АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШКОЛА ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(15-26 августа)

Препринт

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ЛОГИКИ

НОВОСИБИРСК 1977

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШКОЛА ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(15-26 августа)

Препринт

Е.А.МОРОЗОВА, Н.Н.ЧЕНЦОВ

Элементы стохастической квантовой логики

Новосибирск 1977

УДК 519.821 + 512.897 + 517.11 + 530.145

Многие закономерности микромира носят статистический характер. Однако, случайные явления микромира не описываются схемами классической (или, как теперь говорят, коммутативной) теории вероятностей, потому что логика квантовых событий не является аристотелевой. Здесь возникают свои алгебры событий (квантовые логики, как их называют физики). Соответственно, приходится рассматривать йордановы алгебры случайных величин (наблюдаемых) и обертывающие их некоммутативные алгебры фон Неймана см. [1-5]. Как и в классической теории, распределением вероятностей называется любой нормированный неотрицательный $\mathbb{R}$ – линейный функционал на алгебре наблюдаемых:

$$P(A^2) \geq 0\ ,\quad \forall A\ ;\qquad P(\mathbb{1}) = 1\ . \tag{1}$$

В частности [6], [7], если алгебра $\mathfrak{A}$ наблюдаемых состоит из всех ограниченных эрмитовых операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то все распределения вероятностей на $\mathfrak{A}$ можно реализовать неотрицательными эрмитовыми ядерными операторами со следом 1,

$$P(A) = tr\, PA = tr\, AP\ ; \tag{2'}$$

$$P = P^*\ ,\quad P \geq 0\ ,\quad tr\, P = 1\ . \tag{2''}$$

Более общая современная модель, [8], [9], со случайным явлением связывает абстрактное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, разложенное в ортогональную сумму нескольких подпространств –

когерентных секторов $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s$. Каждая (ограниченная) наблюдаемая A описывается набором ограниченных эрмитовых операторов $A_1, \dots, A_s$, или их ортогональной суммой:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha \quad , \quad A = \bigoplus_\alpha A_\alpha \quad ; \quad A_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_\alpha \, , \forall \alpha ; \tag{3}$$

т.е. оператором соответствующего диагонально - блочного строения. Соответственно, каждое распределение вероятностей на такой алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s)$ можно однозначно описать ядерным оператором того же диагонально - блочного строения.

В указанной модели элементарным исходом случайного эксперимента будет любая прямая, лежащая в одном из когерентных секторов. Событиями в этой схеме являются замкнутые линейные оболочки любых множеств допустимых прямых (а не сами объединения элементарных исходов, как в классической теории). Другими словами, событиями являются ортогональные суммы подпространств секторов: $\mathcal{F} = \oplus \mathcal{F}_\alpha$; $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{H}_\alpha$, $\forall \alpha$. Ортопроекторы на них $F = \oplus F_\alpha$ являются аналогами индикаторных функций множества.

Класс всех замкнутых подпространств указанного строения образует слабо модулярную решетку $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s)$, с ортодополнениями, относительно операций: " $\perp$ " - перехода к ортодополнению, " $+$ " - векторной суммы, " $\cap$ " - пересечения подпространств. Эти операции являются обобщениями булевых операций отрицания, объединения и пересечения, [10] . Решетка $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}_s)$ дистрибутивна в том и только случае, когда все секторы $\mathcal{H}_\alpha$ одномерны. Таким образом, когда решетка событий образована всевозможными координатными подпространствами, а элементарные исходы - сами декартовы координатные оси, мы приходим к классической логике и классической теории вероятностей.

Пусть $\{\mathfrak{F}^{(\beta)}\}$ – некоторый набор замкнутых линейных подпространств. Интересно выяснить, какую алгебру событий этот набор порождает. Согласно теории [6], мы должны взять соответствующий набор ортопроекторов $\{F^{(\beta)}\}$, затем наименьшую алгебру $\mathfrak{A}\{F^{(\beta)}\}$ фон Неймана, содержащую этот набор, и выделить все ее эрмитовы идемпотенты. Эти идемпотенты будут ортопроекторами. Соответствующие им подпространства и будут образовывать искомую алгебру.

Нетрудно видеть, однако, что минимальная ортодополняемая решетка подпространств, содержащая набор $\{\mathfrak{F}^{(\beta)}\}$, будет, как правило, гораздо уже построенной алгебры. Например, $\mathcal{H}$ – двумерное пространство, $\mathfrak{F}^{(1)}$ и $\mathfrak{F}^{(2)}$ – неортогональные прямые. Алгебра подпространств содержит любую прямую $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ (проходящую через нулевую точку), а решетка – ещё только перпендикуляры $\mathcal{G}^{(1)}$ к $\mathfrak{F}^{(1)}$ и $\mathcal{G}^{(2)}$ к $\mathfrak{F}^{(2)}$. Отсюда вытекает, что указанная в [10] система операций $\{\perp, +, \cap\}$ не полна в квантовой логике. К сожалению, ни Бирктоф с фон Нейманом, ни последующие авторы, см. напр. [11], [12], не обратили внимания на это обстоятельство, что неоднократно приводило к досадным несоответствиям.

По теореме о бикоммутанте [13] ортопроектор G принадлежит порожденной алгебре $\mathfrak{A}\{F^{(\beta)}\}$ тогда и только тогда, когда он коммутирует со всяким унитарным оператором, коммутирующим в свою очередь со всеми ортопроекторами $F^{(\beta)}$ исходного набора.

Таким образом, всякое унитарное преобразование, переводящее каждое подпространство $\mathfrak{F}^{(\beta)}$ на себя, должно оставлять инвариантным и подпространство $\mathcal{G}$. Другими словами, нам надо построить решетку всех унитарных ковариантов набора $\{\mathfrak{F}^{(\beta)}\}$.

Опишем это построение для конечномерного пространства Классификация расположений двух подпространств евклидова пространства была построена еще Камиллом Жорданом [14]. Изложим ее вкратце. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – два подпространства, F и G – ортопроекторы на них. Тогда положительные собственные значения эрмитовых операторов FGF и GFG попарно совпадают и имеют одинаковые кратности. При этом все векторы неаннулируемого собственного пространства $\mathcal{F}_\nu$ первого оператора наклонены под одним и тем же углом к собственному подпространству $\mathcal{G}_\nu$, и ортогональны остальным $\mathcal{F}_\mu$ и $\mathcal{G}_\mu$ при $\mu \neq \nu$.

Рассмотрим максимальное собственное число $\varkappa = \rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})$ операторов FGF и GFG. Если $\varkappa = 1$, то соответствующим собственным подпространством будет $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Если же $1 > \varkappa > 0$, то существуют два различных собственных подпространства $(\mathcal{F} \mathcal{J} \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$ и $(\mathcal{G} \mathcal{J} \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{G}$. Они изоклинны [15] друг другу (см. выше), и каждый состоит из векторов одного исходного подпространства, наименее уклоняющихся от другого подпространства. Назовем $\mathcal{F} \mathcal{J} \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \mathcal{J} \mathcal{F}$ контактами. Отличное от нуля пересечение $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ мы также будем считать контактом. Контакты равны нулю, только если $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$. Несимметричная операция взятия контакта, очевидно, унитарно ковариантна.

Биссектриса острого угла между двумя неортогональными прямыми, очевидно, будет унитарным ковариантом этих прямых. Более общо, пусть теперь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоклинны (причем неортогональны, $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \neq 0$); назовем их $a:b$ – когерентной суперпозицией (линейной комбинацией) подпространство

$$\mathcal{H}_{a:b} := \{ \vec{w} = a\vec{x} + b\rho^{-1} G\vec{x}, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{F} \}. \quad (4)$$

$\mathcal{K}_{a:b} = \mathcal{H}_{\lambda a:\lambda b}$ при $\lambda \neq 0$, пара $0:0$ запрещена.

Назовем $\mathbb{C}$ - логикой, соответственно $\mathbb{R}$ - логикой, в собственном смысле этого слова, систему подпространств пространства $\mathcal{H}$, устойчивую относительно операций "$\perp$", "$+$", "$\cap$" и когерентного линейного комбинирования с $a, b \in \mathbb{C}$, соответственно $a, b \in \mathbb{R}$. Часто интересно описывать в терминах операций в $\mathcal{H}$ некоторую логику подпространств из $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$. Такие системы (аналоги булёвых колец) мы также будем называть, для простоты, логиками, или более точно, квазилогиками в $\mathcal{H}$. Для их описания надо в определении логики заменить операцию "$\perp$" на $\ominus$ или на $\urcorner$, где

$$\mathcal{F} \urcorner \mathcal{G} := (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \cap \mathcal{G}^{\perp}.$$

ТЕОРЕМА 1. Существует биективное соответствие между алгебрами фон Неймана операторов, действующих на конечномерном пространстве $\mathcal{H}$, и $\mathbb{C}$ - квазилогиками его подпространств.

Таким образом, нами найдена [16] полная система логических операций в конечномерных квантовых логиках фон Неймана. Для бесконечномерных логик эта система несколько изменяется, так как понятие контакта теряет смысл.

Еще в 1934 г. Йорданом, фон Нейманом и Вигнером была выдвинута альтернативная теория [4], в которой вместо алгебр фон Неймана (содержащих нефизичные неэрмитовы операторы) рассматривались только йордановы алгебры эрмитовых операторов.

ТЕОРЕМА 2. Существует биективное соответствие между йордановыми алгебрами эрмитовых операторов, действующих на конечномерном пространстве $\mathcal{H}$, и $\mathbb{R}$ - квазилогиками его подпространств.

Тем самым, нами указана [17], [18], полная система логических операций в элементарных йордановых логиках.

Доказательство теоремы 2 основано на том, что во всякой неразложимой (в ортогональную сумму) $\mathbb{R}$ - логике можно ввести плюккеровы координаты со значениями в некоторой алгебре Клиффорда $\mathbb{H}$ (гиперкомплексных чисел). Причем эта алгебра должна быть телом, $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, $= \mathbb{C}$, $= \mathbb{Q}$, если размерность логики больше двух. Роль прямых в такой системе играют минимальные подпространства логики, которые все изоклинны друг другу. Идея введения координат не нова. Но раньше, [20], [11], их пытались вводить используя чисто проективные связи, возникающие в конфигурации теоремы Дезарга. Поэтому, результат [20] и [11], справедливый для любых решеток подпространств, оказывается для логик слишком слабым, да и действует лишь начиная с размерности четыре. В наших же исследованиях [17] и [18] мы существенно использовали евклидовость $\mathcal{H}$, в частности, учли связи, определяемые конфигурацией евклидовой теоремы о трех перпендикулярах. Из нашей классификации $\mathbb{R}$ - логик легко вытекает классификация [4] всех конечномерных специальных йордановых алгебр.

Пусть распределение вероятностей задано оператором P. Тогда вероятность события $\mathcal{F}$, или, как говорят физики, вероятность положительного исхода "да - нет" эксперимента $\mathcal{F}$ определяется формулами

$$P\{\mathcal{F}\} = tr\, PF = tr\, FP = tr\, FPF = P(F). \qquad (5)$$

Вероятность аддитивна в следующем смысле:

$$P\{\oplus_j \mathcal{F}^{(j)}\} = \sum_j P\{\mathcal{F}^{(j)}\}. \qquad (6)$$

Обратно, пусть на неразложимой $\mathbb{C}$ -логике задана неотрицательная функция P, удовлетворяющая (6) для любых ортогональных сумм. Если размерность логики не меньше трех, то согласно [20] мера P является операторно-заданной в смысле (5).

Для операторно-заданных мер имеют место и другие полезные тождества. Пусть $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ – два ортогональных изометричных подпространства, I_{12} и I_{21} – связывающие их изометрии. Ортопроекторы блочного строения

$$F(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi\, \mathbb{1}' & \cos\varphi \sin\varphi \cdot I_{21} & 0 \\ \cos\varphi \sin\varphi \cdot I_{12} & \sin^2\varphi\, \mathbb{1}'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' \oplus [\mathcal{H} \ominus (\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'')]$ описывают пучок попарно изоклинных подпространств $\mathcal{F}(\varphi)$. При любых φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 справедливо обобщенное соотношение Малюса

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & P\{\mathcal{F}(\varphi_1)\} \\ 1 & \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & P\{\mathcal{F}(\varphi_2)\} \\ 1 & \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & P\{\mathcal{F}(\varphi_3)\} \\ 1 & \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & P\{\mathcal{F}(\varphi_4)\} \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

хорошо известное в теории поляризованного света [21]. Если постулировать для меры P на $\mathbb{R}$ – логике, кроме (6) также и (7), то, по- видимому, такая мера должна быть операторно-заданной и для размерности два. Подобная характеризация была бы полезной для некоторых важных $\mathbb{R}$ – логик [23].

Обрабатывая материалы наблюдений статистик делает выводы о наблюдаемом явлении. При этом он может использовать как детерминированные правила вывода "Если наблюдено то-то, то вывод такой-то", так и рандомизированные: "Если наблюдено то-то, то с такой-то вероятностью делаем такой-то вывод". Внесение элемента случайности на стадии обработки не является принципиальным. Выводы, как правило, все равно случайны, поскольку случайны наблюденные исходы явления. Таким образом, статистик уподобляется статистическому каналу связи с различными входным и выходным алфавитами, или своего рода стохастическому фильтру, задача которого - отсеивать ненужную информацию. Формально статистическое решающее правило описывается переходной вероятностью $\Pi(\omega; d\varepsilon)$ из пространства Ω исходов в пространство выводов $\mathcal{E}$. Если распределение исходов описывается вероятностной мерой $P(d\omega)$, то при правиле Π распределением выводов будет

$$Q(\cdot) = \int_{\Omega} P(d\omega)\,\Pi(\omega; \cdot). \qquad (8)$$

Заметим, что с той же переходной вероятностью Π связано сопряженное линейное преобразование кольца всех измеримых функций на $\mathcal{E}$ в аналогичное на Ω, действующее по формуле

$$g(\omega) = \int_{\mathcal{E}} \Pi(\omega; d\varepsilon)\, f(\varepsilon). \qquad (9)$$

Такое преобразование сохраняет неотрицательность и переводит единицу в единицу. Эти два свойства являются характеристическими для переходной вероятности.

Как впервые было отмечено Ченцовым, статистические решающие правила образуют категорию марковских морфизмов с объектами - совокупность распределений вероятностей на измеримых пространствах Введение этой категории позволило формализовать основные понятия математической статистики [24]. Наша следующая цель - рассмотреть аналогичные более общие конструкции для совокупности некоммутативных распределений вероятностей.

Очевидно, квантовый канал связи есть линейное отображение соответствующего пространства ядерных операторов - мер (ограниченной вариации, принимающих значения обоих знаков) на алгебре $\mathfrak{A}_1$ входных наблюдаемых в аналогичное пространства на алгебре $\mathfrak{A}_2$ выходных наблюдаемых. В частности, информация из такого канала будет идти на "макроскопическом" языке, если алгебра $\mathfrak{A}_2$ коммутативна Канал определяет также сопряженное линейное отображение τ W^*-

- алгебры $\mathfrak{A}_2$ в W^*- алгебру $\mathfrak{A}_1$, сохраняющее неотрицательность, $*$ - самосопряженность, и переводящее единицу в единицу (однако, равенство $\tau(A^2) = [\tau(A)]^2$, вообще говоря, выполняться не обязано). Очевидно, все такие нормализованные положительные отображения W^*- алгебр образуют категорию. Ее морфизмами будут марковские конадоператоры. Сопряженную категорию образуют сопряженные объекты - совокупности мер, с дуальными морфизмами - марковскими надоператорами. О возможности физической реализации всех подобных каналов связи мы поговорим позже.

Теорию измерительных физических приборов можно трактовать сходным образом [25 - 27]. Только надо иметь в виду, что наблюдаемая микрочастица с положительной вероятностью может вообще не провзаимодействовать с прибором (особенно, если тот не имеет макроразмеров), или поглотиться промежуточным фильтром и т.п. Поэтому описывающее прибор линейное отображение (надоператор) должно переводить оператор распределения вероятностей в неотрицательный эрмитов оператор со следом, меньшим единицы. Сопряженное отображение (конадоператор) $\tau: \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$ будет субнормализованным, т.е. $\tau(\mathbb{1}_2) = A \leqslant \mathbb{1}_1$. Ясно, что такие морфизмы также образуют категорию - категорию субмарковских надоператоров.

Теория положительных отображений C^*- алгебр и W^*- алгебр, в том числе нормализованных отображений, интенсивно разрабатывается, см. обзор [28]. Однако, как показывает опыт теории классических марковских операторов, в категорном аспекте более естественно изучение марковских надоператоров, как морфизмов совокупностей мер.

В конкретной категории с системой морфизмов - отображений возникает важное понятие конгруэнтности (параметризованных) подмножеств объекта. Другими словами, возникает клейнова геометрия, только не с группой преобразований, как у самого Клейна, а с ка-

одинаково
тегорией отображений [24]. Именно, два параметризованных подмножества $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ и $\{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ мы называем конгруентными (эквивалентными относительно категории), если существуют два категорных морфизма Π_{12} и Π_{21}, такие что

$$P_\theta \Pi_{12} = Q_\theta \quad , \quad Q_\theta \Pi_{21} = P_\theta \quad , \quad \forall \theta \in \Theta . \qquad (10)$$

Случайные явления, описываемые семействами,конгруентными относительно категории марковских надоператоров, являются в каком-то смысле физически эквивалентными. В частности, повидимому хорошо известная слабая (она же "физическая") эквивалентность унитарных представлений совпадает с эквивалентностью относительно подкатегории вполне положительных (см. дальше) марковских конадоператоров.

Как вытекает из (10), если два семейства (Π_{12}, Π_{21}) – конгруентны, то P_θ и Q_θ суть находящиеся в соответствии (10) стационарные операторы марковских надоператоров $\Pi' = \Pi_{12} \circ \Pi_{21}$ и $\Pi'' = \Pi_{21} \circ \Pi_{12}$. Обратное заключение также справедливо. Поэтому, изучение структуры семейства стационарных операторов – один из существенных пунктов теории, см. [24].

Решим эту задачу для конечномерных алгебр,[29]. Здесь марковский надоператор задается стохастической надматрицей (четырехиндексной матрицей). Условимся у матрицы оператора – меры P писать индексы справа от коренной буквы – (p^i_j), у матрицы оператора – наблюдаемой – слева. Тогда стохастическая надматрица $({}^i_j\Pi^k_\ell)$ характеризуется свойствами

$$ {}^i_j\Pi^k_\ell = \overline{{}^j_i\Pi^\ell_k} \quad ; \qquad \sum_k {}^i_j\Pi^k_k = {}^i_j\delta \quad ; \qquad (11)$$

$$\sum_{i,j,k,\ell} \xi_i \bar{\xi}_j \, {}^i_j\Pi^k_\ell \, \eta_k \bar{\eta}_\ell \geq 0 \quad , \qquad \forall \vec{\xi}, \vec{\eta} .$$

В пространстве эрмитовых операторов – мер существует упорядочение $R \geq Q \iff (R\vec{\xi},\vec{\xi}) \geq (Q\vec{\xi},\vec{\xi}), \ \forall \vec{\xi}$.
Кроме того, существует однозначная операция $\natural : R \to R^{(+)}$ выделения положительной части.

ТЕОРЕМА 3. Если оператор - мера R является стационарным для марковского (или субмарковского) надоператора Π, то Π - стационарными будут также операторы $R^{(+)}$ и $R^{(-)} = R^{(+)} - R$.

Таким образом, наша задача свелась к описанию строения расщепов – линейных пространств операторов – мер, содержащих с каждой мерой ее положительную и отрицательную части.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ядерные эрмитовы операторы P и Q неотрицательны. Тогда

$$\varepsilon^{-1}\left[Q - \varepsilon P\right]^{(-)} \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} E_0 P E_c \quad , \qquad (12)$$

где E_c – ортопроектор на ядро Q, а сходимость рассматривается относительно следовой нормы.

Пусть $\mathcal{G}$ - носитель оператора Q, $G = 1 - E_c$ - соответствующий ортопроектор. Используя теорему 4 мы можем установить строение решетки носителей в конечномерном пространстве.

ТЕОРЕМА 5. Носители операторов расщепа образуют $\mathbb{R}$ - квазилогику. Поэтому любые два неортогональных минимальных носителя $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ обязательно изоклинны и несут только по одному распределению вероятностей из расщепа; сами несомые P и Q связаны условием когерентности:

$$\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})\,P = FQF \quad , \quad \rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})\,Q = GPG \, . \qquad (13)$$

Теорема 5 позволяет выписать явные формулы, задающие матрицы операторов расщепа в соответствующем каноническом базисе, в терминах кронекеровых произведений и представлений клиффордовых алгебр [19]. Причем любой расщеп является семейством стационарных оператор - мер для своего идемпотентного марковского надоператора. В [19] эти идемпотенты построены как усреднения действий унитарных и антиунитарных преобразований.

Пусть Π - марковский конадоператор, отображающий W^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$ в $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$ - некоторая другая алгебра. Определим оператор $\Pi \otimes \mathrm{Id}$, линейно отображающий $\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{B}$ и заданный правилом $A \otimes B \to (\Pi A) \otimes B$.
Он сохраняет эрмитовость и нормализованность. Но положительность при некоммутативных алгебрах он сохранять не обязан [30]. Поэтому приходится выделять более узкий класс вполне положительных отображений, сохраняющих положительность в произведении, и вполне положительных марковских надоператоров.

ЛЕММА. Стохастическая надматрица $({}_j^i\Pi_\ell^k)$ вполне положительна, если и только если

$$\sum_{i,k;j,\ell=1}^{n} \zeta_{ik}\bar{\zeta}_{j\ell}\; {}_j^i\Pi_\ell^k \geq 0\;, \quad \forall \vec{\zeta} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \qquad (14)$$

Классы вполне положительных марковских и субмарковских надоператоров достаточно широки; к ним, в частности, принадлежат усреднения действий унитарных (не антиунитарных!) преобразований. Нетрудно показать, что эти классы тоже образуют категории.

ТЕОРЕМА 6. Носители Π - стационарных операторов вполне положительного марковского надоператора образуют $\mathbb{C}$ - квазилогику. Расщеп всех Π - стационарных операторов конгруентен пространству всех оператор - мер на некоторой W^* - алгебре.

Более точно, для алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s)$ надоператор Π определяет разложение $\mathcal{H} = \overset{\vee}{\bigoplus}_{\beta=0} \mathcal{G}_\beta$, где каждое $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{H}_{\alpha(\beta)}$; $\mathcal{G}_0$ может быть нулевым, и при $\beta \geq 1$ всякое $\mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}'_\beta \otimes \mathcal{G}''_\beta$. На каждом пространстве $\mathcal{G}''_\beta$ надоператор Π.

задает свой фиксированный оператор распределения вероятностей Q_β. Общий вид Π – стационарного оператора распределения вероятностей P задается формулой

$$P = \sum_{\beta=1}^{\sigma} r_\beta \, R_\beta \otimes Q_\beta \ , \qquad (15)$$

где $(r_1, \ldots, r_\sigma)$ – любой нормированный набор неотрицательных весов, R_β – любой оператор распределения вероятностей на $\mathcal{L}(\mathcal{G}'_\beta)$.

Недавно доказанная нами теорема 6 имеет существенное значение: она показывает, что категория вполне положительных марковских операторов элементарна в смысле [24], так что в ней сохраняют смысл многие конструкции групповых клейновых геометрий. Поэтому, в теории рассматриваемых объектов, кроме привычных физикам групповых симметрий, существуют дополнительные категорные симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Zs.Ph.,37 (1926).
2. Neumann von J., Nachr. Akad. Wiss.,245 (1927).
3. Feynman R.P., Proc. 2 Berkeley Symp. Math. Statist., 1951.
4. Jordan P.,Neumann von J.,Wigner E., Ann. Math. 35 (1934).
5. Emch G.G., Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, N.Y.,1972.
6. Neumann von J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, 1932.
7. MacKey G.W., The Mathematcal Foundation of Quantum Mechanics, N.Y., 1963.
8. Wick G.C.,Wightman A.S.,Wigner E.P., Phys. Rev.,88 (1952).
9. Боголюбов Н.Н.,Логунов А.А.,Тодоров И.Т.,Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М.,1969.
10. Birkhoff G.,Neumann von J., Ann. Math., 37 (1936).
11. Varadarajan V.S., Geometry of Quantum Theory,I,Princeton,1968
12. Piron C.,Foundation of Quantum Physics, Reading, 1976.
13. Neumann von J.,Schatten R., Ann. Math.,47 (1946).

I4 Jordan C., Bull. Soc. Math. France, 3 (I874-75).

I5 Розенфельд Б.А.,Многомерные пространства, М., I966.

I6-I9 Морозова Е.А..Ченцов Н.Н., Препринты ИПМ №52 (I974); №II5, №I29 (I975); №I30 (I976).

20 Neumann von J., Continuous Geometry, Princeton, I960.

2I Gleason A.M., J. Rat. Mech. Anal., 6 (I957).

22 Shurkliff W.A., Polarized Light, Harvard, I962.

23 Shale D.,Stinespring W., Ann. Math., 80 (I964).

24 Ченцов Н.Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М. I972.

25 Haag R., Kastler D., J. Math. Phys., 5 (I964).

26 Mielnik B., Comm. Math. Phys., 9 (I968).

27 Davies E.B., Lewis J.T., Comm. Math. Phys., I7 (I970).

28 Størmer E., Lecture Notes in Physics, 29, Springer, (I974).

29 Morozova E.A., Čencov N.N., Lecture Notes In Mathematics, 505, Springer, (I976)

30 Stinespring W.F., Proc.Amer.Math.Soc., 6 (I955).

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

Элементы стохастической квантовой логики

Подписано к печати 30/УI-1977 г. МН 07440
Формат бумаги 60x84 I/I6. Объём I п.л. 0,75 уч.-изд.л.
Заказ 464 Тираж 350 экз.

Отпечатано на ротапринте ИМ СО АН СССР
630090 Новосибирск, 90