ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов

К ТЕОРЕМЕ ЙОРДАНА – фон НЕЙМАНА – ВИГНЕРА

Препринт № 129 за 1975 г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

УДК 512.897+513.821

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

К ТЕОРЕМЕ ЙОРДАНА-фон НЕЙМАНА-ВИГНЕРА

TO THE THEOREM OF JORDAN-von NEUMANN-WIGNER

Москва, 1975 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Построена классификация $\mathcal{R}$ - логик L подпространств конечномерного унитарного пространства $\mathcal{H}$, аналогичная классификации конечномерных йордановых алгебр, данной Йорданом, фон Нейманом и Вигнером. Использован новый тип конфигурационных теорем, связывающих предминимальные L - подпространства и пучки изоклинных минимальных L - подпространств. Установлено взаимно однозначное соответствие между йордановыми алгебрами самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ - квазилогиками, т.е. решетками подпространств с расширенной системой логических операций.

A B S T R A C T

The paper considers the $\mathcal{R}$- logics and quasi-logics of subspaces of finite-dimensional unitary space $\mathcal{H}$, i.e. the lattices L of subspaces with augmented system of logical operations. The classification of $\mathcal{R}$ - quasi-logics, similar to that of finite-dimensional special Jordan algebras due to Jordan, von Neumann and Wigner, is constructed. The new type of configuration theorems, connecting the pre-minimal L - subspaces and the pencils of isocline minimal L - subspaces, is used. One-to-one correspondence between Jordan algebras of self-adjoint operators on $\mathcal{H}$ and $\mathcal{R}$ - quasi-logics is established.

ВВЕДЕНИЕ

Классификация всех конечномерных йордановых алгебр над полем вещественных чисел была построена Йорданом, фон Нейманом и Вигнером в их знаменитой работе "Об алгебраическом обобщении квантово-механического формализма" [1] , см. также [2] . Большой вклад в изучение йордановых алгебр самосопряженных операторов внес Топпинг [3] . Ему принадлежит, в частности, важное понятие квадратичного идеала, перенесенное затем также в абстрактные йордановы алгебры, см [4] . Исследования последующих лет позволили не только упростить доказательство классификационной теоремы, но и установить структуры многих бесконечномерных йордановых алгебр, [4] , [5] ,[6], [7],[8].

В настоящей работе мы показываем, что классификация конечномерных йордановых алгебр операторов может быть получена из классификации решеток подпространств специального вида. Эти решетки были названы нами в [9] $\mathbb{R}$-квазилогиками и $\mathbb{R}$-логиками. Наряду с подпространствами в них рассматриваются также пучки изоклинных подпространств и введены дополнительные операции.

$\mathbb{R}$-квазилогика подпространств возникает как логика событий, связанных с йордановой алгеброй наблюдаемых. Они возникают также при изучении некоторых семейств состояний, появляющихся в ряде вопросов некоммутативной теории вероятностей, см. [10] . Поэтому, классификация $\mathbb{R}$-логик представляет самостоятельный интерес.

Наши геометрические построения используют новый тип конфигурационных теорем, в которых рассматривается инцидентность подпространств и $\mathbb{R}$-пучков подпространств , Таким образом, наша геометрия оказывается много богаче проективной, ср. [11], [12] , благодаря чему класс допустимых решеток подпространств оказывается куда уже, чем в логиках Варадараяна [13] . Следует, однако, подчеркнуть, такое сужение, равно как и введение дополнительных операций над подпространствами, необходимо, если по йордановой алгебре наблюдаемых строить логику событий, см. [9] , [14] . Мы рассматриваем также симметрии, возникающие в логиках подпространств, ср. [15] , [4], и индуцированную симметриями алгебру гомотетий, ср. [16] .

Напомним известные определения. Мы рассматриваем конечномерное унитарное пространство $\mathcal{H}$ с полуторалинейным скалярным произведением

$$<x|y> = \overline{<y|x>}.$$

Эрмитовы операторы A действующие на $\mathcal{H}$,

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle, \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H};$$

обладают спектральным разложением

$$A = \sum_k \alpha^{(k)} E_k ; \tag{0.1}$$

$$E_k = E_k^* = E_k^2, \ \forall k; \qquad E_j E_k = 0, \ \forall j \neq k.$$

Все эрмитовы идемпотенты $P = P^* = P^2$ являются ортопроекторами; соответствующие собственные подпространства будут обозначаться далее теми же буквами, но в рукописном начертании.

Алгебра T операторов называется йордановой, если она устойчива относительно сложения операторов, умножения на вещественные числа, (т.е. является $\mathbb{R}$-линейным пространством), а также относительно симметризованного умножения операторов:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA). \tag{0.2}$$

Такое умножение коммутативно, но не ассоциативно. Вместо него в качестве основной операции можно взять возведение в квадрат,

$$A \longrightarrow A^2 = A \circ A: \quad 4A \circ B = (A+B)^2 - (A-B)^2.$$

Важной производной операцией является квадратично-линейная бинарная операция

$$ABA = 2(B \circ A) \circ A - B \circ (A \circ A). \tag{0.3}$$

Условимся называть носителем $\mathcal{E}(A)$ оператора A со спектральным разложением (0.1) сумму всех его собственных подпространств $E_k\{\mathcal{H}\}$, за исключением A-аннулируемого

$$\mathcal{E}(A) = \Big(\bigoplus_{k:\alpha_k \neq 0} E_k\Big)\{\mathcal{H}\} = \bigoplus_{k:\alpha_k \neq 0} E_k\{\mathcal{H}\}. \tag{0.4}$$

Йорданова алгебра T эрмитовых операторов вместе с каждым A содержит и все его собственные ортопроекторы, кроме, может быть, отвечающего $\alpha = 0$. Поэтому, проектор на носитель $A \in T$ также принадлежит T , $E(A) \in T$.

Перейдем к решеткам подпространств пространства $\mathcal{H}$. В [9] мы назвали систему L подпространств $\mathbb{R}$-квазилогикой, если она устойчива относительно операций:

Iа Собственного ортогонального вычитания, определенного только для пар $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}\subseteq\mathcal{H}$:

$$(\mathcal{E},\mathcal{F})\to\mathcal{E}\ominus\mathcal{F}.$$

II Векторного сложения подпространств

$$(\mathcal{F},\mathcal{G})\to\mathcal{F}+\mathcal{G}$$

III Выделения контакта одного подпространства с другим, ему не ортогональным (некоммутативного обобщенного пересечения)

$$(\mathcal{F},\mathcal{G})\to\mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{FGF}{\|FGF\|}\right)^n\right]\{\mathcal{H}\},\quad \|FGF\|>0; \tag{0.5}$$

$$\|FGF\|=0\Leftrightarrow\mathcal{F}\perp\mathcal{G}\Leftrightarrow\mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}:=0.$$

IVa Когерентного $\mathbb{R}$ -линейного комбинирования изоклинных подпространств, определенного для пар $\mathcal{F}=\mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}$, $\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\!|\,\mathcal{G}$, и пар $a,b\in\mathbb{R}$; $(\mathcal{F},\mathcal{G},a,b)\to\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G})$;

$$\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G}):=\{|z\rangle\doteq a|x\rangle+b\,I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}|x\rangle,\ \forall|x\rangle\in\mathcal{F}\} \tag{0.6}$$

$$I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}:\sqrt{\|FGF\|}\ \ I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}|x\rangle=G|x\rangle,\ \forall|x\rangle\in\mathcal{F}. \tag{0.7}$$

Геометрически контакт может быть охарактеризован как $\mathbb{C}$ -линейное подпространство всех векторов $|x\rangle\in\mathcal{F}$, образующих с $\mathcal{G}$ (т.е. со своей проекцией на $\mathcal{G}$) наименьший возможный угол $\varphi=\arccos\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Здесь $\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})=\|FGF\|=\|GFG\|$, и взята спектральная норма. Очевидно, что $\mathcal{G}$-проекцией контакта $\mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}$ будет контакт $\mathcal{F}\cap\!|\,\mathcal{G}$, обратное соответствие устанавливает ортопроектор F, а длины векторов при таких проектированиях умножаются на $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})\leq 1$, см.например, § 2 нашего препринта [14] ; поэтому

$$I^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}\,I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}=\mathbb{1}_{\mathcal{F}},\qquad I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}\,I^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}=\mathbb{1}_{\mathcal{G}}. \tag{0.8}$$

Когда общая часть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ отлична от нулевого вектора, то

$$\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=1;\qquad \mathcal{F}\,|\!\cap\,\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\!|\,\mathcal{G}.$$

Контакты являются примером изоклинных, т.е. наклоненных друг к другу под всюду одинаковым углом подпространств. Впрочем, любые два изоклинных подпространства являются контактами, например, контактами самих себя. Разумеется, случай ортогональных подпространств мы исключаем. Необходимым и достаточным условием изоклинности $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ является выполнение равенства

$$FGF=\rho^2 F, \quad GFG=\rho^2 G, \quad \rho=\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})>0. \tag{0.9}$$

Впрочем, критерий изоклинности двух подпространств может быть ... в терминах чисто решеточных операций[ж)] векторного сложения, собственного ортогонального вычитания и выражающейся через них согласно леммы I.I из [9] операции ортопроектирования.

ТЕОРЕМА 0.I. Ортопроектирование G подпространства $\mathcal{F}$ на изоклинное с ним $\mathcal{G}$ сохраняет отношение ортогональности, $G\{\mathcal{K}_1\}\perp G\{\mathcal{K}_2\}$ при $\mathcal{K}_1\perp\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\subset\mathcal{F}$.

Обратно, если ортопроектирование $\mathcal{F}$ на $\mathcal{G}$ сохраняет отношение ортогональности, и таково же ортопроектирование $\mathcal{G}$ на $\mathcal{F}$, то либо $\mathcal{F}\perp\mathcal{G}$, $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$, либо $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны.

<u>Доказательство.</u> Неотрицательный оператор FGF должен иметь не более одного неотрицательного собственного значения. ⊠

Два изоклинных подпространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ определяют целый $\mathbb{R}$-пучок изоклинных подпространств $\mathcal{G}_\psi$. В подходящем базисе пространства $\mathcal{H}$ нетривиальный диагональный блок матрицы ортопроектора G_ψ, отвечающий подпространству $\mathcal{E}+\mathcal{F}$ имеет вид

$$G_\psi=\begin{pmatrix}\cos^2\psi\,\mathbb{1} & \sin\psi\cos\psi\,\mathbb{1}\\ \sin\psi\cos\psi\,\mathbb{1} & \sin^2\psi\,\mathbb{1}\end{pmatrix}. \tag{0.10}$$

$$E=G_0\,; \qquad F=G_\varphi\,, \qquad \varphi=\arccos\rho(\mathcal{E},\mathcal{F})$$

ж) В [9] этот факт не был отмечен.

$\mathcal{R}$ – пучок изоклинных подпространств устроен в точности как пучок прямых вещественной эвклидовой плоскости:

$$\mathcal{G}_\psi := \{|y\rangle = \cos\psi\cdot|x\rangle + \sin\psi\cdot W^{\mathcal{E}}_{\mathcal{R}}|x\rangle,\ \forall |x\rangle\in\mathcal{E}\}; \quad (0.11)$$

где $\mathcal{R} = (\mathcal{E}+\mathcal{F})\ominus\mathcal{E} = \mathcal{G}_{\pi/2}$, а изометрия

$$W^{\mathcal{E}}_{\mathcal{R}} = I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{R}}\cdot I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}; \quad (0.12)$$

$$I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} = \operatorname{sgn}\cos(\varphi-\psi)\, I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}} I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}, \quad \rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) = |\cos(\varphi-\psi)|, \quad (0.13)$$

см. [9] , § 2. Операция $\mathcal{R}$ -линейного когерентного комбинирования позволяет получить из изоклинных $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ любые подпространства этого пучка и только их. Согласно теореме 2.7 из [9] все подпространства пучка можно получить из

$$\mathcal{E},\ \mathcal{F},\ \mathcal{E}' = \mathcal{G}_{\pi/2} = (\mathcal{E}+\mathcal{F})\ominus\mathcal{E}, \qquad \mathcal{F}' = \mathcal{G}_{\varphi-\pi/2} = (\mathcal{E}+\mathcal{F})\ominus\mathcal{F},$$

употребляя лишь $\mathcal{R}^+$-комбинирование,-комбинирование с положительными коэффициентами.

Как показано в [9] , список основных операций можно изменить. Например, вместо операции Ia собственного ортогонального вычитания может быть взята операция

Ib, Ортогонализации вычитанием

$$(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathcal{G}-\mathcal{F} = (\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F},$$

определенная для всех пар $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, ср.предыдущий абзац. Вместо серии операций III можно взять лишь операцию $1:1$-комбинирования-построения биссекторной "плоскости" $\mathcal{E}\cap\mathcal{F}$ двух изоклинных подпространств. Тогда необходимо добавить еще операцию предельного перехода по последовательности подпространств.

Операциям над подпространствами соответствуют операции над их ортопроекторами, см. [9] , § 4. Проще всего выглядит операция Ia:

$$G = E - F, \qquad \mathcal{E}\supseteq\mathcal{F}, \qquad \mathcal{G} = \mathcal{E}\ominus\mathcal{F}.$$

Простейшая формула для операции III выделения контакта, см.(0.7), содержит предельный переход

$$F\wedge G = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{FGF}{\|FGF\|}\right)^n \quad \text{при} \quad \|FGF\|\neq 0$$

Ортопроектор $F \vee G$ на сумму подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ можно определить как наименьший ортопроектор, больший как F, так и G. Если же захотеть определить его алгебраический формулой, то также потребуется предельный переход:

$$F \vee G = \operatorname{sgn}(F+G) = \lim_{n\to\infty} (F+G)^{2^{-n}} . \tag{0.14}$$

Впрочем, и оператор $F \wedge\!\!\wedge G$, в частности ортопроектор $F \wedge G$ на пересечение $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, можно описать в терминах порядка. $F \wedge\!\!\wedge G$ есть наибольший ортопроектор, меньший как F, так и $\rho^{-1} G$, $\rho = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Однако, для частных расположений подпространств формулы становятся конечными. Так, $F \vee G = F + G$ при $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$. Для изоклинных подпространств справедлива следующая формула

$$E \vee F = \frac{E + F - 2E \circ F}{1 - \rho^2(\mathcal{E}, \mathcal{F})}; \quad 2E \circ F = EF + FE, \tag{0.15}$$

ср. [3], [17]. Оператор проектирования на средний контакт двух изоклинных подпространств описывается формулой

$$E \wedge\!\!\wedge F = \frac{\rho^2(E+F) + E \circ F}{\rho^2(1+\rho^2)} \tag{0.16}$$

Заметим, что оператор $2E \wedge\!\!\wedge F - E \vee F$ описывает симметрию пространства $\mathcal{E} + \mathcal{F}$, переставляющую $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ местами. Под симметрией мы понимаем эрмитов оператор, действующий унитарно на $\mathcal{E} + \mathcal{F}$, см. [15]. Отметим еще, что

$$(E \vee F) - E = \frac{F - \rho^2 E - 2E \circ F}{1 - \rho^2} \tag{0.17}$$

есть ортопроектор на $\mathcal{F} - \mathcal{E} = (\mathcal{E} + \mathcal{F}) \ominus \mathcal{E}$.

Как вытекает из формулы (0.12), зная ортопроекторы на три подпространства из $\mathcal{R}$-пучка изоклинных подпространств, мы можем через них уже линейно выразить любой проектор G_ψ из этого семейства. Особенно простые формулы получаются, когда за исходные мы берем $G_0 = E$, $G_\varphi = F$ и $G_{\pi/2} = E \vee F - E = N$. Тогда $G_\psi =$

$$=\cos^2\psi\cdot E+\sin^2\psi\cdot N+\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\varphi\cos\varphi}\left(F-\cos^2\varphi\cdot E-\sin^2\varphi\cdot N\right). \qquad (0.18)$$

Нетрудно заметить, что линейной комбинации двух прямых отвечает суперпозиция соответствующих чистых состояний. В самом деле, чистое состояние,- вырожденное распределение вероятностей,-описывается ортопроектором на соответствующую прямую, или любым направляющим вектором этой прямой (ψ -вектором). Суперпозицией называется чистое состояние с направляющим вектором, равным линейной комбинации исходных ψ-векторов.

В приведенном определении суперпозиции не накладывается никаких ограничений на выбор фаз направляющих векторов. При построении $\mathbb{C}$-линейной комбинации это не имеет особого значения. Если же допускается строить только $\mathbb{R}$-линейные комбинации прямых,-векторы надо выбирать синфазно (или антифазно, см. [14] , § 2). При синфазных исходных ψ-векторах $|x\rangle$ и направляющий вектор их $\mathbb{R}$-суперпозиции разлагается по исходным с тем же отношением $a:b$, что фигурируют в определении соответствующей когерентной линейной комбинации прямых (точнее, за направляющий вектор можно взять любой вектор $ca|x\rangle+cb|y\rangle$, где $|c|=[a^2+2ab\langle x|y\rangle+b^2]^{-1/2}$, где $\arg c$ - произволен).

Естественно желать операцию над подпространствами, переходящую для прямых в операцию суперпозиции соответствующих чистых состояний, иметь в списке основных. Поэтому операции рассмотренные нами в [14] , мы разбили в [9] на две самостоятельные операции $\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}=\mathcal{F}\,\underset{1}{\cap}\,\mathcal{Y}\;[\mathcal{F}\cap\mathcal{Y}=\mathcal{F}\,\underset{-1}{\cap}\,\mathcal{Y}]$ и $\mathcal{K}_{a:b}$:

$$\mathcal{F}\,\underset{t}{\cap}\,\mathcal{Y}=\mathcal{K}_{(1+t):(1-t)}\left(\mathcal{F}\cap\mathcal{Y},\ \mathcal{F}\cap\mathcal{Y}\right).$$

Важно отметить, что введенные понятия изоклинных подпространств и их когерентных комбинаций позволяют обобщить само понятие суперпозиции состояний (в нашей работе [9] эта возможность отмечена не была). Распределение вероятностей на логике подпространств задается оператором плотности - неотрицательным эрмитовым оператором со следом единица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Операторы плотности P и Q назовем когерентными, если

$$FPF=\varkappa' Q, \qquad EQE=\varkappa'' P, \qquad (0.19)$$

где $E=\operatorname{sgn}P$, $F=\operatorname{sgn}Q$ ортопроекторы на их носителе $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, $\rho(\mathcal{E},\mathcal{F})>0$.

ЛЕММА 0.2. Носители $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ когерентных операторов плотности изоклинны, причем $\varkappa' = \varkappa'' = \rho^2(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Доказательство. Согласно (0.19)

$$(EFE)P(EFE) = \varkappa'\varkappa'' P, \qquad (FEF)Q(FEF) = \varkappa'\varkappa'' Q.$$

Отсюда, ограничение на $\mathcal{F}$ оператора EFE является скалярным оператором. Это дает $EFE = \sqrt{\varkappa'\varkappa''}\,E$. Аналогично, $FEF = \sqrt{\varkappa'\varkappa''}\,F$. Наконец, $\varkappa' = \varkappa''$, так как $tr\,P = tr\,Q = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Суперпозицией двух когерентных смешанных состояний P и Q назовем оператор плотности вида

$$P_\theta = Sc^2\theta \cdot G_\theta P G_\theta = Sc^2(\theta - \varphi) G_\theta Q G_\theta, \tag{0.20}$$

где $\cos\varphi = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $E = sgn\,P$, $F = sgn\,Q$; $G_\theta = sgn\,R_\theta$, описанос (0.12), есть ортопроектор на $\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, с $a : b = \sin\varphi\, ctg\,\theta - \cos\varphi$.

ЛЕММА 0.3. Носитель $\mathcal{G}$ суперпозиции двух когерентных смешанных состояний P и Q принадлежит $\mathcal{R}$-пучку, определяемому носителями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Состояние R_θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, когерентно как P, так и Q, кроме случаев $\theta = \pi/2$, когда оно ортогонально P, и $\theta = \varphi - \pi/2$ когда оно ортогонально Q.

Доказательство очевидно вытекает из предложений § 2 нашей работы [9]. $\boxtimes$

ЛЕММА 0.4. В соответствующем базисе подпространства $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ матрица оператора G_θ состоит из двумерных диагональных блоков вида

$$\begin{pmatrix} \sigma_k \cos^2\theta & \sigma_k \sin\theta\cos\theta \\ \sigma_k \sin\theta\cos\theta & \sigma_k \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{0.21}$$

где σ_k -собственные числа оператора P, взятые столько раз, какова их кратность.

Доказательство. Выберем в $\mathcal{E}$ ортонормированный базис из собственных векторов оператора P и дополним его $I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}, I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$ - соответствующим базисом в $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} + \mathcal{F}) \ominus \mathcal{E}$. После умножения диагональной матрицы P слева и справа на G_θ, из (0.12) с учетом $\cos\theta = \rho(\mathcal{E}, \mathcal{G}_\theta)$ получаем (0.21). $\boxtimes$

В этой работе нам не понадобится явно ссылаться на известные связи между подпространствами, квадратичными идеалами и порядковыми идеалами (т.е. идеалами по упорядоченности), см. [3]. Отметим, только, что возможно истолковать все операции $\mathcal{R}$-квазилогики, как операции над идеалами. Добавим еще, что ключевой идеей наших последующих построений будет выделение минимальных подпространств $\mathcal{R}$-квазилогики, очевидно, соответствующих минимальным квадратичным идеалам йордановой алгебры и минимальным идеалам по упорядоченности в расщепимых пространствах операторных мер, см. [9], определение 5.3. Как мы увидим, два минимальных подпространства либо изоклинны, либо ортогональны.

§ I. Минимальные и факторные пространства из $\mathcal{R}$ -квазилогики.

В этом параграфе мы изучим в общих чертах строение $\mathcal{R}$ - квазилогик. Оно напоминает строение $\mathcal{C}$ -логик, изученное нами в [14]. Тонкие детали строения, которыми они различаются, будут рассмотрены в следующих параграфах.

ТЕОРЕМА I.I. Во всякой $\mathcal{R}$ -квазилогике $\mathbf{L}$ есть максимальное подпространство $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{\mathbf{L}}\in\mathbf{L}$, содержащее любое $\mathbf{L}$ - подпространство.

ПРИМЕЧАНИЕ. Когда $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}=\mathcal{H}$, мы будем говорить об $\mathcal{R}$ -логике. В этом случае $\mathcal{F}^{\perp}=(\mathcal{H}\ominus\mathcal{F})\in\mathbf{L}$ для любого $\mathcal{F}\in\mathbf{L}$.

Доказательство. Возьмем за $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}$ $\mathbf{L}$- подпространство наибольшей размерности. Если $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}$ не содержит $\mathbf{L}$ -подпространство $\mathcal{F}$, то

$$\mathcal{M}\subset(\mathcal{M}+\mathcal{F})\in\mathbf{L},\qquad \mathcal{D}im(\mathcal{M}+\mathcal{F})>\mathcal{D}im\,\mathcal{M} \qquad \boxtimes$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Принадлежащее $\mathcal{R}$ - квазилогике $\mathbf{L}$ пространство $\mathcal{F}$ называется $\mathbf{L}$ -минимальным, если оно не имеет собственных $\mathbf{L}$ -подпространств (т.е. отличных от него самого и нулевого).

ТЕОРЕМА I.2. Два $\mathbf{L}$ -минимальных подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ либо изоклинны, либо ортогональны.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$. По определению квазилогики $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\in\mathbf{L}$. Отсюда либо $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=0$, что равносильно $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = 0$, либо $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$. Аналогично, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}$, что показывает изоклинность $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. ⊠

ТЕОРЕМА I.3. Всякое L - пространство может быть разложено в ортогональную сумму минимальных.

Доказательство. Выберем в L -подпространстве $\mathcal{F}$ L - подпространство $\mathcal{G}$ минимальной возможной размерности. Оно, разумеется, минимально. При $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ утверждение справедливо. При $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ проделаем такое же выделение в $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \ominus \mathcal{G}$. Такой процесс можно повторить лишь конечное число раз, так как размерности остатков $\mathcal{F}_k$ строго убывают. В итоге $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_m$ где все слагаемые минимальны, и $Dim\, \mathcal{G} = \leq Dim\, \mathcal{G}_1 \leq \ldots \leq Dim\, \mathcal{G}_m$. ⊠

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Назовем два L -минимальных подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ связанными, если они контактируют, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$, или если они ортогональны, но существует третье L - минимальное подпространство $\mathcal{E}$, контактирующее с ними обоими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3. Назовем L - подпространство предминимальным, если оно раздлагается в ортогональную сумму двух связанных L - минимальных подпространств.

Минимальные подпространства R - квазилогики соответствуют прямым, а предминимальные пространства - плоскостям евклидова пространства. Взаимное расположение плоскостей и прямых в трехмерном евклидовом пространстве должно удовлетворять некоторым конфигурационным соотношениям. Аналогичным соотношениям должно удовлетворять расположение минимальных и предминимальных подпространств. Доказанные в [14] конфигурационные соотношения мы сформулируем следующим образом.

ТЕОРЕМА I.4. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, а также $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{G}_{23}$ - L - минимальные подпространства. Пусть, далее, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ - попарно ортогональны, а $\mathcal{G}_{12} \subset (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{G}_{23} \subset (\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3)$, отличны от них (и, следовательно, контактируют с ними). Тогда $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{G}_{23}$ не совпадают друг с другом, но контактируют. Определяемое ими подпространство $\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{23}$ пересекается с $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_1$ по подпространству $\mathcal{G}_{31}$. Последнее отлично от нулевого, от $\mathcal{F}_1$ и от $\mathcal{F}_3$, и является когерентной линейной комбинацией $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{G}_{23}$ с вещественными коэффициентами

$$a : b = -\sin\theta_{332} : \sin\theta_{112}, \tag{I.1}$$

где $\theta_{kk2} = \arccos\rho(\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_{k2})$. При этом $\operatorname{tg}\theta_{113} = \operatorname{tg}\theta_{112} : \operatorname{ctg}\theta_{332}$, а канонические изометрии $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_1$, порождаемые $\mathcal{G}_{12}$, $\mathcal{G}_{23}$, $\mathcal{G}_{31}$, связаны

$$I_3^{31} I_{31}^{1} = -I_3^{23} I_{23}^{2} I_2^{12} I_{12}^{1}. \tag{I.2}$$

ТЕОРЕМА I.5. Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, а также $\mathcal{G}_{23}$ - L - минимальные подпространства. Пусть, далее $\mathcal{F}_3$ ортогонально и $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ контактируют, а $\mathcal{G}_{23} \subset (\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3)$ контактирует как с $\mathcal{F}_2$, так и с $\mathcal{F}_3$. Тогда пересечение

$$\mathcal{G}_{13} = (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3) \cap (\mathcal{G}_{23} + \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2).$$

отлично от нулевого подпространства, от $\mathcal{F}_1$ и от $\mathcal{F}_3$, и является когерентной линейной комбинацией $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{G}_{23}$ с вещественными коэффициентами

$$a : b = -1 : 2\cos\theta_{223}\cos\frac{\varphi_{12}}{2}, \qquad (1.3)$$

где $\varphi_{12} = \arccos\rho(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. При этом $\theta_{113} = -\theta_{223}$, а канонические изометрии связаны

$$I_3^{13} I_{13}^1 = -I_3^{23} I_{23}^2 I_2^1. \qquad (1.4)$$

<u>Доказательство</u> этих теорем см. [14], леммы 4.11 и 4.12. Разумеется, требование минимальности в условиях можно было заменить требованием изоклинности контактирующих подпространств. ⊠

ТЕОРЕМА 1.6. Отношение связанности L-минимальных подпространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

<u>Доказательство</u>. Рефлексивность и симметричность очевидны. Проверим транзитивность. Очевидно достаточно проверить это свойство при условии $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_3$.

а) Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ контактируют, а $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ – тоже. Тогда оргтональные $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ связаны через $\mathcal{F}_2$.

б) Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ контактируют, $\mathcal{F}_3$ связано с $\mathcal{F}_2$ через $\mathcal{G}_{23}$, хотя $\mathcal{F}_2 \perp \mathcal{F}_3$. Тогда, по теореме 1.5 ортогональные $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ связывает отличающееся от них подпространство $\mathcal{G}_{13}$.

в) Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ ортогональны, но связаны через $\mathcal{G}_{12}$, а $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ контактируют. Случай сводится к б) изменением нумерации.

г) Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ ортогональны и связаны через $\mathcal{G}_{12}$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ также ортогональны и связаны через $\mathcal{G}_{23}$. Тогда ортогональные $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ связаны через $\mathcal{G}_{13}$ по теореме 1.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Непустое L - подпространство $\mathcal{N}$ назовем факторным, если

1^0 Оно содержит любое L - минимальное подпространство, с ним контактирующее.

2^0 Любые два содержащиеся в $\mathcal{M}$ L -минимальные подпространства связаны между собой.

ТЕОРЕМА 1.7. Всякое L -минимальное подпространство содержится в единственном факторном. Любые два факторные пространства либо совпадают, либо ортогональны. Максимальное L пространство $\mathcal{M}_L$ разлагается в ортогональную сумму всех факторных L - пространств.

<u>Доказательство</u>. По теореме 1.6 все L - минимальные подпространства разбиваются на непересекающиеся подклассы связанных между собой. Сумма каждого подкласса и будет факторным пространством. Разные факторы не могут контактировать, иначе контактировали бы их контакты и содержащиеся в них L - минимальные подпространства. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 1.8. Любое L - пространство $\mathcal{B}$ разлагается в ортогональную сумму своих проекций на факторные подпространства.

<u>Доказательство.</u> Разложим $\mathcal{B}$ по теореме 1.3 в ортогональную сумму минимальных, а затем сложим подпространства, принадлежащие одному подклассу. $\boxtimes$

Теорема 1.8 сводит описание структуры $\mathcal{R}$ - квазилогики к описанию структур всех её факторов.

ЛЕММА 1.9. Решетка $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ подпространств любого $\mathcal{L}$ - фактора $\mathcal{N}$ является $\mathcal{R}$ -квазилогикой $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ с максимальным подпространством $\mathcal{N}$. Эта логика не имеет собственных факторов.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{R}$ -квазилогика $\mathcal{L}$ разлагается в прямую сумму всех своих факторных $\mathcal{R}$ - логик.

Доказательство очевидно. ☒

Каждое факторное $\mathcal{L}$ - пространство либо является $\mathcal{L}$ - минимальным, либо разлагается в сумму двух $\mathcal{L}$ -минимальных, либо разлагается в сумму трех и более $\mathcal{L}$ -минимальных. Эти три случая являются принципиально различными. Первый случай тривиален, минимальные факторные пространства порождают логику, изоморфную булеву кольцу. Чтобы понять, как устроены факторы в остальных случаях, изучим сперва как устроены предминимальные подпространства.

§ 2. Строение предминимальных $\mathcal{L}$ -подпространств.

Мы назвали $\mathcal{L}$ - подпространство предминимальным, если оно разлагается в ортогональную сумму двух связанных минимальных подпространств, см. определение 1.3.

ТЕОРЕМА 2.1. Всякое собственное $\mathcal{L}$ - подпространство $\mathcal{L}$ -предминимального пространства $\mathcal{B}$ является $\mathcal{L}$ - минимальным. Всякие два несовпадающие контактирующие $\mathcal{L}$ -подпространства $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$; $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, определяют $\mathcal{R}$ -пучок изоклинных минимальных подпространств; он проходит через $\mathcal{F} = \mathcal{B} \ominus \mathcal{E}$,-

единственное в $\mathcal{B}$ ненулевое L-подпространство, ортогональное $\mathcal{E}$.

СЛЕДСТВИЕ. Всякое L-предминимальное пространство содержит по крайней мере один $\mathcal{R}$-пучок изоклинных L-минимальных подпространств.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{F}_0 = \mathcal{B}$ – определяющее разложение предминимального пространства $\mathcal{B}$. Любое L-подпространство $\mathcal{K}$ пространства $\mathcal{B}$, отличное от $\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, не может ни пересекаться с $\mathcal{E}_0$ и с $\mathcal{F}_0$, вместе или порознь, ни, следовательно, быть ортогональным $\mathcal{E}_0$ или $\mathcal{F}_0$. Поэтому $\mathcal{K}$ должно контактировать как с $\mathcal{E}_0$, так и с $\mathcal{F}_0$. По L – минимальности $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 \,/\!\cap \mathcal{K}$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{K} \ominus (\mathcal{K} /\!\cap \mathcal{E}_0)$. К нему применимы те же рассуждения, что и к $\mathcal{K}$. С другой стороны, как установлено в теореме 2.3 и лемме 1.5 нашего препринта [14] всегда

$$(\mathcal{E} /\!\cap \mathcal{K} + \mathcal{K} /\!\cap \mathcal{E}) \perp [(\mathcal{E} \ominus \mathcal{E} /\!\cap \mathcal{K}) + (\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} /\!\cap \mathcal{E})]. \quad (2.1)$$

Следовательно $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} /\!\cap \mathcal{E}_0 = \mathcal{O}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K} /\!\cap \mathcal{E}_0$, т.е. $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{K}$ изоклинны. Если $\mathcal{K}$ не минимально, то $\mathcal{K} \supset \mathcal{L} \in L$. По изоклинности $E_0\{\mathcal{K}\} = \mathcal{E}_0 \supset E_0\{\mathcal{L}\} \in L$, чего быть не может.

По теореме 1.2 контактирующие L – минимальные подпространства изоклинны. Значит, через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ проходит $\mathcal{R}$-пучок изоклинных подпространств лежащих в $(\mathcal{E} + \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}$. Так как по условию $\mathcal{E} \neq \mathcal{G}$, то $(\mathcal{E} + \mathcal{G}) \supset \mathcal{E}$. Значит, $\mathcal{E} + \mathcal{G}$ не является L-минимальным, но тогда оно должно совпадать с $\mathcal{B}$ по уже доказанному. Отсюда $\mathcal{B} \ominus \mathcal{E} = (\mathcal{E} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{E}$. ⊠

Фиксируем вплоть до конца этого параграфа в рассматриваемом L -предминимальном пространстве $\mathcal{B}$ пару ортогональных минимальных подпространств $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{B}$. Соответственно этому каждый линейный оператор, аннулирующийся на $\mathcal{H} \ominus \mathcal{B}$, разбивается на четыре блока и окаймляющие их 5 нулевых блоков. Изучим сперва строение ортопроекторов (нулевые окаймляющие блоки опускаем).

ТЕОРЕМА 2.2. Для любого минимального $\mathcal{G} \subset \mathcal{B} = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$ ортопроектор G состоит из блоков следующего строения

$$G = \begin{pmatrix} \cos^2\psi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{E}} & \sin\psi\cos\psi \cdot U^* \\ \sin\psi\cos\psi \cdot U & \sin^2\psi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}; \qquad (2.2)$$

$\psi = \arccos\rho(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, $\rho(\mathcal{E}, \mathcal{G}) = \cos\psi$, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sin\psi$.

Взаимно-обратные изометрии U и U^* пространства $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$ определены, когда $\mathcal{G} \neq \mathcal{E}, \mathcal{F}$, т.е. $\sin 2\psi \neq 0$, и

$$U = I^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}} , \qquad U^* = I^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}} I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} . \qquad (2.3)$$

Аналогичный блочный вид имеет матрица ортопроектора G . Блоки U и U^* являются тогда взаимно-обратными унитарными матрицами.

Для относительного ортогонального дополнения $\mathcal{G}' = \mathcal{B} \ominus \mathcal{G}$ ортопроектор $G' = B - G$ имеет вид

$$G' = \begin{pmatrix} \sin^2\psi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{E}} & -\sin\psi\cos U^* \\ -\sin\psi\cos\psi\, U & \cos^2\psi\, \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

где наоборот $\rho(\mathcal{E}, \mathcal{G}') = \sin\psi$, $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}') = \cos\psi$, так что G' отвечают изометрии $-U$ и $-U^*$.

Доказательство. Когда ортонормированные базисы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ согласованы через $\mathcal{G}$, т.е. матрицы $U = \mathbb{1}$ и $U^* = \mathbb{1}$, то формула (2.2) для матрицы G превращается в (0.12). Испортим теперь базис в $\mathcal{F}$ так, чтобы $(I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}})\{Б_{\mathcal{E}}\} = U\{Б_{\mathcal{F}}\}$. Тогда наоборот $U^*\{Б_{\mathcal{E}}\} = (I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}})\{Б_{\mathcal{F}}\}$, поскольку для унитарных матриц $U^* = U^{-1}$. Отсюда вытекает представление для операторов.

Далее, как вытекает из (2.2) и (2.4)

$$G + G' = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = B \qquad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 2.3. Через минимальные $\mathcal{E} \perp \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{B}$, и произвольное третье минимальное подпространство $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, отличное как от $\mathcal{E}$, так и от $\mathcal{F}$, проходит единственный $\mathcal{R}$-пучок $\{\mathcal{G}_\psi\}$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{G}_{\pi/2} = \mathcal{F}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$. Ортопроекторы $G = G_\psi$ описываются (2.2) $-\pi/2 < \psi \leq \pi/2$

При $0 < \psi < \pi/2$ подпространства $\mathcal{G}_\psi$ порождают те же изометрии (2.3), что и $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$; при $-\pi/2 < \psi < 0$ - противоположные.

Доказательство. Основное утверждение теоремы является конкретизацией формулы (0.13). $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 2.4. Если U и U^* - изометрии $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$ и обратно, порожденные по (2.3) минимальным подпространством, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$, то при любых $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$ возникающий на $\mathcal{B}$ самосопряженный оператор A со строением

$$A = \begin{pmatrix} \xi \mathbb{1}_{\mathcal{E}} & \eta U^* \\ \eta U & \zeta \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

допускает спектральное разложение

$$A = \lambda G_\psi + \mu G_{\psi-\pi/2} = \lambda G_\psi + \mu (\mathcal{B} - G_\psi) \tag{2.6}$$

при некотором ψ, т.е. его собственные подпространства принадлежат $\mathcal{L} \cap \mathcal{B}$.

Доказательство. Вычислим по ξ, η, ζ как значения λ и μ, так и угол ψ:

$$\operatorname{ctg} 2\psi = \frac{\xi - \zeta}{2\eta}, \qquad 2\psi = \operatorname{arcctg} \frac{\xi - \zeta}{2\eta};$$

$$\lambda = \frac{\xi + \zeta}{2} + \frac{\xi - \zeta}{2\cos 2\psi} = \frac{\xi + \zeta}{2} + \frac{\eta}{\sin 2\psi};$$

$$\mu = \frac{\xi + \zeta}{2} - \frac{\xi - \zeta}{2\cos 2\psi} = \frac{\xi + \zeta}{2} - \frac{\eta}{\sin 2\psi}.$$

Значение ψ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $\pi/2$, что нам и требуется. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$ — $\mathcal{L}$-минимальные подпространства предминимального $\mathcal{B}$, отличные от $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} = \mathcal{B}$, и

$$G = \begin{pmatrix} \cos^2\psi \cdot \mathbb{1} & \sin\psi \cos\psi U \\ \sin\psi \cos\psi U & \sin^2\psi \mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \mathbb{1} & \sin\varphi \cos\varphi V^* \\ \sin\varphi \cos\varphi V & \sin^2\varphi \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

Тогда справедливы равенства

$$U^*V+V^*U=2\varkappa\,\mathbb{1}_{\mathcal{F}}\,; \quad VU^*+UV^*=2\varkappa\,\mathbb{1}_{\mathcal{G}}\,; \tag{2.7}$$

$$\varkappa=\frac{\rho^2(\mathcal{G},\mathcal{K})-(\cos^2\psi\cos^2\varphi+\sin^2\psi\sin^2\varphi)}{2\cos\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi} \tag{2.8}$$

<u>Доказательство.</u> Минимальные подпространства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$ либо изоклинны, либо, в крайнем случае, ортогональны: $\mathcal{K}=\mathcal{B}\ominus\mathcal{G}$. В обоих случаях $GKG=\rho^2(\mathcal{G},\mathcal{K})\cdot G$. Подставим в это равенство блочную запись и перемножим. Возникают четыре соотношения. Для первого блока

$$\cos^2\psi(\cos^2\psi\cos^2\varphi+\sin^2\psi\sin^2\varphi)\,\mathbb{1}\,+$$

$$+\cos^2\psi\cdot\cos\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi(U^*V+V^*U)=\rho^2(\mathcal{G},\mathcal{K})\cos^2\psi\,\mathbb{1}.$$

Полученное равенство отличается от искомого тождественными преобразованиями. По условию косинусы и синусы в (2.8) отличны от нуля. Выражения для остальных трех блоков совпадают с выписанным с точностью до умножений и делений на синусы и косинусы, а также на изометрии. $\boxtimes$

Вполне возможно, что все минимальные подпространства рассматриваемого предминимального пространства образуют один $\mathcal{R}$ -пучок. Этот случай ясен. Обратимся к случаю, когда один $\mathcal{R}$ -пучок не исчерпывает всей системы (мы будем называть её <u>связкой</u>

изоклинных подпространств). Покажем, что тогда в связке бесконечно много $\mathcal{R}$ - пучков. Через два ортогональных подпространства по предположению проходят два $\mathcal{R}$-пучка. Близкие друг другу два подпространства из разных пучков можно соединить пучком и через любое его подпространство и два исходных провести новый пучок (ср. проведение на сфере меридианов и других больших кругов). Чтобы разобраться в ситуации, мы будем рассматривать только пучки, проходящие через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ (так сказать, аналоги меридианов). В качестве представителя пучка мы будем брать подпространство $\mathcal{G}$, образующее и с $\mathcal{E}$ и с $\mathcal{F}$ угол в 45^0 (как бы на экваторе). Проектор представителя имеет вид

$$G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & V^* \\ V & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

Следует помнить, что у пучка два ортогональных между собою представителя, один отвечает унитарной матрице V, другой - - матрице $-V$. Если один образует угол $+45^0$, то другой при том же направлении отсчета - угол -45^0.

Условимся называть минимальные пространства $\mathcal{G}$, образующие с $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ угол в 45^0 срединными (или экваториальными относительно $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$). Каждому срединному подпространству $\mathcal{G}$ отвечает своя изометрия V со своей унитарной матрицей, и свой "меридиан", т.е. своя половина $\mathcal{R}$ - пучка, проходящего через $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$. Для указанных изометрий мы можем ввести "скалярное произведение", положив

$$(V_1, V_2) = (V_2, V_1) = 2\rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) - 1 = \varkappa, \qquad (2.10)$$

где $\mathscr{X}$ связано с U_1 и U_2 формулой (2.7). Здесь (2.10) получено из (2.8) при $\cos\psi = \sin\psi = \cos\varphi = \sin\varphi = \sqrt{2}/2$.

ЛЕММА 2.6. Для двух серединных подпространств $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$ определяемая по (2.9) их изометриями U_1 и U_2 квадратичная форма

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu(U_1, U_2) + \mu^2$$

положительно определена, за исключением случаев $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_2$ и $\mathscr{G}_1 \perp \mathscr{G}_2$, когда $U_1 = \pm U_2$, и форма неотрицательно определена, обращаясь в нуль при $\mu = \mp\lambda$.

<u>Доказательство.</u> Поскольку

$$-1 \leq 2\rho^2(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) - 1 = (U_1, U_2) \leq +1,$$

то форма может стать полуопределенной лишь при $\rho^2(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) = 1$, т.е. когда $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_2$, или при $\rho^2(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) = 0$, т.е. когда $\mathscr{G}_1 \perp \mathscr{G}_2$. По лемме 2.4 в последнем случае $U_1 = -U_2$. Сама форма приобретает вид $(\lambda \pm \mu)^2$.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть серединные подпространства $\mathscr{K}$ и $\mathscr{L}$ не совпадают и не ортогональны (т.е. $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ не принадлежат одному $\mathscr{R}$ - пучку),

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & V^* \\ V & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & W^* \\ W & \mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad V \neq \pm W.$$

Тогда любая когерентная $\mathscr{R}$ - линейная комбинация $\mathscr{G}$ подпространств $\mathscr{K}$ и $\mathscr{L}$ также будет серединным подпространством, и в его ортопроекторе (2.9) стоит изометрия

$$U = \alpha V + \beta W, \tag{2.11}$$

с некоторыми $\alpha = \alpha\left(\frac{a}{b}\right)$, $\beta = \beta\left(\frac{a}{b}\right)$.

Обратно, каждой $\mathbb{R}$ - линейной комбинации (2.11) изометрий V и W с единичным формальным скалярным квадратом

$$(U, U) := \alpha^2 + 2\alpha\beta(V, W) + \beta^2 = 1 \tag{2.12}$$

отвечает единственное подпространство $\mathcal{G}_\psi$ порожденного $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ пучка, с определяемым U ортопроектором (2.9).

ПРИМЕЧАНИЕ. Пусть ψ - угловой параметр подпространства $\mathcal{G}_\psi$ в $\mathbb{R}$ - пучке, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{K}$, $\mathcal{G}_\varphi = \mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{G}_\psi$ является $a:b$ комбинацией $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ и порождает $\alpha:\beta$ комбинацию (2.11) соответствующих $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ изометрий

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sin 2\varphi \cdot \operatorname{ctg} 2\psi - \cos 2\varphi, \quad \frac{a}{b} = \sin\varphi \cdot \operatorname{ctg}\psi - \cos\varphi. \tag{2.13}$$

<u>Доказательство.</u> Так как связь между парами (a, b) и (α, β) достаточно сложна, мы воспользуемся угловой параметризацией. Согласно (0.18) ортопроектор G_ψ линейно выражается через ортопроекторы K, L и $E+F-K$ на три подпространства $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ и $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}) \ominus \mathcal{K}$ этого пучка:

$$2G_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\cos 2\psi - \cos 2\varphi \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}\right] \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi} \begin{pmatrix} 0 & W^* \\ W & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, подпространству $\mathcal{G}_\psi$ отвечает изометрия U вида (2.11) с

$$\alpha(\psi) = \cos 2\psi - \cos 2\varphi \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}, \qquad \beta(\psi) = \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}.$$

Так как U - изометрия, то $(U, U) = 1$ по (2.10). Вытекающий из (2.10) вариант выражения (2.7)

$$V^*W + W^*V = 2(V, W)\cdot \mathbb{1}$$

билинеен, поэтому подстановка $U = \alpha V + \beta W$ в выражение скалярного квадрата оправдана. Это дает (2.12). Заметим, что поделив α на β мы приходим к первой из формул (2.13). Воспользуемся ею для решения обратной задачи определения ψ по паре α, β, связанных (2.12):

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2\psi}{\frac{\alpha}{\beta} + \cos 2\psi}$$

Для 2ψ мы находим ровно два возможных значения, отличающиеся на π. Соответственно, для ψ эти значения отличаются на $\pi/2$. Функцию $\alpha(\psi)$ и $\beta(\psi)$ при замене ψ на $\psi + \pi/2$ меняют знак. Поэтому, выберем ψ так, чтобы $\operatorname{sgn} \sin 2\psi = \operatorname{sgn} \beta$ (поскольку $0 < \varphi < \pi/2$, то $\sin 2\varphi > 0$), или если $\beta = 0$, $\sin 2\psi = 0$, чтобы $\operatorname{sgn} \cos 2\psi = \operatorname{sgn} \alpha$. Очевидно, найденному значению ψ отвечают коэффициенты $\alpha(\psi) : \beta(\psi) = \alpha : \beta$ по построению. Обе пары нормированы (2.12), знаки у соответствующих членов пары совпадают. Значит, пары равны. Наконец, вторая из формул (2.13) выведена в [9] ; формула (2.16). $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ - избранное разложение предминимального $\mathcal{B}$. Неотрицательные кратные λU изометрий $U : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\lambda \geq 0$, задаваемые по (2.9) всеми серединными подпространствами $\mathcal{G}$, образуют $\mathbb{R}$ -линейное евклидово пространство $\mathcal{D}$ "подобий" $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$, со скалярным произведением элементов

$$(\lambda V, \mu W) = \lambda\mu\, \mathscr{H}(\mathcal{K}, \mathcal{L}). \tag{2.15}$$

Соответствие $*: V \rightleftarrows V^*$ устанавливает изоморфизм пространства $\mathcal{D}$ и аналогичного пространства $\mathcal{D}^*$ индуцированных "подобий" $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, как линейных евклидовых пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ. Соответствие между $\mathbb{R}$ -пучками, проходящими через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, и изометриями $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$,- двузначно.

Доказательство. По лемме 2.6 формальный скалярный квадрат $f(\lambda, \mu)$:

$$(\lambda V + \mu W, \lambda V + \mu W) = \lambda^2 + 2\lambda\mu(V, W) + \mu^2 \geqslant 0$$

может обратиться в нуль лишь когда оператор $\lambda V + \mu W = 0$, причем тогда $V = \pm W$, $\lambda = \mp \mu$. Значит, любую (формально) отличную от нулевого оператора $\mathbb{R}$ -линейную комбинацию изометрий можно представить как $\gamma(\alpha V + \beta W)$, где α и β удовлетворяют (2.12), $\gamma = [f(\lambda, \mu)]^{-1/2} > 0$. Отсюда по теореме 2.7, $\lambda V + \mu W = \gamma U \in \mathcal{D}$. Добавим, что умножение на отрицательное число также не выводит из множества $\mathcal{D}$, поскольку $-\gamma U = \gamma(-U)$, а изометрия $-U$ связана с $\mathcal{Y}' = \mathcal{B} \ominus \mathcal{Y}$. Значит, $\mathcal{D}$ есть $\mathbb{R}$ -линейное векторное пространство с неотрицательной симметричной билинейной формой.

Согласно формулам (2.7) и (2.10), для скалярного произведения $(U_1^*, U_2^*) = \mathscr{X}$ на изометриях $\mathscr{F}$ на $\mathscr{E}$, отбрасывание звездочек приводит к соответствующим изометриям $\mathscr{E}$ на $\mathscr{F}$ с тем же скалярным произведением. При когерентном комбинировании это соответствие также не нарушается, поскольку в выражение G_ψ соответствующие друг другу блоки входят с одним и тем же коэффициентом. ⊠

ЛЕММА 2.9. Каждое серединное подпространство $\mathscr{G}$ произвольного $\mathscr{R}$-пучка, проходящего через $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$, индуцирует отражение полюсов: инволютивное эрмитово унитарное преобразование $2G - B$ предминимального пространства $\mathscr{B}$, меняющее местами $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. При этом разным серединным подпространствам отвечают разные отражения.

ПРИМЕЧАНИЕ. Ортогональное $\mathscr{G}$ серединное подпространство $\mathscr{G}' = \mathscr{B} \ominus \mathscr{G}$, принадлежащее второй половине $\mathscr{R}$-пучка, проходящего через $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, индуцирует отражение

$$2G' - B = -(2G - B).$$

Доказательство. Из (2.9)

$$2G - B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & U^* \\ U & \mathbb{O} \end{pmatrix} = (2G - B)^*, \qquad (2G - B)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Линейное соответствие между отражением $2G - B$ и ортопроектором G взаимно однозначно. ⊠

ЛЕММА 2.10. Композиция двух отражений, индуцированных серединными подпространствами $\mathscr{G}$ и $\mathscr{K}$:

$$(2K - B)(2G - B) = \begin{pmatrix} W^* U & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W U^* \end{pmatrix}, \qquad (2.16)$$

описывает изометрию $\mathcal{E}$ на себя и отвечающую ей изометрию $\mathcal{F}$ на себя.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть серединное пространство $\mathcal{K}$ фиксировано. Линейное пространство $W^*\mathcal{D}$ изоморфно $\mathcal{D}$ и состоит из индуцированных подобий пространства $\mathcal{E}$ на себя. Соответствие $W^*U \rightleftharpoons WU^*$ задает изоморфизм $W^*\mathcal{D}$ и $W\mathcal{D}^*$, как линейных пространств.

Доказательство. Формула (2.16) устанавливается перемножением. Оператор W^* линеен и обратим, $(W^*)^{-1} = W$. Отсюда $W^*\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}$. Изоморфизм $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ отмечен в теореме 2.8. $\boxtimes$.

Таким образом, мы установили связь между $\mathcal{R}$ - пучками, проходящими через два фиксированных ортогональных минимальных $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$, и симметриями $\mathcal{B}$, переставляющими $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Это соответствие оказалось, как и следовало ожидать, см. например [18], двузначным; в этом, в частности причина сходства и различия формул (2.15).

Дальнейшая техника изучения является общеизвестной. Фиксируем до конца параграфа какое-то серединное подпространство $\mathcal{K}$, порождающее изометрию W "полюсов". По следствию из леммы 2.10 элементы линейного пространства $\mathfrak{X} = W^*\mathcal{D}$ являются преобразованиями подобия подпространства $\mathcal{E}$: $X = \lambda W^* U$. Тот факт, что их композиция (как операторов) имеет смысл, легко позволяет установить алгебраическую природу линейного пространства $W^*\mathcal{D}$, и, тем самым, $\mathcal{D}$.

Выбор $\mathcal{K}$ и W [illegible]. Он определен [illegible] $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.

ТЕОРЕМА 2.11. $\mathcal{R}$- линейное пространство $\mathcal{X} = W^* \mathcal{D}$ подобий $X = \lambda W^* U$ минимального пространства $\mathcal{E}$, порожденных симметриями $\mathcal{R}$- пучков логики $L \cap \mathcal{B}$, является вещественным евклидовым пространством. Симметричное скалярное произведение на $\mathcal{X}$ индуцировано произведением (2.15):

$$<X_1, X_2> = \lambda_1 \lambda_2 (U_1, U_2), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \tag{2.17}$$

Относительно симметризованного операторного умножения элементов, $\mathcal{X}$ является самосопряженной йордановой алгеброй с единицей $\mathbb{1}$ и с делением:

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX) =$$

$$= <Y, \mathbb{1}> X + <X, \mathbb{1}> Y - <X, Y> \mathbb{1}; \tag{2.18}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{<X, X>} X^*, \tag{2.19}$$

где операция эрмитова сопряжения $*$ обладает на $\mathcal{X}$ связями

$$X + X^* = 2 <X, \mathbb{1}> \cdot \mathbb{1}, \tag{2.20}$$

$$X^* X = X X^* = <X, X> \mathbb{1} = <X^*, X^*> \mathbb{1}. \tag{2.21}$$

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{X}$ является гиперкомплексной числовой системой. Любой ортонормированный базис $X_0 = \mathbb{1}$, $X_1, \ldots, X_p$ вещественного евклидова пространства $\mathcal{X}$ может быть принят за систему единиц с антикоммутирующими мнимыми единицами $X_1, \ldots, X_p$:

$$\mathbb{1} X_j = X_j \mathbb{1} = X_j, \quad X_j^2 = -\mathbb{1}, \quad X_j^* = -X_j, \quad j \neq 0$$

$$X_j X_k + X_k X_j = \mathbb{O}, \qquad 0 \neq j \neq k \neq 0. \tag{2.22}$$

<u>Доказательство.</u> Изометрия $W^* = (W^*)^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ устанавливает взаимно-однозначное и линейное соответствие между евклидовым пространством неотрицательных линейных кратных изометрий $U \in \mathcal{D}$ и пространством $\mathcal{X}$ операторов $X = \lambda W^* U$. Поэтому (2.17) вносит в $\mathcal{X}$ евклидову метрику.

Линейное пространство $\mathcal{X}$ операторов содержит единицу $\mathbb{1} = W^* W$. Оно устойчиво относительно операции эрмитова сопряжения, согласно (2.7)

$$\lambda W^* U + \lambda U^* W = 2\lambda \varkappa \mathbb{1}, \quad X^* = 2\lambda (U, W) \mathbb{1} - X.$$

Таким образом, $X^* = \lambda W^* V, \quad W U^* W = V \in \mathcal{D}$

$$X^* X = \lambda^2 U^* W W^* U = \lambda^2 \cdot \mathbb{1} = \langle X, X \rangle \mathbb{1}.$$

Существование обратного левого и правого оператора (2.19) вытекает из (2.21). Наконец, билинейное соотношение (2.18) для унитарных X и Y вытекает из (2.7):

$$XY = W^* U W^* V = 2(U, W) \mathbb{1} W^* V - U^* W W^* V;$$

$$XY + YX = 2\langle X, \mathbb{1} \rangle Y + 2(V, W) X - (U^* V + V^* U).$$

Формулы коммутаций (2.22) вытекают из (2.18) и свойства $\mathbb{1}$ коммутировать с любым оператором. $\boxtimes$

Теорема 2.11 позволяет описать строение порции $\mathbb{R}$ -квазилогики в предминимальном пространстве.

ТЕОРЕМА 2.12. $\mathbb{R}$ -логика $L \cap \mathcal{B}$ всех L - подпространств предминимального пространства $\mathcal{B} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$, состоит из O, $\mathcal{B}$ и всех подпространств $\mathcal{G}$ с ортопроекторами (2.23):

$$G = \begin{pmatrix} \cos^2\psi\, \mathbb{1}_{\mathcal{E}} & \sin\psi\cos\psi\left(\gamma_0 \mathbb{1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_k X_k\right) W^* \\ \sin\psi\cos\psi\, W\left(\gamma_0 \mathbb{1} + \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_k X_k\right) & \sin^2\psi\, \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}$$

где $\gamma_0^2 + \sum\limits_k \gamma_k^2 = 1;\ \gamma_j \in \mathbb{R},\ \forall_j;\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2};$ W - фиксированная изометрия $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$, порожденная фиксированным серединным минимальным подпространством $\mathcal{K}$, $X_0 = \mathbb{1}, X_1, \dots, X_p$ - ортогональные единицы системы гиперкомплексных чисел с алгеброй (2.22).

<u>Доказательство.</u> Заменим U в формуле (2.2) леммы 2.2 на равное выражение

$$U = WW^*U = W\left(\gamma_0 \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k X_k\right),$$

где $\mathbb{1}, X_1, \dots, X_p$ - какие-то ортогональные образующие пространство $\mathcal{X}$, описанные в следствии из теоремы 2.11. $\boxtimes$

Теперь мы в состоянии установить связь между $\mathbb{R}$ -логиками и спинорными йордановыми факторами.

ТЕОРЕМА 2.13. Линейное пространство T всех эрмитовых операторов с блочным строением

$$A = \begin{pmatrix} \xi\, \mathbb{1}_{\mathcal{E}} & \left(\eta_0 \mathbb{1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \eta_k X_k\right) W^* \\ W\left(\eta_0 \mathbb{1} + \sum\limits_{k=1}^{p} \eta_k X_k\right) & \zeta\, \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, \qquad (2.24)$$

действующих на $\mathcal{L}$ - предминимальном пространстве $\mathcal{B}=\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$, $\forall\xi,\eta_k,\zeta\in\mathbb{R}$, является йордановой алгеброй.

Операторы E, F, A_0 и A_k, $1\le k\le p$, где $B=E+F=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A_0=\begin{pmatrix}0&W^*\\W&0\end{pmatrix}$, $A_k=\begin{pmatrix}0&-X_kW^*\\WX_k&0\end{pmatrix}$, определяют систему образующих T.

ДОПОЛНЕНИЕ. Каждый оператор A вида (2.24) имеет спектральное разложение

$$A=\lambda G+\mu(B-G) \tag{2.25}$$

где G и $B-G$ ортопроекторы вида (2.23) на ортогональные $\mathcal{L}$-минимальные подпространства $\mathcal{G}\perp(\mathcal{B}\ominus\mathcal{G})$. Обратное также справедливо. В частности, все отличные от O и от B идемпотенты вида (2.24) суть ортопроекторы на $\mathcal{L}$-минимальные подпространства.

СЛЕДСТВИЕ. Система X гиперкомплексных чисел не зависит от выбора опорных подпространств $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}=\mathcal{G}^{(0)}$, а также $\mathcal{G}^{(1)},\dots,\mathcal{G}^{(p)}$, определяющих $X_1,\dots,X_p$.

<u>Доказательство</u>. Сравнивая выражение (2.24) оператора A с выражением (2.23) ортопроектора, убеждаемся, что A удовлетворяет условию теоремы 2.4 со значением изометрии $\mathcal{E}$ на $\mathcal{F}$, равным $U=W(\eta_0 1+\sum_{k=1}^{p}\eta_k X_k)$. Значит, он допускает спектральное разложение (2.25) с ортопроектором $G=G_\psi$, где $\mathcal{G}_\psi$ принадлежит $\mathbb{R}$-пучку, проходящему через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, и отвечающему U.

Чтобы проверить, что $(A'\circ A'')\in T$, когда $A',A''\in T$, мы не станем выписывать длинную явную формулу для $A'A''+A''A'$, см. ниже теорему 5.6. Воспользуемся билинейностью $A'\circ A''$, и проверим указанное свойство только для ортопроекторов G' и G''. Соответствующие минимальные подпространства обязательно изоклинны (или ортогональны). Поэтому $G' \circ G''$ выражается по (0.15) линейно через G', G'' и $G' \vee G'' = B$, все принадлежащие линейному пространству T.

Наконец, система $\mathcal{X}$ полностью определяется числом p мнимых единиц. А $p+3$ есть размерность T над $\mathbb{R}$. ☒

§ 3. Строение пред-предминимальных L-подпространств.

Если L-факторное пространство оказывается предминимальным, то его строение в главном определено теоремой 2.11. Как показывает теория, см. [18], спинорные факторные пространства реализуемы при любом порядке p. Если же факторное пространство не сводится к предминимальному, то геометрия $\mathbb{R}$-пучков накладывает на строение $\mathbb{R}$-логики дополнительные ограничения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем L-подпространство пред-предминимальным, если оно разлагается в ортогональную сумму предминимального и связанного с ним минимального.

ЛЕММА 3.1. Всякое собственное L-подпространство пред-предминимального пространства C либо минимально, либо предминимально. Всякий проходящий через минимальное подпространство $\mathcal{E}$ $\mathbb{R}$-пучок изоклинных подпространств обязательно пересекает предминимальное подпространство $\mathcal{B} = C \ominus \mathcal{E}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пред-предминимальное пространство C разлагается в ортогональную сумму трех связанных L-минимальных: $C = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3$, и обратно. Попарные суммы $\mathcal{B}_{jk} = \mathcal{E}_j \oplus \mathcal{E}_k$ являются

$\mathcal{L}$-предминимальными пространствами.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{E}_0 = C$ – определяющее разложение пред-предминимального пространства C на предминимальное $\mathcal{B}_0$ и минимальное $\mathcal{E}_0$. Пусть $C \supset \mathcal{K} \in \mathcal{L}$, и ненулевое подпространство $\mathcal{K}$ не минимально. Если $\mathcal{K} \perp \mathcal{B}_0$, то $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_0$, в противоречие с неминимальностью $\mathcal{K}$. Если $\mathcal{K} \perp \mathcal{E}_0$, то $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_0$, откуда по теореме 2.I либо $\mathcal{K}$ минимально, либо $\mathcal{K} = \mathcal{B}_0$, т.е. $\mathcal{K}$ предминимально. Рассмотрим общий случай, когда $\mathcal{K}$ контактирует как с $\mathcal{B}_0$, так и с $\mathcal{E}_0$. По минимальности $\mathcal{E}_0$ контакт $\mathcal{E}_0 \,/\!\cap\, \mathcal{K} = \mathcal{E}_0$, а контакт $\mathcal{E}_0 \cap\!/\, \mathcal{K}$ является минимальным подпространством: подпространство, изоклинное минимальному, само минимально. Как вытекает из свойства (2.I) операции выделения контактов, $(\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0) \perp \mathcal{E}_0$. Следовательно, $(\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0) \subseteq \mathcal{B}_0$. Возможны три подслучая. Или $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0 = 0$, но тогда $\mathcal{K} = \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0$, и $\mathcal{K}$ минимально. Или $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0 = \mathcal{K}_1$, где $\mathcal{K}_1$ – минимальное пространство. Так как $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} \,/\!\cap\, \mathcal{E}_0$ лежат в одном факторном пространстве, то они связаны. Поэтому $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ – предминимально. Наконец, при $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0 = \mathcal{B}_0$ имеем $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{E}_0$, т.е. $\mathcal{K}_0 = \mathcal{E}_0$ и $\mathcal{K} = C$.

Всякий проходящий через $\mathcal{E}$ $\mathcal{R}$-пучок содержит подпространство $\mathcal{R}$, ортогональное $\mathcal{E}$. Оно принадлежит $C \ominus \mathcal{E} = \mathcal{B} \in \mathcal{L}$. Подпространство $\mathcal{B}$ предминимально: оно не может быть минимальным, иначе все пространство C удовлетворяло бы определению предминимальности, а тогда по теореме 2.I определяющее $\mathcal{B}_0$ должно было бы быть минимальным, а не предминимальным. ⊠

ЛЕММА 3.2. В пред-предминимальном пространстве $\mathcal{C}$ любые два различные $\mathcal{L}$-предминимальные пространства $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ пересекаются по минимальному. Обратно, сумма двух различных, но пересекающихся предминимальных подпространств является пред-предминимальным $\mathcal{L}$-пространством.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_j = \mathcal{C} \ominus \mathcal{B}_j$, оба $\mathcal{E}$ $\mathcal{L}$-минимальны по лемме 3.I. Поскольку наоборот $\mathcal{B}_j = \mathcal{C} \ominus \mathcal{E}_j$, то $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ также различны между собой. Их сумма $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ предминимальна, ибо

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \oplus (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 \oplus [(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \ominus \mathcal{E}_1].$$

По формуле двойственности

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{C} \ominus [(\mathcal{C} - \mathcal{B}_1) + (\mathcal{C} - \mathcal{B}_2)] = \mathcal{C} \ominus (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2). \quad \boxtimes$$

Изучим теперь инцидентность $\mathcal{R}$-пучков и предминимальных подпространств. Если только предминимальное $\mathcal{B}$ не сводится к $\mathcal{R}$-пучку минимальных, то $\mathcal{R}$-пучок, лежащий в $\mathcal{B}$, не обязан проходить через данное $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ (более того, два $\mathcal{R}$-пучка, лежащих в $\mathcal{B}$, могут не пересекаться, если $\mathcal{C}$ - кватернионного типа). Однако, согласно теореме 2.I, $\mathcal{R}$-пучок, проходящий через $\mathcal{E}$, обязательно проходит и через $\mathcal{F} = \mathcal{B} \ominus \mathcal{E}$.

Аналогично, $\mathcal{R}$-пучок, лежащий в $\mathcal{C}$, не обязан пересекать всякое предминимальное $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Однако, для некоторых случаев расположения это пересечение обязательно. Два таких случая указываются теоремами I.4. и I.5. Изложим эти факты в следующей версии:

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть пред-предминимальное $\mathcal{C} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3$, где все $\mathscr{E}_j$ минимальны. Тогда через всякое минимальное $\mathscr{G}_{12} \subset (\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2)$, отличное как от $\mathscr{E}_1$, так и от $\mathscr{E}_2$, и через всякое $\mathscr{G}_{23} \subset (\mathscr{E}_2 \oplus \mathscr{E}_3)$, отличное как от $\mathscr{E}_2$, так и от $\mathscr{E}_3$, можно провести $\mathscr{R}$-пучок, и притом только один. Этот пучок обязательно пересекает $\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_3$ по некоторому минимальному подпространству $\mathscr{G}_{13}$, отличному и от $\mathscr{E}_1$, и от $\mathscr{E}_3$.

Изометрии U_j^i подпространства $\mathscr{E}_i$ на $\mathscr{E}_j$, определяемые соответственно $\mathscr{G}_{ij}$ по лемме 2.2, связаны

$$U_3^1 = -U_3^2\, U_2^1\,; \qquad U_j^i = I_{\mathscr{E}_j}^{\mathscr{G}_{ij}}\, I_{\mathscr{G}_{ij}}^{\mathscr{E}_i}\,, \quad \forall i, j. \tag{3.1}$$

ДОБАВЛЕНИЕ. Вывод теоремы и формула (3.1) остаются справедливыми, когда $C = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) \oplus \mathscr{E}_3$, где $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ контактируют, но не совпадают, и взято $\mathscr{G}_{12} = \mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2$.

Доказательство см. формулировки теорем 1.4 и 1.5. ⊠

Теперь мы уже в состоянии установить, как связаны между собой у минимального подпространства $\mathscr{E}$, лежащего одновременно в двух предминимальных пространствах $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, две гиперкомплексные числовые системы, индуцированные по теореме 2.11 логиками $L \cap \mathscr{B}_1$ и $L \cap \mathscr{B}_2$. Напомним, что каждый $\mathscr{R}$-пучок, проходящий через $\mathscr{E}$ и лежащий в предминимальном подпространстве $\mathscr{B}$ (а, следовательно, проходящий и через $\mathscr{E}' = \mathscr{B} \ominus \mathscr{E}$), порождает симметрию $\mathscr{E}$ на себя, определенную с точностью до знака. Линейная оболочка этих изометрий и есть алгебра $\mathfrak{X}$ подобий подпространства $\mathscr{E}$ на себя.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть в пред-предминимальном пространстве C лежат три различные минимальные подпространства $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, причем $\mathcal{E}_2$ ортогонально и $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_3$. Тогда логики $\mathcal{L}n(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$ и $\mathcal{L}n(\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3)$ индуцируют одну и ту же йорданову алгебру $\mathcal{X}$ подобий подпространства $\mathcal{E}_2$.

Доказательство. Пусть фиксированы в качестве начальных какая-то связь W_2^1 пары $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и связь W_3^1 пары $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$, определяемые соответственно подпространствами $\mathcal{F}_{12} \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$, $\mathcal{F}_{13} \subset (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)$, причем $\mathcal{F}_{13} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_3$, когда $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_3$ не ортогональны. По теореме 3.3 (или добавлению к ней) $\mathcal{R}$-пучок, проходящий через $\mathcal{F}_{12}$ и $\mathcal{F}_{13}$ пересекает $\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3$ по $\mathcal{F}_{23}$, со связью изометрий

$$W_3^2 = -W_3^1 W_1^2 ; \qquad W_j^i = (W_i^j)^{-1}, \quad \forall i, j .$$

Пусть теперь новое подпространство $\mathcal{G}_{12} \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$ задает другую связь U_1^2 пары $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Проведем еще один $\mathcal{R}$-пучок через $\mathcal{G}_{12}$ и старое $\mathcal{F}_{13}$. По аналогичным соображениям он пересекает подпространство $\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3$ по $\mathcal{G}_{23}$, см. чертеж 1, задающему связь

$$U_3^2 = -W_3^1 U_1^2 .$$

Сопоставляя с первым соотношением, находим

$$(W_3^2)^* U_3^2 = (W_1^2)^* U_1^2 , \tag{3.2}$$

где для аналогии с (2.10) мы обозначим оператор $(W_k^2)^* = W_2^k = (W_k^2)^{-1}$. Значит, алгебры $\mathcal{X}_{21} = (W_1^2)^* \mathcal{D}_{21}$ и $\mathcal{X}_{23} = (W_3^2)^* \mathcal{D}_{23}$ индуцированных подобий $\mathcal{E}_2$ на себя состоят из одних и тех же операторов, т.е. совпадают. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.5. Каковы бы ни были L - минимальные пространства $\mathcal{E} \perp \mathcal{E}'$, лежащие в пред-предминимальном пространстве C, гиперкомплексная числовая система $\mathcal{X}$ подобий $\mathcal{E}$ на себя, индуцированная $\mathcal{R}$-логикой $L \cap (\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E})$, будет одной и той же.

СЛЕДСТВИЕ. Утверждение теоремы остается справедливым, если C — факторное L-пространство.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{E}$ фиксировано. Выберем $\mathcal{E}'' \perp \mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}'' \neq \mathcal{E}'$, все равно алгебра $\mathcal{X}$ будет, согласно теореме 3.4 совпадать с йордановой алгеброй, индуцированной $L(\mathcal{E}'' \oplus \mathcal{E})$.

Согласно лемме 2.10 изометрии W^*U пространства $\mathcal{E}$ на себя и WU^* пространства $\mathcal{E}'$ на себя, взаимно однозначно отвечают друг другу. Скалярные произведения $(U,V)=(U^*,V^*)$ согласно формуле (2.7) теоремы 2.5. Поэтому йордановы алгебры индуцированных логикой L подобий $\mathcal{E}$ на себя и $\mathcal{E}'$ на себя совпадают.

Пусть $\mathcal{E}''$ не ортогонально $\mathcal{E}$ и не совпадает с ним. Возьмем $\mathcal{E}' = C \ominus (\mathcal{E}'' + \mathcal{E})$. Имеем $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}''$, $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}$. Отсюда по доказанному $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}' \simeq \mathcal{X}''$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.6. Индуцированная $\mathcal{R}$-логикой $L \cap C$ йорданова алгебра $\mathcal{X}$ подобий L - минимального пространства $\mathcal{E} \subset C$ на себя будет вещественной операторной алгеброй с делением.

СЛЕДСТВИЕ. Определяемая $\mathcal{R}$-логикой $L \cap C$ система $\mathcal{X}$ гиперкомплексная чисел может быть или полем $\mathcal{R}$ вещественных чисел, или полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, или телом $\mathbb{Q}$ кватерmионов.

Доказательство. Продолжим геометрическое построение, начатое при доказательстве теоремы 3.4. Пусть $\mathcal{C}=\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3$. Пусть $\mathcal{F}_{12}\subset(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{F}_{23}\subset(\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3)$, определяют основные изометрии $W_1^2:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_1$ и $W_3^2:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_3$. Через $\mathcal{F}_{31}\subset(\mathcal{E}_3\oplus\mathcal{E}_1)$ мы обозначаем пересечние $\mathbb{R}$ -пучка, проходящего черев $\mathcal{F}_{12}$ и $\mathcal{F}_{23}$, с $\mathcal{E}_3\oplus\mathcal{E}_1$. Оно определяет связь

$$W_3^1=-W_3^2\,W_2^1\,.$$

Пусть пространства $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{K}_{12}$ определяют соответственно связи U_1^2 и V_1^2. Проведем через $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{F}_{31}$ новый $\mathbb{R}$ -пучок. Он пересечет предминимальное пространство $\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3$ по минимальному $\mathcal{G}_{23}$, определяющему связь U_3^2 :

$$U_2^3=-U_2^1\,W_1^3.$$

Как мы знаем из (3.2) $(W_3^2)^*U_3^2=(W_1^2)^*U_1^2$, т.е. мы "сопоставили" две "точки" $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{G}_{23}$ на "сторонах" $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$ "треугольника" $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$, индуцирующие одно и то же значение X оператора подобия $\mathcal{E}_2$ на себя, см. чертеж 2

Соединим теперь $\mathbb{R}$ -пучком "точку" $\mathcal{K}_{12}$ с $\mathcal{F}_{23}$ и продолжим до пересечения с $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3$ в "точке" $\mathcal{K}_{31}$. По лемме 3.2 оно определяет связь

$$V_3^1=-W_3^2\,V_3^1\,.$$

Таким образом, мы "сопоставили" две "точки" $\mathcal{K}_{12}$ и $\mathcal{K}_{31}$, уже на "сторонах" $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3$, индуцирующие одно и то же значение Y оператора подобия $\mathcal{E}_1$ на себя.

Наконец, соединим $\mathbb{R}$ -пучком найденные точки $\mathcal{Y}_{23}$ и $\mathcal{K}_{31}$, продолжив его до пересечения с $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ в "точке" $\mathcal{L}_{12}$. По лемме 3.2 подпространство $\mathcal{L}_{12}$ определяет связь

$$J_2^1 = -U_2^3 V_3^1 .$$

Сопоставим все полученные связи.

$$J_2^1 = -U_2^1 W_1^3 W_3^2 V_2^1 = +U_2^1 W_1^2 V_2^1 ;$$

$$\mathcal{X} \ni Z = (W_2^1)^* J_2^1 = (W_2^1)^* U_2^1 (W_2^1)^* V_2^1 = XY .$$

Таким образом, $\mathcal{X}$ в условиях теоремы есть операторная алгебра над полем $\mathbb{R}$. Эта алгебра с делением, так как вместе с $X \neq 0$ по теореме 2.11 обратный оператор X^{-1} существует и также принадлежит алгебре.

Утверждение следствия вытекает из знаменитой теоремы Фробениуса, см. [16], [19]. Поскольку отдельные этапы её доказательства мы использовали при построении теории § 2, можно в несколько слов получить искомое из уже выведенных формул.

Очевидно, что при $p=0$ система гиперкомплексных чисел $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, и что $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ при $p=1$. Пусть $p \geq 2$, $\mathring{i}$ и $\mathring{j}$ – первые две мнимые единицы. Обозначим $k = \mathring{i}\mathring{j} = -\mathring{j}\mathring{i}$. Отсюда $k^2 = -1$. Далее, $k^* = (\mathring{i}\mathring{j})^* = (-\mathring{j})(-\mathring{i}) = -k$, откуда $\langle k, k \rangle = 1$, $\langle k, 1 \rangle = 0$.

Оператор k антикоммутирует как $\mathring{i}$, так и с $\mathring{j}$, $\mathring{i}\mathring{i}\mathring{j} = -\mathring{i}\mathring{j}\mathring{i}$, следовательно $\mathring{i} \circ k = 0$, $\mathring{j} \circ k = 0$.

По (2.18) отсюда вытекает, что $\langle \mathbb{l}, \mathbb{k}\rangle = 0$, $\langle \mathbb{j}, \mathbb{k}\rangle = 0$. Значит, $\mathbb{k}$ еще одна мнимая единица, т.е. еще один орт какого-то базиса $\mathfrak{X}$. Значит, $\mathfrak{X}$ содержит тело $\mathbb{Q}$ кватернионов или совпадает с ним.

Предположим, что $\rho \geq 3$. Пусть $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, $\mathbb{l}$ – три ортогональные мнимые единицы. Они антикоммутируют. Обозначим $\mathbb{f} = \mathbb{i}\mathbb{j}\mathbb{l}$. Легко подсчитать, что $\mathbb{f}^* = \mathbb{l}^*\mathbb{j}^*\mathbb{i}^* = \mathbb{f}$, так как для любого мнимого элемента $X^* = -X$. Далее,

$$\mathbb{f}^2 = \mathbb{1}; \quad 2\mathbb{f} = \mathbb{f} + \mathbb{f}^* = 2\langle \mathbb{f}, \mathbb{1}\rangle \mathbb{1}.$$

Отсюда $\langle \mathbb{f}, \mathbb{1}\rangle^2 = 1$, $\mathbb{f} = \pm \mathbb{1}$. Значит, любая мнимая единица, ортогональная $\mathbb{i}$ и $\mathbb{j}$ есть $\mathbb{l} = \pm \mathbb{i}\mathbb{j} = \pm \mathbb{k}$. Отсюда число мнимых единиц $\rho = 3$. $\boxtimes$

§ 4. Геометрия минимальных L-подпространств факторного пространства.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели связи между изометриями минимальных подпространств, возникающие в конфигурациях инцидентности предминимальных подпространств и $\mathbb{R}$-пучков. В этом параграфе мы изучим связи между изометриями в конфигурации теоремы о трех перпендикулярах[ж)].

ж) Мы имели в свое время случай отметить важную роль этой конфигурационной теоремы в несимметричной пифагоровой геометрии, см. [20].

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{E}$. Тогда

$$ER = E = RE \tag{4.1}$$

Пусть, далее, $R\{\mathcal{Y}\} = \mathcal{K}$. Тогда

$$E|z> = ER|z> = EK|z> , \qquad \forall |z> \in \mathcal{Y}. \tag{4.2}$$

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы

$$E\{\mathcal{Y}\} = E\{R\{\mathcal{Y}\}\}. \tag{4.3}$$

<u>Доказательство.</u>(4.1) общеизвестно, ср.теорему 4.1 в [9] . Поскольку $|Rz> \in \mathcal{K}$, $\forall |z> \in \mathcal{Y}$, то по (4.1)

$$R|z> = K|Rz> = KR|z> = K|z> \qquad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 4.2. Операция ортопроектирования может быть выражена через ортогонализацию вычитанием:

$$F\{\mathcal{Y}\} = \mathcal{Y} - (\mathcal{Y} - \mathcal{F}), \tag{4.4}$$

где $\mathcal{E} - \mathcal{K} = (\mathcal{E} + \mathcal{K}) \ominus \mathcal{K}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Справедливо выражение

$$F\{\mathcal{Y}\} = \mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \ominus \mathcal{Y}),$$

где, однако, вычитание в скобках – несобственное.

СЛЕДСТВИЕ. Подпространство $F\{\mathcal{Y}\}$ также принадлежит $\mathbb{R}$ -квазилогике $\mathbf{L}$, если $\mathcal{F}, \mathcal{Y} \in \mathbf{L}$.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, $(F \vee G)\{\mathcal{G}\} = \mathcal{G}$. Далее согласно лемме 1.1 из [9] имеем

$$\mathcal{R} - \mathcal{K} = (\mathcal{R} + \mathcal{K}) \ominus \mathcal{K} = (1 - K)\{\mathcal{R}\}. \qquad (4.5)$$

Поэтому, справедлива цепочка равенств

$$\mathcal{G} - (\mathcal{G} - \mathcal{F}) = \mathcal{G} - [(\mathcal{G} + \mathcal{F}) \ominus \mathcal{F}] = [1 - (F \vee G - F)]\{\mathcal{G}\} =$$

$$= (1 - F \vee G + F)(F \vee G)\{\mathcal{G}\} = F(F \vee G)\{\mathcal{G}\} = F\{\mathcal{G}\}. \qquad \boxtimes$$

ЛЕММА 4.3. Ортопроекция $\mathcal{L}$-минимального подпространства $\mathcal{G}$ на любое $\mathcal{L}$-подпространство $\mathcal{R}$ является либо нулевым пространством (когда $\mathcal{G} \perp \mathcal{R}$), либо контактирующим с тоже $\mathcal{L}$-минимальным подпространством $\mathcal{R} \Cap \mathcal{G} \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Когда $\mathcal{G} \perp \mathcal{R}$, то $R\{\mathcal{G}\} = 0$, и обратно. Поэтому, при $R\{\mathcal{G}\} \neq 0$ подпространства $\mathcal{R}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, $\mathcal{R} \Cap \mathcal{G} \neq 0$. Поскольку $\mathcal{G}$ минимально, $0 \neq \mathcal{G} \Cap \mathcal{R} = \mathcal{G}$. Значит, $\mathcal{G} \ominus (\mathcal{G} \Cap \mathcal{R}) = 0$. Тогда по свойству (2.1) контактов

$$(\mathcal{R} \Cap \mathcal{G} + \mathcal{G}) \perp (\mathcal{R} \ominus \mathcal{R} \Cap \mathcal{G})$$

Поэтому справедливы включения $R\{\mathcal{G}\} \subseteq$

$$\subseteq (R \wedge G)\{\mathcal{G}\} + (R - R \wedge G)\{\mathcal{G}\} = (R \wedge G)\{\mathcal{G}\} \subseteq R\{\mathcal{G}\},$$

где мы воспользовались тем, что для подпространства $(A+B)\{\mathcal{G}\} \subseteq \subseteq A\{\mathcal{G}\} + B\{\mathcal{G}\}$. Контакт $\mathcal{R} \Cap \mathcal{G} = R\{\mathcal{G}\}$ минимален, и изоклинный L -минимальному $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\cap\mathcal{R}$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 4.4. Рассмотрим L - пространство C, разложимое в ортогональную сумму m связанных попарно ортогональных L - минимальных подпространств $\mathcal{E}_j$.

Пусть L - минимальное подпространство $\mathcal{Y}\subset C$ контактирует со всеми $\mathcal{E}_j$, т.е. все $\rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y})>0$. Обозначим $\mathcal{Y}_{1k}$ его проекции $(E_1+E_k)\{\mathcal{Y}\}$ на подпространства $\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_j$. Подпространства $\mathcal{Y}_{1k}$ - минимальные, и

$$\mathcal{Y}_{1k}\subset(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_k),\qquad \mathcal{Y}_{1k}\neq\mathcal{E}_1,\qquad \mathcal{Y}_{1k}\neq\mathcal{E}_k. \tag{4.6}$$

Обратно, любой набор из $m-1$ штуки минимальных подпространств $\mathcal{Y}_{12},\dots,\mathcal{Y}_{1m}$, удовлетворяющих каждое своему требованию (4.6), определяет, и притом единственным образом, подпространство $\mathcal{Y}$ с ортопроекциями $(E_1+E_j)\{\mathcal{Y}\}=\mathcal{Y}_{1j}$. Оно автоматически оказывается L - минимальным.

ДОБАВЛЕНИЕ. Если в условиях теоремы $\rho_k=\rho(\mathcal{E}_k,\mathcal{Y})=0$ при некоторых $k\neq 1$, то

$$\mathcal{Y}\subset\bigoplus_{j:\rho_j\neq 0}\mathcal{E}_j;\qquad \mathcal{Y}_{1k}=\mathcal{E}_1\quad \forall k:\rho_k=0. \tag{4.7}$$

<u>Доказательство.</u> По условию, $E_j\{\mathcal{Y}\}=\mathcal{E}_j$. Значит, по следствию из леммы 4.I,

$$\mathcal{E}_j=E_j\{\mathcal{Y}_{1j}\},\qquad \mathcal{E}_1=E_1\{\mathcal{Y}_{1j}\}.$$

Но если бы $\mathcal{Y}_{1j}=\mathcal{E}_1$, то $E_j\{\mathcal{E}_1\}=0$, $\mathcal{E}_1\perp\mathcal{E}_j$. Аналогично, не может быть $\mathcal{Y}_{1j}=\mathcal{E}_j$.

Займемся обратным утверждением теоремы. При $m=2$ оно является тавтологией. Дальше будем проводить построение индукцией по m. Пусть уже построено единственное

$$\mathcal{Y}_{12\ldots m-1} \subset \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathcal{E}_j \; : \; (E_1+E_k)\{\mathcal{Y}_{1\ldots m-1}\} = \mathcal{Y}_{1k}, \; 2 \le k \le m-1,$$

$$\mathcal{Y}_{2\ldots m-1} = (E_2+\ldots+E_{m-1})\{\mathcal{Y}_{1\ldots m-1}\} \ne \mathcal{Y}_{1\ldots m-1};$$

причем пусть $\mathcal{Y}_{12\ldots m-1} \in L$, отчего и $\mathcal{Y}_{2\ldots m-1} \in L$ по следствию из леммы 4.2.

Будем искать в пространстве $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$ подпространство $\mathcal{Y}_{1\ldots m} = \mathcal{Y}$ с аналогичными свойствами. Пусть $\mathcal{Y}' = (E_1+\ldots+E_{m-1})\mathcal{Y}$. По следствию из леммы 4.1

$$\mathcal{Y}_{1k} = E_k\{\mathcal{Y}_{1\ldots m}\} = E_k\{\mathcal{Y}'\}, \quad 2 \le k \le m-1.$$

Отсюда $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}_{1\ldots m-1}$ по предположенной единственности $\mathcal{Y}_{1\ldots m-1}$ в $\bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathcal{E}_j$. Следовательно,

$$\mathcal{Y}_{1\ldots m} = (E_1+\ldots+E_m)\{\mathcal{Y}\} \subseteq (E_1+\ldots+E_{m-1})\{\mathcal{Y}\} +$$

$$+ E_m\{\mathcal{Y}\} = \mathcal{Y}_{1\ldots m-1} \oplus E_m\{\mathcal{Y}_{1m}\} = \mathcal{Y}_{1\ldots m-1} \oplus \mathcal{E}_m.$$

Аналогично,

$$\mathcal{Y}_{1\ldots m} \subseteq (E_1+E_m)\{\mathcal{Y}\} + (E_2+\ldots+E_{m-1})\{\mathcal{Y}\} =$$

$$= \mathcal{Y}_{1m} \oplus (E_2+\ldots+E_{m-1})\{\mathcal{Y}'\} = \mathcal{Y}_{1m} \oplus \mathcal{Y}_{2\ldots m-1}.$$

Таким образом, мы установили, что искомое $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{1\ldots m}$ лежит в пересечении предминимальных подпространств $\mathcal{Y}' \oplus \mathcal{E}_m$ и $\mathcal{Y}_{1m} \oplus \mathcal{Y}''$, где $\mathcal{Y}'' = \mathcal{Y}_{2\ldots m-1}$, см. чертеж 3.

Минимальные подпространства $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_m$ и $\mathcal{Y}'' \subset \bigoplus_{j=2}^{m-1} \mathcal{E}_j$ попарно ортогональны. Далее

$$\mathcal{Y}' = (E_1 + \ldots + E_m)\{\mathcal{Y}'\} \subseteq E_1\{\mathcal{Y}'\} \oplus \mathcal{Y}'' = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{Y}''.$$

Последнее равенство мы написали потому, что $E_1\{\mathcal{Y}'\} \subseteq \mathcal{E}_1$; $\mathcal{E}_1$ минимально, и $E_1\{\mathcal{Y}'\} \neq 0$, иначе бы $\mathcal{Y}'' = \mathcal{Y}'$. Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{Y}'' = \mathcal{E}_1 + \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'' + \mathcal{Y}'.$$

Если бы интересующие нас предминимальные подпространства совпадали:

$$\mathcal{Y}' \oplus \mathcal{E}_m = \mathcal{Y}_{1m} \oplus \mathcal{Y}'' = \mathcal{Y}' + \mathcal{E}_m + \mathcal{Y}_{1m} + \mathcal{Y}'',$$

то этому же подпространству принадлежало $\mathcal{E}_1 \subset (\mathcal{Y}' + \mathcal{Y}'')$. Другими словами, в указанном предминимальном подпространстве содержалось три попарно ортогональных минимальных, чего быть не может.

По лемме 3.2 несовпадающие предминимальные подпространства $\mathcal{Y}' \oplus \mathcal{E}_m$ и $\mathcal{Y}_{1m} \oplus \mathcal{Y}''$ обязательно пересекаются по некоторому минимальному подпространству $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{1\ldots m}$. Проверим, что для этого $\mathcal{Y} \in L$ индукционные предположения выполняются.

Прежде всего докажем от противного, что $\mathcal{Y} \neq \mathcal{E}_m$, $\mathcal{Y} \neq \mathcal{Y}'$. В самом деле, поскольку $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_m = \mathcal{Y}_{1m} + \mathcal{E}_m$ при $\mathcal{Y}_{1m} \neq \mathcal{E}_m$

то

$$\mathcal{G}=\mathcal{G}' \Rightarrow \mathcal{G}_{1m} \oplus \mathcal{G}''=\mathcal{G}_{1m}+\mathcal{G}''+\mathcal{G}'=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_m+\mathcal{G}'',$$

$$\mathcal{G}=\mathcal{E}_m \Rightarrow \mathcal{G}_{1m} \oplus \mathcal{G}''=\mathcal{G}_{1m}+\mathcal{G}''+\mathcal{E}_m=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_m+\mathcal{G}'',$$

чего быть не может. Значит, $\mathcal{G}$ контактирует и с $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_m$, и с $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{G}''$, его проекции отличны от нуля. По построению, они должны совпадать с $\mathcal{G}_{1m}$ и $\mathcal{G}'$ соответственно. Отсюда мы заключаем также, что $\mathcal{G} \neq \mathcal{E}_1$, иначе его $(\mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_{m-1})$-проекция $\mathcal{G}'=\mathcal{E}_1$, чего нет по индукционному предположению.

Из последнего следует, что проекция $\mathcal{G}_{2\ldots m}$ подпространства $\mathcal{G}$ на $\mathcal{E}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_m$ существует. Если бы $\mathcal{G}_{2\ldots m}=\mathcal{G}:=$ $:=\mathcal{G}_{1\ldots m}$, то совпадали бы также и их $(\mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_{m-1})$-приекции, т.е. $\mathcal{G}'=\mathcal{G}''$, чего нет.

Для доказательства добавления заметим, что $\mathcal{G}_{1k}=$

$$=(E_1+E_k)\{\mathcal{G}\} \subseteq E_1\{\mathcal{G}\}+E_k\{\mathcal{G}\}=\mathcal{E}_1,\ \forall k: \rho_k=0. \quad \boxtimes$$

Положение проекции $\mathcal{G}_{1k}$ в предминимальном $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_k$ характеризуется во-первых угловым расстоянием $\arccos \rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{G}_{1k})$, и во-вторых изометрией $U_k^1=I_k^{1k} \cdot I_{1k}^1$, где вместо изоклинных множеств выписаны только их индексы. Изучим, как можно получить "координаты" "точки" $\mathcal{G}_{1k}$, рассматривая только положение исходного $\mathcal{G}$.

ЛЕММА 4.5. Пусть минимальные подпространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, и пусть $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Тогда ортопроекция $\mathcal{K}=R\{\mathcal{G}\}$ пространства $\mathcal{G}$ на $\mathcal{R}$ – также минимальное подпространство, контактирующее как с $\mathcal{E}$, так и с $\mathcal{Y}$.

Канонические изометрии между попарно изоклинными подпространствами $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{Y}$ связаны

$$I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{Y}} = I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Y}} ; \qquad I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}} = I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} ; \tag{4.8}$$

$$\rho(\mathcal{E}, \mathcal{Y}) = \rho(\mathcal{E}, \mathcal{K})\,\rho(\mathcal{K}, \mathcal{Y}). \tag{4.9}$$

<u>Доказательство</u>. $\mathcal{K} \in \mathbf{L}$ по следствию из теоремы 4.2. Поскольку $\rho(\mathcal{R}, \mathcal{Y}) > \rho(\mathcal{E}, \mathcal{Y}) > 0$, см. [9], формулу (2.1), то проекция $\mathcal{K} \neq 0$. Отсюда по лемме 4.3 $\mathcal{K} = \mathcal{R} \cap \mathcal{Y}$ – также $\mathbf{L}$ -минимальное подпространство, изоклинное $\mathcal{Y}$. Поскольку $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Y}$ минимальны и контактируют, то, учитывая следствие из леммы 4.1,

$$\mathcal{E} = E\{\mathcal{Y}\} = E\{R\{\mathcal{Y}\}\} = E\{\mathcal{K}\},$$

т.е. минимальные $\mathcal{E}$ и $\mathcal{K}$ также контактируют.

Перейдем к выводу формул. Согласно (0.9) для всякого $|z\rangle \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{Y}} |z\rangle :&= \rho^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{Y}) E|z\rangle = \rho^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{Y}) EK|z\rangle = \\ &= \rho^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{Y})\,\rho(\mathcal{E}, \mathcal{K})\,\rho(\mathcal{K}, \mathcal{Y}) I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Y}} |z\rangle ; \end{aligned} \tag{4.10}$$

где мы воспользовались при выводе (4.2). Так как в (4.10) и слева и справа стоят изометрии, то скалярной множитель должен быть равен единице. Этот факт и записан в (4.9). С учетом его (4.10) дает левое равенство (4.8).

Изометрия $I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}$ должна быть согласно (0.I0) и правым и левым обратным для $I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{Y}}$ в категории изометрических биекций минимальных подпространств. Так как $I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{K}}$ и $I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}}$ также обратны соответственно $I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Y}}$ и $I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}}$ ввиду (0.I0), то их произведение дает $I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}}$. ☒

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\mathbf{L} \ni \mathcal{R} \supseteq (\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$, где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ минимальны, и пусть минимальное $\mathcal{Y}$ контактирует как с $\mathcal{E}$, так и с $\mathcal{F}$. Тогда ортопроекция $\mathcal{K} = \mathcal{R}\{\mathcal{Y}\}$ также минимальна, и контактирует и с $\mathcal{E}$, и с $\mathcal{F}$, и с $\mathcal{Y}$, причем

$$I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{Y}} I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} ; \tag{4.I1}$$

$$\rho(\mathcal{E},\mathcal{Y}) : \rho(\mathcal{F},\mathcal{Y}) = \rho(\mathcal{E},\mathcal{K}) : \rho(\mathcal{F},\mathcal{K}) . \tag{4.I2}$$

Доказательство. Контактность $\mathcal{K}$ вытекает из леммы 4.5. Далее, по формуле (4.8) леммы 4.5

$$I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{Y}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Y}} , \qquad I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{E}} = I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{K}} I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}} .$$

Перемножая изометрии и учитывая, что $I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Y}} I_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{K}} = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$ согласно (0.I0), получаем (4.I1).

Наконец, согласно (4.9) $\rho(\mathcal{E},\mathcal{Y})$ и $\rho(\mathcal{F},\mathcal{Y})$ отличаются от $\rho(\mathcal{E},\mathcal{K})$, соответственно от $\rho(\mathcal{F},\mathcal{K})$, на общий множитель $\rho(\mathcal{K},\mathcal{Y}) > 0$. ☒

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть m минимальных подпространств $\mathcal{E}_j$ попарно ортогональны, и $\mathcal{C} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$. Пусть минимальное $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}$. Тогда величины $\rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y})$ связаны теоремой косинусов:

$$\rho^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{Y}) + \ldots + \rho^2(\mathcal{E}_m, \mathcal{Y}) = 1. \tag{4.13}$$

Для отличных от нулевого пространства ортопроекций $\mathcal{Y}_{jk} = (E_j + E_k)\{\mathcal{Y}\}$ имеем

$$\sigma_{jk} = \rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y}_{jk}) : \rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}_{jk}) = \rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y}) : \rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}); \tag{4.14}$$

$$\rho^2(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y}_{jk}) + \rho^2(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}_{jk}) = 1. \tag{4.15}$$

ДОПОЛНЕНИЕ. В условиях теоремы всегда найдется $\mathcal{E}_i$, контактирующее с $\mathcal{Y}$. Соответствующий набор значений $\{\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{mi}\}$ полностью определяет неотрицательные величины $\rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y})$.

<u>Доказательство.</u> Формула (4.13) вытекает из формулы Пифагора

$$\langle y|y\rangle = \langle y|E_1|y\rangle + \ldots + \langle y|E_m|y\rangle, \quad \forall |y\rangle \in \mathcal{Y};$$

определения (2.2) препринта [9]:

$$\rho(\mathcal{E}, \mathcal{Y}) = \sup_{\mathcal{Y} \ni |y\rangle \neq |0\rangle} \frac{\langle y|E|y\rangle}{\langle y|y\rangle}$$

и изоклинности $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Y}$. Формула (4.15) является частным случаем (4.13). При $\rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y}) > 0$, $\rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}) > 0$, формула (4.14) следует из (4.12).

Пусть теперь $\rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{Y}) > 0$, $\rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}) = 0$.

По добавлению к теореме 4.4 имеем $\mathscr{Y}_{ik}=\mathscr{E}_i$, $\rho(\mathscr{E}_k, \mathscr{Y}_{ik})=0$, т.е. формула (4.14) справедлива и здесь. При $\rho(\mathscr{E}_i, \mathscr{Y})=0$, $\rho(\mathscr{E}_k, \mathscr{Y})=0$ имеем $\mathscr{Y}\perp(\mathscr{E}_i \oplus \mathscr{E}_k)$, т.е. $\mathscr{Y}_{ik}=0$.

Ввиду (4.13) неотрицательные числа $\rho(\mathscr{E}_i, \mathscr{Y})$ не могут все обратиться в нуль. Пусть $\rho(\mathscr{E}_i, \mathscr{Y})>0$. Значения σ_{ji} определяют все величины $\rho(\mathscr{E}_j, \mathscr{Y})$ с точностью до неизвестного множителя $\rho(\mathscr{E}_i, \mathscr{Y})$. Отсюда по (4.13)

$$\rho^{-2}(\mathscr{E}_i, \mathscr{Y})=1+\sum_{k\neq i}(\sigma_{ki})^2. \qquad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть m минимальных пространств $\mathscr{E}_j$ попарно ортогональны. Пусть, далее минимальное $\mathscr{Y}$ является подпространством пространства $C=\bigoplus_{j=1}^{m}\mathscr{E}_j$, и контактирует со всеми $\mathscr{E}_j$. Тогда ортопроекции $\mathscr{Y}_{jk}=(E_j+E_k)\{\mathscr{Y}\}$ порождают по (2.3) взаимно обратные изометрии $\mathscr{E}_j$ на $\mathscr{E}_k$, и $\mathscr{E}_k$ на $\mathscr{E}_j$:

$$U_k^j=I_k^{jk}I_{jk}^j,$$

$$(U_k^j)^{-1}=U_j^k=I_j^{jk}\,I_{jk}^k=(U_k^j)^*, \tag{4.16}$$

связанные соотношениями

$$U_i^k\,U_k^j\,U_j^i=\mathbb{1}_i, \quad \forall i,j,k, \tag{4.17}$$

Для краткости в формулах в качестве индексов вместо самих множеств выписаны только их номера.

ДОБАВЛЕНИЕ. Изометрии U_k^j совпадают с изометриями

$$U_k^j=I_k^0\,I_0^j, \tag{4.18}$$

где индекс 0 поставлен вместо подпространства $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Совпадение изометрий (4.16) и (4.18) доказано в лемме 4.5. Отсюда

$$U_i^k U_k^j U_j^i = I_i^0 I_0^k I_k^0 I_0^j I_j^0 I_0^i = I_i^0 I_0^i = \mathbb{1}_i ,$$

где использована взаимная обратность: $I_k^j I_j^k = \mathbb{1}_k$. Связь $(U_k^j)^{-1} = (U_k^j)^*$ установлена теоремой 2.2. Здесь, разумеется, U рассматривается как оператор на $\mathcal{H}$. ☒

§ 5. Строение связки всех минимальных подпространств факторного L - пространства.

Каждый вектор в евклидовом пространстве $\mathcal{X}$ задается системой координат $\xi_1, \dots, \xi_m$ относительно какого-либо ортонормированного базиса $Б = \{|x_k>\}$. Координаты всех векторов прямой - пропорциональны. Поэтому, прямую $\mathcal{L}$ удобно задать евклидовыми однородными координатами

$$\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_m ,$$

-определенной с точностью до множителя $\lambda \neq 0$ системой евклидовых координат любого направляющего вектора прямой, т.е. любого вектора прямой, кроме нулевого. Последнее означает, что ξ_j не могут обратиться в нуль все одновременно. Если известно, что именно $\xi_k \neq 0$, то отношения $\sigma_{jk} = \xi_j : \xi_k$ однозначно определяют направляющий вектор

$$\bar{\eta}: \quad \eta_j = \delta_{jk}, \qquad \forall j \neq k, \qquad \eta_k = 1;$$

прямой $\mathcal{L}$.

По известной теореме о трех перпендикулярах каждая пара $\xi_j : \xi_k \neq 0:0$ задает однородные координаты проекции $\mathcal{L}_{jk}$ прямой $\mathcal{L}$ на координатную плоскость $\mathcal{X}_{jk}$. Если же $\xi_j = 0 = \xi_k$, то $\mathcal{L} \perp \mathcal{X}_{jk}$, и обратно.

Описанная конструкция имеет следующий геометрический смысл. Мы рассматриваем связку всех прямых как проективное пространство размерности $m-1$ (или как единичную сферу в $\mathcal{X}$ с отождественными диаметрально противоположными точками). Сами прямые будут точками этого пространства (или точками сферического пространства). Плоскости, определяемые двумя различными прямыми связки, будут прямыми проективного пространства и т.д. (Операция ортопроектирования исходных прямых переходит в ортопроектирование точек сферического пространства).

Аналогичную конструкцию мы применим для введения однородных координат в связке всех L - минимальных подпространств $\mathcal{Y}$ факторного пространства $\mathcal{N}$. Когда $\mathcal{N}$ предминимально (т.е. отвечает проективной прямой), мы умеем вводить в связке координаты со значением в системе гиперкомплексных чисел, - йордановой алгебре $\mathbb{X}$ подобий минимального подпространства. Если же $\mathcal{N}$ содержит пред-предминимальное подпространство, то мы вычислим однородные координаты проекций $\mathcal{Y}_{jk}$ минимального $\mathcal{Y}$ на все предминимальные координатные подпространства. Напомним, что согласно следствию из теоремы 3.5, в этой ситуации алгебра $\mathcal{X}$ оказывается телом. В итоге мы зададим минимальное подпространство $\mathcal{Y}$ системой правооднородных координат $X_1 : X_2 : \ldots : X_m$, т.е. системой "чисел" из $\mathcal{X}$, определенной с точностью до любого ненулевого правого множителя. Тем самым мы установим изоморфизм связки всех минимальных $\mathcal{Y} \subset \mathcal{N}$ и связки прямых правого векторного пространства над $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, см. [21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$ — разложение факторного пространства $\mathcal{N}$ на минимальные. Систему $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m, \mathcal{F}\}$, состоящую из всех $\mathcal{E}_j$ и минимального $\mathcal{F}$, будем называть допустимой координатоопределяющей системой, ср. [22], если $\mathcal{F}$ контактирует со всеми $\mathcal{E}_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Для всякого индуцированного логикой L подобия $X_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ минимального подпространства $\mathcal{E}$ будем называть $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ амплитудой, а изометрию $\dfrac{X}{|X|}$ - фазой. Для нулевых подобий амплитуда равна нулю, а фаза не определена.

"Числовые" системы $\mathcal{X}$ порожденных логикой $L \cap \mathcal{N}$ подобий минимальных подпространств отождествим по следующему принципу:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Изометрии U_i^i и U_ℓ^ℓ координатных подпространств будем считать равными (относительно данной допустимой координатноопределяющей системы $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m, \mathcal{F}\}$, если

$$U_\ell^\ell = W_\ell^i \, U_i^i \, W_i^\ell, \qquad U_i^i = W_i^\ell \, U_\ell^\ell \, W_\ell^i \,; \tag{5.1}$$

где $W_k^j = I_k^0 \, I_0^j$ - изометрии (4.18), порожденные $\mathcal{F}$.

ЛЕММА 5.1. Определение 5.3 равенства изометрий корректно и по линейности продолжимо на пространства индуцированных логикой подобий.

Доказательство. Согласно (4.16) и (4.17)

а) $W_k^i U_i^i V_i^i W_i^k = W_k^i U_i^i W_i^k W_k^i V_i^i W_i^k = U_k^k V_k^k$;

б) $W_k^i \mathbb{1}_i^i W_i^k = W_k^i W_i^k = \mathbb{1}_k^k$.

в) $W_k^i (U_i^i)^{-1} W_i^k W_k^i U_i^i W_i^k = W_k^i (U_i^i)^{-1} U_i^i W_i^k = \mathbb{1}_k^k$.

Для изометрий $\langle V_i^i, V_i^i \rangle = 1$, $(V_i^i)^* = (V_i^i)^{-1}$, ввиду (2.10) для $U_1 = U_2 = W_j^i V_i^i$. Следовательно,

$$2\varkappa \mathbb{1}_i^i = (W_j^i U_i^i)^* (W_j^i V_i^i) + (W_j^i V_i^i)^* (W_j^i U_i^i) =$$

$$= (U_i^i)^{-1} V_i^i + (V_i^i)^{-1} U_i^i ;$$

$$2\varkappa \mathbb{1}_k^k = 2\varkappa W_k^i \mathbb{1}_i^i W_i^k = (U_k^k)^{-1} V_k^k + (V_k^k)^{-1} U_k^k .$$

Таким образом $(U_i^i, V_i^i) = \varkappa = (U_k^k, V_k^k)$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{F})$ – допустимая координатноопределяющая система факторного пространства $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$, $m \geq 3$.

Каждому минимальному подпространству $\mathcal{Y} \subset \mathcal{N}$ отвечает определенный с точностью до произвольного правого множителя набор

$$X_1 : X_2 : \dots : X_m , \quad \forall X_j \in X, \quad \forall j ,$$

где тело $\mathcal{X}$ индуцировано логикой $L \cap \mathcal{N}$ по теореме 3.6.

Пусть $\rho_j = \rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y})$, и пусть $\rho_i > 0$. Тогда

$$X_i = \rho_i Y;$$

$$X_j = 0, \qquad \forall j : \rho_j = 0;$$

$$X_k = \rho_k W_i^k V_k^i Y, \quad \forall k : \rho_k > 0. \tag{5.2}$$

Здесь $Y \in \mathcal{X}$ произвольно, $Y \neq 0$; а операторы изометрий W и V индуцированы по формулам (4.18) и (0.9) соответственно подпространствами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Амплитуды $|X_j| = \sqrt{\langle X_j, X_j \rangle}$ связаны:

$$|X_1| : |X_2| : \ldots : |X_m| = \rho_1 : \rho_2 : \ldots : \rho_m. \tag{5.3}$$

<u>Доказательство</u>. Нам надо показать, что при фиксированном i, где $|X_i| > 0$ значения $X_1, \ldots, X_m$, заданные (5.2), позволяют однозначно восстановить $\mathcal{Y}$. Затем нужно проверить, что замена i на k с $\rho_k > 0$ приведет к пропорциональным значениям координат.

Займемся сперва первой задачей. Всякое подобие $Y_i^i = Y \in \mathcal{X}$ можно по теореме 2.11 представить в виде $Y = \lambda V$, где V_i^i - изометрия, причем для изометрий $|V| = 1$, согласно (2.17). Так как $\mathcal{X}$ - тело, то произведение $W_i^j V_j^i$ и V_i^i двух L-изометрий $\mathcal{E}_i$ на себя есть изометрия, тоже принадлежащая $\mathcal{X}$. Отсюда $|W_i^j V_j^i \lambda V_i^i| = \lambda = |Y| \neq 0$.

Перейдя в (5.2) к модулям и сокращая на общий множитель $|Y| \neq 0$

получаем (5.3). С учетом нормировки (4.13) неотрицательные величины $\rho_j = \rho_j(\mathcal{E}_j, \mathcal{Y})$ находятся из (5.3) однозначно.

Обозначим $\Omega(\mathcal{Y}) = \{k : \rho_k > 0\}$, $i \in \Omega(\mathcal{Y})$. По добавлению к теореме 4.4, $\mathcal{Y} \subset \bigoplus_{k\in\Omega} \mathcal{E}_k$. Из (5.2) $Y = \rho_i^{-1} X$. Поэтому

$$U_k^i = \rho_k^{-1} W_k^i X_k Y^{-1}, \quad \forall k \in \Omega.$$

Отображения U_k^i подпространства $\mathcal{E}_i$ на $\mathcal{E}_k$ суть изометрии, порожденные ортопроекцией $\mathcal{Y}_{ik} = (E_i + E_k)\{\mathcal{Y}\}$. При этом $(U_j^i)^* = U_i^j = (U_j^i)^{-1}$. Наконец, по теореме 4.6,

$$\rho_{i,ik} : \rho_{k,ik} = \rho_i : \rho_k, \quad \rho_{i,ik}^2 + \rho_{k,ik}^2 = 1,$$

где $\rho_{i,ik} = \rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{Y}_{ik})$, $\rho_{k,ik} = \rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{Y}_{ik})$. Следовательно, мы можем подсчитать и эти величины, и найти угловой параметр $\psi = \arccos \rho_{i,ik}$ подпространства $\mathcal{Y}_{ik}$ в пучке, проходящем через $\mathcal{E}_i, \mathcal{Y}_{ik}, \mathcal{E}_k$. Найденные значения U, U^*, $\sin\psi$ и $\cos\psi$ определяют по формуле (2.2) теоремы 2.2 ортопроектор G_{ik}, само $\mathcal{Y}_{ik}$ выписывается по [9], см. там (2.12). Тем самым все $\mathcal{Y}_{ik}$, $k \in \Omega(\mathcal{Y})$, определены.

Вообразим теперь, что с самого начала мы имели только набор координат $X_j \in \mathbb{X}$, где $X_i \neq 0$. Проведя для него все нормировки и исключения, описанные выше, мы построим в итоге подпространство $\mathcal{Y}_{ik}$, принадлежащее некоторому $\mathcal{R}$-пучку, определяемому какой-то изометрией $U_k^i \in \mathcal{D}$. Значит, это пучок L - минимальных подпространств. Отсюда, $\mathcal{Y}_{ik} \in L$, $\forall k \in \Omega$.

По теореме 4.4 и добавлению к ней указанные $\mathcal{G}_{ik}$ однозначно определяют $\mathcal{G} \subset (\bigoplus_{k \in \Omega} \mathcal{E}_k)$, имеющее $\mathcal{G}_{ik}$ своими проекциями и порождающее по теореме 4.6 те же изометрии U_k^i. Оно автоматически должно быть L -минимально, см. теорему 4.4.

Перейдем ко второй задаче. Пусть $\rho_i > 0$ и $\rho_\ell > 0$. Покажем, что при переходе от операторов $X_j^{(i)}$ подобия подпространства $\mathcal{E}_i$ на считающиеся им равными по (5.1) операторы $X_j^{(\ell)}$ подобия $\mathcal{E}_\ell$, последние могут быть найдены по формулам (4.20) с заменой i на ℓ, и с новым множителем $Y^{(\ell)}$, отличающимся от переинтерпретированного $Y^{(i)}$ только фазой. В самом деле, положим

$$Y^{(\ell)} = (U_\ell^i W_i^\ell)(W_\ell^i Y^{(i)} W_i^\ell) = U_\ell^i Y^{(i)} W_i^\ell .$$

При $k \neq i, \ell$, $k = \ell$ и $k = i$ из формул (4.2) с учетом (4.16) и (4.17) получаем

$$X_k^{(\ell)} := W_\ell^i X_k^{(i)} W_i^\ell = \rho_k W_\ell^k U_k^\ell Y^{(\ell)} ;$$

$$X_\ell^{(\ell)} := W_\ell^i X_\ell^{(i)} W_i^\ell = \rho_\ell Y^{(\ell)} ;$$

$$X_i^{(\ell)} := \rho_i W_\ell^i Y^{(i)} W_i^\ell = \rho_i W_\ell^i U_i^\ell Y^{(\ell)} . \qquad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 5.3. Каждое минимальное подпространство $\mathcal{G}$ факторного пространства $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$, имеющее однородные координаты $X_1 : X_2 : \ldots : X_m$ относительно координатоопределяющей системы $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m, \mathcal{F}\}$, причем $\rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{Y}) > 0$, может быть представлено в параметрической форме

$$\mathcal{Y} = \{|u\rangle = X_i|y\rangle + \sum_{j \neq i} W_j^i X_j |y\rangle, \quad \forall |y\rangle \in \mathcal{E}_i\}. \tag{5.4}$$

Обратно, всякое множество $\mathcal{Y}$, представимое в указанной форме, является $\mathbf{L}$-минимальным подпространством в $\mathcal{N}$, с координатами $X_1 : X_2 : \dots : X_m$.

<u>Доказательство.</u> Описание (5.4) линейно, $\mathbb{C}$-линейной комбинации векторов $|y'\rangle, |y''\rangle \in \mathcal{E}_i$ отвечает та же линейная комбинация соответствующих векторов $|u'\rangle, |u''\rangle \in \mathcal{Y}$, и обратно. Значит, $\mathcal{Y}$ есть подпространство. По определению W_j^i слагаемые в (5.4) суть ортопроекции $\mathcal{Y}$ на все $\mathcal{E}_k$. Отсюда $\mathcal{Y} \subset \mathcal{N} (= \oplus \mathcal{E}_j)$, и ортопроекция $\mathcal{Y}_{ik} = (E_i + E_k)\{\mathcal{Y}\}$ есть

$$\mathcal{Y}_{ik} = \{|v\rangle = \rho_{i,ik} |\mathring{y}\rangle + \rho_{k,ik} V_k^i |\mathring{y}\rangle, \quad \forall |\mathring{y}\rangle \in \mathcal{E}_i\}. \tag{5.5}$$

$$\rho_{i,ik} = \gamma |X_i|, \quad \rho_{k,ik} = \gamma |X_k|; \quad \gamma^2 = |X_i|^2 + |X_k|^2;$$

$$V_k^i = \frac{\rho_{i,ik}}{\rho_{k,ik}} W_k^i X_k X_i^{-1}, \quad \gamma X_i |y\rangle = |\mathring{y}\rangle \tag{5.6}$$

Согласно теореме 3.6 $(X_k X_i^{-1}) \in \mathbb{X}$, откуда, по определению $\mathbb{X}$, изометрия V_k^i также порождена $\mathbb{R}$-пучком $\mathbf{L}$-минимальных подпространств, проходящим через $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_k \perp \mathcal{E}_i$. С другой стороны, согласно определению (0.II) пучка, $\mathcal{Y}_{ik}$ принадлежит некоторому пучку, проходящему через $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_k$ через

$\mathcal{G}_{ik}$, и порожденному изометрией $V_k^i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_k$. Так как по лемме 2.9 соответствие между такими изометриями и серединами пучков – взаимно однозначно, то $\mathcal{G}_{ik} \in \mathbf{L}$ по определению $\mathbb{R}$ – квазилогики. По теореме 4.4 тогда и $\mathcal{G} \in \mathbf{L}$.

Согласно теореме 4.6: $I_k^0 I_0^i = V_k^i$, где индекс нуль заменяет $\mathcal{G}$, см. также добавление к теореме 4.8. Отсюда, по теореме 5.2 однородные координаты $\mathcal{G}$ суть $\rho_k W_i^k V_k^i Y = X_k$, если принять $Y = \rho_i^{-1} X_i$, и подставить выражение V_k^i, принятое в (5.6), и использовать соотношение (4.12) теоремы 4.6. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть в условиях теоремы 5.3 минимальное подпространство $\mathcal{G}$ описано нормированными однородными координатами X_k:

$$|X_1|^2 + |X_2|^2 + \ldots + |X_m|^2 = 1, \tag{5.7}$$

определенными с точностью до фазы. Тогда ортопроекторы G на $\mathcal{G}$ имеет блочное строение

$$G = \begin{pmatrix} G^{11} & \ldots & G^{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G^{m1} & \ldots & G^{mm} \end{pmatrix}; \quad G^{jk} = W_j^i X_j \cdot X_k^* W_j^k, \quad \forall i, k; \tag{5.8}$$

где для стандартности записи $W_i^i = \mathbb{1}_i^i$.

Обратно, всякий оператор, разбивающийся на блоки указанного вида, есть ортопроектор на некоторое $\mathbf{L}$-минимальное подпространство $\mathcal{G}$, с соответствующими нормированными однородными координатами X_k.

<u>Доказательство.</u> Разобьем любой вектор $|U\rangle \in \mathcal{N}$ в сумму его ортопроекций $E_k |U\rangle = |U_k\rangle$. Тогда

$$G|u> = \sum_j \sum_k W_k^i X_j X_k^* W_i^k |u_k> = \left(\sum_j W_j^i X_j |y>\right) \in \mathscr{G}$$

в силу (5.4), где обозначено $\sum_k X_k^* W_i^k |u_k> = |y> \in \mathscr{E}_i$, поскольку $(W_i^k |u_k>) \in \mathscr{E}_i$, $\forall k$.

Предположим, что $|u> \in \mathscr{G}$, так что ортогональное разложение $|u>$ определяется (5.4). Тогда

$$G|u> = \sum_{j,k,\ell} W_j^i X_j X_k^* W_i^k W_k^i X_k |y> = \sum_j W_j^i X_j |y> = |u>,$$

поскольку $\sum_k X_k^* X_k = \sum_k |X_k|^2 = 1$, см. (2.21). Выведенные свойства описывают G как проектор на $\mathscr{G}$.

Согласно теореме 4.8, $(W_j^i)^* = W_i^j$. Следовательно, $(G^{jk})^* = G^{kj}$, т.е. оператор G – эрмитов. Следовательно, он ортопроектор на $\mathscr{G}$.

Ввиду единственности разбиения ортопроектора на блоки, отвечающие разложению $\mathscr{N} = \bigoplus_j \mathscr{E}_j$, из доказанного вытекает и прямое утверждение теоремы. ☒

ТЕОРЕМА 5.5. В условиях теоремы 5.3 операторы A с блочным строением

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & \dots & A^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{m1} & \dots & A^{mm} \end{pmatrix}, \quad A^{jk} = W_j^i Z_{jk} W_i^k, \quad \forall j, k, \qquad (5.9)$$

образуют кольцо с единицей, изоморфное матричной алгебре $\mathbb{X}$ ($= \mathbb{R}^m$, или $= \mathbb{C}^m$, или $= \mathbb{Q}^m$). При отождествлении (5.1) подобий минимального пространства, описание (5.9) не зависит от выбора $\mathscr{E}_i$.

СЛЕДСТВИЕ. Связка всех L - минимальных подпространств факторного пространства $\mathcal{N}$, $m \geqslant 3$, изоморфна связке всех прямых или $\mathbb{R}^m$, или $\mathbb{C}^m$, или $\mathbb{Q}^m$; и этот изоморфизм продолжается до изоморфизма $\mathbb{R}$ - логики $L \cap \mathcal{N}$ и $\mathbb{R}$ - логики всех подпространств пространства $\mathbb{X}^m$.

Доказательство. Описание A линейно. Далее, ввиду (4.16)

$$(AB)^{jk} = \sum_{\ell} W_j^i Z_{i\ell} Y_{\ell k} W_i^k = W_j^i \Big(\sum_{\ell} Z_{i\ell} Y_{\ell k}\Big) W_i^k . \qquad (5.10)$$

Независимость от выбора $\mathscr{E}_i$ вытекает из (4.16) и (4.17).

Утверждение следствия вытекает из известной теории ортопроекторов в пространствах $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$, а также $\mathbb{Q}^m$, см. например [23]. ⊠

Ввиду важности следствия мы дадим его геометрический вывод.

ТЕОРЕМА 5.6. В условиях теоремы 5.3 всякий оператор с эрмитовым блочным строением (4.26):

$$Z_{jk}^{*} = Z_{kj} , \qquad (5.11)$$

является эрмитовым оператором на $\mathcal{H}$.

Все эрмитовы операторы указанного вида образуют йорданову алгебру $J_{L \cap \mathcal{N}}$ с единицей, изоморфную $(\mathbb{X}^m)^+$.

Доказательство. Из (5.10) вытекает, что

$$2(A \circ B)^{jk} = W_j^i \sum_{\ell} \big(Z_{j\ell} Y_{\ell k} + Y_{j\ell} Z_{\ell k} \big) W_i^k ,$$

где выражение в круглых скобках самосопряжено ввиду (5.11). Условия (5.9) и (5.11) линейны. ⊠

ТЕОРЕМА 5.7. Йорданова алгебра $J_{L\cap\mathcal{N}}$ теоремы 5.6 содержит ортопроекторы на все L-подпространства из $\mathcal{N}$. Обратно, любой идемпотент из $J_{L\cap\mathcal{N}}$ есть ортопроектор на L-подпространства.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, каждый ортопроектор (5.8) на минимальное подпространство имеет эрмитово строение, $(X_j X_k^*)^* = X_k X_j^*$. По теореме 1.3 каждое L-подпространство $\mathcal{K}$ раскладывает в ортогональную сумму минимальных $\mathcal{Y}_i$, так что его ортопроектор $\sum_i G_i = K \ni J_{L\cap\mathcal{N}}$

Докажем теперь вспомогательное предложение: Если подпространство $\mathcal{K}$ контактирует с координатным $\mathcal{E}_i$, а его ортопроектор $K \in J_{L\cap\mathcal{N}}$, то $\mathcal{E} \,\Pi\, \mathcal{K} = \mathcal{E}$, $(\mathcal{E} \,\Pi\, \mathcal{K}) \in L$. Для этого вычислим согласно общей теории, см. (0.5) операторы $E_i K E_i$ и $K E_i K$. Первый сводится к блоку $(E_i K E_i)^{ii} = Z_{ii} = \zeta 1_i^i$, см. 2.20, ибо по эрмитовости $Z_{ii} = Z_{ii}^*$. Все остальные блоки – нулевые, значит $\mathcal{E}_i \,\Pi\, \mathcal{K} = \mathcal{E}_i$. У второго блоки имеют вид

$$(KE_iK)^{jk} = W_j^i Z_{ji} Z_{ik} W_i^k = W_j^i Z_{ji} Z_{ki}^* W_i^k .$$

Отсюда, по теореме 5.4 вытекает, что KE_iK кратен ортопроектору на минимальное подпространство $\mathcal{Y}$ с однородными (ненормированными, вообще говоря) координатами $Z_{1i} : Z_{2i} : \ldots : Z_{mi}$. По общей теории (0.5) единственное ненулевое собственное пространство оператора KE_iK и есть контакт $\mathcal{E}_i \,\Pi\, \mathcal{K} = \mathcal{Y} \in L$, что и утверждалось.

Введем теперь для подпространства $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ с ортопроектором $K \in J_{L\cap\mathcal{N}}$ множество индексов $\Omega_0 = \{i : \rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{K}) > 0\}$.

Пусть $i \in \Omega_0$. Построим подпространство $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \ominus (\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_i)$, где $\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_i = \mathcal{Y}^{(1)} \in L$ по доказанному. По свойству (2.1) контактов

$$\mathcal{K}_1 \perp \mathcal{Y}^{(1)}, \quad \mathcal{K}_1 \perp \mathcal{E}_i .$$

Отсюда, множество индексов $\Omega_1 \subset \Omega_0$, включения строгое. Продолжая указанный процесс, мы придем к какому-то $\Omega_p = \emptyset$, которому соответствует в $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_j$ только нулевое подпространство. При этом мы получим разложение $\mathcal{K} = \mathcal{Y}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{Y}^{(p)}$ на минимальные подпространства, Значит $\mathcal{K} \in L \cap \mathcal{N}$. ⊠

ТЕОРЕМА 5.8. Каждому факторному пространству $\mathcal{N}$ $\mathcal{R}$-квазилогики L отвечает йорданова алгебра $J_{L \cap \mathcal{N}}$ всех самосопряженных операторов с блочным строением (5.9), (5.11).

Идемпотенты алгебры $J_{L \cap \mathcal{N}}$ суть ортопроекторы на подпространства из $\mathcal{R}$-логики $L \cap \mathcal{N}$, и только они.

Алгебру $J_{L \cap \mathcal{N}}$ можно описать как множество всех самосопряженных операторов на $\mathcal{N}$, у которых и каждое собственное пространство принадлежат $L \cap \mathcal{N}$.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из теорем 5.5-5.7. Последнее следует их того, что йорданова алгебра с каждым A содержит $E(A)$, см. [9] , лемму 4.7. ⊠

§ 6. Йордановы алгебры и йордановы логики.

В этом параграфе мы рассмотрим общее строение $\mathcal{R}$-квазилогик и их связь с йордановыми алгебрами.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathcal{M}$ - максимальное подпространство

$\mathcal{R}$ - квазилогики L , $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_q$ - её факторные подпространства, $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{N}_i$. Тогда $L = \bigoplus_{i=1}^{q} L_i$, где $L_i = L \cap \mathcal{N}_i$ — $\mathcal{R}$ -логика L -подпространств пространства $\mathcal{N}_i$.

Доказательство. По теореме 1.8 любое L - подпространство $\mathcal{B}$ разлагается в ортогональную сумму своих проекций на факторные пространства. $\mathcal{N}_i$, причем все $N_i\{\mathcal{B}\} \in L$. ⊠

ТЕОРЕМА 6.2. Факторные пространства $\mathcal{N}$ могут быть трех типов - I) сводящиеся к единственному минимальному пространству $\mathcal{E}$, II) сводящиеся к предминимальному пространству, и III) содержащие пред-предминимальное пространство; $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$, $m \geq 3$.

Каждому типу отвечает своя система $\mathfrak{X}$ подобий минимального пространства $\mathcal{E} \in \mathcal{N}$: I) $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, II) $\mathfrak{X} = \mathbb{H}_p$ - система гиперкомплексных чисел с $p \geq 0$ мнимыми единицами, III) $\mathfrak{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$.

Задание системы $\mathfrak{X}$, с указанием в случае III) числа m попарно ортогональных минимальных подпространств $\mathcal{E}_j$ в $\mathcal{N}$, определяет логику $L \cap \mathcal{N}$ однозначно, с точностью до изоморфизма.

Доказательство. См. теорему 2.12 и следствие из теоремы 5.5.⊠

ТЕОРЕМА 6.3. Йорданова алгебра J_L самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$,порожденная ортопроекторами на все подпространства $\mathcal{R}$ -квазилогики L , разлагается в прямую сумму

$$J_L = \bigoplus_j J_{L \cap \mathcal{N}_j} \qquad (6.1)$$

аналогичных алгебр для факторов.

Доказательства. Как вытекает из теоремы 6.1, ортопроекторы имеют ящичную структуру, с нулевыми недиагональными ящиками. ⊠

ТЕОРЕМА 6.4. Все принадлежащие алгебре J_L ортопроекторы суть ортопроекторы на подпространства $\mathcal{R}$ - квазилогики L .

Доказательство вытекает из разложения (6.1) и теоремы 5.8. ⊠

В [9],теорема 4.8, нами было доказано предложение:

ТЕОРЕМА. Пусть J - йорданова алгебра самосопряженных операторов, действующих на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$. Тогда идемпотенты из J суть ортопроекторы на элементы некоторой $\mathcal{R}$ - квазилогики L_J подпространств пространства $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 6.5. Каждый $\mathcal{R}$ - квазилогике L подпространств конечномерного унитарного пространства отвечает своя йорданова алгебра $J = J_L$ самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$. Обратно, каждой йордановой алгебре J отвечает своя $\mathcal{R}$ -квазилогика подпространств $L = L_J$, причем $J_{L_J} = J$, $L_{J_L} = L$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Алгебру J_L можно описать как множество всех самосопряженных операторов A , у каждого из которых все собственные подпространства, кроме A -аннулируемого, принадлежат L .

Доказательство вытекает из теоремы 6.4 и процитированной теоремы 4.8 из [9]. ⊠

ТЕОРЕМА (Йордана-фон Неймана-Вигнера). Всякая йорданова алгебра самосопряженных операторов на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму факторов следующих трех типов:

I алгебры $\mathbb{R}$ вещественных чисел;

П алгебры матриц второго порядка над гиперкомплексными числами с p мнимыми единицами, $p \geq 0$.

Ш алгебры матриц m - ого порядка, $m \geq 3$, над

а) полем $\mathbb{R}$, б) полем $\mathbb{C}$, в) телом $\mathbb{Q}$.

<u>Доказательство</u> вытекает из теоремы 6.5, классификационной теоремы 6.2, теоремы 2.13, следствия из теоремы 5.5. и теоремы 5.7. ☒

В наших рассуждениях требование $Dim\, \mathcal{H} < \infty$ не очень существенно. Его можно заменить обычным требованием конечности цепочек вложенных $\mathcal{L}$ - подпространств, или конечности ранга $\mathcal{J}$ над $\mathbb{R}$.

Подчеркнем, что мы не затронули некоторые детали, связанные с реализацией логики $\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}$, см.например [6].

ЛИТЕРАТУРА

I Jourdan P., Neumann J.V., Wigner E., On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann.Math., 35:I (I934), 29-64.

2 Neumann J.v., On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Mat.sb., I (43): 4 (I936), 4I5-484.

3 Topping D.M., Jordan algebras of self-adjoint operators, Mem.Amer.Math.Soc., 53, (I965).

4 Jacobson N., Structure and representation of Jordan algebras, Amer.Math.Colloq.Publ., 39, (I968).

5 Osborn J.M., Jordan algebras of capacity two, Proc.Nat.Acad. Sci. USA, 57, (I967), 582-588.

6 Størmer E., Jordan algebras of type I, Acta Math., II5, 3-4 (I966), I65-I84.

7 Størmer E., On the Jordan structure of C^*- algebras, TAMS, I20:3 (I965), 438-447.

8 Stormer E., Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators, TAMS, I30:I (I968), I53-I66.

9 Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Элементарные йордановы логики, Препринт ИПМ АН СССР, I975, № 113.

10 Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Стационарные матрицы вероятностей для стохастической суперматрицы, Ш советско-японский симп. по теории вероятн. (Ташкент, 1975), Тезисы, I, 111-113.

11 Varadarajan V.S., Geometry of quantum theory, I, N.Y., Van Nostrand, 1968.

12 Neumann J.v., Continuous geometry, Princeton, 1960.

13 Колмогоров А.Н., Zur Begründung der projectiven Geometrie, Ann.Math., 33, (1932), 175-176.

14 Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Унитарные эквиварианты семейства подпространств, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 52.

15 Dixmier J., Position relative de deux varietes lineaires fermees dans un espace de Hilbert, Rev.Sc., 86, (1948), 387-399.

16 Frobenius G., Uber lineare Substitutionen und bilineare Formen, J.reine angew.Math., 84, (1878), 59-63.

17 Davis C., Separation of two linear subspaces, Acta Sc.Math., 19, (1958), 172-187.

18 Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления, Наука, 1970.

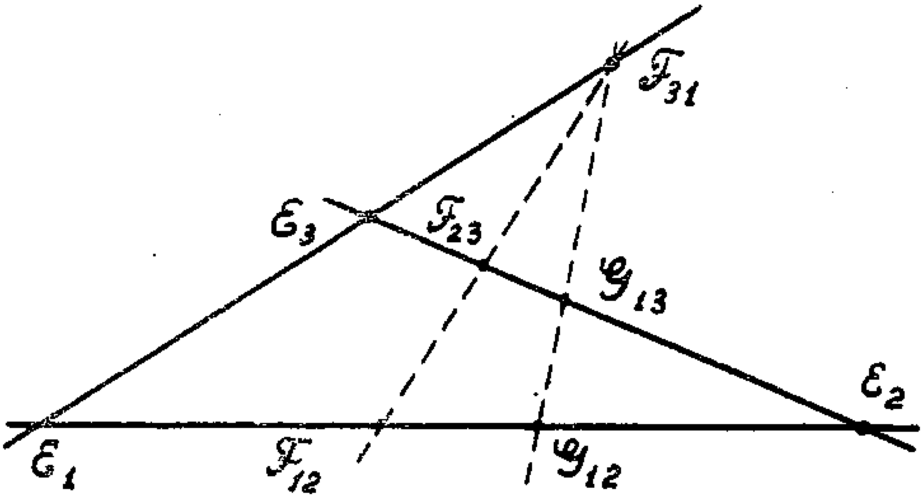
19 Понтрягин Л.С., Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.

20 Ченцов Н.Н., Несимметричное расстояние между распределениями вероятностей, энтропия и теорема Пифагора, Матем. заметки, 4:3 (1968), 323-332.

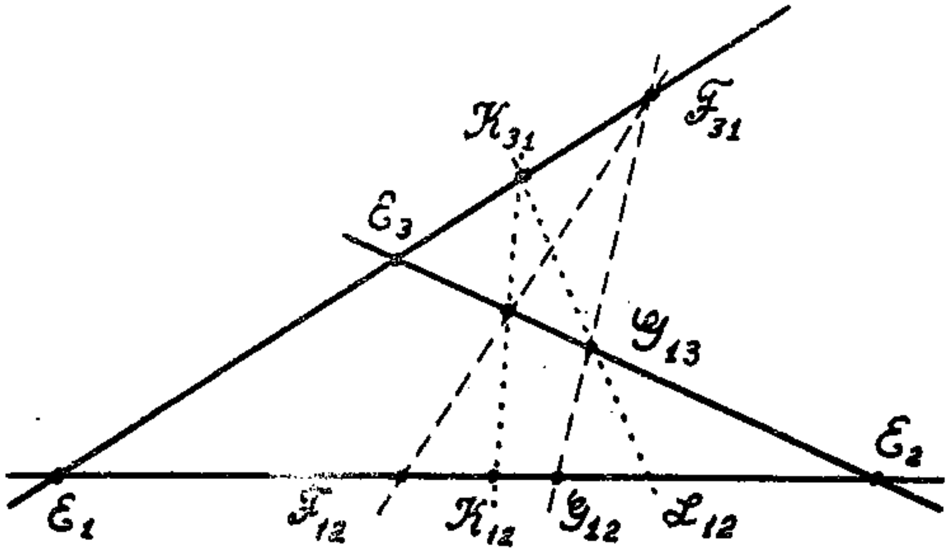
21 Artin E., Geometric algebra, N.Y., Intersc.Publ., 1957.

22 Klein F., Forlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Berlin, Springer, 1928.

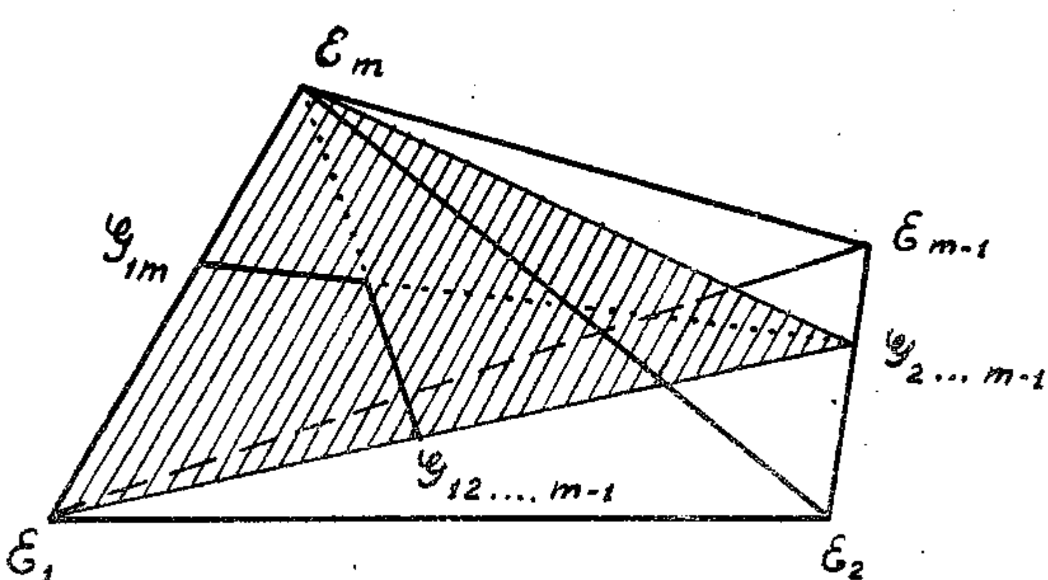
23. Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D., Foundation of quaternion quantum mechanics, J.Math.Phys., 3:2 (1962), 207-220.



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3