Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов

АЛГЕБРА ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СЧЕТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

(некоммутативная теория)

Препринт № 1 за 1981 г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

АЛГЕБРА ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СЧЁТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

(некоммутативная теория)

Москва - 1980

АЛГЕБРА ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СЧЕТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов (аннотация).

Под распределением вероятностей P в работе понимается оператор плотности, задающий нормальное состояние φ на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\varphi(b) = tr\,(Pb), \forall b \in \mathcal{L}$. Показывается, что для любого субмарковского отображения Π алгебры $\mathcal{L}$ в себя существует условное квазиожидание $M = M^2 = M\Pi$. Все M-инвариантные наблюдаемые $b \in \mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ являются Π-гармоническими и образуют ультраслабо замкнутую йорданову алгебру $\mathcal{J}$ эрмитовых операторов. Любое Π-стационарное нормальное состояние взаимно однозначно описывается формулой $\varphi(\cdot) = \rho(M(\cdot))$, где ρ – нормальное состояние на $\mathcal{J}$. Идемпотент M задается пределом:

$$M(\cdot) = uw - \lim \frac{1}{n}\{\Lambda(\cdot) + \ldots + \Lambda^n(\cdot)\},$$

где $\Lambda(\cdot) = e[\Pi(\cdot)]e$, e – единица алгебры $\mathcal{J}$. Когда Π вполне положительно, таково же и M, а $\mathcal{J}$ тогда будет самосопряженной частью некоторой алгебры фон Неймана. Утверждения остаются в силе, если распределения вероятностей предполагать заданными нормальными состояниями на подалгебре $\mathcal{O}\!\ell$ с условным квазиожиданием $\mathcal{L} \to \mathcal{O}\!\ell$.

E.A.Morozova, N.N.Cencov, ALGEBRA OF BOUNDED HARMONIC FUNCTIONS FOR DENUMERABLE MARKOV CHAIN(non-commutative theory) (Abstract)

In the paper the probability distribution is understood as a density operator P which gives a normal state φ on the algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ of all bounded linear operators on separable Hilbert space $\mathcal{H}$, $\varphi(b) = tr(Pb)$, $\forall\ b \in \mathcal{L}$. For any submarkov map Π of the algebra into itself, the existence of conditional expectation, i.e. of idempotent submarkov map $M = M^2 = M\Pi$ is shown. All M-invariant observables $Mb = b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ are Π-harmonic, and they form an ultraweak closed Jordan algebra $\mathcal{J}$ of Hermitean operators. Any Π-stationary normal state is one-to-one described by formula $\varphi(\cdot) = \rho(M(\cdot))$, where ρ is a normal state on $\mathcal{J}$. Idempotent M is given by the limit:

$$M(\cdot) = uw\text{-}\lim \frac{1}{n}\{\Lambda(\cdot) + \ldots + \Lambda^n(\cdot)\},$$

where $\Lambda(\cdot) = e[\Pi(\cdot)]\,e$, e being the unit of algebra $\mathcal{J}$. Provided Π is completely positive, M will be the same, and $\mathcal{J}$ will be the selfadjoint part of certain von Neumann algebra. The propositions will be valid if the probability distributions are supposed to be given by normal states on a subalgebra $\mathcal{O}\!\ell$ with conditional quasiexpectation $\mathcal{L} \to \mathcal{O}\!\ell$.

Структура семейства стационарных распределений вероятностей для классической цепи Маркова Π с конечным или счётным числом состояний была установлена Колмогоровым [I] и Дёблиным [2], Множество Ω всех состояний распадается на непересекающиеся классы $\Omega^{(k)}$ сообщающихся существенных состояний и множество $\Omega^{(0)}$ несущественных состояний. На каждом классе $\Omega^{(k)}$ либо сосредоточено ровно одно Π - стационарное распределение вероятностей, либо такого распределения нет; в последнем случае класс называется нулевым. Любое Π - стационарное распределение вероятностей P на Ω представимо в виде

$$P = \sum_i q_i P_i \quad , \quad \sum_i q_i = 1, \tag{0.1}$$

и обе суммы берутся только по положительным классам. Другими словами, любое распределение вероятностей на множестве всех положительных существенных классов задает по правилу (0.I) стационарное распределение вероятностей цепи.

В настоящей статье мы строим обобщение разложения (0.I) для аналога счётной цепи Маркова в некоммутативной теории вероятностей. Для аналога конечных цепей Маркова такое построение было проведено в нашем докладе [3] с уточнениями в препринте [4]. Следуя принятому теперь изложению [5] классической теории, мы исследуем более широкий класс субмарковских отображений. Доказательством результата § 3 мы обязаны обсуждениям с М.В.Келдышем. Содержание настоящей работы излагалось в докладе [6] и приглашенной лекции [7].

§ I. Случайные величины и распределения вероятностей.

В классической теории вероятностей Колмогорова [8] исходными понятиями являются измеримое пространство Ω элементарных исходов ω с σ-алгеброй S событий, и распределение вероятностей P - вероятностная мера на S. Затем вводится алгебра случайных величин, состоящая из классов совпадающих P - почти всюду S - измеримых функций. Наконец, с помощью конструкции Лебега - Радона вводится функционал математического ожидания случайной величины. В некоммутативной теории по ряду причин оказалось удобнее отправляться от алгебры наблюдаемых и функционала усреднения на ней.

Пусть $\mathcal{H}$ - абстрактное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел со скалярным произведением $\langle x|y\rangle$,

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Подсовокупность $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ всех ограниченных самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$ образует упорядоченную йорданову алгебру над полем $\mathbb{R}$ относительно симметризованного произведения $a \circ b = (ab + ba)/2$ и упорядочения: $a \geqslant 0 \Leftrightarrow a = c^2$. Последнее равносильно условию

$$\langle x|a|x\rangle \geqslant 0\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}. \qquad (\text{I.I})$$

В алгебре $\mathcal{L}^H$ имеет смысл также квадратичное (одновременное двустороннее) умножение

$$bab = 2\,(a\circ b)\circ b - a\circ(b\circ b) \qquad (\text{I.2})$$

сохраняющее неотрицательность. Симметризованное произведение неотрицательности сомножителей не наследует. Операторы $a \in \mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ будут называться наблюдаемыми. В [9] было показано, что физически осмысленной может оказаться лишь некоторая подалгебра алгебры $\mathcal{L}^H$. Мы обсудим соответствующую схему в § 9.

Ожидание (среднее значение) наблюдаемой – это $\mathbb{R}$ – линейный, неотрицательный, нормальный, нормированный функционал φ на $\mathcal{L}^H$, т.е.

$$
\begin{aligned}
&\text{а.}\quad \varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b)\,,\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,;\\
&\text{б.}\quad \varphi(a^2) \geqslant 0\,,\quad \forall a \in \mathcal{L}^H\,;\\
&\text{в.}\quad \{a_n \nearrow a\} \Rightarrow \{\varphi(a_n) \nearrow \varphi(a)\}\,;\\
&\text{г.}\quad \varphi(\mathbb{1}) = 1\,.
\end{aligned}
\qquad (\text{I.3})
$$

Ожидание φ единственным образом может быть продолжено до $\mathbb{C}$ – линейного функционала на всей алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\varphi(b) = \varphi[(b+b^*)/2 + i\varphi[(b-b^*)/2i]\,. \qquad (\text{I.4})$$

Как известно [10], при сепарабельном $\mathcal{H}$ всякий такой функционал φ задается неотрицательным ядерным самосопряженным оператором $P = P_\varphi$ со следом I:

$$\forall a, \quad \varphi(a) = tr\,(Pa). \qquad (\text{I.5})$$

Оператор P мы и будем называть распределением вероятностей (а также вероятностной мерой), или, следуя физикам, "состоянием".

Как и в классическом случае, вероятностные меры образуют замкнутое выпуклое множество $\mathbb{R}$ - линейного пространства всех зарядов - самосопряженных ядерных операторов (т.е. операторов Q с конечной следовой нормой $|Q|$). Таким образом, изоморфно пространству $\mathcal{L}^{H}_{*}(\mathcal{H})$ всех нормальных функционалов на $\mathcal{L}^{H}(\mathcal{H})$ предвойственному $\mathcal{L}^{H}(\mathcal{H})$

Ядерные операторы образуют модуль в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, причём [II]

$$|Qa| \leqslant |Q| \cdot \|a\|. \tag{I.6}$$

След ядерного оператора Q (при сепарабельном $\mathcal{H}$) равен сумме диагональных элементов его матрицы в любом ортонормированном базисе $\{y_k\}$

$$\operatorname{tr} Q = \sum q^k_k = \sum \langle y_k | Q | y_k \rangle. \tag{I.7}$$

Поэтому, смысл (I.5) некоммутативного интеграла может быть расшифрован как

$$\operatorname{tr} Qa = \sum \langle y_k | Qa | y_k \rangle, \tag{I.8}$$

где $\langle y_k | Qa | y_k \rangle$ - скалярное произведение вектора y_k на Qay_k (или Qy_k на ay_k , или aQy_k на y_k). В частности,

$$\operatorname{tr} Qa = \sum \varkappa_k \langle x_k | a | x_k \rangle, \tag{I.9}$$

где $\{x_k\}$ - собственный базис оператора Q , $\varkappa_k$ - его собственные числа (с учётом кратности), а следовая норма Q :

$$|Q| = \sum |\varkappa_k| < \infty .$$

Сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является в каком-то смысле обобщением классического счётного пространства элементарных исходов. Каждую (проходящую через $\mathbb{O}$) прямую ω мы можем считать элементарным исходом. Пусть теперь $\Omega = \{\omega_k\}$ - последовательность осей координат, отвечающая некоторому ортогональному базису $\{x_k\}$ пространства $\mathcal{H}$. Ядерный оператор P , задающий распределение вероятностей, описывается в этом базисе бесконечной матрицей (p^i_k) со следом $\sum p^k_k = 1$, причём диагональные элементы не зависят от выбора орта x_k на прямой ω_k . Рассмотрим алгебру $\mathcal{D}^{H}(\Omega)$ всех эрмитовых операторов a , приводящихся в базисе $\{x_k\}$ к диагональному виду. На $\mathcal{D}(\Omega)$

ожидание (I.3) сводится к

$$\operatorname{tr} Pa = \sum p_k^k a_k^k$$

где $a_k^k = \alpha_k$ – собственные числа оператора a. Таким образом, для подалгебры $\mathfrak{D}(\Omega)$ некоммутативная теория сводится к классической (на счётном пространстве элементарных исходов).

§ 2. $\mathcal{L}$ – модуль ядерных операторов.

Для самосопряженных ядерных операторов имеет смысл йорданово умножение на наблюдаемые и квадратичное умножение. По (I.6)

$$|P\circ a| \leq |P|\cdot\|a\|\,,\quad |bPb| \leq |P|\cdot\|b\|^2 \tag{2.1}$$

Квадратичное умножение особенно важно, так как при любом b сохраняется неотрицательность. При этом

$$\operatorname{tr}[(bPb)a] = \operatorname{tr}[P(bab)]\,;\ \operatorname{tr}[P(a\circ b)] = \operatorname{tr}[(P\circ a)b]. \tag{2.2}$$

С каждым распределением вероятностей P и с каждым зарядом Q при сепарабельном $\mathcal{H}$ связывается носитель – линейное подпространство, натянутое не его собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям. Ортогональное дополнение будет нуль – пространством оператора P , соотв.оператора Q . При этом носитель заряда $Q = \sum \varkappa_j e_j$ разлагается в ортогональную сумму носителей его положительной и отрицательной частей:

$$Q^+ = \sum_{j:\varkappa_j>0} \varkappa_j e_j\,,\quad Q^- = -\sum_{j:\varkappa_j<0} \varkappa_j e_j\quad . \tag{2.3}$$

Таким образом, $|Q| = \operatorname{tr} Q^+ + \operatorname{tr} Q^-$.

<u>Определение I.</u> Неотрицательный заряд (мера) Q доминирует заряд Q_1 , если его носитель $\mathcal{E}$ содержит носитель $\mathcal{E}_1$, т.е. его нуль – пространство $\mathcal{E}^\perp$ содержится в нуль – пространстве $\mathcal{E}_1^\perp$:

$$\forall x:\ \langle x|Q|x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x|Q_1|x\rangle = 0.$$

Это определение соответствует классическому определению теории меры.

<u>Лемма 2.I.</u> В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$

всякое непустое замкнутое выпуклое семейство распределений вероятностей содержит хотя бы одно доминирующее, и все доминирующие меры имеют общий носитель.

Это вытекает из следующего хорошо известного предложения: в сепарабельном гильбертовом пространстве пересечение любого количества подпространств совпадает с пересечением некоторого счётного числа из них.

Определение 2. Наблюдаемая a называется P - эквивалентной нулю, если

$$a = e^{\perp} a e^{\perp} \Leftrightarrow ae = 0 = ea, \tag{2.4}$$

где $e^{\perp} = \mathbb{1} - e$ - ортопроектор на нуль - пространство $\mathcal{E}^{\perp}$ оператора P.

Лемма 2.2. При $a \geqslant 0$ условие (2.4) равносильно условию $\mathrm{tr}\, a = 0$.

Доказательство. По определению носителя, $P = ePe$. Поэтому, $\mathrm{tr}\, Pa = \mathrm{tr}\,(ePee^{\perp}ae^{\perp}) = \mathrm{tr}\, 0$.
Обратно, пусть $a \geqslant 0$, тогда $a = c^2$. Если $0 = \mathrm{tr}\, Pa = \sum \pi_k \|cx_k\|^2$, то $c(\mathcal{E}) = 0$ и $ae(\mathcal{H}) = 0$, т.е. $ae = 0$.
Тогда $0 = (ae)^* = e^* a^* = ea$; $ae^{\perp} = e^{\perp} a = a$.
Умножив Пирсово разложение

$$a = eae + (eae^{\perp} + e^{\perp}ae) + e^{\perp}ae^{\perp}$$

сперва слева на $e^{\perp}$, а затем справа; получаем (2.4) полностью.

Наблюдаемые, P - эквивалентные нулю, образуют алгебру над полем $\mathbb{R}$. Однако, в отличие от классического случая, они не образуют идеала. Поэтому, в некоммутативной теории невозможно ограничиться рассмотрением только классов P - эквивалентных величин: умножение на наблюдаемые приводит, вообще говоря, к расщеплению этих классов.

Докажем несколько основных неравенств для следовых норм. Обращаем внимание, что в некоммутативной теории из $A \geqslant B$ не следует $A^+ \geqslant B^+$, равно как из $A \geqslant B \geqslant 0$ не следует $A^2 \geqslant B^2$.

Предложение 2.3. Пусть $A \geqslant B$ - эрмитовы ядерные операторы, $\{\alpha_k\}_1^M$ и $\{\beta_k\}_1^N$ - последовательности всех их положительных собственных чисел (если такие есть), занумерованные с учётом кратности в порядке убывания, $N \leq \infty$. Тогда

$$\alpha_k \geqslant \beta_k, \ \forall k \leq N; \quad |A^+| \geqslant |B^+|; \tag{2.5}$$

причём равенство норм влечет $A^+ = B^+$ [12] .

Мы отсылаем за доказательством этого предложения Фань Цзы к цитированной литературе.

Лемма 2.4. Если A и B – эрмитовы ядерные операторы, то

$$|(A+B)^+| \leq |A^+ + B^+| = |A^+| + |B^+|. \tag{2.6}$$

Неравенство для норм вытекает из неравенств $A \leq A^+$, $B \leq B^+$, $A+B \leq A^+ + B^+$ и неравенства (2.5). Равенство норм вытекает из неотрицательности диагональных элементов у матрицы неотрицательного ядерного оператора.

Лемма 2.5. Пусть ядерный оператор $A \geqslant \mathbb{O}$, и пусть последовательность ортопроекторов $e_n \downarrow \mathbb{O}$ монотонно. Тогда все $e_n A e_n \geqslant \mathbb{O}$ и $\operatorname{tr}(e_n A e_n) = |e_n A e_n| \downarrow 0$ монотонно.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, поскольку

$$\langle x | g A g | x \rangle = \langle xg | A | gx \rangle = \langle y | A | y \rangle \geqslant 0.$$

Второе фактически состоит в том, что из сильной сходимости проекторов вытекает ультраслабая сходимость. Построим в каждом подпространстве $\mathcal{E}_n = (e_n - e_{n-1})\mathcal{H}$ ортонормированный базис. Затем рассмотрим диагональные элементы матрицы оператора A в объединенном базисе и подсчитаем следы.

Лемма 2.6. Пусть ядерный оператор $A \geqslant \mathbb{O}$, e_1 и e_2 – дополнительные ортопроекторы, $e_1 + e_2 = \mathbb{1}$. Тогда операторы

$e_i A e_i \geqslant \mathbb{O}$ и

$$|e_1 A e_1| + |e_2 A e_2| = |A| = \operatorname{tr} A, \quad |e_i A e_i| \leq |A|; \tag{2.7}$$

$$|(e_1 A e_2 + e_2 A e_1)^+|^2 = |(e_1 A e_2 + e_2 A e_1)^-|^2 \leq |e_1 A e_1| \cdot |e_2 A e_2|. \tag{2.8}$$

Доказательство. Обозначим $e_i(\mathcal{H}) = \mathcal{E}_i$, $\mathcal{H} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, и выберем базисы в $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Тогда матрицы для $e_1 A e_1$ и $e_2 A e_2$ будут диагональными блоками матрицы для A , с неотрицательными диагональными элементами, что влечёт (2.7). Отсюда

$$\mathrm{tr}(e_1Ae_2+e_2Ae_1)=\mathrm{tr}A-\mathrm{tr}(e_1Ae_1)-\mathrm{tr}(e_2Ae_2)=0,$$

что устанавливает равенство в (2.8). При любом вещественном λ оператор

$$e_1Ae_1+\lambda(e_1Ae_2+e_2Ae_1)+\lambda^2e_2Ae_2=(e_1+\lambda e_2)A(e_1+\lambda e_2)\geqslant 0.$$

Обозначим через f_+ носитель оператора $(e_1Ae_2+e_2Ae_1)^+$, ортогональный носителю f_-. Умножение на $f_\pm$ одновременно слева и справа сохраняет неотрицательность, так что

$$f_\pm e_1Ae_1f_\pm+\lambda(e_1Ae_2+e_2Ae_1)^\pm+\lambda^2f_\pm e_2Ae_2f_\pm\geqslant 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

и аналогичное неравенство справедливо для следов. Значит,

$$[\mathrm{tr}(e_1Ae_2+e_2Ae_1)^\pm]^2\leqslant 4|f_\pm e_1Ae_1f_\pm|\cdot|f_\pm e_2Ae_2f_\pm|,$$

откуда (2.8) вытекает из неравенства $|f_+Bf_+|+|f_-Bf_-|=|B|$, следующего из (2.7).

§ 3. Отрицательная часть возмущения неотрицательного оператора.

Теорема I. Пусть ядерные операторы G и F самосопряжены и неотрицательны, и пусть e_0 – ортопроектор на нуль – пространство $\mathcal{E}_0$ оператора G. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}[G-\varepsilon F]^-=\lim_{t\to\infty}[F-tG]^+=e_0Fe_0, \tag{3.1}$$

где сходимость рассматривается в следовой норме. Носителем оператора e_0Fe_0 является подпространство $(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\cap\mathcal{E}_2^\perp$, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – носители F и G.

Доказательство. Предположим сперва, что оператор G вырожден, и $2\alpha=\varkappa_m$ – его минимальное положительное собственное число. По известной теореме о сравнении спектров [12], собственные значения оператора $G-\varepsilon F$ лежат в отрезках $[-\varepsilon\|F\|,0]$, $[\varkappa_k-\varepsilon\|F\|,\varkappa_k]$, $k=1,\dots,m$, вещественной оси, где операторная норма $\|F\|\leqslant\mathrm{tr}F$. Следовательно, при $\varepsilon<\alpha/\mathrm{tr}F$ внутрь окружности $\Gamma=\{\zeta:|\zeta|=\alpha\}$ попадают только неположительные точки спектра $G-\varepsilon F$. Поэтому

$$-(G-\varepsilon F)^{-} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \zeta(\zeta 1\!\!1 - G + \varepsilon F)^{-1} d\zeta\,, \tag{3.2}$$

см. [13]. Разложим в (3.2) резольвенту по параметру ε :

$$\zeta(\zeta 1\!\!1 - G+\varepsilon F)^{-1} = \zeta(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1} - \varepsilon\zeta(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1}F(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1} + \zeta R, \tag{3.3}$$

$$R(\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^2[1\!\!1 + (\zeta 1\!\!1 - G)^{-1}\varepsilon F]^{-1}(\zeta 1\!\!1 - G)F(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1}F(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1},$$

и воспользуемся спектральным представлением

$$(\zeta 1\!\!1 - G)^{-1} = \zeta^{-1}e_0 + (\zeta - \varkappa_1)^{-1}e_1 + \ldots + (\zeta - \varkappa_m)^{-1}e_m\,.$$

Легко видеть, что нулевой член в правой части (3.3) голоморфен внутри Γ , а в первом неголоморфно единственное слагаемое $\varepsilon\zeta^{-1}e_0Fe_0$, интеграл от которого и дает e_0Fe_0 . При $\varepsilon \le \alpha/2\,\mathrm{tr}\,F$ для остаточного члена справедлива оценка $|R(\zeta,\varepsilon)| \le 4\,(\mathrm{tr}F)^2/\alpha^2$, что дает

$$|[G-\varepsilon F]^{-} - \varepsilon e_0Fe_0| \le \varepsilon^2(\mathrm{tr}F)^2/\alpha \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\{E_\lambda\}$ – непрерывное справа спектральное семейство неотрицательного эрмитова ядерного оператора G . Неотрицательный ядерный оператор

$$G_\mu = (1\!\!1 - E_\mu)G(1\!\!1 - E_\mu) = \int\limits_\mu \lambda\, dE_\lambda\ ;\ \mu > 0,$$

вырожден. Ортопроектором на его нуль – пространство будет $E_\mu = e_0 + (E_\mu - e_0)$, а его наименьшее положительное собственное число $\varkappa(\mu) > \mu$. Рассмотрим также оператор $F_\mu = (1\!\!1 - E_\mu + e_0)F(1\!\!1 - E_\mu + e_0)$. Так как $e_\mu = (E_\mu - e_0)\downarrow 0$ при $\mu\downarrow 0$, то $e_\mu F e_\mu \downarrow 0$ и $|F - F_\mu| \to 0$ по леммам 2.4 – 2.6. По доказанному выше

$$(F_\mu - \varepsilon^{-1}G_\mu)^{+} \to E_\mu F_\mu E_\mu = e_0Fe_0\,,$$

причём при $\varepsilon \le \mu\,(4\,\mathrm{tr}F)^{-1}$ по (3.4)

$$|(F_\mu - \varepsilon^{-1}G)^{+} - e_0Fe_0| \le 2\varepsilon(\mathrm{tr}F)^2\mu^{-1} = \rho_1(\varepsilon,\mu), \tag{3.5}$$

Обозначим для краткости $H_\varepsilon = F - \varepsilon^{-1}G$ и сравним

$H_\varepsilon = F_\mu - \varepsilon^{-1}G_\mu + (e_\mu F e_\mu^\perp + e_\mu^\perp F e_\mu) + e_\mu F e_\mu - \varepsilon^{-1} e_\mu G e_\mu$.

По лемме 2.4 $|H_\varepsilon^+| \le |(F_\mu - \varepsilon^{-1}G_\mu)^+| + |(e_\mu F e_\mu^\perp - e_\mu^\perp F e_\mu)^+| + |e_\mu F e_\mu|$.

Так как $e_\mu F e_\mu \downarrow 0$ при $\mu \downarrow 0$, то, оценивая второе слагаемое по лемме 2.5, как выше, через третье, получаем

$$|H_\varepsilon^+| \le |(F_\mu - \varepsilon^{-1}G_\mu)^+| + \rho_2(\mu)\,;\quad \rho_2(\mu) \to 0 \tag{3.6}$$

где $\rho_2(\mu) \le |e_\mu F e_\mu| + \sqrt{|F|\,|e_\mu F e_\mu|}$.

Из очевидного неравенства $H_\varepsilon^+ = (F - \varepsilon^{-1}G)^+ \geqslant F - \varepsilon^{-1}G \geqslant F$ по лемме 2.6 следует неравенство $e_0 H_\varepsilon^+ e_0 \geqslant e_0 F e_0 \geqslant 0$, и по (2.7) и(2.8) два соотношения для следов:

$$|e_0 H_\varepsilon^+ e_0| \geqslant |e_0 F e_0|, \tag{3.7}$$

$$|e_0 H_\varepsilon^+ e_0 - e_0 F e_0| = |e_0 H_\varepsilon^+ e_0| - |e_0 F e_0|. \tag{3.8}$$

Последовательно сравнивая (3.7), (3.6) и (3.5) приходим к

$$|e_0 F e_0| \le |e_0 H_\varepsilon^+ e_0| \le |H_\varepsilon^+| \le |e_0 F e_0| + \rho_1 + \rho_2\,, \tag{3.9}$$

откуда вытекает, что

$$|e_0 H_\varepsilon^+ e_0 - e_0 F e_0| \le \rho_1(\varepsilon,\mu) + \rho_2(\mu). \tag{3.10}$$

Сравним теперь $H_\varepsilon^+ = e_0 H_\varepsilon^+ e_0 + e_0 H_\varepsilon^+ e_0^\perp + e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0 + e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0^\perp$.

Отсюда получаем два соотношения для норм:

$$|H_\varepsilon^+| = |e_0 H_\varepsilon^+ e_0| + |e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0^\perp|,$$

$$|H_\varepsilon^+ - e_0 H_\varepsilon^+ e_0| \le |e_0 H_\varepsilon^+ e_0^\perp + e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0| + |e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0^\perp|.$$

Из первого по неравенству (3.9) находим оценку

$$|e_0^\perp H_\varepsilon^+ e_0^\perp| \le \rho_1(\varepsilon,\mu) + \rho_2(\mu),$$

а по (2.8) из второго - оценку

$$|H_\varepsilon^+ - e_0 H_\varepsilon^+ e_0| \le 2\sqrt{(\rho_1+\rho_2)\,\mathrm{tr}F} + \rho_1 + \rho_2\,,$$

что вместе с (3.10) дает окончательно

$$|(F - \varepsilon^{-1}G)^+ - e_0 F e_0| \le 2\sqrt{(\rho_1+\rho_2)\,\mathrm{tr}F} + 2(\rho_1+\rho_2).$$

При выборе $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, см. (3.5) и (3.6), что и требовалось показать. Чтобы доказать, последнее утверждение, можно предположить, что F доминирует G. В противном случае заменим F на $F+G$, отчего предел (3.1) не изменится. Тогда $e_2 \le e_1$, где e_1 - ортопроектор на носитель $\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_2$. Отсюда $e_0 F e_0 = (1 - e_2)(e_1 F e_1)(1 - e_2) = (e_1 - e_2) F (e_1 - e_2)$,

$\langle x|(e_1 - e_2) F (e_1 - e_2)|x\rangle = \langle x(e_1 - e_2)|F|(e_1 - e_2)x\rangle$.

Если вектор $(e_1 - e_2)x \ne 0$, то он лежит в $\mathcal{E}_1$, и потому скалярное произведение положительно. Оно равно нулю лишь при $(e_1 - e_2)x = 0$ т.е. при $x \in (\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_2)^\perp$, что и требовалось доказать.

§ 4. Субмарковское отображение и его стационарные распределения вероятностей.

Определение 3. Говорят, что эндоморфизм П линейного упорядоченного пространства $\mathcal{L}^{H}_{he}(\mathcal{H})$ является марковским отображением, если он $\mathbb{R}$ - линеен, отрицателен, нормален и нормирован, т.е.

$$
\begin{aligned}
&\text{а. } \Pi(\lambda a+\mu b)=\lambda\Pi a+\mu\Pi b\\
&\text{б. } a\geqslant 0 \Rightarrow \Pi a\geqslant 0.\\
&\text{в. } \{a_n\nearrow a\}=\{\Pi a_n\nearrow a\}\\
&\text{г. } \Pi\mathbb{1}=\mathbb{1}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Отображения П удовлетворяющие ослабленному условию

$$\text{г. } \Pi\mathbb{1}\leqslant\mathbb{1},$$

называют субмарковскими.

(Суб)Марковское отображение П однозначно продолжается до $\mathbb{C}$ - линейного эндоморфизма $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; сохраняющего сопряженность:

$$\Pi b=\Pi\left(\frac{b+b^*}{2}\right)+i\Pi\left(\frac{b-b^*}{2i}\right) \tag{4.2}$$

со свойством $\Pi b^*=(\Pi b)^*$. На зарядах, распределениях вероятностей и ожиданиях П действует двойственным образом:

$$\forall a,\ (\varphi\Pi)(a)\overset{def}{=}\varphi(\Pi a);\ tr[(P\Pi)a]\overset{def}{=}tr[P(\Pi a)]. \tag{4.3}$$

Мы опускаем здесь очевидную проверку неотрицательности и (Суб) нормированности заряда $P\Pi$.

Совершенно аналогично может быть определено (суб)марковское отображение $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ или в какую-либо иную алгебру. Примером такого гомоморфизма может служить

$$\Pi:\ a\to\varphi(a)\mathbb{1},\ \forall a\in\mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{4.4}$$

где φ - любое фиксированное ожидание на $\mathcal{L}^{H}(\mathcal{H})$.

Рассмотрим наряду с алгеброй $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ матричную алгебру

(a_{ij}) квадратных матриц n - ого порядка с элементами из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. (Суб)Марковское отображение Π индуцирует на $\mathcal{L}_n$ линейное отображение Π_n по правилу $\Pi_n(a_{ij})_{i,j}^n = (\Pi a_{ij})_{i,j=1}^n$

Простые примеры показывают, что Π_n не обязано сохранять неотрицательность эрмитовых матриц, [14], [15]. Отображения Π, для которых все индуцированные Π_n, $n=1,2,\ldots$, оказываются неотрицательными, называются [14] вполне положительными. Они имеют специальную структуру и ряд дополнительных свойств. Обычно требование вполне положительности включается в определение марковости. Однако, в рассматриваемом нами вопросе оказалось более естественным построить сначала теорию для общего случая.

Определение 4. Распределение вероятностей P или заряд Q называется Π - стационарным, если

$$P\Pi = P \qquad \text{, соотв. } Q\Pi = Q. \tag{4.5}$$

Лемма 4.1. Множество $\mathfrak{S}_\Pi$ всех Π - стационарных распределений вероятностей является выпуклым слабо замкнутым подмножеством слабо замкнутого линейного пространства всех стационарных зарядов (или оба эти множества пусты).

Для доказательства достаточно заметить, что Субмарковское отображение Π переводит любую слабо сходящуюся последовательность $P_n \Rightarrow P$, в смысле $\operatorname{tr} P_n a \to \operatorname{tr} P a$, $\forall a \in \mathcal{L}^H$; также в слабо сходящуюся.

Лемма 4.2. Если заряд Q стационарен, то стационарны порознь его положительная и отрицательная части.

Пусть $\{x_k\}$ - собственный базис оператора Q, $\sum \varkappa_k e_k$ - его спектральное разложение. Разложим $\sum e_i \alpha_j^i e_j = Q^+\Pi$,

$\sum e_i \beta_j^i e_j = Q^-\Pi$, где все $\alpha_i^i \geq 0$, $\beta_i^i \geq 0$.

$$|Q| = |Q\Pi| = \sum |\alpha_j^j - \beta_j^j| \leq \sum |\alpha_j^j| + \sum |\beta_j^j| = |Q|$$

Отсюда, множества $I^+ = \{j : \alpha_j^j > 0\}$, $I^- = \{j : \beta_j^j > 0\}$ не пересекаются, и, по неотрицательности (α_j^i) и (β_j^i), $\alpha_j^i = 0$ при $i \in I^-$ или $j \in I^-$, $\beta_j^i = 0$ при $i \in I^+$ или $j \in I^+$. Так как $(\alpha_j^i - \beta_j^i) = (\varkappa_i \delta_j^i)$, то $\alpha_j^i = \varkappa_i \delta_j^i$ при $i,j \in I^+$, $\beta_j^i = -\varkappa_i \delta_j^i$ при $i,j \in I^-$.

§ 5. Субмарковские отображения Пирсовых разложений.

Перечислим сперва некоторые следствия, вытекающие из неотрицательности наблюдаемых.

Предложение 5.1. а. Если $a \geqslant 0$ и $a \leqslant 0$, то $a = 0$

б. Если $\lambda^2 a + \lambda b \geqslant 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, то $b = 0$, $a \geqslant 0$.

в. Если $\lambda^2 g \geqslant \lambda^2 a + \lambda b + c \geqslant 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, то $b = c = 0, g \geqslant a \geqslant 0$.

г. Если $a \geqslant 0$, то $f a f \geqslant 0$, $\forall f \in \mathcal{L}^H$.

Лемма 5.2. Пусть для самосопряженного идемпотента e_3 выполнено любое из равносильных соотношений

$$e_3(\Pi e_3)e_3\ ,\quad (\Pi e_3)e_3 = e_3. \tag{5.1}$$

Тогда, если обозначить $e_3^\perp = 1\!\!1 - e_3$, то

$$1\!\!1 - \Pi 1\!\!1 = e_3^\perp(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3^\perp\ ,\quad \Pi e_3^\perp = e_3^\perp(\Pi e_3^\perp)e_3^\perp. \tag{5.2}$$

Доказательство. Инволюция * переводит любое из соотношений (5.1) в другое, так что они действительно равносильны. Поскольку $1\!\!1 - e_3 = e_3^\perp \geqslant 0$, то $\Pi e_3^\perp \geqslant 0$ и

$$0 \leqslant e_3[\Pi(1\!\!1 - e_3)]e_3 = e_3 - e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 - [e_3(\Pi e_3)]e_3 =$$
$$= e_3 - e_3 - e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 = -e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 \leqslant 0.$$

Отсюда, в силу условия $1\!\!1 \geqslant \Pi 1\!\!1$ и предложений 5.1 а. и 5.1 г.

$$e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 = 0,\quad e_3(\Pi e_3^\perp)e_3 = 0. \tag{5.3}$$

Введем теперь $f_\lambda = e_3 + \lambda e_3^\perp$, и рассмотрим неотрицательные квадратичные пучки $p_\lambda = f_\lambda(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)f_\lambda$ и $q_\lambda = f_\lambda(\Pi e_3^\perp)f_\lambda$. Ввиду (5.3)

$$p_\lambda = \lambda^2 e_3^\perp(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3^\perp + \lambda[e_3^\perp(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 + e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3^\perp] \geqslant 0$$
$$q_\lambda = \lambda^2 e_3^\perp(\Pi e_3^\perp)e_3^\perp + \lambda[e_3^\perp(\Pi e_3^\perp)e_3 + e_3(\Pi e_3^\perp)e_3^\perp] \geqslant 0.$$

Следовательно, по предложению 5.1 б,

$$e_3^\perp(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3 + e_3(1\!\!1 - \Pi 1\!\!1)e_3^\perp = 0,\ e_3^\perp(\Pi e_3^\perp)e_3 + e_3(\Pi e_3^\perp)e_3^\perp = 0, \tag{5.4}$$

что вместе с (5.3) даст (5.2), поскольку $e_3 + e_3^\perp = 1\!\!1$

Теорема 2. Пусть ортогональные идемпотенты e_1 и e_2 и их идемпотентная сумма e таковы, что для каждого из них выполнены условия (5.1). Тогда, если обозначить $e_0 = 1\!\!1 - e$, $\mathcal{L}_{ij}^H = e_i \mathcal{L}^H e_j + e_j \mathcal{L}^H e_i$, $i,j = 0,1,2$, то

$$\text{а. } \Pi\mathcal{L}_{00}^H \subseteq \mathcal{L}_{00}^H,\qquad \text{б. } \Pi\mathcal{L}_{10}^H \subseteq \mathcal{L}_{10}^H + \mathcal{L}_{00}^H, \tag{5.5}$$
$$\text{в. } \Pi\mathcal{L}_{11}^H \subseteq \mathcal{L}_{11}^H + \mathcal{L}_{10}^H + \mathcal{L}_{00}^H,\qquad \text{г. } \Pi\mathcal{L}_{12}^H \subseteq \mathcal{L}_{12}^H + \mathcal{L}_{20}^H + \mathcal{L}_{00}^H.$$

Доказательство. Пусть $e_3 = e_1, e_2, e$. Из (5.2) вытекает, что $\Pi(1\!\!1 - e_3) \in (1\!\!1 - e_3)\mathcal{L}^H(1\!\!1 - e_3)$. Возьмем теперь элемент $h \in (1\!\!1 - e_3)\mathcal{L}^H(1\!\!1 - e_3)$, удовлетворяющий неравенствам $0 \leqslant h \leqslant 1\!\!1 - e_3$ и, следовательно, $0 \leqslant \Pi h \leqslant \Pi(1\!\!1 - e_3)$,

$$0 \le p_h(\lambda) = f_\lambda(\Pi h) f_\lambda \le f_\lambda(\Pi e_3^\perp) f_\lambda = q_\lambda = \lambda^2 \Pi e_3^\perp,$$

где $f_\lambda = e_3 + \lambda e_3^\perp$. По предложению 5.I в, свободный и линейный члены $p_h(\lambda)$ тождественно равны нулю. Так как множество $e_3^\perp \mathcal{B}^H e_3^\perp$ линейно и замкнуто относительно операции выделения положительной части, то этот вывод справедлив для любых $h \in e_3^\perp \mathcal{B}^H e_3^\perp$, т.е.

$$e_3[\Pi(e_3^\perp \mathcal{B}^H e_3^\perp)]e_3 = 0, \quad e_3[\Pi(e_3^\perp \mathcal{B}^H e_3^\perp)]e_3^\perp + e_3[\Pi(e_3^\perp \mathcal{B}^H e_3^\perp)]e_3 = 0.$$

При $e_3 = e$ эти равенства дают включение а. При $e_3 = e_2$, $e_3^\perp = e_1 + e_0$ имеем $e_2^\perp \mathcal{B}^H e_2^\perp = \mathcal{B}^H_{11} + \mathcal{B}^H_{10} + \mathcal{B}^H_{00}$.

Следовательно,

$$e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{11})e_2 = 0, \quad e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_2 = 0, \quad e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{00})e_2 = 0, \tag{5.6}$$

и, далее,

$$e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{11})e_1 + e_1(\Pi \mathcal{B}^H_{11})e_2 = 0, \quad e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{11})e_0 + e_0(\Pi \mathcal{B}^H_{11})e_2 = 0, \tag{5.7}$$

$$e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_1 + e_1(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_2 = 0, \quad e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_0 + e_0(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_2 = 0, \tag{5.8}$$

$$e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{00})e_1 + e_1(\Pi \mathcal{B}^H_{00})e_2 = 0, \quad e_2(\Pi \mathcal{B}^H_{00})e_0 + e_0(\Pi \mathcal{B}^H_{00})e_2 = 0.$$

Последняя строчка уже встречалась, первое из равенств (5.6) и строчка (5.7) дают включение б.

Пусть теперь $0 \le h \le e_i + e_j$, $i \ne j$, $i,j = 0,1,2$.

Образуем неотрицательные квадратичные семейства элементов

$$0 \le h_\lambda = (\lambda e_i + e_j) h (\lambda e_i + e_j) \le \lambda^2 e_i + e_j; \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} 0 \le q_h(\lambda) &= e_k(\Pi h_\lambda)e_k = \lambda^2 e_k[\Pi(e_i h e_i)]e_k + \\ &+ \lambda e_k[\Pi(e_i h e_j + e_j h e_i)]e_k + e_k[\Pi(e_i h e_i)]e_k \le \\ &\le \lambda^2 e_k(\Pi e_i)e_k + e_k(\Pi e_j)e_k. \end{aligned}$$

Положим $j = 0$, $k = 1$, $i \ne 0$. Из уже доказанного включения а. следует, что $e_1(\Pi e_0)e_1 = 0$, т.е. оценка сверху в (5.9) содержит только квадратичный член, и, в силу предложения 5.I в,

$e_1[\Pi(e_i h e_i)]e_1 = 0$, $e_1[\Pi(e_i h e_0 + e_0 h e_i)]e_1 = 0$. Распространяя, как выше, это заключение на все $h \in (e_i + e_0)\mathcal{B}^H(e_i + e_0)$, убеждаемся, что

$$e_1(\Pi \mathcal{B}^H_{10})e_1 = 0; \quad e_1(\Pi \mathcal{B}^H_{20})e_1 = 0. \tag{5.10}$$

Первое равенство (5.10) вместе со вторым равенством (5.6) и равенствами (5.8) дает включение б.

Наконец, положим в (5.9) $j = 1$, $k = 2$. Тогда по первому включению (5.6) свободный член в оценке сверху опять равен нулю. Рассуждая, как выше, убеждаемся, что при $i = 2$

$$e_2(\Pi\mathcal{L}^{H}_{12})e_2=\mathbb{O}\ ;\quad e_1(\Pi\mathcal{L}^{H}_{12})e_1=\mathbb{O}, \tag{5.11}$$

где второе равенство написано по симметрии индексов 1 и 2, позволившей в формулировке (5.5) теоремы не дописать аналогов включений б. и в. с заменой 1 на 2 и обратно. Равенства (5.11) дают последнее включение г.

§ 6. Гармонические и инвариантные наблюдаемые цепи Маркова.

Определение 5. Наблюдаемая f является инвариантной относительно субмарковского отображения Π, если

$$f=\Pi f. \tag{6.1}$$

Обобщая, назовем наблюдаемую f - гармонической, если

$$fe=ef=(\Pi f)e=e(\Pi f), \tag{6.2}$$

где e - ортопроектор на общий носитель $\mathcal{E}$ доминирующих Π-стационарных распределений вероятностей.

Тривиальной Π - гармонической наблюдаемой цепи Маркова является $\mathbb{1}$ - единица алгебры $\mathcal{L}$, поскольку в силу (4.1 г) единица является Π - инвариантом, а из (6.1) следует (6.2). В субмарковском случае это также справедливо в силу леммы 6.4. Домножение на ортопроектор e усекает цепь Маркова, отбраковывая все несущественные и нулевые состояния, см. ниже § 7.

Лемма 6.1. Π - гармонические наблюдаемые образуют ультраслабо замкнутое линейное пространство $\mathcal{J}=\mathcal{J}_\Pi$ над полем $\mathbb{R}$.

Утверждение очевидно, так как (6.2) линейно по f и выдерживает монотонный переход по f.

Лемма 6.2. Для любого Π - стационарного распределения вероятностей P_3 ортопроектор на его носитель удовлетворяет равенствам (5.1):

$$e_3(\Pi e_3)=e_3,\quad (\Pi e_3)e_3=e_3.$$

Доказательство. Ортопроектор $e_3^\perp=\mathbb{1}-e_1\geqslant\mathbb{O}$, откуда $\Pi e_3^\perp\geqslant\mathbb{O}$. По стационарности P

$$tr[P_3(\Pi e_3^\perp)]=tr[(P_3\Pi)e_3^\perp]=tr[(P_3e_3^\perp)]=tr[e_3P_3e_3e_3^\perp]=tr\,\mathbb{O}=0.$$

Отсюда, по лемме 2.2, $e_3(\Pi e_3^{\perp}) = 0 = (\Pi e_3^{\perp})e_3$, или

$e_3 - e_3(\Pi e_3) = 0 = e_3 - (\Pi e_3)e_3$.

Лемма 6.3. Для любого Π-стационарного распределения вероятностей P_1 ортопроектор e_1 на его носитель $\mathcal{E}_1$ является Π - гармонической наблюдаемой.

Доказательство. Пусть P_1 - доминирующая мера, в частности, $P_1 = P$. Тогда $e_1 = e$, а условия (5.I) для e , выполняющиеся в силу леммы 6.2, совпадают с условием (6.2) для гармоничности наблюдаемой e .

Пусть теперь $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1^{\perp} \neq 0$. По теореме I подпространство $\mathcal{E}_2$ является носителем меры $(1 - e_1)P(1 - e_1) = e_2 P e_2$, где P - любое доминирующее стационарное распределение. По леммам 4.1 и 4.2 эта мера $e_2 P e_2$ также стационарна, как предел неотрицательных стационарных мер $(P - \varepsilon^{-1}P_1)^+$. Таким образом, подпространство $\mathcal{E}_2$ является носителем Π - стационарной вероятностной меры $\beta^{-1} e_2 P e_2$, $\beta = \mathrm{tr}[e_2 P e_2] > 0$, и, по лемме 6.2, для e_2 также выполнены условия (5.I) и (5.2). По включению в формулы (5.5) теоремы 2

$$\Pi e_1 = e_1(\Pi e_1)e_1 + e_1(\Pi e_1)e_0 + e_0(\Pi e_1)e_1 + e_0(\Pi e_1)e_0 =$$

$$= e_1 + e_1 e_0 + e_0 e_1 + e_0(\Pi e_1)e_0 = e_1 + e_0(\Pi e_1)e_0,$$

где подставлены равенства (5.I). Умножая полученное представление на $e \geq e_1$ слева и справа, получаем (6.2) для e_1 , ввиду $e e_0 = 0 = e_0 e$.

Лемма 6.4. Каждая Π - гармоническая наблюдаемая f имеет вид

$$f = efe + (1-e)f(1-e). \tag{6.3}$$

Все гармонические наблюдаемые распадаются на классы эквивалентности $\mathrm{mod}\, e$ наблюдаемых, отличающихся в разложении (5.3) вторым слагаемым, - произвольным элементом алгебры $e^{\perp}\mathcal{L}^{H}e^{\perp}$.

Доказательство. Рассмотрим Пирсово разложение

$$f = efe + (efe^{\perp} + e^{\perp}fe) + e^{\perp}fe^{\perp}, \quad e^{\perp} = \mathbb{1} - e.$$

По первому равенству (6.2)

$$efe + e^{\perp}fe = fe = ef = efe + efe^{\perp}.$$

Из равенства $e^{\perp}fe = efe^{\perp}$ умножением на e справа и слева следует $e^{\perp}fe = 0 = e^{\perp}fe$. Изменение второго слагаемого в (6.3) не нарушает равенств (6.2) в силу включения (5.5. а).

Теорема 3. Ультраслабо замкнутое линейное пространство $\mathfrak{J}_{\Pi}$ всех Π - гармонических наблюдаемых является йордановой алгеброй. Множество всех гармонических наблюдаемых, P - эквивалентных нулю по любой Π - стационарной мере, образует идеал этой алгебры.

Доказательство. Пусть f - гармоническая наблюдаемая. По (6.2) и (6.3)

$$\begin{aligned} f &= efe + e^{\perp}fe^{\perp}, \quad f^2 = efefe + e^{\perp}fe^{\perp}fe^{\perp} \\ \Pi f &= efe + e^{\perp}he^{\perp}, \quad (\Pi f)^2 = efefe + e^{\perp}he^{\perp}he^{\perp}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Согласно неравенству Шварца - Кадисона для субмарковских отображений $\Pi f^2 - (\Pi f)^2 \geqslant 0$, см. [14]. Отсюда

$$0 \leq tr\, P[\Pi f^2 - (\Pi f)^2 = tr[(P\Pi)f^2] - tr[P(\Pi f)^2] =$$

$$= tr[P(efefe + e^{\perp}fe^{\perp}fe^{\perp})] - tr[P(efefe + e^{\perp}he^{\perp}he^{\perp})] =$$

$$= tr[(ePe)(e^{\perp}fe^{\perp}fe^{\perp} - e^{\perp}he^{\perp}he^{\perp})] = tr\, 0 = 0$$

Отсюда, по лемме 2.2, $[\Pi f^2 - (\Pi f)^2] \in e^{\perp}\mathcal{L}^{H}e^{\perp}$. С другой стороны $[f^2 - (\Pi f)^2] \in e^{\perp}\mathcal{L}^{H}e^{\perp}$ также. Значит, $\Pi f^2 = f^2 + e^{\perp}h_1e^{\perp}$, что равносильно условию (6.2) для f^2. Тем самым доказано, что квадрат гармонической наблюдаемой - также гармоническая наблюдаемая. В общем случае разных сомножителей $2(f\circ g)=(f+g)^2-f^2-g^2$. Из представления (6.3) вытекает, что все гармонические наблюдаемые вида $h=(1-e)h(1-e)$ образуют идеал в J_Π.

Лемма 6.5. Всякая идемпотентная гармоническая наблюдаемая f эквивалентна $mod\, e$ некоторому гармоническому ортопроектору $e_1=efe$. Подпространство $\mathcal{E}_1=e_1(\mathcal{H})$ является носителем неотрицательной стационарной меры $e_1 P e_1$, где P – любое доминирующее распределение вероятностей.

Доказательство. По единственности разложения $f=efe+(1-e)f(1-e)$ оба слагаемых также идемпотентны. Гармоничность efe вытекает из включений (5.5).
Ортопроектор $e_2=e-e_1$ – также гармонический. Для гармонических ортопроекторов условия (5.1) вытекают из (6.2) домножением. Поэтому, $e_1(\Pi h)e_1=e[\Pi(e_1he_1)]e$ по включениям (5.5). Проверим теперь стационарность $Q=e_1Pe_1$. По определению,

$$tr[(Q\Pi)h]=tr[Q(\Pi h)]=tr\,P[e_1(\Pi h)e_1]=$$

$$=tr\{Pe[\Pi(e_1he_1)]e\}=tr[P\Pi(e_1he_1)]=$$

$$=tr\,Pe_1he_1=tr\,Qh$$

при всех $h\in\mathcal{L}^H$. Значит $Q\Pi=Q$.

§ 7. Редукция субмарковского отображения.

Определение 6. Линейное отображение $\Lambda:\ b\to\Lambda b=e(\Pi b)e,\ \forall b\in\mathcal{L}^H$, где e – ортопроектор на носитель доминирующих стационарных распределений вероятностей субмарковского отображения Π, назовем редукцией отображения Π.

Лемма 7.1. Редукция Λ является субмарковским отображением $\mathcal{L}(\mathcal{H}):\Lambda 1=e\le 1$. Оно поглощает Π: $\Lambda\Pi=\Lambda^2$. Любая Π – стационарная мера является Λ – стационарной и наоборот.

Следствие. Редукция субмарковского отображения Λ совпадает с самим Λ.

Доказательство. Отображение Λ линей, неотрицательно и нормально. Кроме того, $\Lambda e = e$ по лемме 6.2, где e – единица алгебры $e[\mathcal{L}(\mathcal{H})]e$. Поглощающее свойство Λ вытекает из включений (5.5). Если P – стационарно относительно Π, то $P = ePe$, и при всех $h \in \mathcal{L}^H$,

$$tr[(P\Lambda)h] = tr[Pe(\Pi h)e] = tr[P\Pi h] = tr(Ph).$$

Обратно, если Q стационарно относительно Λ, то

$$tr\, Q = tr[(Q\Lambda)\mathbb{1}] = tr[Q(\Lambda\mathbb{1})] = tr(Qe) = tr(eQe).$$

По (3.8) отсюда $Q = eQe$. Тогда

$$tr[(Q\Pi)h] = tr[Q(\Pi h)] = tr[eQe(\Pi h)] = tr[Qe(\Pi h)e] =$$

$$= tr[Q(\Lambda h)] = tr[(Q\Lambda)h] = tr(Qh), \ \forall h \in \mathcal{L}^H.$$

Определение 7. Субмарковское отображение Λ, совпадающее со своей редукцией, будем называть редуктивным.

Лемма 7.2. Субмарковское редуктивное отображение Λ с носителем $\mathcal{E} = e(\mathcal{H})$ марковски отображает подалгебру $e[\mathcal{L}(\mathcal{H})]e \simeq \mathcal{L}(\mathcal{E})$ в себя. Всякая Λ - инвариантная наблюдаемая является Λ - гармонической, при этом

$$f = efe = \Lambda f = \Lambda(efe) = e[\Lambda(efe)]e \tag{7.1}$$

Обратно, для всякой Λ - гармонической наблюдаемой g наблюдаемая $ege = eg = ge = \Lambda g$ будет Λ - инвариантной.

Следствие. Инвариантные наблюдаемые редуктивного субмарковского отображения образуют йорданову алгебру с единицей e.

Доказательство. Поскольку $\Lambda h \overset{def}{=} e(\Lambda h)e$, то из включений (5.5) вытекает

$$\Lambda f = \Lambda(efe) = e[\Lambda(efe)]e, \tag{7.2}$$
$$\Lambda(efe^{\perp} + e^{\perp}fe) = 0, \quad \Lambda(e^{\perp}fe^{\perp}) = 0.$$

$$\Lambda(efe^{\perp}+e^{\perp}fe)=0, \quad \Lambda(e^{\perp}fe^{\perp})=0. \tag{7.3}$$

Отсюда, $e=e(\Lambda e)=e(\Lambda e)e=\Lambda e$, а для любой Λ - гармонической наблюдаемой g, в силу определения,

$$ege=eg=ge=e(\Lambda g)e=\Lambda(ege).$$

Обратно, $f=\Lambda f$ влечёт $f=efe=ef=fe=e(\Lambda f)=(\Lambda f)e$. Далее, $\Lambda[\mathcal{L}(\mathcal{H})]=e\{\Lambda[\mathcal{L}(\mathcal{H})]\}e\subseteq e[\mathcal{L}(\mathcal{H})]e$, так что все условия марковости выполнены. Наконец, квадрат Λ - инвариантной наблюдаемой Λ - гармоничен по теореме 3 и также принадлежит $e[\mathcal{L}(\mathcal{H})]e$.

Лемма 7.3. Если наблюдаемая f гармонична для субмарковского редуктивного отображения Λ, то для йорданова произведения

$$\Lambda(f\circ g)=f\circ(\Lambda g) \tag{7.4}$$

Доказательство. И левая, и правая части равенства определяются только значениями efe и ege в силу (6.3), (7.2) и (7.3). Поэтому, можно считать, что $f,g\in e[\mathcal{L}^H(\mathcal{H})]e$, и что f есть Λ - инвариант. Сперва пусть $f=e_1$, где e_1 - ортопроектор. При $e_1=e=f$ равенство (7.3) справедливо в силу (7.1) и (7.2). Пусть $e_1<e$, $e_2=e-e_1$. По включениям (5.5)

$$\Lambda(e_1ge_1)=e_1(\Lambda g)e_1,$$
$$\Lambda(e_1ge_2+e_2ge_1)=e_1(\Lambda g)e_2+e_2(\Lambda g)e_1.$$

Складывая последнее равенство с удвоенным первым, получаем

$$2\Lambda(e_1\circ g)=2e_1\circ(\Lambda g).$$

Ортопроекторы спектрального разложения любой наблюдаемой f являются пределами вещественных полиномов от f, [16]. Поэтому, они тоже Λ - инвариантны, коль Λ - инвариантна f. Далее, f является равномерным пределом линейных комбинаций ортопроекторов своего разложения. Поэтому в (6.3) можно перейти к пределу, от взвешенных сумм к f.

Лемма 7.1. показывает, что изучение структуры семейства Π - стационарных состояний сводится к аналогичной задаче для редуцированного отображения Λ, в котором "отбракованы" все несущественные и нулевые состояния. Последняя задача оказывается более простой алгебраически, так у Λ со стационарными распределениями связаны все инвариантные наблюдаемые, и нет необходимости вводить искусственно понятие гармоничности.

<u>Лемма 7.4.</u> Всякий класс эквивалентных Π - гармонических $\operatorname{mod} e$ наблюдаемых f задает инвариантную наблюдаемую efe, для редукции Λ. Обратно, каждая Λ инвариантная наблюдаемая g задает класс эквивалентных Π - гармонических $\operatorname{mod} e$ наблюдаемых $g+(1-e)h(1-e)$, $\forall h \in \mathcal{B}^H(\mathcal{H})$. В этом классе существует по крайней мере одна Π - инвариантная наблюдаемая.

<u>Доказательство.</u> Подставляя представление (6.3) в (5.5), получаем

$$efe = e[\Pi(efe)]e.$$

Обратно, проверим, что всякий Λ - инвариантный идемпотент e_1 будет Π - гармоничен. По лемме 7.2 $e_1 \le e$ и e_1 есть Λ - гармоничный идемпотент. Тогда по лемме 6.5 мера $e_1 P e_1$, где P - доминирующая стационарная мера, также будет Λ - стационарной, а, следовательно, и Π - стационарной. Поэтому ортопроектор e_1 по лемме 6.3 является Π - гармоничным. Далее, всякая линейная комбинация Λ - инвариантных ортопроекторов будет Π - гармоничной по линейности определения (6.2), и это соответствие выдерживает предельный переход по операторной норме.

Пусть, наконец, Π - гармонична наблюдаемая $f = efe$, где $f \geqslant 0$. Тогда $0 \le f_1 = \Pi f = f + (1-e)(\Pi f)(1-e)$ по лемме 5.4. Отсюда $f_1 = \Pi f \geqslant f$, и рекуррентно,

$$f_k = \Pi^k f = f + (1-e)(\Pi f_k)(1-e) \geqslant f_{k-1}$$

При этом $f_k \le \|f\| \Pi^k 1 \le \|f\| 1$, так как $\Pi 1 \le 1$ и $f \le \|f\| 1$ Поэтому, существует монотонный предел f_∞, $ef_\infty e = f$ и $f_\infty = \Pi f_\infty$ по нормальности Π. В общем случае $f = ef'_\infty e - ef''e$, где $f'' = \|f\| e$, $f' = f + \|f\| e$.

§ 8. Эргодическая теорема для редуктивных субмарковских отображений.

Определение 8. Условным (квази)ожиданием M на алгебре $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ называется идемпотентное (суб)марковское отображение, $M^2=M$

Лемма 8.1. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ квазиожидание является редуктивным субмарковским отображением, и отображает $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ в некоторую ультраслабо замкнутую йорданову подалгебру $\mathcal{J}=\mathcal{J}_M\subset\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ M - инвариантных наблюдаемых. При этом,

$$M(f\circ g)=f\circ(Mg)\,,\qquad \forall f\in\mathcal{J} \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть Q - любое полное состояние на $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$. Тогда $P=QM$ будет полно на $\mathcal{J}$, т.е. $\mathrm{tr}\,Pf>0$ при $f\in\mathcal{J}$, $f\geqslant0$, $f\neq0$. В то же время $PM=QM^2=QM=P$, т.е. P стационарно. Это доказывает редуктивность $\mathcal{J}$. Остальное вытекает из леммы 7.2.

Условные ожидания и квазиожидания изучались многими авторами, см. [17], [18], [19]. Мы включили их в более широкий класс редуктивных субмарковских отображений и показали, что многие их свойства вытекают лишь из субмарковости и редуктивности.

Будем теперь доказывать, что степени редуктивного субмарковского отображения Λ слабо сходятся по Чезаро к некоторому квазиожиданию, которое является ортопроекцией на Λ - инвариантную йорданову алгебру $\mathcal{J}$, ср. [19]. Пусть P - доминирующее Λ - стационарное распределение вероятностей. Превратим, как обычно в конструкции ГНС, см. [19], алгебру $e[\mathcal{L}^H(\mathcal{H})]e$ в предгильбертово пространство, введя вещественное скалярное произведение

$$(a,b)=\mathrm{tr}[P(a\circ b)]\,,\qquad |||a|||^2=\mathrm{tr}\,(Pa^2) \tag{8.2}$$

и пополним его до гильбертова пространства $L^2_{\mathbb{R}}(P)$ с подпространством $\mathcal{J}^\sim$ - пополнением $\mathcal{J}$.

Лемма 8.2. Для любого $a\in e\mathcal{L}^H(\mathcal{H})e$ существует и единственен элемент $Ma\in\mathcal{J}^\sim$, ближайший к a в $\mathcal{J}^\sim$. Он выделяется критерием

$$(a - Ma, g) = 0, \quad \forall g \in \mathcal{J} \tag{8.3}$$

Отображение M линейно, тождественно на $\mathcal{J}$ и поглощает Λ :

$$M\Lambda a = Ma. \tag{8.4}$$

Доказательство. Существование элемента Ma вытекает из теоремы Беппо Леви [20] . В точке минимума

$$|||a - Ma + tg|||^2 = |||a - Ma|||^2 + 2t(Ma, g) + t^2(g,g) \geq |||a - Ma|||^2$$

Следовательно, линейный член равен нулю, что дает (8.3). В критерии можно ограничиваться самой алгеброй $\mathcal{J}$, так как она плотна в $\mathcal{J}^{\sim}$. Линейность M вытекает из линейности (8.3) по a . Наконец, по (7.4), $(\Lambda a)\circ g = \Lambda(a \circ g)$ и

$$\begin{aligned} tr\, P[(\Lambda a - Ma)\circ g] &= tr[(P\Lambda)(a \circ g)] - tr\, P[(Ma)\circ g] = \\ &= tr[P(a - Ma)\circ g] = (a - Ma, g) = 0, \ \forall g \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Лемма 8.3. Если некоторая последовательность b_k средневзвешенных элементов $a, \Lambda a, \ldots, \Lambda^{n(k)} a$ сходится в $L_2(P)$ к какому-то $b \in \mathcal{J}$, то $b = Ma$

Доказательство. По лемме 8.2 $M\Lambda^k a = Ma$. Поэтому,

$$Mb_k = Ma \quad \text{и} \quad (b_k - Ma, g) = 0, \ \forall g \in \mathcal{J}.$$

В последнем равенстве можно сделать предельный переход. Взяв $g = b - Ma$, получаем $|||b - Ma||| = 0$.

Теорема 4. Если Λ -редуктивное субмарковское отображение, то для любого $a \in \mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ существует ультраслабый предел последовательности

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^k a \to Ma. \tag{8.5}$$

Он является условным квазиожиданием, а также ортопроекцией в смысле (8.3) на алгебру $\mathcal{J}$ инвариантных наблюдаемых.

Доказательство. Так как $\Lambda a \in e[\mathcal{L}^H(\mathcal{H})]e$, то будем, не ограничивая общности, считать $a \in e[\mathcal{L}^H(\mathcal{H})]e$. По локальной компактности $\mathcal{L}^H$ в ультраслабой топологии [21] выберем любую сходящуюся подпоследовательность $a_{n(k)}$. Тогда, как известно,

$$\|a_n-\Lambda a_n\|=\frac{1}{n}\|a-\Lambda^n a\|\leq\frac{2}{n}\|a\|\longrightarrow 0.$$

Поэтому, $\Lambda a_{n(k)}\longrightarrow b$, где $\mathcal{L}^H\ni b=uw\text{-}\lim a_{n(k)}$

Переходя к ультраслабому пределу под знаком Λ, имеем $\Lambda b=b$. Следовательно, в $b\in\mathcal{J}_\Lambda$. Из ультраслабой сходимости $a_{n(k)}$ к b по (2.1) вытекает сходимость в слабой топологии $L^2(P)$.

По теореме Мазура [21], существуют взвешенные средние b_k элементов $a_{n(k)}$, сходящиеся к b в метрике $L^2(P)$. Отсюда, $b=Ma\in\mathcal{J}$ по лемме 7.3. Итак, всякая предельная точка компактной последовательности a_n совпадает с Ma. Следовательно, Ma есть ультраслабый предел этой последовательности. Для всякого $b\in\mathcal{J}$, $Mb=b$ по лемме 8.2, т.е. $M^2=M$. Проверим, что M есть неотрицательный оператор (из леммы 7.2 это еще не вытекает). Пусть $a\geq 0$, тогда и все $a_n\geq 0$ и $Ma=uw\text{-}\lim a_n\geq 0$ также. Так как $\Lambda^k\mathbb{1}=\Lambda\mathbb{1}=e$, то $M\mathbb{1}=e\leq\mathbb{1}$. Наконец, оператор M, как ортопроекция в $L^2(P)$, является $L^2(P)$- сжимающим оператором и отображением нормы единица в операторной метрике. Поэтому, из $a_n\nearrow a$ следует $\|\|a_n-a\|\|\downarrow 0$ и $Ma_n\nearrow Ma$. Таким образом, все условия субмарковости M проверены.

<u>Лемма 8.4.</u> Все распределения вероятностей вида $P=QM$ являются Λ - стационарными, и любое Λ - стационарное P имеет такой вид.

<u>Доказательство.</u> $tr[(PM)a]=tr[(QM^2)a]=tr[(QM)a]=tr Pa$.

Обратно, пусть $P\Lambda=P$. Тогда для любого a

$$tr(Pa)=tr\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P\Lambda^k\Big)a\Big]=tr(Pa_n)\longrightarrow tr[(P(Ma)],$$

т.е. $tr(Pa)=tr[(PM)a]$, $\forall a\in\mathcal{L}^H$, $P=PM$.

<u>Лемма 8.5.</u> Пусть ρ - любое состояние на йордановой алгебре $\mathcal{J}$, т.е. любой удовлетворяющий условиям (1.3) функционал на этой алгебре. Тогда ρM задает Λ - стационарное состояние на всей алгебре. $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$. Обратно, если

$P_1 \neq P_2$ - различные Λ - стационарные состояния на $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$, то их сужения ρ_1 и ρ_2 на $\mathcal{J}$ также различны.

Доказательство. По (8.4) $tr[(\rho M)a] = tr[(\rho M\Lambda)a]$. Пусть теперь $e^{\pm}$ - ортопроектор на носитель $(P_1 - P_2)^{\pm}$. Тогда $tr P_1 e^+ \geqslant tr P_2 e^+$, $tr P_1 e^- \leqslant tr P_2 e^-$, и хоть одно из этих неравенств - строгое.

§ 9. Субмарковские отображения ультраслабо замкнутых алгебр и структуры семейства стационарных состояний.

Строение множества неподвижных точек вполне положительного марковского отображения Π, при дополнительном условии, что существует полное нормальное Π - стационарное состояние, изучалось Эвансом [22], см.также [23]. Здесь мы освободимся от этого дополнительного ограничения.

Лемма 9.1. Редукция Λ вполне положительного субмарковского отображения Π также является вполне положительным отображением.

Доказательство. Сужение $e_n a_n e_n$ неотрицательного оператора a_n также неотрицательно, где под a понимается эрлитову матрицу порядка n с элементами из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а под e_n - сужающий проектор на подпространство матриц с элементами из $e[\mathcal{B}(\mathcal{H})]e$.

Теорема 5. $\mathbb{C}$ -линейное пространство всех инвариантных относительно два - положительного, в частности, вполне положительного редуктивного субмарковского отображения Λ линейных операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ образуют алгебру фон Неймана, обладающую квазиожиданием.

Доказательство. Достаточно проверить, что произведение (несимметризованное) двух Λ -инвариантных наблюдаемых будет Λ - инвариантным оператором, так как Λ продолжается с $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ по линейности. Пусть

$$P^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \qquad e^{(2)} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где $e^{(2)}$ - ортопроектор на носитель Λ -инвариантного распределения $P^{(2)}$. Построим по Λ - инвариантным наблюдаемым g и h матрицы

$$\varkappa = \begin{pmatrix} 0 & h+ig \\ h-ig & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varkappa^2 = \begin{pmatrix} h^2+i(gh-hg)+g^2 & 0 \\ 0 & h^2-i(gh-hg)+g^2 \end{pmatrix}$$

Операторы $h+ig$, очевидно Λ - инвариантны в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Значит, самосопряженная матрица $\varkappa$ $\Lambda^{(2)}$- инвариантна и $\Lambda^{(2)}$- гармонична, так как коммутирует с ортопроектором $e^{(2)}$. По теореме 3 ее квадрат также $\Lambda^{(2)}$ - гармоничен. А так как $\varkappa^2$ также коммутирует с $e^{(2)}$, то он и $\Lambda^{(2)}$- инвариантен, т.е. $\Lambda(gh-hg)=gh-hg$. Поскольку $\Lambda(gh+hg)=gh+hg$ по теореме 3, то $\Lambda(gh)=gh$, что и требовалось.

<u>Лемма 9.2.</u> Для 2 - положительного соотв.вполне положительного редуктивного субмарковского отображения Λ ультраслабый предел $M = uw-\lim \frac{1}{n}(\Lambda+\ldots+\Lambda^n)$ также 2 - положителен (соотв. вполне положителен).

<u>Доказательство.</u> Указанная положительность может быть выражена в терминах нормальных линейных функционалов на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

<u>Теорема 6.</u> С каждым субмарковским отображением Π алгебры $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ можно связать йорданову алгебру $\mathcal{J}=e\mathcal{J}e$ наблюдаемых, являющихся Π - гармоническими, и условное квазиожидание M, инвариантные наблюдаемые которого совпадают с $\mathcal{J}$, а стационарные распределения вероятностей - с Π- стационарными распределениями вероятностей. Единица e алгебры $\mathcal{J}$ определяется как ортопроектор на носитель доминирующих Π - стационарных распределений. Если отображение Π вполнэ положительно, то таково же и M, а $\mathcal{J}$ является самосопряженной частью некоторой алгебры фон Неймана.

Доказательство вытекает из теорем 4 и 5 и лемм 8.4 и 8.5.

<u>Теорема 7.</u> Утверждения теоремы 6 остаются справедливыми, если в качестве исходной алгебры наблюдаемых принять любую ультраслабозамкнутую йорданову подалгебру $\mathcal{O}\!\!\mathcal{L}^H \subseteq \mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ с квазиожиданием E относительно $\mathcal{L}^H$ (соотв. самосопряженную

часть алгебры фон Неймана).

Доказательство. Рассмотрим вместо исходных распределения $P' = PE$ на $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ и отображение $\Pi' = \Pi E$ алгебры $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ в себя. Для них утверждения справедливы. Очевидно, $ME = M$.

Общепринятое определение марковского отображения, использованное нами, сохраняет только часть свойств классических марковских переходных вероятностей. В частности, оно не позволяет вводить совместные распределения. Более сложная конструкция изучалась Аккарди [24] . Однако, теория стационарных распределений вероятностей для таких отображений сводится, см. [24] , § 3, к рассмотренной в настоящей работе.

Авторы благодарны Луиджи Аккарди за внимание и присылку сборника докладов [23] .

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н.Колмогоров,Бюлл.МГУ (А),1,№3, 11-16 (1937).
2. W.Doeblin,Bull.Math.Soc.Roum.Sci.,39,N 1,57-115,N 2,3-61(1937)
3. E.A.Morozova,N.N.Čencov,in Lecture Notes in Mathematics,N 550 Springer, 1976, 379-418.
4. Е.А.Морозова,Н.Н.Ченцов,Препр.Инст. прикл.мат.АН СССР,№130,1976.
5. J.Neveu,Bases mathematiques du calcul des probabilités, 1964.
6. Е.А.Морозова,Н.Н.ЧенцовСтруктура семейства стационарных распределений вероятностей для некоммутативной цепи Маркова,Коорд. совещ.по теории многокомпонентных случ.систем,Тюмень,1980.
7. N.N.Čencov,Completely positive Markov transition maps,semi-invariant observables,and stationary states, 12-th Europ.Meeting of Statisticians, Varna, 1979.
8. А.Н.Колмогоров,Основные понятия теории вероятностей,ОНТИ,1936.
9. G.G.Wick, A.C.Wightman,E.P.Wigner,Phys.Rev.,88,N1,101-105(1952)
10. Ж.Эмх,Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля,Мир,1976.
11. И.М.Гельфанд,Н.Я.Виленкин,Обобщенные функции,вып.4Наука,1961.
12. Ky Fan,Proc.Nat.Ac.Sci.USA,37, 760-766 (1951).
13. Э.Хилле,Р.С.Филлипс,Функциональный анализ и полугруппы,ИЛ,1962.
14. W.F.Stinespring,Proc.Amer.Math.Soc.,6,N 2, 211-216 (1955).
15. M.Choi, Illinois J.Math.,18, 565-574 (1965).
16. F.Riesz,B.Sc.-Nage,Lecons sur I' analyse fonctionelle, 195
17. J.Tomiyama,Proc.Japan Acad.Sci.,33, 608-612 (1957).
18. M.Takesaki, J.Funct.Anal.,9,N 3, 306-321 (1972).
19. W.B.Arveson,Amer.J.Math.,99, N 3, 578-642 (1967).
20. Н.И.Ахиезер,Лекции по теории аппроксимации,Наука,1965.
21. К.Иосида,Функциональный анализ,Мир,1967.
22. D.E.Evans,Commun.math.Phys., 54, 293-297 (1977).
23. A.Frigerio,H.Spohn,in Mathem.Problems in the Quantum Theory of Irreversible Processes,Napoli,Lab. di Cibern.,1978,115-135.
24. Л.Аккарди,Функц.анализ и его прилож.,9,№1,1-8 (1975).

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.