquad \forall\alpha; \tag{0.11}$$

т.е. построить коммутант семейства $\{F_\alpha\}$. Он будет, очевидно, алгеброй. Тогда коммутант коммутанта - бикоммутант исходного семейства - и будет искомой алгеброй.

Можно доказать, что результат построения не изменится, если вместо первого коммутанта ограничиться классом его унитарных элементов. Эти унитарные операторы U, ввиду $U^* = U^{-1}$, образуют некоторую подгруппу $\mathcal{U}(\{F_\alpha\})$ группы $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Пусть все исходные операторы F_α были ортопроекторами, $F_\alpha = P_{\mathcal{F}_\alpha}$. Поскольку унитарный оператор переводит ортопроекцию вектора в ортопроекцию его образа на образ пространства проекции, то

$$UP_{\mathcal{F}} = P_{U\{\mathcal{F}\}} U. \tag{0.12}$$

---

*) Этот пример является классическим, см. [8].

Когда $UP_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}U$, тогда из (0.12) вытекает, что $\mathcal{F} = U\{\mathcal{F}\}$, т.е. U отображает на себя каждое исходное пространство, и, стало быть, по определению отображает на себя любой унитарный ковариант семейства $\{\mathcal{F}_\alpha\}$. Следовательно, $\mathcal{C}$ – логика, порожденная семейством подпространств $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ совпадает с системой всех унитарных ковариантов семейства. Прямое доказательство этого факта, не использующее коммутаторной теоремы, дано нами в [9] в теореме 5.9.

В подходе фон Неймана объект задается алгеброй операторов с инволюцией. Однако имеют смысл, т.е. могут быть наблюдаемыми, только эрмитовы операторы – операторы, совпадающие со своим сопряжением. Сами же эрмитовы операторы относительно операторного умножения алгебры не образуют (точнее, когда некоторое их семейство – алгебра, то она коммутативна, и мы имеем дело с булевским случаем). Поэтому, Йордан [10] , [11] предложил рассматривать коммутативные, но не ассоциативные алгебры эрмитовых операторов с симметризованным умножением $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$,переводящим два эрмитовых оператора уже в эрмитов. Теперь такие алгебры называют йордановыми*). В работе Йордана, фон Неймана и Вигнера [12] были вычислены все такие абстрактно заданные конечномерные алгебры. Оказалось, что (за единственным исключением) они изоморфны алгебрам эрмитовых операторов на разложениях вида (0.4), только некоторые из когерентных подпространств $\mathcal{H}_j$ могут оказаться не комплексными, а вещественными или кватернионными. Кроме того, некоторые $\mathcal{H}_\varkappa$ могут быть двумерными пространствами над числами Клиффорда. Все эти возможности, как ясно сегодня, имеют физический смысл.

Система всех ортопроекторов, принадлежащих какой-либо йордановой алгебре эрмитовых операторов, определяет решетку подпространств, которую естественно назвать йордановой логикой. (Заметим, что ортопроекторы и только они являются эрмитовыми идемпотентами относительно операций $A \to A^2$ и $(A, B) \to ABA$). Немедленно встает задача внутренней характеризации таких логик с помощью

---

*) В теории йордановых алгебр большую роль играет также бинарная операция

$$(A, B) \to ABA = 2(B \circ A) \circ A - B \circ (A \circ A),$$

см. [13] , [14] . Она играет фундаментальную роль и в наших построениях, см. [9] , § 1.

полной системы операций. Мы утверждаем, что можно взять те же операции, что и в неймановых логиках, только в серии обобщенных пересечений $\underset{t}{\cap}$, зависящих от параметра $t \in \mathbb{C}$, надо оставить операции лишь с вещественным t, $t \in \mathbb{R}$. (Поэтому, для краткости мы будем говорить о $\mathbb{C}$ - логиках и $\mathbb{R}$ -логиках). Впрочем, если не гнаться за конечностью логических формул, а допустить предельные переходы, можно ограничиться всего двумя операциями - некоммутативной $(t = \pm 1)$ и коммутативной $(t = 0)$. По методическим соображениям мы разбили в этой работе операцию $\underset{t}{\cap}$ в композицию трех операций двух типов: выделения контактов $\underset{\pm 1}{\cap}$ и построения когерентной линейной комбинации контактов, см. ниже § 2. Отметим, что существует и третья возможность характеризации йордановой логики, как решетки ковариантов относительно группы вещественно-линейных преобразований $\mathcal{H}$, сохраняющих лишь вещественную часть скалярного произведения векторов.

Развиваемые в этой работе подходы являются геометрическими. Но это - евклидова геометрия, а не проективная геометрия, как, например, у Вардараяна [15]. Мы очень существенно используем понятие угла между подпространствами (а не только понятие ортогональности). Без введения метрических характеристик, как показано в § 5, построить теорию йордановых и неймановых логик нельзя.

§ I. Векторное сложение подпространств и операции вычитания.

Здесь и дальше мы рассматриваем конечномерное унитарное векторное пространство $\mathcal{H}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел со скалярным произведением

$$\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle},$$

линейным по второму аргументу и антилинейным по первому. Линейные подпространства пространства $\mathcal{H}$ мы будем обозначать рукописными заглавными буквами, а ортопроекторы на них - соответствующими печатными.

В этом параграфе мы рассматриваем на классе подпространств унарную операцию перехода к ортогональному дополнению, бинарную операцию векторного сложения и их производные.

I) Переход к ортогональному дополнению, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\perp}$:

$$\mathcal{F}^{\perp} := \{|x\rangle ;\ \langle y|x\rangle = 0,\ \forall |y\rangle \in \mathcal{F}\}. \qquad (I.1)$$

Эта операция инволютивна:

$$(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{F}. \qquad (I.2)$$

II) Векторное сложение двух подпространств, $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathcal{F}+\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F}+\mathcal{G} := \{|z\rangle = |x\rangle + |y\rangle,\ \forall |x\rangle \in \mathcal{F},\ \forall |y\rangle \in \mathcal{G}\}; \qquad (I.3)$$

- наименьшее подпространство, содержащее как $\mathcal{F}$, так и $\mathcal{G}$.

IIa) Пересечение двух подпространств, $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} := \{|z\rangle :\ |z\rangle \in \mathcal{F},\ |z\rangle \in \mathcal{G}\},$$

- наименьшее подпространство, лежащее как в $\mathcal{F}$, так и в $\mathcal{G}$. Хорошо известно, что

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = (\mathcal{F}^{\perp} + \mathcal{G}^{\perp})^{\perp}. \qquad (I.4)$$

IIb) Ортогональное вычитание, $(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to \mathcal{B} \ominus \mathcal{F}$:

$$\mathcal{B} \ominus \mathcal{F} := \{|x\rangle :\ |x\rangle \in \mathcal{B},\ \langle y|x\rangle = 0,\ \forall |y\rangle \in \mathcal{F}\}.$$

Отсюда вытекает представление

$$\mathcal{B} \ominus \mathcal{F} = \mathcal{B} \cap \mathcal{F}^{\perp} = (\mathcal{B}^{\perp} + \mathcal{F})^{\perp}. \qquad (I.5)$$

Ia) Собственное ортогональное вычитание, определенное только для пар $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{F}$. Оно определяет относительное ортогональное дополнение:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{B} \ominus (\mathcal{B} \ominus \mathcal{F}) = \mathcal{F};$$

т.е. ортогональное дополнение $\mathcal{F}$ в $\mathcal{B}$.

Ib) Ортогонализация вычитанием, $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathcal{F} - \mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} - \mathcal{G} := (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \cap \mathcal{G}^{\perp}. \qquad (I.6)$$

Как ни странно на первый взгляд, операция **Ib** ортогонализации вычитанием является более фундаментальной, чем операция **IIb** ортогонального вычитания. Дело в том, что в булевых алгебрах и кольцах изначальный смысл имеет вычитание объемлемого множества из объемлющего, т.е. $\mathcal{B}\setminus\mathcal{F}$ при $\mathcal{B}\supseteq\mathcal{F}$. В общем же случае доопределяют $\mathcal{B}\setminus\mathcal{F}=(\mathcal{B}\cup\mathcal{F})\setminus\mathcal{F}$. Аналог подобного доопределения приводит к операции Ib, отличной от общепринятой $\mathcal{B}\ominus\mathcal{F}$! В § 5 мы увидим, что именно $(\mathcal{B}+\mathcal{F})\ominus\mathcal{F}$ возникает в интересующих нас проблемах.

Как обычно, векторную сумму двух или более попарно ортогональных подпространств будем обозначать знаком $\oplus$. Так $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}^{\perp}=\mathcal{H}$. Операция ортогонализации вычитанием $\mathcal{F}-\mathcal{G}$ задает переход от $\mathcal{G}$ к ортогональному его дополнению $\mathcal{G}'_{(\mathcal{F}+\mathcal{G})}$ в пространстве $\mathcal{F}+\mathcal{G}$.

ЛЕММА I.I. $\mathcal{F}-\mathcal{G}=(\mathbb{1}-G)\{\mathcal{F}\}$.

$$\mathcal{F}-\mathcal{G}=\{|x\rangle:\ |x\rangle\in(\mathcal{F}+\mathcal{G});\ \langle y|x\rangle=0,\ \forall|y\rangle\in\mathcal{G}\}. \tag{I.7}$$

$$(\mathcal{F}-\mathcal{G})\oplus\mathcal{G}=\mathcal{F}+\mathcal{G}. \tag{I.8}$$

<u>Доказательство.</u> Формула (I.7) является следствием определения (I.6) и определения (I.I) ортогонального дополнения $\mathcal{G}^{\perp}$. Далее, запись (I.7) мы вправе записать как

$$\{|x\rangle:|x\rangle\in\mathcal{G}^{\perp};\ |x\rangle=|z\rangle-|y\rangle,\ |z\rangle\in\mathcal{F},\ |y\rangle\in\mathcal{G}\}.$$

По ортогональности $\langle y|x\rangle=0$, видим, что $|y\rangle=G|z\rangle$, $|x\rangle=(\mathbb{1}-G)|z\rangle$. Обратно, любой $|z\rangle\in\mathcal{F}$ разлагается по теореме Пифагора

$$|z\rangle=(\mathbb{1}-G)|z\rangle+G|z\rangle,\quad \mathcal{G}\ni G|z\rangle,\quad \mathcal{G}^{\perp}\ni(\mathbb{1}-G)|z\rangle.$$

Наконец, ортогональное разложение (I.8) есть следствие модулярного закона (0.8)

$$[(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{G}^{\perp}]+\mathcal{G}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap(\mathcal{G}^{\perp}+\mathcal{G})=\mathcal{F}+\mathcal{G}. \quad \boxtimes$$

Сравним теперь операции $-$ и $\ominus$.

ЛЕММА I.2. $\mathcal{F}-\mathcal{G}=0 \Longleftrightarrow \mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}$; $(\mathcal{F}-\mathcal{G})\supseteq(\mathcal{F}\ominus\mathcal{G})$; если $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{G}$, то $\mathcal{F}-\mathcal{G}=\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}$.

Доказательство. По монотонности пересечения $\mathcal{F}-\mathcal{G}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\cap\mathcal{G}^{\perp}\supseteq\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp}=\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}$. При $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{G}$ знак включения дает знак равенства. Далее, $(1-G)\{\mathcal{F}\}=0$ равносильно равенству $|x\rangle=G|x\rangle$ для всех $|x\rangle\in\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}$ ⊠

ЛЕММА I.3. Справедливы тождества

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})-[(\mathcal{F}-\mathcal{G})+(\mathcal{G}-\mathcal{F})] \tag{I.9}$$

$$\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap(\mathcal{F}-\mathcal{G}) \tag{I.10}$$

СЛЕДСТВИЕ. Операция II векторного сложения и операция Ib ортогонализации вычитанием образуют систему операций, равносильную системе из операции II векторного сложения и операции Ia собственного ортогонального вычитания. Операция IIa пересечения выражается в терминах указанной системы.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как подпространства унитарного пространства $\mathcal{B}=\mathcal{F}+\mathcal{G}$. В $\mathcal{B}$ также справедлив (свой) закон двойственности де Моргана (I.4):

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=(\mathcal{F}'+\mathcal{G}')' \quad ;$$

$$\mathcal{F}'=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F}=\mathcal{G}-\mathcal{F} \quad ; \quad \mathcal{G}'=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{G}=\mathcal{F}-\mathcal{G},$$

см. (I8.). Поскольку $\mathcal{F}'+\mathcal{G}'\subseteq\mathcal{F}+\mathcal{G}$, то согласно последнему утверждению леммы I.2

$$(\mathcal{F}'+\mathcal{G}')'=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus(\mathcal{F}'+\mathcal{G}')=(\mathcal{F}+\mathcal{G})-(\mathcal{F}'+\mathcal{G}'),$$

что дает (I.9) Аналогично, ортогональная разность $\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}$ будет одним и тем же подпространством, рассматриваем ли мы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как подпространство из $\mathcal{H}$ или только из $\mathcal{B}=\mathcal{F}+\mathcal{G}$. Поэтому

$$\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\mathcal{G}'=\mathcal{F}\cap[(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{G}].$$ ⊠

Выше нами были даны содержательные определения некоторых операций над подпространствами. Интересно охарактеризовать их систему абстрактно, с помощью системы аксиом. Мы не будем заниматься здесь этим вопросом, ср. [I6] .

§ 2. Пучок изоклинных подпространств и операции в нем.

Взаимное расположение двух подпространств унитарного пространства описывается целой серией угловых инвариантов. Минимальный угол задает щель между подпространствами (если она равна нулю, подпространства пересекаются), а максимальный – раствор между ними (если он равен нулю, подпространства совпадают).

Косинус $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ минимального угла между подпространствами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ характеризует их связь:

$$\rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup_{|x\rangle\in\mathcal{F},\ |y\rangle\in\mathcal{G}} \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}\ ; \qquad (2.1)$$

$$\sup_{|x\rangle\in\mathcal{F}} \frac{\langle x|G|x\rangle}{\langle x|x\rangle} = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup_{|y\rangle\in\mathcal{G}} \frac{\langle y|F|y\rangle}{\langle y|y\rangle} \qquad (2.2)$$

где предполагается, что $|x\rangle \neq |0\rangle \neq |y\rangle$. Мы не будем выводить (2.1) и (2.2), отсылая к [9], § 2. Отметим лишь, что $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ортогональны друг другу:

$$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0 \iff \mathcal{F} \perp \mathcal{G} \qquad (2.3)$$

Неортогональные друг другу подпространства мы будем называть контактирующими.

Рассмотрим теперь операцию над подпространствами, обобщающую в некотором смысле операцию пересечения.

III) Выделение контакта одного подпространства с другим, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{F} |\!\cap \mathcal{G}$:

IIIa) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$:

$$\mathcal{F} |\!\cap \mathcal{G} := \left\{ |x\rangle\in\mathcal{F},\ \sup_{\mathcal{G}\ni|y\rangle\neq|0\rangle} \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} = \rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G})\langle x|x\rangle \right\}. \qquad (2.4)$$

IIIb) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ортогональны, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$;

$$\mathcal{F} |\!\cap \mathcal{G} = 0 \iff \mathcal{F} \perp \mathcal{G}. \qquad (2.5)$$

Сформулируем свойства операции выделения контакта.

ЛЕММА 2.1. $$\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}. \qquad (2.6)$$

$\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}$ является собственным подпространством оператора FGF, отвечающим максимальному его собственному числу $\varkappa = \rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, если оно положительно.

При $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$, $\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G} = \mathcal{G} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq 0$, что эквивалентно $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1$. В этом случае $\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{F}$.

Доказательство (2.6) очевидно. Доказательство остальных утверждений дано в нашей работе [9]. $\boxtimes$

Таким образом, операция выделения контакта является некоммутативным обобщением операции пересечения, совпадающим с пересечением, когда последнее отлично от нуля. В общем же случае существует два контакта : $\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \mathbin{\cap\!|} \mathcal{G} := \mathcal{G} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{F}$. Второй контакт есть собственное подпространство эрмитова оператора GFG, отвечающее его максимальному собственному значению, равному также $\rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

ЛЕММА 2.2. Для контактирующих подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ операторы $\rho^{-1}F$ и $\rho^{-1}G$ осуществляют изометрию $\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \mathbin{\cap\!|} \mathcal{G}$:

$$\underset{\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}}{|x\rangle} \xrightarrow[I]{} \rho^{-1}G|x\rangle = \underset{\mathcal{F} \mathbin{\cap\!|} \mathcal{G}}{|y\rangle} \longrightarrow \rho^{-1}F|y\rangle = |x\rangle \qquad (2.7)$$

$$\langle Ix' | Ix'' \rangle = \langle x' | x'' \rangle, \quad \forall |x'\rangle, |x''\rangle \in \mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}.$$

Доказательство см. [9], теорема I.I и следствие из неё.

Ввиду компактности единичной сферы в конечномерном пространстве определение контакта (2.4) можно записать в виде

$$\left\{ |x\rangle \in \mathcal{F} : \exists\, |y\rangle \in \mathcal{G},\ \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle} = \sup_{\substack{|u\rangle \in \mathcal{F} \\ |v\rangle \in \mathcal{G}}} \frac{\langle u|v\rangle\langle v|u\rangle}{\langle u|u\rangle\langle v|v\rangle} \right\}$$

Отсюда ясно, что когда $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}_1 \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}_1 = \mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}$. В частности,

$$(\mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G}) \mathbin{|\!\cap} (\mathcal{F} \mathbin{\cap\!|} \mathcal{G}) = \mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} \mathcal{G} = \mathcal{F} \mathbin{|\!\cap} (\mathcal{F} \mathbin{\cap\!|} \mathcal{G}). \qquad (2.8)$$

Каких-либо простых тождеств, связывающих операцию выделения контактов со сложением или вычитанием, нам неизвестно.

Контакты замечательны тем, что любой вектор одного образует со своей ортопроекцией на другой постоянный угол $\arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Поэтому можно сказать, что контакты наклонены друг к другу под всюду одинаковым углом. Изучим подобные пары подробнее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Два контактирующих подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ называются изоклинными (наклонёнными друг к другу под всюду одинаковым углом $\arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \frac{\pi}{2}$), если

$$\begin{aligned} &\langle x|G|x\rangle = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})\langle x|x\rangle, \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{F}; \\ &\langle y|F|y\rangle = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})\langle y|y\rangle, \quad \forall |y\rangle \in \mathcal{G}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ЛЕММА 2.3. Если подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}|\cap \mathcal{G}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}|\cap \mathcal{F}$, и обратно.

Доказательство вытекает из формул (2.7). $\boxtimes$

ЛЕММА 2.4. Пусть подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos\varphi$ и $\mathcal{R} = \mathcal{G} - \mathcal{F} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$.

Тогда $\mathcal{G}$ и $\mathcal{R}$ также изоклинны, $\rho(\mathcal{G}, \mathcal{R}) = \sin\varphi$, и канонические изометрии $I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ и $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{G}}$, заданные (2.7) порождают изометрию $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$:

$$J_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{G}} I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}, \quad J_{\mathcal{F}}^{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{R}}; \quad J_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} J_{\mathcal{F}}^{\mathcal{R}} = \mathbb{1}_{\mathcal{R}}; \quad J_{\mathcal{F}}^{\mathcal{R}} J_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} = \mathbb{1}_{\mathcal{F}};$$

такую, что

$$I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}|x\rangle = \cos\varphi \cdot |x\rangle + \sin\varphi \cdot J_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}|x\rangle, \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{F}; \tag{2.10}$$

$$J_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}|x\rangle = -\operatorname{Ctg}\varphi \cdot |x\rangle + \operatorname{Csc}\varphi \cdot I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}|x\rangle, \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{F}. \tag{2.11}$$

Доказательство приведено в [9], лемма 4.7. $\boxtimes$

Лемма 2.4. дает способ построения пары изоклинных подпространств. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$ – ортогональные подпространства одинаковой размерности, J – некоторая их изометрия. Задавшись углом φ по формуле (2.10) мы можем построить подпространство $\mathcal{G}$, наклонённое к $\mathcal{F}$ под всюду постоянным углом. Соответствие J удобнее всего задавать соответствием ортонормированных базисов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть J – изометрия ортогональных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$. Семейство подпространств $\mathcal{G}_{\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\mathcal{Y}_\varphi := \{|y\rangle = \cos\varphi\cdot|x\rangle + \sin\varphi\cdot J_R^F|x\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}\} \tag{2.12}$$

мы будем называть пучком, точнее R - пучком изоклинных подпространств.

Пучок содержит исходные подпространства $\mathcal{F}=\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{R}=\mathcal{Y}_{\pi/2}=$ $=\mathcal{Y}_{-\pi/2}$.

ЛЕММА 2.5. Любые два подпространства $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_\varphi$ и $\mathcal{E}=\mathcal{Y}_\psi$ из R - пучка изоклинных подпространств либо ортогональны, когда $|\varphi-\psi|=\pi/2$, либо изоклинны, причем

$$I_\mathcal{E}^\mathcal{Y} = \mathrm{sgn}[\cos(\varphi-\psi)]\cdot I_\mathcal{E}^\mathcal{F} I_\mathcal{F}^\mathcal{Y}; \qquad \rho(\mathcal{Y},\mathcal{E}) = |\cos(\varphi-\psi)|.$$

СЛЕДСТВИЕ. Любые два изоклинные подпространства $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{Y}_0$ из R - пучка порождают по (2.12) весь пучок с

$$J_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{F}_0} = I_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{Y}_0} I_{\mathcal{Y}_0}^{\mathcal{F}_0}, \qquad \mathcal{R}_0 = \mathcal{Y}_0 - \mathcal{F}_0 = (\mathcal{F}_0 + \mathcal{Y}_0) - \mathcal{F}_0.$$

Доказательство. Возьмем $|y'\rangle\in\mathcal{Y}$, $|y''\rangle\in\mathcal{E}$ и воспользуемся разложением (2.12) при $\varphi=\varphi$ и $\varphi=\psi$

$$\langle y'|y''\rangle = \cos\varphi\cos\psi\langle x'|x''\rangle + \\ +\sin\varphi\sin\psi\langle Jx'|Jx''\rangle = \langle x'|x''\rangle\cos(\varphi-\psi).$$

Для любого единичного вектора $|y'\rangle\in\mathcal{Y}$ максимум в определении контакта (2.4) достигается при

$$|x''\rangle = \mathrm{sgn}[\cos(\varphi-\psi)]\,|x'\rangle.$$

Отсюда вытекает все утверждения леммы. ⊠

R - пучок изоклинных подпространств устроен в точности как пучок прямых двумерной вещественной евклидовой плоскости. Поэтому для него имеют смысл операции типа проведения биссектрисы угла между прямыми, или проведения прямой, делящей угол в данном отношении и т.п.

$\underline{\overline{IV}}$) Когерентное линейное комбинирование изоклинных подпространств, $\mathcal{F}=\mathcal{F}|\cap\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{F}\cap|\mathcal{Y}$, $(\mathcal{F},\mathcal{Y})\to\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{Y})$:

$$\mathcal{K}_{a:b} := \{|w\rangle = a|x\rangle + bI_\mathcal{Y}^\mathcal{F}|x\rangle, \quad \forall|x\rangle\in\mathcal{F}\}. \tag{2.13}$$

$\underline{\overline{IV}}a,b,c$) Когерентная R- , C- , R^+- линейная комбинация соответственно при

$$a)\ a,b\in\mathbb{R};\qquad b)\ a,b\in\mathbb{C};\qquad c)\ a,b\in\mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

ТЕОРЕМА 2.6. Когерентная линейная комбинация изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ является подпространством, определяемым только отношением $a:b$. При этом $\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\mathcal{K}_{b:a}(\mathcal{G},\mathcal{F})$.

$\mathbb{R}$ - линейная комбинация принадлежит $\mathbb{R}$ - пучку, порождаемому $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Варьируя $a,b\in\mathbb{R}$ мы получаем все подпространства $\mathbb{R}$ - пучка.

<u>Доказательство.</u> Линейность множества $\mathcal{K}_{a:b}$ вытекает из линейности $\mathcal{F}$. Ввиду линейности $\mathcal{F}$ возможна замена $a:b$ на $\lambda a:\lambda b$. Наконец, ввиду изометричности $\mathcal{F}\overset{I}{\rightleftharpoons}\mathcal{G}$ можно заменить в (2.13) параметризующее множество $\mathcal{F}$ на $\mathcal{G}$ с перестановкой слагаемых.

Обозначим $\mathcal{R}=\mathcal{G}-\mathcal{F}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F}$, $\varphi=\arccos\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$, и выразим в определении (2.12) вектор $J|x>$ через $|x>$ и $I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}|x>$ по (2.11):

$$\mathcal{G}_\psi=\{|v>=(\cos\psi-\sin\psi\,\mathrm{ctg}\,\varphi)|x>+\sin\psi\csc\varphi\,I|x>,\ \forall|x>\in\mathcal{F}\} \tag{2.15}$$

Сравнивая с (2.13), находим

$$\frac{a}{b}=\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi-\cos\varphi;\quad \mathrm{ctg}\,\psi=\mathrm{ctg}\,\varphi+\frac{a}{b}\csc\varphi. \tag{2.16}$$

Соответствие между $\frac{a}{b}$ и $\mathrm{ctg}\,\psi$ взаимно-однозначно.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны. Когерентные линейные комбинации подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}'=\mathcal{G}-\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{G}'=\mathcal{F}-\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{F}$ с положительными a и b дают весь $\mathbb{R}$ - пучок, порожденный $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ (кроме самих $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{G}'$).

СЛЕДСТВИЕ. Операция $\overline{IV}a$ когерентного $\mathbb{R}$ - линейного комбинирования выражается через операцию $\overline{IV}c$ когерентного $\mathbb{R}^+$ - линейного комбинирования и операцию Ib ортогонализации вычитанием.

Доказательство. При изменении $\frac{a}{b}$ от 0 до $+\infty$ значение $ctg\,\psi$ в (2.16) монотонно растет от $ctg\,\varphi$ до $+\infty$, т.е. угол ψ монотонно и непрерывно убывает от $\psi=\varphi$ до $\psi=0$. Таким образом, когерентные $\mathbb{R}^+$- линейные комбинации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ "заполняют" весь (меньший) угол между ними. Подпространства $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}'$ отвечают углам $-\pi/2$, $\varphi-\pi/2$, 0, φ, $\pi/2$. Все разности между последовательными углами меньше $\pi/2$; поэтому, по только что доказанному, их когерентные $\mathbb{R}^+$ - линейные комбинации "заполняют" эти углы.

§ 3. Логики и квазилогики.

В этом параграфе мы рассмотрим аналоги булевых алгебр и булевых колец.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем называть $\mathbb{R}$ - логикой всякую систему L подпространств унитарного пространства, устойчивую относительно операций

I. перехода к ортогональному дополнению (1.1)
II. векторного сложения (1.3)
III. выделения контакта (2.4), (2,5)
IVa. когерентного $\mathbb{R}$ - линейного комбинирования изоклинных подпространств (2.13), (2.14).

Булевы кольца отличаются от булевых алгебр тем, что в них нет операции перехода к дополнению, а существует более узкая операция вычитания - перехода к относительному дополнению. Булево кольцо подмножеств является алгеброй тогда и только тогда, когда кольцу принадлежит само исходное множество. Впрочем, конечное булево кольцо множеств является булевой алгеброй подмножеств максимального множества кольца. Аналогичная ситуация имеет место и в решетках подпространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Будем называть $\mathbb{R}$ -квазилогикой всякую систему L подпространств унитарного пространства $\mathcal{H}$, устойчивую относительно операций

Ia. собственного ортогонального вычитания (1.5),
II. векторного сложения,
III. выделения контакта,
IVa. когерентного $\mathbb{R}$ - линейного комбинирования изоклинных подпространств.

ЛЕММА 3.1. Всякая $\mathbb{R}$ - квазилогика L является решеткой. Всякая $\mathbb{R}$ - логика подпространств из $\mathcal{H}$ является $\mathbb{R}$ - квазилогикой; обратное справедливо лишь при $\mathcal{H} \in L$, тогда L — решетка с ортодополнениями. $\mathbb{R}$ - квазилогика подпространств L конечномерного унитарного пространства $\mathcal{H}$ является $\mathbb{R}$ -логикой подпространств L -пространства максимальной размерности $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$.

<u>Доказательство.</u> По лемме 1.3 операция $\underline{II}a$ пересечения выражается через операции $\underline{II}$ векторного сложения и $\underline{I}b$ ортогонализации вычитанием, последняя же выражается через $\underline{II}$ и $\underline{I}a$ по (1.6). $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.2. В определении $\mathbb{R}$ - квазилогики можно заменить операцию $\underline{I}a$ на операцию $\underline{I}b$ ортогонализации вычитанием, см. (1.6). Также можно заменить операцию $\underline{\overline{IV}}a$ на операцию $\underline{\overline{IV}}c$ когерентного $\mathbb{R}^{+}$- линейного комбинирования изоклинных подпространств, см. (2.13), (2.14).

<u>Доказательство.</u> Согласно следствию из леммы 1.3 система операций $(\underline{II}, \underline{I}b)$ равносильна системе $(\underline{II}, \underline{I}a)$. Согласно следствию из теоремы 2.7 операция $\underline{\overline{IV}}a$ выражается через $\underline{\overline{IV}}c$ и $\underline{I}b$.

Опер ации $\underline{\overline{IV}}$ являются, в сущности, не операциями, а сериями операций. Ясно, что бесконечность числа операций по существу,- континуум различных подпространств изоклинного $\mathbb{R}$ -пучка нельзя получить из порождающей пары, располагая только конечным числом операций. Положение кардинально изменяется, если допустить предельный переход.

Как мы уже отмечали $\varphi = \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяет щель (минимальный угол) между подпространствами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Максимальный угол между подпространствами (т.е. между вектором из одного пространства и его проекцией на другой) определяет их расхождение. Синус $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ последнего угла, см. (2.15) в [9] и цитированную там литературу, называется раствором $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Множество всех подпространств конечномерного унитарного (или евклидова) пространства компактно в растворной топологии. Для изоклинных подпространств оба указанных угла совпадают,

$$\arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \arcsin d(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

$$\mathcal{G}_{\psi}\ (d) \to \mathcal{G}_{\varphi} \iff \psi \to \varphi (\mathrm{mod}\, \pi). \qquad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Средним контактом $\mathcal{F} \Cap \mathcal{G}$ двух подпространств назовем когерентную $1:1$ линейную комбинацию (биссектрису) их контактов $\mathcal{F} |\cap \mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \cap| \mathcal{G}$. Полагаем $\mathcal{F} \Cap \mathcal{G} = 0$ при $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.

ЛЕММА 3.3. Для произвольных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$

$$\mathcal{F} |\cap \mathcal{G} = (d) \lim \mathcal{F} \Cap (\mathcal{F} \Cap \ldots \mathcal{F} \Cap (\mathcal{F} \Cap \mathcal{G}) \ldots). \tag{3.2}$$

Применяя операцию $\Cap$ в различных комбинациях n раз к изоклинным $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos\varphi$, мы получаем все подпространства $\mathbb{R}$ - пучка с $\psi = (2k+1)2^{-n}\varphi$, $0 \le k \le 2^{n-1}$.

Любая $\mathbb{R}$ -линейная комбинация изоклинных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ аппроксимируется в d -метрике последовательными биссектрисами.

<u>Доказательство.</u> Согласно (2.8) мы можем в (3.2) заменить все $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} |\cap \mathcal{G}$, а $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F} \cap| \mathcal{G}$. Тогда (3.2) очевидно ввиду (3.1). Нетрудно, вычислив скалярные произведения, убедиться, что средний контакт образован биссектрисами углов между находящимися в каноническом изометрическом соо тветствии (2.7) прямых из контактов. Предельный переход обосновывается (3.1). ⊠

ТЕОРЕМА 3.4. Всякая система L подпространств унитарного пространства, устойчивая относительно операций Ib ортогонализации вычитанием, $\overline{II}$ векторного сложения, $\overline{III}a$ построения среднего константа (определение 3.3), $\overline{V}$ предельного перехода в растворной метрике, является $\mathbb{R}$ - квазилогикой, и обратно.

<u>Доказательство</u> следует из теоремы 3.2 и леммы 3.3. ⊠

В теории унитарных ковариантов, как мы показали в [9], естественно возникают понятия $\mathbb{C}$ - логики и $\mathbb{C}$ -квазилогики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Систему подпространств унитарного пространства назовем $\mathbb{C}$ -логикой, соответственно $\mathbb{C}$ -квазилогикой, если она устойчива относительно операций I (соответственно Ia), $\overline{II}$, $\overline{III}$ и $\overline{IV}b$ когерентного $\mathbb{C}$ - линейного комбинирования.

В [9] в опред-елении $\mathbb{C}$ -логик вместо операций $\overline{III}$ и $\overline{IV}b$ была названа единая операция построения t - псевдоконтакта $\mathcal{F} \underset{t}{\cap} \mathcal{G}$, $t \in \mathbb{C} + \{\infty\}$:

$$\mathcal{F} \underset{t}{\cap} \mathcal{G} = \mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F} |\cap \mathcal{G}, \mathcal{F} \cap| \mathcal{G}); \qquad a:b = (1+t):(1-t) \tag{3.3}$$

ТЕОРЕМА 3.5. Система операций $\overline{III}$ и $\overline{IV}b$ равносильна операции (3.3)

СЛЕДСТВИЕ. Определения 3.4 равносильны определениям § 4 работы [9] .

Доказательство. $\mathcal{F} \underset{1}{\cap} \mathcal{G} = \mathcal{F} \,|\!\cap \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \underset{-1}{\cap} \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap\!| \mathcal{G}$.
Для изоклинных подпространств $\mathcal{F} = \mathcal{F} \,|\!\cap \mathcal{G}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap\!| \mathcal{G}$. $\boxtimes$

$\mathcal{C}$ - логики устроены значительно проще $\mathcal{R}$ - логик. Однако, для них нет аналога теоремы 2.7. А интересующие нас приложения опираются именно на вытекающее из нее описание $\mathcal{R}$ - логик и $\mathcal{R}$ -квазилогик, данное в теореме 3.2.

§ 4. Логика подпространств и алгебра ортопроекторов.

С решеткой линейных подпространств конечномерного унитарного пространства связана алгебра ортопроекторов. Решеточным операциям $+$, $\cap$ и $^{\perp}$ соответствуют операции

$$F \vee G = P_{\mathcal{F}} \vee P_{\mathcal{G}} = P_{(\mathcal{F}+\mathcal{G})} , \qquad (4.1)$$

$$F \wedge G = P_{\mathcal{F}} \wedge P_{\mathcal{G}} = P_{(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})} , \qquad (4.2)$$

$$\mathbb{1} - F = \mathbb{1} - P_{\mathcal{F}} = P_{(\mathcal{F}^{\perp})} , \qquad (4.3)$$

где обозначен через $P_{\mathcal{E}}$ ортопроектор на подпространство $\mathcal{E}$. Последняя операция имеет очевидный операторный смысл. Так как алгебра эрмитовых операторов упорядочена, то обе первые операции можно истолковать в терминах порядка.

ТЕОРЕМА 4.I. Ортопроектор $P_{(\mathcal{F}+\mathcal{G})} = F \vee G$ есть наименьший проектор, больший как $P_{\mathcal{F}}$, так и $P_{\mathcal{G}}$. Ортопроектор $P_{(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})} = F \wedge G$ есть наибольший проектор, меньшии как F , так и G . Если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$, то $P_{\mathcal{F}} \leq P_{\mathcal{K}}$, и обратно; в этом случае $P_{(\mathcal{K}\ominus\mathcal{F})} = P_{\mathcal{K}} - P_{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Очевидно, всякий ортопроектор $P_{\mathcal{F}} \leq \mathbb{1}$. В то же время

$$\langle x|x\rangle = \langle x|F|x\rangle \iff |x\rangle \in \mathcal{F} , \qquad (4.4)$$

что вытекает из разложения Пифагора. Из (4.4) немедленно следует первая часть третьего утверждения теоремы. Разлагая $\mathcal{K} = \mathcal{F} \oplus (\mathcal{K} \ominus \mathcal{F})$, убеждаемся в справедливости второй части.

Пусть теперь $P_{\mathcal{E}} = E \le F$, $E \le G$. Возьмем любое $|x\rangle \in \mathcal{E}$, т.е. $\langle x|E|x\rangle = \langle x|x\rangle$. Так как $E \le F \le \mathbb{1}$, $E \le G \le \mathbb{1}$, то одновременно

$$\langle x|F|x\rangle = \langle x|x\rangle, \qquad \langle x|G|x\rangle = \langle x|x\rangle$$

По (4.4) это означает, что $|x\rangle \in \mathcal{F}$, так и $|x\rangle \in \mathcal{G}$, т.е. $|x\rangle \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$. По произвольности $|x\rangle \in \mathcal{E}$ заключаем, что $\mathcal{E} \subseteq (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$. Первое утверждение теоремы вытекает из второго по закону двойственности (I.4) и связи (4.3). $\boxtimes$

Перейдем теперь к введенным нами дополнительным операциям взятия контактов и когерентной линейной комбинации. Как показано в лемме 2.I, контакт $\mathcal{F} \sqcap \mathcal{G}$ подпространства $\mathcal{F}$ с подпространством $\mathcal{G}$ является собственным подпространством оператора FGF , отвечающим его максимальному собственному числу $\varkappa = \rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Ниже нам неоднократно придется прибегать и аналогичному выделению главного члена спектрального разложения у эрмитова оператора. Поэтому, введем следующее название.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I. Шляпой неотрицательного эрмитова оператора $A \ne 0$ с каноническим спектральным разложением

$$A = \sum_{\alpha^{(k)} \in \Lambda(A)} \alpha^{(k)} E_k \tag{4.5}$$

где $\Lambda(A)$ - множество точек спектра $\Lambda(A) = \{\alpha^{(k)}\}$ оператора A , E_k - ортопроекторы на собственные подпространства, назовем оператор

$$Ш(A) = \alpha^{(m)} E_m; \qquad \alpha^{(m)} = \max_k \alpha^{(k)} \tag{4.6}$$

ЛЕММА 4.2. Пусть ненулевые подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ортогональны, $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$. Тогда

$$Ш\left(\frac{1+\tau}{2}F + \frac{1-\tau}{2}G\right) = \begin{cases} \frac{1-\tau}{2}G, & -\infty<\tau<0; \\ \frac{1}{2}(F+G) = \frac{1}{2}(F \vee G), & \tau = 0; \\ \frac{1+\tau}{2}F, & 0<\tau<\infty. \end{cases}$$

где $F \vee G$ - ортопроектор на $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.

<u>Доказательство</u> очевидно. $\boxtimes$

Изучение шляпы взвеси ортопроекторов для двух контактирующих подпространств мы начнем со случая, когда эти пространства изоклинны, но сперва докажем следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА 4.2. Пусть преобразование евклидовой проскости задано в декартовых координатах матрицей

$$\frac{1+\tau}{2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}+\frac{1-\tau}{2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2 & \tau\alpha\beta \\ \tau\alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}, \qquad (4.7)$$

где $|\tau|<1,\ \alpha^2+\beta^2=1,\ \alpha^2-\beta^2=\rho>0,\quad |\rho|<1.$

Тогда собственные числа и (ненормированные) собственные векторы преобразования суть

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1-(1-\tau^2)(1-\rho^2)}\right];\quad \lambda_1>\frac{1}{2}>\lambda_2; \qquad (4.8)$$

$$|\alpha, t(\tau)\cdot\beta>,\qquad |t(\tau)\cdot\alpha, -\beta>; \qquad (4.9)$$

где t и τ связаны соотношениями

$$t=\tau\frac{\rho+1}{\rho+\sqrt{1-(1-\tau^2)(1-\rho^2)}};\quad \tau=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-t^2\beta^2}\,t \qquad (4.10)$$

<u>Доказательство.</u> Характеристическим для матрицы (4.7) будет квадратное уравнение

$$\lambda^2-\lambda+(1-\tau^2)\alpha^2\beta^2=0,$$

откуда немедленно следует (4.8). Когда $|\rho|\le 1$, т.е. ρ – косинус некоторого угла, то корни могут совпасть лишь при $\tau=0$, $\rho=0$, откуда $\alpha^2=\beta^2=1/2$, т.е. если исходные матрицы в (4.7) суть ортопроекторы на перпендикулярные друг другу биссектрисы координатных углов.

Указанные исходные матрицы суть ортопроекторы на две прямые $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ с направляющими ортами $|\alpha,\beta>$ и $|\alpha,-\beta>$. Их $(1+t):(1-t)$ когерентная линейная комбинация $\mathcal{L}(t)$ имеет по (2.13) направляющий вектор $|\alpha, t\beta>$. Он будет λ_1 - собственным для матрицы (4.7) тогда и только если:

$$\lambda_1\alpha=\alpha^2\alpha+(\tau\alpha\beta)\cdot t\beta;\qquad \lambda_1 t\beta=(\tau\alpha\beta)\cdot\alpha+\beta^2\cdot t\beta.$$

Из второго соотношения, подставляя λ_1 из (4.8) и переходя от α^2 и β^2 к ρ, получаем первое из выражений (4.10). Второе находим делением второго соотношения на первое, причем λ_1 исключается. Наконец, условие ортогональности собственных векторов дает, что λ_2- собственным вектором будет $|t(\tau)\alpha, -\beta>$. ⊠

Пусть два подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны, $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Тогда в пространстве $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ существует ортонормированный базис, в котором ортопроекторы F и G имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} \alpha^2 \mathbb{1} & \alpha\beta \mathbb{1} \\ \alpha\beta \mathbb{1} & \beta^2 \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \alpha^2 \mathbb{1} & -\alpha\beta \mathbb{1} \\ -\alpha\beta \mathbb{1} & \beta^2 \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad (4.11)$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha^2 - \beta^2 = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$. Это вытекает из формул (1.10)-(1.13) леммы 1.2 работы [9]. При этом

$$F \wedge G = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad F \bar{\wedge} G = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

суть ортопроекторы на "биссектрисы" меньшего и большего из углов между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, т.е. ортопроекторы на подпространства $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, (см. определение 3.3), и $\mathcal{F} \bar{\cap} \mathcal{G} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

ЛЕММА 4.4. Пусть подпростанства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны, и пусть $\mathcal{K}(t)$ есть когерентная линейная $(1+t):(1-t)$ комбинация $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Тогда при $-1 < \tau < 1$

$$Ш_\tau := Ш\left(\frac{1+\tau}{2} F + \frac{1-\tau}{2} G\right) = \omega(\tau) K(t(\tau)), \qquad (4.12)$$

где t и τ связаны по (4.10) при $\rho = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,

$$\omega(\tau) = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - (1-\tau^2)(1-\rho^2)}\right]. \qquad (4.13)$$

ДОБАВЛЕНИЕ. В спектральной операторной норме

$$\lim_{\tau \to 1} Ш_\tau = \lim_{t \to 1} K(t) = F; \quad \lim_{\tau \to -1} Ш_\tau = \lim_{t \to -1} K(t) = G.$$

<u>Доказательство.</u> Ввиду (4.11) взвесь операторов F и G имеет собственные значения $\lambda_1 > \frac{1}{2}$, $0 < \lambda_2 < \frac{1}{2}$, и, может быть, $\lambda_3 = 0$. Шляпа отвечает собственному числу $\lambda_1 = \omega(\tau)$.

Кратность его равна размерности $\mathcal{F}$ или равной ей размерности $\mathcal{G}$. Собственное подпро-странство, согласно (4.9) образовано векторами

$$\alpha\cdot\frac{|x\rangle+I|x\rangle}{\alpha}+t(\tau)\beta\frac{|x\rangle-I|x\rangle}{\beta}, \quad \forall |x\rangle\in\mathcal{F}, \tag{4.14}$$

где I - каноническая изометрия, связывающая $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, t и τ связаны (4.10) по лемме 4.3. Это означает, что $Ш_\tau = \omega_s(\tau)K(t,\tau)$ где $\mathcal{K}(t(\tau))$- когерентная линейная комбинация $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с отношением $(1+t(\tau)):(1-t(\tau))$. Наконец, ортопроектор на $\mathcal{K}(t(\tau))$описывается в принятых координатах матрицей

$$\frac{1}{\alpha^2+[t(\tau)]^2\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2\mathbb{1} & t(\tau)\alpha\beta\,\mathbb{1}\\ t(\tau)\alpha\beta\,\mathbb{1} & [t(\tau)]^2\beta^2\mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть два подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})>0$. Обозначим $\mathcal{K}(t)=\mathcal{F}\underset{t}{\cap}\mathcal{G}$ когерентную $(1+t):(1-t)$ линейную комбинацию контактов $\mathcal{F}/\!\cap\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap\!\backslash\mathcal{G}$. Тогда при $-1<\tau<1$ эрмитов оператор

$$\frac{1+\tau}{2}F+\frac{1-\tau}{2}G=\sum_{k=0}^{s(\mathcal{F},\mathcal{G})+2}\lambda^{(k)}(\tau)E_k(\tau)\geqslant 0;$$

$$\sum_{k:\lambda^{(k)}\neq 0}E_k(\tau)=F\vee G; \tag{4.16}$$

а его шляпа $Ш_\tau:=Ш\left(\frac{1+\tau}{2}F+\frac{1-\tau}{2}G\right)$ имеет вид

$$Ш_\tau=Ш\left(\frac{1+\tau}{2}F/\!\!\wedge G+\frac{1-\tau}{2}F\wedge\!\!\backslash G\right)=\omega_s(\tau)K(t(\tau)), \tag{4.17}$$

где t и τ связаны по (4.10) с $\rho=\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $\omega_s(\tau)$ задано (4.13). $F/\!\!\wedge G$ и $F\wedge\!\!\backslash G$ суть ортопроекторы на $\mathcal{F}/\!\cap\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap\!\backslash\mathcal{G}$.

ДОБАВЛЕНИЕ. В операторной норме существуют пределы

$$\lim_{\tau\nearrow 1}Ш_\tau=F/\!\!\wedge G, \qquad \lim_{\tau\searrow -1}Ш_\tau=F\wedge\!\!\backslash G. \tag{4.18}$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ пересекаются, $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq 0$, то $Ш_\tau=F\wedge G$ при всех $\tau\in(-1,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varkappa_\nu=\rho_\nu^2$ - собственные числа оператора FGF (или GFG), занумерованные в порядке убывания. Согласно леммам I.2-I.6 работы [9], все пространство $\mathcal{H}$ разложимо:

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\nu=0}^{s+2}\mathcal{H}_\nu;\quad \mathcal{H}_\nu=\mathcal{F}_\nu+\mathcal{G}_\nu,\quad 1\le\nu\le s(\mathcal{F},\mathcal{G});$$

$$\mathcal{H}_{s+1}=(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^\perp)\oplus(\mathcal{F}^\perp\cap\mathcal{G}),\quad \mathcal{H}_{s+2}=(\mathcal{F}+\mathcal{G})^\perp; \tag{4.19}$$

$$\mathcal{F}=\bigoplus_{\nu=0}^{s+1}\mathcal{F}_\nu,\quad \mathcal{G}=\bigoplus_{\nu=0}^{s+1}\mathcal{G}_\nu;\quad \mathcal{F}_0=\mathcal{G}_0=\mathcal{H}_0=\mathcal{F}\cap\mathcal{G}.$$

Некоторые из указанных подпространств могут сводиться к нулевому подпространству. В частности, $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho_0=1$, если $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq 0$, и $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho_1<1$ в противном случае; $\rho_{s+1}=\rho_{s+2}=0$.

Согласно тем же леммам, в пространстве $\mathcal{H}$ существует удобный ортонормированный базис $Б$, составленный из базисов $\mathcal{H}_\nu$, в котором ортопроекторы F и G состоят из диагональных блоков. При $1\le\nu\le s(\mathcal{F},\mathcal{G})$ они имеют вид (4.11):

$$F_\nu=\begin{pmatrix}\alpha_\nu^2\mathbb{1}_\nu & \alpha_\nu\beta_\nu\mathbb{1}_\nu\\ \alpha_\nu\beta_\nu\mathbb{1}_\nu & \beta_\nu^2\mathbb{1}_\nu\end{pmatrix};\quad G_\nu=\begin{pmatrix}\alpha_\nu^2\mathbb{1} & -\alpha_\nu\beta_\nu\mathbb{1}\\ -\alpha_\nu\beta_\nu\mathbb{1}_\nu & \beta_\nu^2\mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Кроме того, $F_0=G_0=\mathbb{1}_0$, $F_{s+2}=G_{s+2}=\mathbb{O}$, и

$$F_{s+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}'_{s+1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\qquad G_{s+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{1}''_{s+1}\end{pmatrix},$$

где порядки $\mathbb{1}'_{s+1}$ и $\mathbb{1}''_{s+1}$ могут различаться. Каждый блок отвечает ортопроектору на $\mathcal{F}_\nu$, соответственно $\mathcal{G}_\nu$. Параметры $\alpha_\nu=\sqrt{(1+\rho_\nu)/2}$, $\beta_\nu=\sqrt{(1-\rho_\nu)/2}$,

$$1=\rho_0\geq\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})\geq\rho_1>\ldots>\rho_s>0=\rho_{s+1}.$$

Таким образом, на каждом из ортогональных подпространств $\mathcal{H}_\nu=\mathcal{F}_\nu+\mathcal{G}_\nu$ действует свой оператор рассмотренного в лемме 4.4 вида с двумя (при $\nu=0$ только одним) собственными значениями:

$$\tfrac{1}{2}\Big[1+\sqrt{1-(1-\tau^2)(1-\rho^2)}\Big],\quad \tfrac{1}{2}\Big[1-\sqrt{1-(1-\tau^2)(1-\rho^2)}\Big].$$

Левая величина - большее значение; при $-1<\tau<1$ оно монотонно убывает с убыванием ρ, т.е. с возрастанием номера ν от $\nu=0$ до $\nu=s+1$, падая от 1 до $\frac{1+|\tau|}{2}$. Наоборот, меньшее значение монотонно возрастает с ростом ν

до $\frac{1-|\tau|}{2}$, а нижняя грань его значении, равная 0; недостижима, так как при $\nu=0$, $\rho_0=1$ второго значения нет. На $(\mathcal{F}+\mathcal{G})^{\perp}=\mathcal{H}_{s+2}$ действует нулевой оператор. Отсюда вытекает (4.16).

Из приведенного описания видно, что шляпа ω_τ определяется ненулевым подпространством $\mathcal{H}_\nu$ с максимальным ρ_ν, т.е. $\rho_\nu=\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Таким образом, поскольку $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})>0$ по условию, $\nu=0$ или $\nu=1$, $\mathcal{H}_\nu=(\mathcal{F}\Cap\mathcal{G})+(\mathcal{F}\cap\!\!\!\mid\mathcal{G})$ в обоих случаях. Возможность $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$ разобрана в лемме 4.2. $\boxtimes$

ЛЕММА 4.6. Пусть некоторое линейное пространство T эрмитовых операторов, действующих на конечном унитарном пространстве $\mathcal{H}$, содержит вместе с каждым оператором A и все ортопроекторы его спектрального разложения кроме, может быть, отвечающего $\alpha=0$. Тогда идемпотентные операторы из T суть ортопроекторы на элементы некоторой $\mathcal{R}$ - квазилогики подпространств пространства $\mathcal{H}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Последняя будет $\mathcal{R}$-логикой тогда и только тогда, когда T содержит единичный оператор.

Доказательство. Как вытекает из теоремы 3.2, нам достаточно проверить, что вместе с ортопроекторами F и G на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ к T принадлежат также ортопроекторы $F\vee G$, $F\Cap G$, $F\cap\!\!\!\mid G$ соответственно на $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, $\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}$, $\mathcal{F}\cap\!\!\!\mid\mathcal{G}$, а также вместе с F и K, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{K}$, ортопроектор на $\mathcal{K}\ominus\mathcal{F}$, и, вместе с ортопроекторами F и G на изоклинные $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, ортопроекторы $F\underset{t}{\wedge}G$ на $\mathcal{F}\underset{t}{\cap}\mathcal{G}$, $-1<t<1$.

а) Поскольку по теореме 4.1 $P_{(\mathcal{K}\ominus\mathcal{F})}=K-F$ при $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{F}$, то $(K-F)\in T$ по линейности T.

б) Примем $A=\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}G$, $A\in T$ по линейности T. Поскольку $F\vee G=\bigoplus_{\alpha_k\neq 0}E_k(A)$ по (4.16), $(F\vee G)\in\in T$ по линейности T и предположенному свойству $E_k(A)\in T$, $\forall k:\alpha_k\neq 0$.

в) Когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны, $\mathcal{F}=\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}$, $\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\!\!\!\mid\mathcal{G}$, ортопроекция $F\underset{t}{\wedge}G$ на их промежуточный контакт кратна по лемме 4.4 шляпе оператора $\frac{1+\tau}{2}F+\frac{1-\tau}{2}G$ с некоторым τ, откуда $(F\underset{t}{\wedge}G)\in T$.

г) Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не изоклинны, то изоклинны их контакты $\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap\!\!\!\mid\mathcal{G}$, причем уже по теореме 4.5 ортопроектор на промежуточный контакт $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ - любую когерентную линейную комбинацию $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ и $^t\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ со строго положительными весами, - кратен указанной шляпе. Таким образом, часть ортопроекторов на подпространства изоклинной связки, порожденной $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, принадлежит T. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1 \in T$ - два таких подпространства. Тогда $F_1' = (F_1 \vee G_1) - F_1$, $G' = (F_1 \vee G_1) - G_1$ по доказанному, см. а), б), также принадлежат T. Все остальные подпространства пучка по теореме 2.7 являются когерентными линейными комбинациями со строго положительными весами подпространств $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_1' = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{G}_1) \ominus \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1' = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{G}_1) \ominus \mathcal{G}_1$. В силу в) ортопроекторы на них также принадлежат T. ⊠

ЛЕММА 4.7. Всякая замкнутая йорданова алгебра T эрмитовых операторов, действующих на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$, вместе с каждым $A \in T$ содержит все ортопроекторы $E_k(A)$ его спектрального разложения, кроме, может быть, проектора на A - аннулируемое подпространство, [14].

Доказательство. Если $A \geq 0$, то

$$\frac{1}{\alpha_m} Ш(A) = E_m = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\alpha_m} A\right)^n. \qquad (4.21)$$

Отсюда $E_m \in T$. Затем применим аналогичное выделение к оператору $A_1 = A - Ш(A)$ с теми же, за исключением $E_m\{\mathcal{H}\}$ нетривиальными собственными пространствами, и т.д. Если среди α_k есть числа разных знаков, выделяем ортопроекторы по (4.21) с $n = 2\nu$. Если в процессе выделения у оставшегося оператора A_j будут максимальными по модулю собственные числа $\pm\alpha$, применим (4.21) к $A' = A_j^3 - \alpha A_j^2 \geq 0$. ⊠

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть T - йорданова алгебра эрмитовых операторов, действующих на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$, замкнутая в операторной топологии. Тогда идемпотентные операторы из T суть ортопроекторы на элементы некоторой $\mathbb{R}$ - квазилогики L_T подпространств пространства $\mathcal{H}$. L_T будет $\mathbb{R}$ - логикой в $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда T содержит единичный оператор.

Доказательство. По лемме 4.7 к алгебре T приложима лемма 4.6. ⊠

ТЕОРЕМА 4.9. Ненулевые собственные пространства эрмитова оператора-йорданова произведения $F \circ G = \frac{1}{2}(FG + GF)$ ортопроекторов на $\mathcal{F}$ и на $\mathcal{G}$ принадлежат $\mathcal{R}$- квазилогике, порожденной $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Они могут быть выражены через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ применением конечного числа операции $+$, $-$, $\Cap$, $\Cap$.

Доказательство. Перейдем к матричной записи с блоками (4.20), $1 \le \nu \le s(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Тогда

$$F_\nu \circ G_\nu = (\alpha_\nu^2 - \beta_\nu^2)\begin{pmatrix} \alpha_\nu^2 \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\beta_\nu^2 \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

При $\nu = 0$ получается $\rho_0 \alpha_0^2 \mathbb{1}_0$, при $\nu = s+1, s+2$ –нули. Таким образом, положительное собственное подпространство есть $\mathcal{F}_\nu \Cap \mathcal{G}_\nu$, отрицательное – $(\mathcal{F}_\nu + \mathcal{G}_\nu) \ominus (\mathcal{F}_\nu \Cap \mathcal{G}_\nu)$. Далее, $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}^{(\nu)} \Cap \mathcal{G}^{(\nu)}$, $\mathcal{G}_\nu = \mathcal{F}^{(\nu)} \Cap \mathcal{G}^{(\nu)}$, где $\mathcal{F}^{(\nu+1)} = \mathcal{F}^{(\nu)} \ominus \mathcal{F}_\nu$, $\mathcal{G}^{(\nu+1)} = \mathcal{G}^{(\nu)} \ominus \mathcal{G}_\nu$ см. теорему 2.3 в [9]. Положительные собственные числа убывают с ростом ν. $\boxtimes$

Заметим, что аналогичный подсчет для коммутатора $i[F,G] = i(FG-GF)$ дает блоки

$$2\alpha_\nu \beta_\nu (\alpha_\nu^2 - \beta_\nu^2)\begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\mathbb{1}_\nu \\ i\mathbb{1}_\nu & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

с собственными пространствами – когерентными $1:i$ и $-1:i$ линейными комбинациями $\mathcal{F}_\nu$ и $\mathcal{G}_\nu$.

§ 5. Почему именно $\mathcal{R}$ – логики ?

В своей основополагающей работе [7] Биркгоф и фон Нейман показали, что явления микромира описываются в терминах своей логики. Пусть эта логика непривычна и кажется парадоксальной, но она является естественным обобщением классической логики. Они установили, что события "квантовой логики" образуют решетку с ортодополнениями относительно операций $+$, $\cap$, $^\perp$ – аналогов классических операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Эта решетка уже не будет дистрибутивной, а только модулярной; более того, дистрибутивность решетки событий равносильна классичности логики явления.

Однако, класс всех модулярных (или слабо модулярных) решеток с ортодополнениями чересчур широк. Обычный квантово-механический подход, основанный на введении C^* – алгебры наблюдаемых, приводит, как доказано в нашем препринте [9] , и теореме 3.5 настоящей работы, к куда более узкому классу решеток подпространств, в которых имеют смысл дополнительные операции над элементами и есть двуместная числовая функция - косинус (угловой величины) щели между подпространствами. Более того, приведенный во введении пример (0.10) решетки подпространств показывает, что к списку решеточных операций над подпространствами надо непременно добавить дополнительные операции, если мы хотим, чтобы "логический" подход был равносилен стандартному алгебраическому. Только что процитированные наши результаты содержат также доказательство полноты в решетках унитарных ковариантов системы операций I , II , III и IV_b , где последняя - это операция (2.13) с комплексными значениями параметров. Тем самым указанный логический подход равносилен (для конечномерных пространств) подходу с помощью C^*- алгебр наблюдаемых.

Можно спорить, насколько удачно выбрана система операций. Особенно непривычно, что операция когерентного комбинирования определена не для любых пар, а только для пар изоклинных подпространств. (Впрочем, с похожей ситуацией приходится сталкиваться в теории инвариантов, - система инвариантов, полная почти всюду, на многообразии меньшей размерности требует подключения дополнительных инвариантов; вспомним инварианты и семиинварианты в теории кривых второго порядка, см. [17] , § 108). Мы сейчас покажем, что понятие изоклинности подпространств является фундаментальным.*)

---

*) В этом вопросе мы не можем опираться на геометрическую интуицию, - нетривиальные примеры изоклинных пар (отличные от пар прямых или пар совпадающих плоскостей) появляются только в четырехмерном пространстве. Следует добавить, что геометрия расположения пары евклидовых подпространств хорошо известна только специалистам, см. [24] . В обычных курсах линейной алгебры этот вопрос не затрагивается.

Пусть в пространстве $\mathcal{H}$ задано матричное распределение вероятностей ρ, и пусть в $\mathcal{H}$ имеется пучок изоклинных подпространств $\mathcal{F}_\varphi$, $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_{\pi/2} = \mathcal{H}'$. Пусть ограничение $H'\rho H'$ меры ρ на $\mathcal{H}'$ задается блочной матрицей

$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho^{11} & \rho^{12} \\ \rho^{21} & \rho^{22} \end{pmatrix}, \qquad (\rho')^* = \rho'.$$

Как вытекает из (2.12) матрица F'_φ ортопроектора на $\mathcal{F}_\varphi$ имеет в каноническом базисе вид

$$\sum_{j=1}^{m} |y^j_\varphi\rangle\langle y^j_\varphi| = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \cdot \mathbb{1} & \cos\varphi\sin\varphi\cdot\mathbb{1} \\ \cos\varphi\sin\varphi\cdot\mathbb{1} & \sin^2\varphi\cdot\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

Тогда мера подпространства $\mathcal{F}_\varphi$ равна

$$\rho\{\mathcal{F}_\varphi\} = Tr(\rho F_\varphi) = Tr(\rho' F'_\varphi) =$$

$$= \cos^2\varphi \cdot Tr\,\rho^{11} + 2\sin\varphi\cos\varphi\cdot Re\,Tr\,\rho^{12} + \sin^2\varphi\cdot Tr\,\rho^{22} \qquad (5.2)$$

Отсюда немедленно вытекает, что любые четыре значения $\rho_j = \rho\{\mathcal{F}_j\}$ связаны соотношением

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \rho_1 \\ 1 & \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \rho_2 \\ 1 & \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & \rho_3 \\ 1 & \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & \rho_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.3)$$

нетривиальным, если из четырех направлений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 хотя бы три различны.

Согласно известной теореме Глисона [18], см. также [19], всякая неотрицательная нормированная функция ρ на решетке всех подпространств пространства $\mathcal{H}$, аддитивная в смысле

$$\rho\{\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}\} = \rho\{\mathcal{F}\} + \rho\{\mathcal{G}\}, \qquad \forall \mathcal{F} \perp \mathcal{G}, \qquad (5.4)$$

является при $Dim\,\mathcal{H} \geq 3$ матрично-заданной. Таким образом, при $Dim\,\mathcal{H} \geqslant 3$ соотношение (5.3) следует из (5.4). При $Dim\,\mathcal{H}=2$ это уже не верно. В то же время легко видеть, что при $Dim\,\mathcal{H}=2$ матрично-заданные меры выделяются как раз условием (5.3).

Выражение (5.2) хорошо известно в теории поляризованного света, где носит название обобщенного закона Малюса, см. [20]. Однако, существование неклассического соотношения (5.3) сверх классического (5.4) для матрично-заданных мер, никем, повидимому, в расчет не принималось. Аналогичное неклассическое соотношение можно написать для связки когерентных комплексно-линейных (а также кватернионно-линейных) комбинаций пары изоклинных подпространств, только оно связывает уже пять (семь) значений.

Почти столь же естественным, как и понятие пересечния, является понятие контактов двух подпространств. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – два подпространства, F и G – ортопроекторы на них. Если мы, следуя Яуху [21], рассматриваем прохождение излучения, то F и G соответствуют два фильтра, первый – пропускающий изучение только со свойством $\mathcal{F}$, второй – только со свойством $\mathcal{G}$. Как известно, ортопроектор на $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ равен

$$F \wedge G = \lim_{n\to\infty} (FG)^n = \lim_{n\to\infty} (FGF)^n .$$

Поэтому, достаточно длинная последовательность фильтров $FGFG\ldots FGF$ про-пускает почти только излучение со свойством $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ (Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ совместимы, $FG=GF$, то достаточно, как в классике, двух фильтров). Когда $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}=0$, такая последовательность почти ничего не пропускает. Но в той доле излучения, кот-орая все-таки пройдет, будет представлена почти исключительно компонентами со свойством $\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$, ибо $\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$ по определению есть собственное подпространство эрмитова оператора FGF, отвечающее его максимальному собственному значению:

$$F /\!\!\wedge G = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})}\, FGF\right]^n . \tag{5.5}$$

Сложнее всего построить фильтр для когерентных линейных комбинаций $\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ двух изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, особенно с невещественным отношением $a:b$, т.е. со сдвигом фазы. В опытах с поляризованным светом используют для этой цели так называемые фазовые пластинки, см. [20], гл. 7. В этой работе нас интересуют только вещественные комбинации. В § 4 мы фактически описали математическую процедуру, в которой возникает ортопроектор $K(t)$ при $-1<t<1$, $a:b=(1+t):(1-t)$;

$$K(t)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tau}{2w(\tau)}F+\frac{1-\tau}{2w(\tau)}G\right]^n, \qquad (5.6)$$

где $2w(\tau)=\|(1+\tau)F+(1-\tau)G\|$ описано (4.13), t и τ связаны (4.10). В самом деле, (5.6) следует из утверждения (4.17) теоремы 4.5 и замечания (4.21).

Приведенные аргументы можно сформулировать совсем коротко.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Условимся называть носителем эрмитова оператора A на пространстве $\mathcal{H}$ с каноническим спектральным разложением (4.5)

$$A=\sum_{\alpha^{(k)}\in\Lambda(A)}\alpha^{(k)}E_k$$

подпространство

$$\mathcal{A}:=\bigoplus_{k:\alpha^{(k)}\neq 0}E_k\{\mathcal{H}\}=\Big(\bigoplus_{\alpha^{(k)}\neq 0}E_k\Big)\{\mathcal{H}\}. \qquad (5.7)$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{T}$ - некоторая замкнутая йорданова алгебра эрмитовых операторов, действующих в конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$. Тогда носители всех операторов $A\in\mathcal{T}$ образуют некоторую $\mathcal{R}$ - квазилогику $L_{\mathcal{T}}$ подпространств пространства $\mathcal{H}$.

Доказательство. Согласно лемме 4.7 алгебра $\mathcal{T}$ содержит ортопроекторы $E_k(A)$ при всех $\alpha^{(k)}\neq 0$. Значит, она содержит ортопроектор на их сумму $\mathcal{A}$. Поэтому $\mathcal{A}\in L$; $L_{\mathcal{T}}$ — $\mathcal{R}$ - логика, порождаемая согласно теореме 4.8 алгеброй $\mathcal{T}$. ⊠

Теорема 5.1. показывает, что $\mathcal{R}$ - квазилогики необходимо появляются, как только мы начинаем рассматривать йордановы алгебры наблюдаемых. Но $\mathcal{R}$ - квазилогики неизбежно появляются, как только мы заходим изучать расщепимые аффинные семейства состояний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Условимся называть положительной, соответственно отрицательной частью эрмитова оператора A с каноническим спектральным разложением (4.5):

$$A = \sum_{\alpha^{(k)} \in \Lambda(A)} \alpha^{(k)} E_k$$

эрмитовы операторы

$$A^{(+)} := \sum_{\alpha^{(k)} > 0} \alpha^{(k)} E_k \; ; \quad A^{(-)} := -\sum_{\alpha^{(k)} < 0} \alpha^{(k)} E_k \, . \tag{5.8}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Условимся называть какое-либо семейство $\mathbf{S}$ эрмитовых операторов расщепимым линейным пространством, если $\mathbf{S}$ есть линейное пространство над $\mathbb{R}$ и вместе с каждым $A \in \mathbf{S}$ также(дизъюнктные между собой операторы) $A^{(+)} \in \mathbf{S}$ и $A^{(-)} \in \mathbf{S}$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathbf{S}$ - расщепимое линейное пространство эрмитовых операторов, действующих на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$. Тогда носители всех операторов $A \in \mathbf{S}$ образуют некоторую $\mathbb{R}$ - квазилогику $L_{\mathbf{S}}$ подпространств пространства $\mathcal{H}$.

<u>Доказательство</u> основывается на следующем важном замечании: Если $\mathcal{F}$ есть носитель ненулевого оператора $A \geqslant 0$, а контактирующее с $\mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{G}$ тоже является носителем какого-то ненулевого оператора $B \geqslant 0$, то подпространство $\mathcal{F}' = \mathcal{G} - \mathcal{F} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$ также является носителем, например, оператора

$$(1-G)\,A\,(1-G) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (B - tA)^{(-)} \tag{5.8}$$

За недостатком места мы опускаем дальнейшие рассуждения. ☒

В некоммутативной теории вероятностей фендаментальную роль играет понятие расщепимого аффинного семейства состояний (т.е. операторов распределений вероятностей), - семейства всех неотрицательных операторов со следом единица, принадлежащих какому-либо расщепимому линейному пространству эрмитовых операторов. Нами доказана в [22] следующая

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть Π - стохастическая суперматрица, см. [23], отображающая множество всех n - мерных матриц вероятностей в себя. Тогда множество всех Π - стационарных эрмитовых матриц A, $\Pi A = A$, образует расщепимое линейное пространство. Соответственно, множество Π - стационарных матриц вероятностей образует расщепимое аффинное семейство.

Собственно говоря, вся приведённая в § § I-4 теория была построена нами как рабочий аппарат для изучения множества Π - стационарных распределений вероятностей.

Институт прикладной математики АН СССР

Московский Государственный Университет

ЛИТЕРАТУРА.

1. R.Sikorski. Boolean Algebras, 2 ed, Berlin, Springer, I964 (русск.перевод I969)

2. Д.А.Владимиров Булевы алгебры, М., Наука, I969.

3. J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, Springer, I932 (русск.перевод I964).

4. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., Наука, I969.

5. G.W. Mackey, The Mathematical Foundation of Quantum Mechanics, N.Y. Benjamin, I963 (русск.перевод I965).

6. G.C. Wick, A.C. Wightman, E.P. Wigner, The Intrinsic Parity of Elementary Particles, Phys.Rev., 88, N I (I952), I0I-I05. (русск,перевод в кн. Е.Вигнер, Этюды о симметрии, ., Мир, I97I).

7. G.Birkhoff, J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann.Math. 37, (I936), 823-835.

8. А.И.Ахиезер, Р.В.Половин Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры, УФН, I07:3 (I972), 463-488.

9. Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов Унитарные эквиварианты семейства подпространств, Препринт ИПМ АН СССР, I974, № 52.

I0. P.Jordan, Über eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, I932, 569-575.

II. P.Jordan, Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, I933, 209-2I4.

I2. P.Jordan, J. von Neumann, E.Wigner, On an Albegraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, Ann.Math. 35 (I934), 29-64.

13. N.Jacobson, Structure and Representations of Jordan Algebras, Providence, Amer.Math.Soc., Coll.Publ., 39, 1968.

14. D.M. Topping, Jordan Algebras of Self-adjoint Operators, Mem.Amer.Math.Soc., 53, (1965), 1-48.

15. V.S. Vardarajan, Geometry of Quantum Theory, v.I, N.Y., Van Nostrand, Amer.Math.Soc.Coll.Publ., 25, 1968.

16. G.Birkhoff, Lattice Theory, 2ed, N.Y., 1948 (русск.перевод 1952).

17. Б.Н. Делоне, Д.А.Райков Аналитическая геометрия, т. I, М.-Л., Гостехиздат, 1948.

18. A.M. Gleason, Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, J.Rat.Mech.Anal., 6, (1957), 885-894.

19. J.R. Parthasarary, Probability theory on the closed subspaces of a Hilbert space, preprint; Математика, 14:5 (1970), 102-122.

20. W.A. Shurkliff, Polarized light, Cambridge, Harvard Univ. Press, 1962. (русск. перевод 1965).

21. J.M. Jauch, Foundation of Quantum Mechanics, London, Addison, 1968.

22. Е.А.Морозова Н.Н.Ченцов Стационарные матрицы вероятностей для стохастической суперматрицы, III советско-японск. симп. по теории вероятн. (Ташкент), Тезисы докладов, I, 111-113. (1975)

23. Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы, Препринт ИПМ АН СССР, 1973, № 84, 5-68.

24. Б.А.Розенфельд Многомерные пространства, М., Наука, 1966.

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов. "Элементарные йордановы логики."
Редактор А.А. Кириллов. Корректор Н.Н. Ченцов.

№ Т-20352 от 1.12.75г. Заказ № 3446. Тираж 150 экз.
Формат бумаги 60Х90, 1/16. Объем 1,9 уч. изд. л.
Цена 15 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.