Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов

НЕКОММУТАТИВНЫЕ КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ

/конечномерная теория/

Препринт № 57 за 1981 г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

НЕКОММУТАТИВНЫЕ КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ

(конечномерная теория)

Москва - 1981

АННОТАЦИЯ

Логика событий в микромире не является аристотелевой. Биркгоф и фон Нёйман заметили, что квантовые логики являются недистрибутивными ортодополнительными решётками подпространств. Мы показываем, что такое определение формально неполно, и что в квантовых логиках существуют другие операции, не имеющие классических аналогов. В конечномерном случае достаточно заменить операцию пересечения подпространств более общей некоммутативной операцией и добавить новую операцию суперпозиции (когерентного векторного сложения) изоклинных подпространств.

СОДЕРЖАНИЕ:

Morozova E.A., Čencov N.N. NONCOMMUTATIVE QUANTUM LOGICS (finite-dimensional theory). (Abstract)

In microcosmos the logic of event is non-Aristotelian. Birkhoff and Neumann had observed quantum logics to be nondistributive orthocomplemented lattices of subspaces. We show that such an operational description is formally incomplete. In quantum logics there are other operations having no classical analogies. In a finite-dimensional case it is sufficient to substitute the lattice operation of subspace intersection (meet) by a more general noncommutative operation, and to add a new operation of superposition of isoclinic subspaces.

CONTENTS:

I. Введение. Случайные явления микромира не описываются схемами классической (как теперь говорят, коммутативной) теории вероятностей, потому что логика квантовых событий не является аристотелевой. Здесь возникают свои алгебры событий (квантовые логики, как их иногда называют), отвечающие йордановым алгебрам случайных величин [1] , [2] , [3]. В основополагающей работе [4] было замечено, что они являются недистрибутивными ортодополнительными решетками, см. [5] , [6] , [7] , но такое операционное описание, как мы показываем ниже в п. 3, является формально неполным. Полное описание может быть получено, если решеточную операцию пересечения подпространств заменить более широкой некоммутативной операцией, и добавить новую операцию суперпозиции изоклинных подпространств.

2. Традиционное описание случайного явления, как объекта некоммутативной теории вероятностей, может быть схематизировано следующим образом [9] , [10] , [3] , [8] . Задается абстрактное Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ объекта. Единичные векторы $|x\rangle \in \mathcal{H}$ описывают элементарные исходы явления (чистые состояния объекта). Задается замкнутая унитальная йорданова алгебра $\mathcal{O}\!\ell$ ограниченных эрмитовых операторов, действующих на пространстве $\mathcal{H}$, - алгебра (ограниченных) наблюдаемых. Вероятностное состояние объекта описывается неотрицательным нормированным нормальным $\mathbb{R}$ - линейным функционалом на $\mathcal{O}\!\ell$. Событиям ("да - нет" - экспериментам) отвечают идемпотенты алгебры $\mathcal{O}\!\ell$, - ортопроекторы на подпространства $\mathcal{H}$. Элементарные исходы явления, как мы видим, не являются событиями, равно как чистые (векторные) состояния, строго говоря, не являются вероятностными состояниями.

Обычно принимают, что алгебра $\mathcal{O}\!\ell$ есть самосопряженная часть своей обертывающей алгебры фон Неймана $\mathcal{B}$. Тогда, аналогично классическому случаю, вероятностное состояние можно описать нормированным: $P(\mathbb{1}) = 1$, вещественным неотрицательным:

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad Im P(A) = -Im P(A^*), \quad P(AA^*) \geqslant 0, \qquad (2.1)$$

нормальным $\mathbb{C}$ - линейным функционалом P на $\mathcal{B}$.

В согласии с названиями алгебр такие схемы мы будем называть схемами фон Неймана, оставляя название схем Йордана за общим случаем. Разумеется, это - чистая условность, ср.[2] , [9] .

Здесь мы рассматриваем конечномерные пространства $\mathcal{H}$ кет-векторов. Благодаря этому мы можем игнорировать проблемы топологии, в том числе требование нормальности функционала P .

Для любой унитальной алгебры фон Неймана $\mathcal{L}$ линейных операторов на $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} < \infty$ существует ортогональное разложение:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{H}_j \ ; \quad \forall j \quad \mathcal{H}_j = \mathcal{N}_j \otimes \mathcal{M}_j \ ; \tag{2.2}$$

$$\forall A \in \mathcal{L}, \quad A = \bigoplus_{j=1}^{m} A_j \otimes 1^{(j)} \ ; \quad \mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^{m} (\mathcal{L}_j \otimes 1^{(j)}) \tag{2.3}$$

где $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}(\mathcal{N}_j)$ - алгебра всех $\mathbb{C}$ - линейных операторов на $\mathcal{N}_j$, 1^j - единичный оператор в пространстве $\mathcal{M}_j$. В простейшем случае, когда все $\mathcal{M}_j$ тривиальны, $\mathcal{H}_j = \mathcal{N}_j$, $\forall_j$ получается стандартное описание объекта с помощью системы когерентных секторов [9], [10]. Очевидно, в общем случае описание $(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ рассматриваемого объекта может быть редуцировано до $\oplus \mathcal{N}_j$, $\oplus \mathcal{L}_j$. Возникающая проблема изоморфизма описаний объекта решается в терминах категории вполне положительных марковских отображений [11], аналогично тому как она была решена для классической математической статистики, см., например, библиографию в [12].

С любой замкнутой йордановой алгеброй $\mathfrak{A}$ эрмитовых операторов также связывается разложение

$$\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_j \ ; \quad \mathfrak{A} = \oplus \mathfrak{A}_j \ ; \quad \forall_j, \ \mathfrak{A}_j = H_j \mathfrak{A} H_j \tag{2.4}$$

где H_j - ортопроектор на $\mathcal{H}_j$. При этом каждый фактор $\mathfrak{A}_j$ изоморфен (т.е. является точным представлением) какой-либо йордановой алгебре $\mathcal{J}_{k,\nu}$ всех эрмитовых линейных операторов на некотором (правом) векторном пространстве $\mathcal{L}_k$, размерности $k = k(j)$, из следующего списка: $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{L}_2 = \mathbb{H}_\nu^2$, где $\mathbb{H}_\nu$ - алгебра Клиффорда с ν мнимыми единицами, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, при $k = 3$ $\mathcal{L}_k = \mathbb{R}^k$ или $\mathbb{C}^k$, или $\mathbb{Q}^k$, где $\mathbb{Q}$ - тело кватернионов, [2].

3. Обозначение. Условимся далее обозначать линейные подпространства Гильбертова пространства $\mathcal{H}$ рукописными буквами $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ а ортопроекторы на них - соответствующими печатными: E, F, ...

Пример. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$; $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G} = 1$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}^\perp$ [13].

<u>Лемма 3.1.</u> Семейство подпространств $\{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ порождает ортодополнительную решетку из 6 элементов:

$\{0, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{F}^\perp, \mathcal{G}^\perp, \mathcal{H}\}$. Семейство ортопроекторов $\{1 = H, F, G\}$ порождает C^*- алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, а также более узкую йорданову алгебру $\mathcal{J}_{1,1}$, содержащую континуум ортопроекторов.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Если выбрать первый координатный орт $|x\rangle \in \mathcal{F}$, то проекторам $F = |x\rangle\langle x|$ и G отвечают матрицы

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G \sim \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где φ - угол между прямыми $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, $0 \neq \varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Матрицы FGF, $FG(1-F)$, $(1-F)GF$, $(1-F)G(1-F)$ порождают всю алгебру матриц второго порядка над $\mathbb{C}$, а матрицы FGF, $FG(1-F)+(1-F)GF$, $(1-F)G(1-F)$ - всю алгебру симметричных матриц второго порядка над $\mathbb{R}$.

Этот простой пример доказывает, что решеточный подход Биркгофа - фон Неймана [4] не эквивалентен алгебраическому подходу. Решеточных операций просто не хватает для построения алгебры событий.

4. Коммутантом $Comm\{A_\alpha\}$ семейства операторов A_α называют множество операторов, каждый из которых коммутирует с любым оператором исходного семейства $\{A_\alpha\}$. По теореме фон Неймана о бикоммутанте [14], алгебра фон Неймана, порождаемая семейством операторов, является коммутантом его коммутанта. Коммутант - алгебра и порождается своими унитарными элементами [14], [15], образующими группу. Таким образом, для построения логики фон Неймана нам надо уметь конструктивно описать множество ортопроекторов G, коммутирующих с любым унитарным оператором U, коммутирующим в свою очередь с каждым ортопроектором исходного семейства $\{F_\alpha\}$.

<u>Определение.</u> Обозначим $\mathcal{U}(\{F_\alpha\})$ группу всех унитарных преобразований, отображающих на себя каждое подпространство $\mathcal{F}_\alpha$. Унитарным ковариантом семейства $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ будем называть всякое подпространство $\mathcal{G}$, которое отображается на себя любым $U \in \mathcal{U}(\{F_\alpha\})$

<u>Теорема 4.I.</u> I. Логика фон Неймана $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{\mathcal{F}_\alpha\})$, порожденная семейством подпространств $\{\mathcal{F}_\alpha\}$, является решеткой унитарных ковариантов этого семейства.

2. $\mathcal{U}(\{\mathcal{F}_\alpha\}) = \mathcal{U}(\mathcal{L}) = \mathcal{U}(\mathcal{H}) \cap Comm\{F_\alpha\}$.

<u>Доказательство.</u> Оператор UEU^{-1} есть ортопроектор на подпространство $U(\mathcal{E})$. Когда $UE = EU$, тогда $E = UEU^{-1}$, т.е. $\mathcal{E} = U(\mathcal{E})$. Унитарная ковариантность решеточных операций очевидна.

Любопытно отметить, что булева алгебра, порожденная какимлибо семейством подмножеств множества Ω, допускает сходную характеризацию, как класс ковариантов этого семейства относительно группы транспозиций элементов из Ω.

5. Система унитарных инвариантов пары подпространств была указана Камиллом Жорданом сто лет назад [16]. Пусть F и G суть ортопроекторы на подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Образуем эрмитовы опе-

раторы FGF и GFG. Их спектр принадлежит отрезку $0 \le \varkappa \le 1$. Условимся далее считать $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$ всегда принадлежащими их спектру, отвечая может быть нулевому подпространству.

Теорема 5.I. I) Операторы FGF и GFG унитарно эквивалентны и имеют одинаковый спектр. 2) Справедливы разложения Жордана

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \mathcal{F}\cap\mathcal{G} & & & & & & \mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp} & & \\
 & & \| & & & & & & \| & & \\
\mathcal{F} & = & \mathcal{F}_0 & \oplus & \mathcal{F}_1 & \oplus \ldots \oplus & \mathcal{F}_s & \oplus & \mathcal{F}_{s+1} & & \\
 & & \| & & + & & + & & & & \\
\mathcal{G} & = & \mathcal{G}_0 & \oplus & \mathcal{G}_1 & \oplus \ldots \oplus & \mathcal{G}_s & \oplus & (\mathcal{G}\cap\mathcal{F}^{\perp}) & & (\mathcal{F}+\mathcal{G})^{\perp} \\
 & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
\mathcal{H} & = & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus \ldots \oplus & \mathcal{H}_s & \oplus & (\mathcal{F}_{s+1}\oplus\mathcal{G}_{s+1}) & \oplus & \mathcal{H}_{s+2}
\end{array}
\tag{5.I}
$$

где $\varkappa_0 = 1 > \varkappa_1 > \ldots > \varkappa_s > 0 = \varkappa_{s+1}$ – общий спектр, $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ суть собственные подпространства FGF и GFG, отвечающие $\varkappa_k$.
3) Формулы

$$\sqrt{\varkappa}\,|y\rangle = G|x\rangle, \qquad \sqrt{\varkappa}\,|x\rangle = F|y\rangle, \tag{5.2}$$

при $\varkappa = \varkappa_k$ устанавливают изометричное соответствие между $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$.

Доказательство. Элементарно проверяется, что $\mathcal{F}_j \perp \mathcal{G}_k$ при $j = k$, и что справедлива связь (5.I) см. [I7].

Числа $\zeta = s(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\dim \mathcal{F}_{s+1}$, $\dim \mathcal{G}_{s+1}$ и набор $\{\varkappa_k, \dim \mathcal{F}_k = \dim \mathcal{G}_k\}_{k=1}^{s}$ образуют полную систему унитарных инвариантов пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [I6], см. также библиографию в [I7], [I8]. Очевидно, подпространства $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ при $1 \le k \le s$ являются нетривиальными унитарными ковариантами.

Определение. Контактом (некоммутативным пересечением) $\mathcal{F} \mathbin{/\!\!\cap} \mathcal{G}$ подпространства $\mathcal{F}$ с подпространством $\mathcal{G}$ назовем а) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, когда $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \ne 0$, б) 0, когда $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, в) собственное подпространство $\mathcal{F}_1$, когда $\mathcal{F}_0 = 0$ и $\mathcal{F} \ne \mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp}$. Неотрицательную величину $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$:

$$\rho^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \varkappa(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup_{\substack{0 \ne x\rangle \in \mathcal{F} \\ 0 = y\rangle \in \mathcal{G}}} \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}, \tag{5.3}$$

$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1$ в случае а), $= 0$ в случае б), $= \varkappa^{1/2}$ в случае в), назовем величиной связи $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, а угол

$$\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \tag{5.4}$$

назовем величиной щели между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Вообще говоря $\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G} \neq \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F}$, но обязательно $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$. Ортопроектор E на $\mathcal{E} = \mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$ есть

$$E = \lim_{n \to \infty} (FGF)^n, \quad \|FGF\|^{-n}. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) обобщает часто используемое в теории фильтров выражение для ортопроектора на $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Все коварианты $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ могут быть получены из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ последовательным применением операций $/\!\!\cap$ и $\ominus$ (собственного ортогонального вычитания).

6. В нашей теории фундаментальную роль играет понятие изоклинности.

<u>Определение.</u> Подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ называются изоклинными, когда все векторы первого наклонены под одним и тем же углом $\varphi < \pi/2$ к своим проекциям на второе подпространство, и наоборот.

Для того, чтобы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ были изоклинны, необходимо и достаточно, чтобы

$$FGF = \varkappa F, \quad GFG = \varkappa G, \quad \varkappa > 0, \tag{6.1}$$

где $\varkappa^{1/2} = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos\varphi$, или, что то же

$$\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F} = \mathcal{G}. \tag{6.2}$$

Формулы (5.2) устанавливают между ними изометричное соответствие, которое задается частичными изометриями $\mathcal{H}$:

$$I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \sim \rho^{-1}(\mathcal{F}, \mathcal{G})GF, \quad I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \sim \rho^{-1}(\mathcal{F}, \mathcal{G})FG. \tag{6.3}$$

Подпространства $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ в (5.1) изоклинны при $k \leq S$. Очевидно, что две любые неортогональные прямые изоклинны. Таким образом нетривиальные примеры изоклинных подпространств возникают только в четырехмерном пространстве.

<u>Определение.</u> Пусть I – каноническая изометрия (5.2), см. также (6.3), подпространства $\mathcal{F}$ на изоклинное подпространство $\mathcal{G}$. Будем называть подпространство

$$\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{|u\rangle = a|x\rangle + bI|x\rangle, \ \forall |x\rangle \in \mathcal{F}\} \tag{6.4}$$

$(a:b)$– суперпозицией $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Мы будем различать $\mathbb{R}$ – и $\mathbb{C}$ – суперпозиции, в зависимости от того $a:b \in \mathbb{R}$ или $a:b \in \mathbb{C}$. Пара $0:0$ является запрещенной.

Очевидно, $\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{S}_{b:a}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, $\mathcal{S}_{ca:cb} = \mathcal{S}_{a:b}$ и $\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является унитарным ковариантом пары $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Изучим строение пучка суперпозиций более детально. Пусть $\mathcal{F} \perp \mathcal{E}$, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E}$, J – изометрия $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, EJF – ее представление в виде частичной изометрии на $\mathcal{H}$. Рассмотрим зависящее от двух угловых параметров θ и φ семейство операторов

$$G_{\theta,\varphi}=\cos^2\varphi F+\cos\varphi\sin\varphi(e^{i\theta}E\mathcal{J}F+e^{-i\theta}F\mathcal{J}^*E)+\sin^2\varphi E= \tag{6.5}$$
$$=[\cos^2\varphi+e^{i\theta}\cos\varphi\sin\varphi E\cdot\mathcal{J}]F+[e^{-i\theta}\cdot\cos\varphi\sin\varphi F\mathcal{J}^*+\sin^2\varphi]E,$$

имеющих относительно разложения $\mathcal{H}=\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}\oplus(\mathcal{F}\oplus\mathcal{E})^{\perp}$
блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi\cdot\mathbb{1}' & e^{-i\theta}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\mathbb{1}' & 0 \\ e^{i\theta}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\mathbb{1}' & \sin^2\varphi\cdot\mathbb{1}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

где $\mathbb{1}'$ - единичная диагональная матрица порядка $\dim\mathcal{F}=\dim\mathcal{E}$. Нетрудно проверить, что $G_{\theta,\varphi}$ суть ортопроекторы и что любые два соответствующие подпространства $\mathcal{G}_{\theta,\varphi}$ изоклинны (или ортогональны). Из (6.5) видно, что семейство $\{\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\}$ (семейство $\{\mathcal{G}_{0,\varphi}\}$) алгебраически изоморфно пучку прямых двумерного комплексного (вещественного) гильбетрова пространства; в частности

$$\forall\theta,\quad \mathcal{G}_{\theta,0}=\mathcal{F},\qquad \mathcal{G}_{\theta,\pi/2}=\mathcal{E};$$
$$\rho(\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\mathcal{F})=|\cos\varphi|,\qquad \rho(\mathcal{G}_{\theta,\varphi},\mathcal{E})=|\sin\varphi|.$$

<u>Определение.</u> Семейство $\{\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\}$ с ортопроекторами (6.5) построенное по паре изометрических подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ будем называть $\mathbb{C}$ - пучком (изоклинных подпространств), а его подсемейство $\{\mathcal{G}_{\varphi}:=\mathcal{G}_{0,\varphi}\}$ будем называть $\mathbb{R}$ - пучком.

Ввиду периодичности будем предполагать, что $-\pi<\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le\pi/2$ в $\mathbb{C}$ - пучке и $-\pi/2<\varphi\le\pi/2$ в $\mathbb{R}$ - пучке. Элементарной выкладной устанавливаются:

<u>Лемма 6.I.</u> Суперпозиция любых двух изоклинных подпространств пучка принадлежит пучку, и обратно.

<u>Лемма 6.2.</u> Суперпозиции двух изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ образуют пучок, проходящий через $\mathcal{E}:=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F}$ с канонической изометрией в (6.5)

$$E\mathcal{J}F=\rho^{-1}(\mathcal{F},\mathcal{G})\rho^{-1}(\mathcal{G},\mathcal{E})EGF, \tag{6.7}$$
$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}=I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}. \tag{6.8}$$

Любое $\mathcal{G}_{\theta,\varphi}$, $\varphi\ne0$, $\pi/2$, определяет вместе с $\mathcal{F}$ тот же пучок с канонической изометрией $\mathcal{J}_{\theta}=e^{i\theta}\mathcal{J}$.
Отсюда вытекает:

Теорема 6.3. Через любые два изоклинные подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ проходит единственный $\mathbb{C}$ - пучок (единственный $\mathbb{R}$ - пучок) изоклинных подпространств. Он состоит из всевозможных $\mathbb{C}$ - суперпозиций ($\mathbb{R}$ - суперпозиций) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Этот пучок однозначно задается также любыми двумя своими ортогональными подпространствами и связывающей их изометрией, которая определяется с точностью до числового множителя $e^{i\theta}$ (множителя ± 1).

Таким образом, в гильбертовом (евклидовом) пространстве, кроме геометрии инцидентности подпространств, т.е. проективной геометрии, использованной фон Нейманом в [7], см. также [5], [6], существует геометрия пучков изоклинных подпространств [19] см. также [20].

7. Любое унитарное преобразование $U \in \mathcal{U}(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\})$ пространства $\mathcal{H}$ сохраняет изометрию (5.2), так как оно коммутирует и с F и с G. Отсюда вытекает

Лемма 7.I. Унитарные преобразования, отображающие на себя изоклинные подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, отображают на себя каждое подпространство $\mathbb{C}$ - пучка, определяемого $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Такие преобразования образуют группу $\mathcal{U}(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\})$, изоморфную прямому произведению $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{U}(\mathcal{B})$,

$$\mathcal{B} := \mathcal{H} \ominus (\mathcal{F} + \mathcal{G}), \qquad \mathcal{E} := (\mathcal{F}+\mathcal{G}) \ominus \mathcal{F} = \mathcal{S}_{-p:1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}):$$
$$U = FVF + EJFVFJ^{*}E + BWB, \tag{7.I}$$

где V и W - любые унитарные преобразования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$, J определено (6.7). При соответствии J базисов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ матрица U имеет блочно-диагональный вид $diag(V, V, W)$.

Теорема 7.2. Пусть (5.I) суть разложения Камилла Жордана для пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Тогда любой унитарный ковариант пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_s \oplus \mathcal{K}_{s+1} \oplus \mathcal{K}_{s+2}, \tag{7.2}$$

где $\mathcal{K}_0 = 0$ или $= \mathcal{H}_0$; $\mathcal{K}_k = 0, = \mathcal{S}(\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k), = \mathcal{H}_k$ при $1 \le k \le s$; $\mathcal{K}_{s+1} = 0, = \mathcal{F}_{s+1}, = \mathcal{G}_{s+1}, = \mathcal{H}_{s+1}$; $\mathcal{K}_{s+2} = 0, = \mathcal{H}_{s+2}$.

Доказательство. Всякое $U \in \mathcal{U}(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\})$ созраняет разложение (5.I). Следовательно, оно вполне приводится разложением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{F}_{s+1} \oplus \mathcal{G}_{s+1} \oplus \mathcal{H}_{s+2}$$

Строение каждого фактора описывается леммой 7.I, что позволяет установить разложение (7.2). Наконец, то же представление $diag$

(V,V) каждого фактора дает список возможных $\mathcal{K}_k$ при $1 \leq k \leq s(\mathcal{F},\mathcal{G})$, см. [17] , теорема 3.10.

<u>Теорема 7.3.</u> Операции: $\oplus$ векторного сложения ортогональных подпространств, $\ominus$ собственного ортогонального вычитания (объемлемого подпространства из объемлющего), $/\!\!\cap$ контактирования (обобщенного несимметричного пересечения подпространств) $\mathcal{S}_{a:b}$ $\mathbb{C}$-суперпозиции изоклинных подпространств, унитарно ковариантны, т.е. для любого унитарного преобразования ковариантная операция над унитарными образами дает образ результата операции над прообразами. Любой унитарный ковариант $\mathcal{K}$ пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ может быть построен из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ применением конечного числа указанных базовых операций.

<u>Доказательство.</u> Если $\mathcal{M} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{B} = \mathcal{F} \ominus \mathcal{E}$, то $M = F + G$, $B = F - E$, а бикоммутант линеен. Аналогично, ковариантность контактирования вытекает из формулы (5.5), а суперпозиции – из (6.5) и леммы 7.2.

Из замечания в конце п. 5 следует, что все коварианты (7.2) могут быть построены операциями $/\!\!\cap$, $\ominus$, $\mathcal{S}$ и, когда $\mathcal{K}_k = \mathcal{H}_k$, еще операцией $+$. Но для изоклинных подпространств $\mathcal{S}_{1:1} \perp \mathcal{S}_{-1:1}$ откуда $\mathcal{H}_k = \mathcal{S}_{1:1}(\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k) \oplus \mathcal{S}_{-1:1}(\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k)$.

Операции $\oplus$, $\ominus$, $/\!\!\cap$ и $\mathcal{S}_{a:b}$ удобны тем, что ортопроектор на их результат допускает простое выражение через ортопроекторы на исходные подпространства. Зато они определены не всюду. Менее эластична система, где $\oplus$ и $\ominus$ заменены на обычное векторное сложение подпространств $+$ и на $-$; $\mathcal{F} - \mathcal{G} := (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}$. Операция ортопроектирования может быть выражена как $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G} - (\mathcal{G} - \mathcal{F})$ и т.п. [19] , [20] . В бесконечномерном пространстве спектр операторов FGF и GFG становится, вообще говоря, непрерывным, и операция $/\!\!\cap$ теряет смысл. Вместо $/\!\!\cap$ и $\mathcal{S}$ можно взять одну более сложную гибридную операцию на совместном спектральном разложении FGF и GFG , зависящую еще от спектрального параметра. Даже в конечномерном пространстве хотя бы одна операция должна зависеть от непрерывного параметра, если хотеть избежать при построениях предельных переходов: ведь даже у двух подпространств общего положения, согласно теореме 7.3, имеется континуум ковариантов. Если же это ограничение отбросить, то можно взять вместо $/\!\!\cap$ и $\mathcal{S}$ за базисную операцию $\mathcal{S}_{\sqrt{2}:1}(\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}, \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F})$ для логик фон Неймана, и $\mathcal{S}_{-1:1}(\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}, \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F})$ для логик Йордана [17] .

8. Из теоремы 7.4 вытекает, что если порожденная логика фон Неймана может быть построена из порождающих подпространств

унарными и бинарными операциями, то она может быть построена посредством операций $\oplus$, $\ominus$, $/\!\cap$, $\mathcal{S}_{a:b}$.

<u>Определение.</u> Назовем $\mathbb{C}$ -логикой ($\mathbb{R}$ - логикой) содержащий пространство $\mathcal{H}$ класс его подпространств, замкнутый относительно системы операций $\{\oplus; \ominus; /\!\cap; \mathcal{S}_{a:b}, a, b \in \mathbb{C}\}$ (системы операций $\{\oplus; \ominus; /\!\cap; \mathcal{S}_{a:b}, a, b \in \mathbb{R}\}$).

Наша цель - показать, что логики фон Неймана (Йордана) совпадают с $\mathbb{C}$ - логиками ($\mathbb{R}$ - логиками). Для этого изучим строение последних. В силу теоремы 7.4 наши логики являются ортодополнительными решетками. И многие другие их черты совпадают. Поэтому, ниже в теоремах и определениях, справедливых и для $\mathbb{C}$ и для $\mathbb{R}$ - логик, указание на тип логики будет опускаться.

<u>Определение.</u> Элемент $\mathcal{F}$ решетки $\mathcal{L}$ подпространств называется атомом, если $\mathcal{L} \ni \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ влечет: или $\mathcal{G} = 0$, или $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Ввиду $\dim \mathcal{H} < \infty$, каждый элемент $\mathcal{L}$ разлагается в ортогональную сумму атомов, но такое разложение не обязано быть единственным.

<u>Лемма 8.I.</u> Любые два атома логики изоклинны или ортогональны.

<u>Доказательство.</u> $\mathcal{F} /\!\cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, откуда или $\mathcal{F} /\!\cap \mathcal{G} = 0$, что влечет $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, или $\mathcal{F} /\!\cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$, что вместе с $\mathcal{G} /\!\cap \mathcal{F} = \mathcal{G}$ по (6.2) влечет изоклинность.

Из доказанного вытекает, что проекция $\mathcal{L}$ - атома на любое $\mathcal{L}$ - подпространство является или $\mathcal{L}$ - атомом, или 0. Далее, любое $\mathcal{L}$ - подпространство, изоклинное атому, также является атомом. В частности, подпространства из $\mathbb{R}$ - пучка (и $\mathbb{C}$ - пучка), проходящего через два изоклинных $\mathcal{L}$ - атома, будут атомами.

<u>Определение.</u> Два атома логики $\mathcal{L}$ назовем связуемыми, если существует $\mathbb{R}$ - пучок $\mathcal{L}$ - атомов, которому они принадлежат. Каждый $\mathcal{L}$ - атом связуем сам с собой по определению.

Два изоклинных атома $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ логики всегда связуемы с величиной связи $\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, см. (5.3), и существует естественная изометрия (5.2) $\mathcal{F}$ на $\mathcal{G}$: $I = I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$. Связуемые ортогональные атомы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ могут связываться многими $\mathbb{R}$ - пучками, несущими разные изометрии. Всякий атом $\mathcal{G} < (\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$, отличный от $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, определяет таковую.

<u>Лемма 8.2.</u> Пусть $\mathcal{L}$ - атомы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ контактируют, и пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Тогда ортопроекция $\mathcal{K} = \mathcal{R}(\mathcal{G})$ будет атомом, изоклинным как с $\mathcal{E}$, так и с $\mathcal{G}$, причем

$$I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}=I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}}I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}}\ ,\quad I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}=I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{K}}I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}}\ , \tag{8.1}$$

$$\rho(\mathcal{E},\mathcal{G})=\rho(\mathcal{E}\mathcal{K})\rho(\mathcal{K}\mathcal{G}). \tag{8.2}$$

Следствия. 1. Если в условиях леммы $\mathcal{R}\supseteq(\mathcal{E}+\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ - атом, контактирующий с $\mathcal{G}$, то $\mathcal{K}$ изоклинно также с $\mathcal{F}$ и

$$I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}=I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{K}}I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{E}}\ , \tag{8.3}$$

$$\rho(\mathcal{E},\mathcal{G}):\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\rho(\mathcal{E},\mathcal{K}):\rho(\mathcal{F},\mathcal{K}). \tag{8.4}$$

2. Если атомы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ контактируют, $\mathcal{E}_1\perp\mathcal{K}$, $\mathcal{E}_2\perp\mathcal{F}$, $\{\mathcal{G}_\varphi\}$ - проходящий через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_1$ $\mathcal{R}$ - пучок атомов, то проекции $\mathcal{G}'_\psi=(F+E_2)\mathcal{G}_\varphi$ образуют $\mathcal{R}$ - пучок, проходящий через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_2$ с изометрией

$$J'=I_2^1 J \tag{8.5}$$

где I_2^1 есть каноническая изометрия (5.2) $\mathcal{E}_1$ на $\mathcal{E}_2$; Обратная проекция $\mathcal{G}'_\psi$ на $\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}_1$ дает атомы $\mathcal{G}_\tau$ исходного пучка с соответствием углов

$$tg\,\tau=\rho(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\,tg\,\psi=\rho^2(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\,tg\,\varphi.$$

Доказательство. Из (5.2) для всякого $|z>\in\mathcal{G}$

$$I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}|z>=\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{G})E|z>=\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{G})EK|z>=$$
$$=\rho^{-1}(\mathcal{G},\mathcal{E})\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{K})\rho(\mathcal{K},\mathcal{G})I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{K}}I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}}|z>.$$

Так как изометрии не изменяют длину, то множитель равен единице. Учитывая, что $I_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}}I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{K}}=id_{\mathcal{K}}$, из (8.1), (8.2) и их аналогов для $\mathcal{F}$ получаем утверждения следствия.

Использованное равенство $E=EK$, т.е. "проекция на $\mathcal{E}$ есть проекция на $\mathcal{E}$ проекции на объемлющее $\mathcal{K}$ ", есть конфигурация проективно-евклидовой геометрии (евклидова теорема о трех перпендикулярах). Эту конфигурацию мы будем использовать и в последующих построениях, см. лемму 9.3. Теперь рассмотрим отношения h_m - подпространства $\mathcal{K}$ и пучка атомов. Ввиду (6.4) и (6.5) пучок может лишь а) не пересекать $\mathcal{K}$, б) пересекать $\mathcal{K}$ ровно по одному атому, с) целиком лежать в $\mathcal{K}$. Аналогичная тройственная альтернатива имеет место для отношения ортогональности.

Теорема 8.3. Два связуемые h_m - атома или изоклинны, или ортогональны друг другу, но изоклинны каждый некоторому третьему h_m - атому, и обратно. Отношение связуемости есть отношение эквивалентности: оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Доказательство. Пусть атом $\mathcal{F}$ связуем с $\mathcal{F}_2$, а $\mathcal{F}_2$ – с $\mathcal{F}_3$, и пусть $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_3$. а) Если $\mathcal{F}_2$ изоклинно и с $\mathcal{F}_1$ и с $\mathcal{F}_3$, то, по следствию из леммы 8.2, $\mathcal{F}_1$ связуемо с $\mathcal{F}_3$ через $(F_1 + F_3)(\mathcal{F}_3)$ б) Если $\mathcal{F}_2$ изоклинно $\mathcal{F}_3$, но $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{G}_{12}$, связующее $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, изоклинно и с $\mathcal{F}_1$ и с $\mathcal{F}_3$. с) Если $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3 \perp \mathcal{F}_2$, то ситуация б) имеет место для $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_{23}\}$ и, следовательно, для $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_{23}, \mathcal{F}_3\}$

9. Определение. Ненулевое $\mathcal{N} \in \mathcal{L}$ назовем факторным подпространством, если 1° оно содержит любой $\mathcal{L}$ – атом, с ним контактирующий, 2°. любая пара содержащихся в $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$ – атомов связуема.

Теорема 9.1. Каждое факторное $\mathcal{L}$ – подпространство $\mathcal{N}_j$ есть векторная сумма класса всех связуемых между собой $\mathcal{L}$ – атомов. Их число конечно; $\mathcal{N}_j \perp \mathcal{N}_k$ при $j \neq k$; $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{N}_j$.

Замечание. Когда условие $\mathcal{H} \in \mathcal{L}$ не включается в определение логики, возникает разложение $\mathcal{M} = \oplus \mathcal{N}_j$, где $\mathcal{M}$ – максимальный элемент $\mathcal{L}$.

Доказательство. Два несвязуемых атома – ортогональны.

Теорема 9.2. Справедливо разложение $\mathcal{L} \ni \mathcal{B} = \oplus \mathcal{N}_j(\mathcal{B})$ Решетка $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ есть логика подпространств факторного $\mathcal{L}$ – пространства $\mathcal{N}$. Логика $\mathcal{L}$ есть прямая сумма всех логик $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}_j$

Следствие. Для $\mathcal{C}$ – логики $\mathcal{L}$ разложение $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{N}_j$ вполне приводит группу $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.

Доказательство. Разложим $\mathcal{B}$ в ортогональную сумму атомов, а затем сгруппируем все атомы, принадлежащие одному классу.

Подобно тому, как изучение алгебры фон Неймана сводится к изучению факторов, изучение строения логики сводится к изучению факторных логик.

Определение. Назовем $\mathcal{L}$ – подпространство предминимальным, если оно разлагается в ортогональную сумму двух связуемых $\mathcal{L}$ – атомов, и пред – предминимальным, если – в ортосумму трех связанных атомов.

Всякое собственное подпространство $\mathcal{K} \in \mathcal{L}$ $\mathcal{L}$ – предминимального $\mathcal{B} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$ является $\mathcal{L}$ – атомом. Это очевидно из соображений размерности, а также следует из ортогональности

$$(\mathcal{E} \cap \mathcal{K} + \mathcal{K} \cap \mathcal{E}) \perp [(\mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \cap \mathcal{K}) + (\mathcal{K} \ominus \mathcal{K} \cap \mathcal{E})], \tag{9.1}$$

вытекающей из разложения (5.1) для пары $\mathcal{E}$ и $\mathcal{K}$, см. [21] . Таким образом, определение предминимального пространства корректно. Аналогично, всякое собственное подпространство у пред – предминимального $\mathcal{C}$ либо предминимально, либо – атом.

Любые два несовпадающие предминимальные $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2\subset\mathcal{C}$ обязательно пересекаются по атому. Обратно, сумма $\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2$ двух различных, но пересекающихся предминимальных подпространств будет пред – предминимальным, что также можно вывести с помощью (9.I).

Лемма 9.3. Пусть $\mathcal{D}=\mathcal{E}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{E}_m$ есть разложение $\hbar$ – подпространства на атомы, и пусть атом $\mathcal{G}$ контактирует со всеми $\mathcal{E}_j$. Тогда его проекции $\mathcal{G}_{1k}=(E_1+E_k)(\mathcal{G})$ суть атомы и

$$\forall k\neq 1,\quad \mathcal{G}_{1k}\subset(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_k),\quad \mathcal{G}_{1k}\neq\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_k \tag{14.I}$$

Обратно, любой набор атомов $\mathcal{G}_{12},\dots,\mathcal{G}_{1m}$, удовлетворяющих (14.I) определяет единственное $\hbar$ – подпространство $\mathcal{G}$ с такими ортопроекциями, причём $\mathcal{G}$ оказывается $\hbar$ – атомом.

Следствие. Пусть $\mathcal{N}=\mathcal{E}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{E}_n$ есть разложение факторного пространства, и пусть атом $\mathcal{G}$ контактирует с $\mathcal{E}_i$, $\rho(\mathcal{E}_i,\mathcal{G})>0$. Тогда ортопроекции $\mathcal{G}_{ik}=(E_i+E_k)(\mathcal{G})$ $k=1,\dots,m;\ k\neq i$ однозначно определяют атом $\mathcal{G}$.

Доказательство. Обратное утверждение докажем индукцией по относительной размерности m. Атомы $\mathcal{G}_{1k}$, $k\leq m-1$, однозначно определяют атом $\mathcal{G}'\subset(\mathcal{E}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{E}_{m-1})$. Обозначим $\mathcal{G}''=(E_2+\dots+E_{m-1})\mathcal{G}'$. По транзитивности ортопроектирования должно быть $(E_2+\dots+E_{m-1})(\mathcal{G})=\mathcal{G}''$. Отсюда $\mathcal{G}'\subset(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{G}'')$, искомое $\mathcal{G}\subset(\mathcal{G}'+\mathcal{E}_m)\subset(\mathcal{G}''\oplus\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_m)$ и $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}''\oplus\mathcal{G}_{1m}$. В пред - предминимальном пространстве $\mathcal{G}''\oplus\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_m$ несовпадающие предминимальные $\mathcal{G}'\oplus\mathcal{E}_m$ и $\mathcal{G}''\oplus\mathcal{G}_{1m}$ обязательно пересекаются по атому - искомому $\mathcal{G}$.

10. Изучим факторные $\mathcal{C}$ – логики.

Лемма 10.I. Через два ортогональных связуемых атома $\mathcal{C}$ – логики $\hbar$ проходит только один $\mathcal{C}$ – пучок изоклинных $\hbar$ – атомов.

Следствия. I. Все атомы, лежащие в одном предминимальном пространстве $\mathcal{C}$ – логики, образуют один $\mathcal{C}$ – пучок. 2. Для трех попарно изоклинных атомов $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ – логики

$$\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{F})EF=\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{G})\rho^{-1}(\mathcal{G},\mathcal{F})e^{i\theta}EGF,\quad \theta=\theta(\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}) \tag{10.I}$$

Доказательство. Пусть через атомы $\mathcal{F}\angle\mathcal{E}$ проходят два $\mathcal{R}$ – пучка (6.5) с изометриями J' и J''. Тогда $V=J'^{*}J''$ есть унитарная изометрия $\mathcal{F}$ на себя. Пусть $|x\rangle\in\mathcal{F}$ – собственный вектор, $V|x\rangle=e^{i\theta}|x\rangle$. Атомы $\mathcal{G}'_{\theta,\varphi}$ и $\mathcal{G}''_{0,\varphi}$ пересекаются по ненулевому вектору

$$\cos\varphi|x\rangle + e^{i\theta}\sin\varphi J'|x\rangle = \cos\varphi|x\rangle + \sin\varphi J'V|x\rangle. \qquad (10.2)$$

Следовательно, атомы совпадают, что влечет $e^{i\theta} = V$ тождественно на $\mathcal{F}$, откуда согласно теореме 6.3, J' и J'' определяют один и тот же $\mathcal{C}$ - пучок. Далее, I) любой атом $\mathcal{G} \subset (\mathcal{F} \oplus \mathcal{E})$, $\mathcal{G}' \neq \mathcal{F}, \mathcal{E}$, определяет $\mathcal{R}$ - пучок, проходящий через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$. Наконец, 2) по следствию из леммы 8.2, $\mathcal{G}$ определяет в $\mathcal{C}$ - пучке, проходящем через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, ту же изометрию $\mathcal{E}$ на $\mathcal{K} = (\mathcal{E} + \mathcal{F}) \ominus \mathcal{E}$, что и проекция $\mathcal{G}$ на предминимальное пространство $\mathcal{E} + \mathcal{F}$.

<u>Определение.</u> Пусть $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{t} \mathcal{E}_j$ есть разложение факторного $\mathcal{L}$ - пространства на атомы. Систему $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_t ; \mathcal{F}\}$, где $\mathcal{F}$ - атом, контактирующий со всеми $\mathcal{E}_j$, будем называть (проективно - евклидовым) репером в $\mathcal{N}$. Число t назовем относительной размерностью $\mathcal{N}$.

Целое t, очевидно, не зависит от выбора разложения. Существование реперов вытекает из связуемости всех атомов из $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$.

<u>Теорема 10.2.</u> Пусть $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_t, \mathcal{F}\}$ - репер факторного пространства $\mathcal{C}$ - логики $\mathcal{L}$. Тогда

I. Совокупность всех $\mathcal{L}$ - атомов в $\mathcal{N}$ изоморфна связке всех прямых t - мерного комплексного Гильбертова пространства: определяемому с точностью до множителя $c \neq 0$ набору однородных координат $\zeta_1 : \zeta_2 : \ldots : \zeta_t$ относительно данного репера отвечает ровно один атом, и обратно.

2. Ограничение $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ на $\mathcal{N}$ изоморфно $\mathcal{U}(\mathcal{F})$:

$$U|_{\mathcal{N}} \simeq NUN = \sum \rho^{-1}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}) E_j F V F E_j \qquad (10.3)$$

для некоторого $V \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$, т.е. в ортонормированном базисе пространства $\mathcal{N}$, состоящем из согласованных через $\mathcal{F}$ базисов $\mathcal{E}_j$, имеет блочно - диагональный вид $diag(V, \ldots, V)$, и обратно.

<u>Следствие.</u> Для любого $\mathcal{L}$ - атома $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}(\mathcal{F})|_{\mathcal{G}} = \mathcal{U}(\mathcal{G})$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $U \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$. Тогда

$$NUN = \sum E_j U E_j = \sum \rho^{-1}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}) E_j U E_j F E_j = \sum \rho^{-1}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}) E_j F U F E_j$$

по коммутируемости U с E_j и F. Обратно, пусть некоторое преобразование $\mathcal{N}$ задано (9.3). Оно унитарно (на $\mathcal{N}$):

$U^*U = \sum E_j = UU^* = N$, поскольку $FV^*FVF = F$,

и для атомов $\mathcal{E}_j$ и $\mathcal{F}$ выполнены (6.I). По следствию из теоремы 9.2 его допустимо распространить на все $\mathcal{H}$, положив тождественным на $\mathcal{H}\ominus\mathcal{N}$. Прямое вычисление дает $UE_j=E_jU$, $UF=FU$, т.е. U переводит в себя и $\mathcal{F}$ и каждое из $\mathcal{E}_j$. Следовательно, U отображает на себя и каждую проекцию $\mathcal{F}_{jk}=(E_j+E_k)(\mathcal{F})$ атома $\mathcal{F}$ на "координатные плоскости" $\mathcal{E}_j\oplus\mathcal{E}_k$, где $\mathcal{F}_{jk}\neq 0$, $\mathcal{E}_j$, $\mathcal{E}_k$, по определению репера. По следствию I из леммы IO.I построенное U отображает на себя все атомы подпространства $\mathcal{E}_j\oplus\mathcal{E}_k$ как $\mathbb{C}$ - суперпозиции $\mathcal{E}_j$ и $\mathcal{F}_{jk}$. В частности, для любого атома $\mathcal{G}\subset\mathcal{N}$ его проекции $\mathcal{G}_{jk}=(E_j+E_k)(\mathcal{G})$ переходят в себя. Но по лемме 9.3 они однозначно определяют $\mathcal{G}$. Далее, за однородные координаты атома $\mathcal{G}$ можно взять набор $\zeta_1:\ldots:\zeta_t$, где $|\zeta_k|=\rho(\mathcal{G},\mathcal{E}_k)$, $\arg\zeta_k=\theta$, когда проекция $\mathcal{G}_{ok}$ атома $\mathcal{G}$ на $\mathcal{F}=\mathcal{E}_k$ есть $(\cos\varphi : e^{i\theta}\sin\varphi)$ - суперпозиция атомов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_k$ при $\mathcal{G}_{ok}\neq 0,\mathcal{E}_k$.

Теорема IO.3. Операции $\oplus$, $\ominus$, $\Cap$, $\mathcal{S}_{a:b}$, $a,b\in\mathbb{C}$, образуют полную систему операций в логиках фон Неймана.

Доказательство. Пусть $\Phi=\{\mathcal{A}_\alpha\}$ - некоторое семейство подпространств, $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\Phi)$ - логика фон Неймана, порожденная Φ, $\mathcal{L}'$ - $\mathbb{C}$ - логика, порожденная Φ. Так как операции $\mathbb{C}$ - логики унитарно ковариантны, то $\mathcal{L}\supseteq\mathcal{L}'\supseteq\Phi$, и, по теореме 4.I, $\mathcal{U}(\mathcal{L})=\mathcal{U}(\mathcal{L}')=\mathcal{U}(\Phi)$. Следовательно, факторные пространства у $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают, так как они определяются строением центра $\mathcal{U}(\Phi)$. Для каждого $\mathcal{L}'$ - атома $\mathcal{G}$ унитарная группа $\mathcal{U}(\mathcal{L}')|_{\mathcal{G}}=\mathcal{U}(\mathcal{G})$ неприводима, поэтому каждый $\mathcal{L}'$ - атом есть также $\mathcal{L}$ - атом. Пусть факторное пространство $\mathcal{N}=\mathcal{E}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{E}_t$, и пусть $\mathcal{L}$ - атом $\mathcal{G}$ имеет проекции $\mathcal{G}_{jk}=(E_j+E_k)(\mathcal{G})$ на $\mathcal{E}_j\oplus\mathcal{E}_k$. По следствию I из леммы IO.I весь $\mathbb{C}$ - пучок $\mathcal{L}$ - атомов предминимального $\mathcal{E}_j\oplus\mathcal{E}_k$ принадлежит $\mathcal{L}'$, т.е. $\mathcal{G}_{jk}\in\mathcal{L}'$, $\forall j\neq k$. Тогда $\mathcal{G}\in\mathcal{L}'$ по лемме 9.3.

Наши рассуждения существенно использовали теорему о бикоммутанте. Однако, можно, см. [I7], построить теорию $\mathbb{C}$ - логик чисто геометрически, аналогично излагаемой ниже теории $\mathbb{R}$ -логик.

В определении алгебры фон Неймана можно опустить требование унитальности. Тогда в определении логики следует отбросить требование $\mathcal{H}\in\mathcal{L}$. При $\dim\mathcal{H}<\infty$ мы придем тогда к (унитальной) логике подпространств максимального элемента $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{H}$ этой логики. Наконец, в наших построениях можно отбросить требование $\dim\mathcal{H}<\infty$, заменив его требованием конечности цепочек строго вложенных элементов логики.

II. Перейдем к изучению структуры конечномерных йордановых логик. Унитальности йордановых алгебр и соответствующих логик мы не будем требовать; однако при $\dim \mathcal{H} < \infty$ всякая неунитальная йорданова алгебра эрмитовых операторов является унитальной на максимальном элементе $\mathcal{M}$ логики.

Всякая самосопряженная часть $\mathcal{B}^*$ алгебры фон Неймана является йордановой; следовательно, логики фон Нейманова - йордановы. Поэтому, для порожденных логик справедливо включение $h_N(\{A_\alpha\}) \supseteq h_J(\{A_\alpha\})$, и все операции йордановой логики действуют в фон Неймановой. Логику $h_N(\{A_\alpha\}) = h_N(h_J)$ по аналогии с алгеброй мы будем называть обертывающей логикой фон Неймана. Мы примем стандартное обозначение йорданова умножения:

$$2A \circ B = AB + BA.$$

Теорема II.I. Операции над ортопроекторами, отвечающие операциям $\oplus$, $\ominus$, $\cap$, $S_{a:b}$, Q, $b \in \mathbb{R}$, над соответствующими подпространствами, являются йордановыми алгебраическими операциями и их пределами.

Доказательство. Для ортопроектора G относительно ортопроектора F справедливо разложение Пирса:

$$G^{(1)} = FGF = 2(F \circ G) \circ F - F \circ G, \qquad \text{(II.I)}$$

$$G^{(1/2)} = FG(B-F) + (B-F)GF = -4(F \circ G) \circ F + 4F \circ G, \qquad \text{(II.2)}$$

$$G^{(0)} = (B-F)G(B-F) = 2(F \circ G) \circ F - 3F \circ G + G, \qquad \text{(II.3)}$$

$G = G^{(1)} + G^{(1/2)} + G^{(0)}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$, см. [2], [3]. Ортопроектор K на $\mathcal{K} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ выражается через FGF по (5.5). Для изоклинных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ проходящий через них $\mathcal{R}$ - пучок подпространств описывается при $\theta = 0$ ортопроекторами (6.5), являющимися по (6.7) - линейными комбинациями $G^{(1)}$, $G^{(1/2)}$, $G^{(0)}$.

Лемма II.2. Пусть $\{\mathcal{G}_\varphi\}$ есть $\mathcal{R}$ - пучок, J - определяющая его изометрия $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}$ на $\mathcal{G}_{\pi/2} = \mathcal{E}$. Самосопряженные операторы вида

$$A = \xi F + \eta(EJF + FJ^*E) + \zeta E, \quad \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \qquad \text{(II.4)}$$

образуют йорданову алгебру. Каждый такой оператор допускает спектральное разложение

$$A = \lambda_1 G_\psi + \lambda_2 G_{\psi - \pi/2}; \quad G_\psi + G_{\psi-\pi/2} = F + E, \qquad \text{(II.5)}$$

т.е. его собственные подпространства принадлежат исходному пучку.

Доказательство. В J - согласованном базисе $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$ ограничение на $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$ оператора A имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \zeta \end{pmatrix} \otimes 1\!\!1_{\mathcal{X}} \qquad (11.6)$$

где $\otimes$ – кронекеровское произведение. Формулы приведения кривой второго порядка к главным осям известны из аналитической геометрии, ср. [21] , § 2.

Теорема 11.3. Любой элемент Йордановой логики $\mathcal{L}(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\})$ может быть построен из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ применением конечного числа операций $\oplus$, $\ominus$, Π , $\mathcal{S}_{a:b}$, a , $b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Разложение (5.1) пространства $\mathcal{H}$ вполне приводит операторы F и $\mathcal{G}$. К каждому слагаемому $\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k$ применима лемма 11.2.

Таким образом, если Йордановы логики порождаются унарными и бинарными операциями, то они совпадают с $\mathbb{R}$ – логиками (заметим для сравнения, что в Вигнеровых логиках, отвечающих реверсным Йордановым алгебрам эрмитовых операторов, бинарных операций не хватает). По теореме 9.2 любая $\mathbb{R}$ – логика разлагается в прямую сумму факторных. Ключевым результатом в теории факторных $\mathbb{C}$ – логик была лемма 10.1, давшая описание структуры атомов предминимального пространства. Изучим, поэтому, аналогичную структуру в $\mathbb{R}$ – логиках.

12. Фиксируем предминимальное подпространство $\mathcal{B}$ и его разложение $\mathcal{B}=\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}$. Будем описывать ортопроекторы на атомы $\mathcal{G}\subset\mathcal{B}$ редуцированными на $\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}$ блочными операторами

$$G = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \; id_{\mathcal{F}} & \cos\varphi\,\sin\varphi\, U^* \\ \cos\varphi\,\sin\varphi\, U & \sin^2\varphi\; id_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} , \qquad (12.1)$$

опуская окаймляющие нулевые блоки для $\mathcal{B}^\perp$, что нагляднее, чем (6.5). Здесь изометрия

$$U=\rho^{-1}(\mathcal{F},\mathcal{G})\,\rho^{-1}(\mathcal{G},\mathcal{E})\,EGF,$$

см. (6.7), $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=\cos\varphi$, $\rho(\mathcal{G},\mathcal{E})=\sin\varphi$

Лемма 12.1. Пусть атомы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ отличны от $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$; V и W – определяемые ими изометрии $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, φ и ψ – их углы с $\mathcal{F}$. Тогда

$$V^*W+W^*V=2\gamma\, id_{\mathcal{F}} , \quad WV^*+VW^*=2\gamma\, id_{\mathcal{E}} ; \qquad (12.2)$$

$$\gamma=[\rho^2(\mathcal{K},\mathcal{L})-\cos^2\varphi\cos^2\psi-\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi](2\cos\varphi\cos\psi\sin\varphi\sin\psi)^{-1}. \qquad (12.3)$$

Доказательство. Так как атомы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ изоклинны или ортогональны, то $KLK=\rho^2(\mathcal{K},\mathcal{L})K$ по (6.1). Подставляя сюда блочные записи вида (12.1), получаем [19] для каждого блока первое из соотношений (I2.3).

Будем называть атомы, образующие и с $\mathcal{F}$ и с $\mathcal{E}$ угол $\pi/4$ серединными. Каждый оператор $2G_{\pi/4}-B$ описывает симметрию $\mathcal{B}$, отображающую $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, а $\mathcal{E}$ – на $\mathcal{F}$, [2I] :

$$G_{\pi/4}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} id_{\mathcal{F}} & V^* \\ V & id_{\mathcal{E}}\end{pmatrix},\ 2G_{\pi/4}-B=\begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0\end{pmatrix}. \qquad (I2.4)$$

Оператор $2G_{\pi/4}-B=(\sin\varphi\cos\varphi)^{-1}G_{\varphi}^{(1/2)}$ отвечает изометрии, индуцируемой атомами половины $-\mathcal{R}$ – пучка. Ортогональный $\mathcal{G}_{\pi/4}$ атом $\mathcal{G}_{-\pi/4}$ задает изометрию $-V$, порождаемую второй половиной $\mathcal{R}$ – пучка. Наша цель – показать, что операторы (I2.4) порождают йорданову алгебру самосопряженных операторов вида(II.4).

Вычислим скалярную характеристику $\gamma(V,W)$ изометрий V и W через характеристики серединных атомов:

$$\gamma=2\rho^2(\mathcal{K}_{\pi/4},\mathcal{L}_{\pi/4})=:(V,W)=(W,V). \qquad (I2.5)$$

При этом $(V,V)=1$, и обратно; $(V,-V)=-1$; и $(V,W)=0$, когда $\mathcal{K}_{\pi/4}$ и $\mathcal{L}_{\pi/4}$ образуют угол $\pi/4$.

Лемма I2.2. Пусть серединные атомы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ не совпадают и не ортогональны. Тогда любая $\mathcal{R}$ – суперпозиция $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ также будет серединным атомом, задающим изометрию $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$ вида

$$U=\alpha V+\beta W,\qquad \alpha,\beta\in\mathcal{R}. \qquad (I2.6)$$

Обратно, каждой паре $\alpha:\beta$ отвечает единственная $\mathcal{R}$ – суперпозиция $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ с изометрией (I2.6) и нормировкой

$$1=(U,U)=\alpha^2+2\alpha\beta(V,W)+\beta^2. \qquad (I2.7)$$

Доказательство. Форма в правой части (I2.7) неотрицательна. Пусть ψ – угловой параметр $(a:b)$ – суперпозиции, $\mathcal{G}_0=\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_\varphi=\mathcal{L}$. Тогда

$$a:b=\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi-\cos\psi.$$

По (6.4), (I2.I) и (I2.4) ортопроектор G_ψ линейно выражается через ортопроекторы $2K-B$, $2L-B$ и B, откуда $\mathcal{G}_\psi$ есть серединный атом, которому отвечает изометрия U с

$$\beta(\psi)=\sin 2\psi\cdot(\sin 2\varphi)^{-1},\quad \alpha(\psi)=\cos 2\psi-\beta(\psi)\cos 2\varphi;$$

$$\alpha:\beta=\sin 2\varphi\cdot\mathrm{ctg}\,2\psi-\cos 2\varphi;\quad \mathrm{tg}\,2\psi=\sin 2\varphi\cdot[\cos 2\varphi+\alpha:\beta]^{-1}.$$

Последнее равенство позволяет определить два значения ψ по $\alpha:\beta$ Одно соответствует паре (α,β), другое паре – $(-\alpha,-\beta)$.

Лемма I2.3. Неотрицательные кратные λU изометрий $U:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ задаваемые по (I2.4) серединными подпространствами, образуют $\mathcal{R}$ –

– линейное евклидово пространство $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ гомотетий $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, со скалярным произведением

$$(\lambda V, \mu W) := \lambda\mu[2p(\mathcal{K},\mathcal{L})-1].$$

Соответствие $^*: V \rightleftarrows V^* = V^{-1}$, навязываемое (I2.4), устанавливает изоморфизм $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

Доказательство. Умножение на отрицательное число не выводит из $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, поскольку $-\lambda V = \lambda\cdot(-V)$.

Теорема I2.4. Самосопряженные операторы на $\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}$ блочного строения

$$A = \begin{pmatrix} \xi\, id_{\mathcal{F}} & \eta V^* \\ \eta V & \zeta\, id_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}, \tag{I2.8}$$

где изометрии $V: \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ порождены $\mathcal{R}$- пучками, проходящими через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$, образуют Йорданову алгебру (порядка два). Все ее идемпотенты суть ортопроекторы на атомы в $\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$, и обратно.

Известный результат [2] позволяет описать все Йордановы алгебры порядка два и отвечающие им $\mathcal{R}$ – логики. Чтобы независимо интерпретировать этот результат на языке геометрии, построим исчисление гомотетий. Выберем ортонормированный базис пространства $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$: $W : V_1,\dots,V_\nu$. Заметим, что соответствующие серединные подпространства $\mathcal{K}; \mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_\nu$ вместе с $\mathcal{F}$ образуют максимальную систему атомов в $\mathcal{B}$, наклоненных друг к другу под углами $\pi/4$. Рассмотрим теперь множество $W^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ гомотетий $\mathcal{F}$ на себя специального вида $X = \lambda W^{-1}V = W^{-1}\cdot\lambda V,\ \lambda \geqslant 0$, где фиксированное $W^{-1} = W^*$. Множество $\mathfrak{X}$ $\mathcal{R}$ – линейно и содержит $W^{-1}W = 1\!\!1 = id_{\mathcal{F}}$. По (I2.2) в нем имеет смысл операция * :

$$(\lambda W^* V)^* = X^* = 2\langle X, X\rangle\cdot 1\!\!1 - X = \lambda V^* W,$$

где скалярное произведение определено как

$$\langle \lambda_1 W^* V_1,\ \lambda_2 W^* V_2\rangle := \lambda_1\lambda_2(V_1, V_2).$$

Выполняя последовательно действия, убеждаемся, что

$$X^*X = \lambda^2 V^{-1}WW^{-1}V = XX^* = \langle X,X\rangle 1\!\!1 = \langle X^*X^*\rangle 1\!\!1. \tag{I2.9}$$

Следовательно, у каждого элемента $X \neq 0$ есть обратный. Далее, $\mathfrak{X}$ является Йордановой алгеброй:

$$X\circ Y = \langle Y, 1\!\!1\rangle X + \langle X, 1\!\!1\rangle Y - \langle X, Y\rangle 1\!\!1,$$

что получается [19] трехкратным использованием (I2.2).

Вообще говоря, произведение XY гомотетий $X\,Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ не будет гомотетией нашего специального вида, порожденной под логикой $\hbar \cap (\mathcal{F}\oplus\mathcal{E})$. Однако такое произведение будет линейным оператором на $\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}$. В частности, для базисных элементов получаем

$$\mathbb{1}X_j = X_j \cdot \mathbb{1} = X_j\,, \quad X_j^2 = -\mathbb{1}, \quad X_j^* = -X_j\,, \quad 1 \le j \le \nu; \qquad (12.10)$$
$$X_j \cdot X_k + X_k \cdot X_j = 0, \qquad 1 \le j \ne k \le \nu. \qquad [21]$$

Таким образом, наши специального вида индуцированные гомотетии образуют гиперкомплексную числовую систему. Отсюда, изометрия U входящая в представление (12.8) эрмитовых операторов в таковое (12.1)ортопроекторов должна иметь вид

$$U = W(\gamma_0\mathbb{1} + \gamma_1 X_1 + \ldots + \gamma_\nu X_\nu); \quad \forall_k\,, \ \gamma_k \in \mathbb{R} \qquad (12.11)$$
$$U^* = (\gamma_0\mathbb{1} - \gamma_1 X_1 - \ldots - \gamma_\nu X_\nu)W^*; \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_\nu^2 = 1.$$

Число ν определяет размерность $\nu+3$ Йордановой алгебры наблюдаемых на $\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}$, и потому оно инвариантно. Это алгебраическое соображение показывает инвариантность исходной геометрической конструкции с отражениями. Алгебра же $\mathfrak{X}$ специально вида индуцированных гомотетий атома на себя была нужна выше лишь для удобной координатизации.

13. Лемма 13.1. Если в факторном пространстве $\mathcal{N}$ найдутся три ортогональных атома, то для каждого его атома $\mathcal{E}$ алгебра гомотетий $\mathfrak{X}_\mathcal{E}$, индуцированная подлогикой $\hbar \cap (\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}')$ не зависит от выбора $\mathcal{E}'$, и для всех $\mathcal{E} \in \hbar \cap \mathcal{N}$ алгебры $\mathfrak{X}_\mathcal{E}$ геометрически изоморфны.

Доказательство. Если атом $\mathcal{E}_1$ контактирует с $\mathcal{E}_2$, то по следствию из леммы 8.2 взаимное проектирование $\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$ на $\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_2$ устанавливает связь изометрий $W_0^2 = W_0^1 I_1^2$, $U_2^0 = I_2^1 U_1^0$. Отсюда $W_0^2 U_2^0 = W_0^1 U_1^0$ и по линейности совпадение сохраняется для всех кратных от U . Далее, изоморфизм алгебр для $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ и для $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_2$ установлен леммой 12.3.

В пред-предминимальном пространстве алгебра $\mathfrak{X}$ изометрий атома на себя не зависит от способа ее построения, потому что здесь существует конструкция, позволяющая перемножать $\hbar$ -индуцированные изометрии атома на себя. Она похожа на классические [22], [7] , ср.также [2] .

Лемма 13.2. Пусть пред-предминимальное $C = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3$ Каждые два атома $\mathcal{G}_{12} \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$, $\mathcal{G}_{12} \ne \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$,

$$\mathcal{G}_{23} \subset (\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3), \quad \mathcal{G}_{23} \ne \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\,,$$

контактируют. Проходящий через них $\mathcal{R}$ - пучок пересекает $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_3$ по атому $\mathcal{G}_{13} \neq \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$, $\mathcal{G}_{13} = (\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{23}) \cap (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_3)$.
Изометрии $\mathcal{J}_i^j$ подпространств $\mathcal{E}_i$ на $\mathcal{E}_j$, определяемые $\mathcal{G}_{ij}$ по (6.8) связаны:

$$\mathcal{J}_3^1 = -\mathcal{J}_3^2 \mathcal{J}_2^1 ; \quad \mathcal{J}_j^i = I_j^{ij} I_{ij}^i . \tag{13.1}$$

Доказательство. Скалярное произведение $\cos\varphi \cos\psi \langle x | u \rangle$ между единичными векторами

$$\cos\varphi |x\rangle + \sin\varphi \mathcal{J}_1^2 x\rangle = |y\rangle \in \mathcal{G}_{12}$$
$$\cos\psi |u\rangle + \sin\psi \mathcal{J}_3^2 u\rangle = |v\rangle \in \mathcal{G}_{23}$$

достигает максимума при $|x\rangle = |u\rangle$. Следовательно, по (5.2) и (5.3) $\mathcal{S}_{a:b} =$

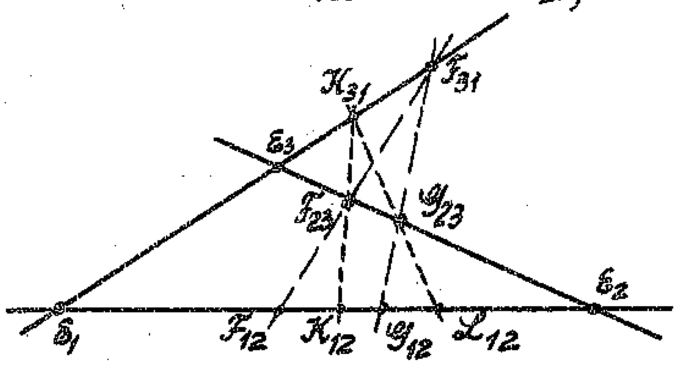
$$= \{ |w\rangle = (a\cos\varphi + b\cos\psi)|x\rangle + a\sin\varphi \mathcal{J}_1^2 |x\rangle + b\sin\psi \mathcal{J}_3^2 |x\rangle, \forall |x\rangle \in \mathcal{E}_2 \}.$$

При $a : b = -\cos\psi : \cos\varphi$ имеем $\mathcal{G}_{13} = \mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{G}_{12}, \mathcal{G}_{23}) \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_3)$.
Заметим, что когда $\mathcal{G}_{2j} = (E_2 + E_j)(\mathcal{G})$, то $\mathcal{G}_{13} \perp (E_1 + E_3)(\mathcal{G})$.

Теорема 13.3. Если в факторном пространстве $\mathcal{N}$ найдутся три ортогональных атома, то йорданова алгебра $\mathcal{K}$ гомотетий любого атома $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ на себя, индуцированная логикой $L \cap \mathcal{N}$, является вещественной операторной алгеброй с делением.

Следствие. В условиях теоремы система $\mathcal{K}$ гиперкомплексных чисел есть или поле $\mathbb{R}$, или поле $\mathbb{C}$, или некоммутативное поле $\mathbb{Q}$ кватернионов.

Доказательство. Продолжим построение, описанное в формулировке леммы 13.2. Пусть $\mathcal{F}_{12} \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$ и $\mathcal{F}_{23} \subset (\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3)$



определяют основные изометрии $W_1^2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ и $W_3^2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$.
Проходящий через $\mathcal{F}_{12}$ и $\mathcal{F}_{23}$ $\mathcal{R}$ - пучок пересекается с $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_3$ по атому $\mathcal{F}_{31}$, определяющему изометрию $W_3^1 = -W_3^2 W_2^1$. Пусть $X = W_2^1 V_1^2$, $Y = W_2^1 V_1^2$, где изометрии V_1^2 и V_1^2 задаются атомами $\mathcal{G}_{12}$, $\mathcal{K}_{12} \subset (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)$, см. чертеж.

Проведем через $\mathcal{G}_{12}$ и $\mathcal{F}_{31}$ новый $\mathcal{R}$ - пучок, пересекающий $\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3$ по атому $\mathcal{G}_{23}$, задающему связь $V_2^3 = -V_2^1 W_1^3$. Теперь проведем $\mathcal{R}$ - пучок через $\mathcal{F}_{23}$ и $\mathcal{K}_{12}$ до пересечения с $\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_3$ по атому $\mathcal{K}_{31}$, задающему связь $V_3^1 = -W_3^2 V_2^1$. Наконец, соединив $\mathcal{G}_{23}$ и $\mathcal{K}_{31}$ $\mathcal{R}$ - пучком, получим $\mathcal{L}_{12} \subset (\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)$ со связью $J_2^1 = -V_2^3 V_3^1$. Сопоставляя все связи, находим

$$W_1^2 J_2^1 = -W_1^2 V_2^1 W_1^3 W_3^2 V_2^1 = W_1^2 V_2^1 W_1^2 V_2^1 = XY.$$

Таким образом, числовая система $\mathbb{X}$ есть алгебра. Обратные элементы X^{-1} при $X \neq 0$ принадлежат алгебре по (I2.9)

Утверждение следствия вытекает из теоремы Фробениуса [23] Поскольку отдельные этапы ее доказательства были проведены выше, проведем и заключительный вывод. При $\nu=0$ $\mathbb{X}=\mathbb{R}$, при $\nu=1$ $\mathbb{X}=\mathbb{C}$. При $\nu \geqslant 2$ $\mathring{i}$ и $\mathring{j}$ - две мнимые единицы. Тогда $\mathring{k}=\mathring{i}\mathring{j}$ - третья мнимая единица, удовлетворяющая (I2.I0), что дает $\mathbb{X} \supseteq \mathbb{Q}$. Если $\mathring{i}$, $\mathring{j}$, $\mathring{\ell}$ - три ортогональные мнимые единицы, то $\mathring{f}=\mathring{i}\mathring{j}\mathring{\ell}=\mathring{f}^*$ и $\mathring{f}^2=\mathbb{1}$. Отсюда

$$2\mathring{f}=\mathring{f}+\mathring{f}^*=2\langle \mathring{f},\mathbb{1}\rangle\mathbb{1}, \quad \mathring{f}=\pm\mathbb{1}, \quad \mathring{\ell}=\pm\mathring{i}\mathring{j}.$$

В доказательстве была существенно использована ассоциативность умножения изометрий как операторов,(что оправдано, если оставаться в рамках исходного Гильбертова пространства кет-векторов над полем $\mathbb{C}$).

I4. Каждый атом $\mathcal{G}$ в факторном пространстве $\mathcal{N}$ с репером $\{\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_t;\mathcal{F}\}$ можно охарактеризовать величинами $\rho_k=\rho(\mathcal{E}_k,\mathcal{G})$ и изометриями V_k^j координатных атомов:

$$E_k V_k^j E_j = \rho^{-1}(\mathcal{E}_k,\mathcal{G})\rho^{-1}(\mathcal{E}_j,\mathcal{G}) E_k G E_j, \tag{I4.I}$$

определенными, когда $\rho(\mathcal{E}_k,\mathcal{G})\neq 0$, $\rho(\mathcal{E}_j,\mathcal{G})\neq 0$. Эти изометрии по лемме 8.2 связаны цепными соотношениями

$$V_k^j V_j^k = id_{\mathcal{E}}; \quad V_k^i V_i^j V_j^k = id_{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E}=\mathcal{E}_k. \tag{I4.2}$$

<u>Лемма I4.I.</u> Задание отношений $\rho(\mathcal{E}_1,\mathcal{G}):\dots:\rho(\mathcal{E}_t,\mathcal{G})$ и всех имеющих смысл изометрий V_k^j однозначно определяет атом $\mathcal{G}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{G}_{jk} := (E_j+E_k)(\mathcal{G})$. Если $\mathcal{G}$ контактирует с $\mathcal{E}_j$ и с $\mathcal{E}_k$, то по следствию из леммы 8.2 атом $\mathcal{G}_{jk}$ определяет $\mathcal{R}$ - пучок, проходящий через $\mathcal{E}_j$ и $\mathcal{E}_k$ с той же изометрией V_k^j и углом φ, где $\cos\varphi:\sin\varphi=\rho(\mathcal{E}_j,\mathcal{G}):\rho(\mathcal{E}_k,\mathcal{G})$ Обратно, изометрия V_k^j и угол φ однозначно определяют $\mathcal{G}_{jk}$.

Проективно-евклидовый репер $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_t; \mathcal{F}\}$ факторного пространства $\mathcal{N}$ задает изометрии

$$E_k W_k^j E_j = \rho^{-1}(\mathcal{E}_k, \mathcal{F})\rho^{-1}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}) E_k F E_j \tag{I4.3}$$

для всех пар j, k, причём $W_i^i = id_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$. Поэтому, удобно описывать изометрии U_k^j через порожденные логикой изометрии какого-либо координатного атома $\mathcal{E}_i$, т.е. через числа, по правилу

$$U_k^j \longleftrightarrow W_k^i U_i^i W_i^j \tag{I4.4}$$

Определение. Изометрии U_i^i и U_ℓ^ℓ координатных атомов $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_\ell$ факторного пространства $\mathcal{N}$ с репером $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_t; \mathcal{F}\}$ будем считать равными (относительно данного репера), если они связаны

$$U_\ell^\ell = W_\ell^i U_i^i W_i^\ell, \quad U_i^i = W_i^\ell U_\ell^\ell W_\ell^i. \tag{I4.5}$$

Нетрудно проверить, что это соответствие порождает изоморфизм алгебр $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{X}_\ell$ индуцированных гомотетий.

Теорема I4.2. Пусть $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_t; \mathcal{F}\}$ репер факторного пространства $\mathcal{N}$ $\mathcal{R}$ - логики h, $t \geqslant 3$. Каждому h - атому $\mathcal{Y} \subset \mathcal{N}$ отвечает определенный с точностью до произвольного правого множителя ненулевой набор

$$X_1 : X_2 : \dots : X_t; \quad \forall j, \ X_j \subset \mathfrak{X},$$

где тело $\mathfrak{X}$ гомотетий атома индуцировано логикой $h \cap \mathcal{N}$, и обратно. При $\rho_i = \rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{Y}) > 0$ можно принять:

$$\begin{aligned} &X_i = \rho_i Y; \\ &X_j = 0, \quad \forall j : \rho_j = 0; \\ &X_k = \rho_k W_i^k U_k^i Y, \quad \forall k : \rho_k > 0; \end{aligned} \tag{I4.6}$$

где $\mathfrak{X}$ реализовано как множество гомотетий $\mathcal{E}_i$, $Y \subseteq \mathfrak{X}$ - произвольный, $Y \neq 0$.

Доказательство. Формулы (I4.6) позволяют восстановить с точностью до множителя неотрицательные числа ρ_k и по "фазам" от X_k найти изометрии U_k^i и $U_k^\ell = U_k^i (U_\ell^i)^{-1}$, определяющие и задающие по лемме I4.I атом $\mathcal{Y}$. Далее, нетрудно проверить, что переход от $\mathcal{E}_i$ к $\mathcal{E}_\ell$ в качестве базового атома для реализации алгебры гомотетий, приводит к тем же формулам (5.2) с заменой i на ℓ и множителем

$$Y_\ell^\ell=(U_\ell^i W_i^\ell)(W_\ell^i Y_i^i W_i^\ell)=U_\ell^i Y_i^i W_i^\ell.$$

Из доказанной теоремы вытекает, что каждый атом $\mathcal{Y}\subset\mathcal{N}$ может быть представлен в параметрической форме

$$\mathcal{Y}=\{|u\rangle=W_1^i X_1|z\rangle+\ldots+W_t^i X_t|z\rangle,\ \forall|z\rangle\in\mathcal{E}_i\}, \tag{14.7}$$

и обратно, где $X_1:\ldots:X_t$ – однородные координаты $\mathcal{Y}$ в данном репере $\{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_t;\mathcal{F}\}$. Пусть однородные координаты нормированы

$$|X_k|=\rho(\mathcal{E}_k,\mathcal{Y}),\ k=1,\ldots,t,$$
$$|X_1|^2+\ldots+|X_t|^2=1, \tag{14.8}$$

что определяет их с точностью до фазы. Тогда ортопроектор на $\mathcal{Y}$ есть

$$G=\sum_{jk}E_k W_k^i X_k X_j^* W_i^j E_j \tag{14.9}$$

и обратно, ортопроектор указанного вида есть проектор на атом. Величина связи $\rho(\mathcal{Y}',\mathcal{Y}'')$ двух атомов $\mathcal{Y}',\mathcal{Y}''\subset\mathcal{N}$ задается

$$\rho^2(\mathcal{Y}',\mathcal{Y}'')=\sum_j Y_j Z_j^*\cdot\sum_k Z_k Y_k^*=|\sum_i Y_i Z_i^*|^2, \tag{14.10}$$

а при ненормированных координатах – аналогом 5.3.

15. <u>Теорема 15.1.</u> Пусть $\{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_t;\mathcal{F}\}$ – репер факторного пространства $\mathcal{N}$, $t\geqslant 3$. Операторы A вида

$$A=\sum_{j,k}E_k W_k^i Z_{jk} W_i^j E_j \tag{15.1}$$

образуют унитальное кольцо, изоморфное алгебре всех матриц порядка t над $\mathcal{X}$ ($=\mathbb{R}$, $=\mathbb{C}$, или $\mathbb{Q}$). Это описание не зависит от выбора атома $\mathcal{E}_i$. Эрмитовы операторы вида (15.1) выделяются условием

$$\forall j,k,\quad Z_{jk}^*=Z_{kj}\ . \tag{15.2}$$

Они образуют йорданову алгебру $\mathfrak{A}(\mathcal{N})$, изоморфную алгебре эрмитовых операторов на $\mathcal{X}^t$ со скалярным произведением

$$\tfrac{1}{2}(X_1Y_1^*+Y_1X_1^*+X_2Y_2^*+\ldots+X_tY_t^*+Y_tX_t^*).$$

<u>Доказательство.</u> Описание (15.1) линейно по Z_{jk} и выдерживает умножение. Условие (15.2) – необходимое и достаточное условие эрмитовости для оператора из блоков $W_k^i Z_{jk} W_i^j$.

<u>Теорема 15.2.</u> Ортопроекторы на h – подпространства $\mathcal{B}$, лежащие в факторном пространстве $\mathcal{N}$ при $t\geqslant 3$ описываются эрмитовыми идемпотентными операторами вида (15.1) с условием (15.2),

и обратно.

Следствие. Связка всех атомов $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ и $t \geq 3$ изоморфна связке всех прямых t - мерного Гильбертова пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, или $\mathbb{Q}$. Изоморфизм продолжается на ортодополнительную решетку всех подпространств из $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}$.

Доказательство. Подпространства с ортопроекторами указанного вида образуют по теореме I5.I Йорданову логику и потому покрывают $\mathbb{R}$ - логику $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}$.
Обратно, всякая эрмитова матрица в некотором ортогональном базисе приводится к диагональному виду (что следует, например, из максиминной теории). Поэтому, всякий элемент указанной йордановой алгебры раскладывается в ортогональную сумму $\mathfrak{h}$ - атомов.

Теорема I5.3. Операции $\oplus$; $\ominus$; $\cap$; $\mathcal{S}_{a:b}$, a, $b \in \mathbb{R}$, образуют полную систему операций в конечномерных Йордановых логиках.

Доказательство. Факторы порядка I тривиальны, для факторов порядка 2 полнота следует из теоремы I2.4, для факторов порядка $t \geq 3$ - из теоремы I5.2.

Одновременно мы получили описание Йордановых логик конечно размерности и конечномерных специальных Йордановых алгебр. Заметим, что в наших построениях за исходное $\mathcal{H}$ можно было взять Гильбертово пространство и над $\mathbb{R}$, и над $\mathbb{Q}$. Построение проективной плоскости Муфанг над октонионами мы не обсуждаем.

Каждая йорданова логика $\mathfrak{h}$ подпространств комплексного Гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по-факторно вкладывается в обертывающую логику фон Неймана, отвечающую алгебре фон Неймана, обертывающей исходную Йорданову алгебру эрмитовых операторов. Способ вложения каждого факторного подпространства $\mathcal{N}$ определяется гиперкомплексной числовой системой $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{h}$ - индуцированных гомотетий его атомов. При $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{H}_{2\nu}$ или $\simeq \mathbb{Q}$ существует (с точностью до эквивалентности) только одно точное неприводимое представление, а при $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{H}_{2\nu+1}$ или $\simeq \mathbb{C}$ - только два, комплексно сопряженные друг другу, см. [24]. Соответственно [25], каждый атом $\mathcal{E}$ логики $\mathfrak{h}$ раскладывается или

$$\mathcal{E} = \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{t} \qquad \mathcal{E} = \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{t'} \oplus \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{t''} \tag{I5.3}$$

где, грубо говоря, $\mathbb{C}^{2^\nu}$ - пространство неприводимого представления системы $\mathfrak{X}$, $\mathbb{C}^{t}$ - атом обертывающей логики (соответственно - два атома), $\mathcal{N} = \mathbb{C}^{t} \otimes \mathcal{E}$. Во втором случае факторное пространство $\mathcal{N}$ исходной логики расщепляется в ортогональную сумму двух факторных из обертывающей. Поэтому, факторная $\mathcal{R}$ - логика типа $\mathcal{C}$, вообще говоря, не является $\mathcal{C}$ - логикой. Знание конструкции вложения необходимо, например, при построении тензорных произведений алгебр наблюдаемых, т.е. при описании систем из независимых (невзаимодействующих) объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann, J.von : Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, (1932.)
2. Jordan,P., Neumann, J.von, Wigner, E.: Ann. Math. 35, 29-64 (1934).
3. Emch,G.: Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, New York: Wiley Interscience 1972.
4. Birkhoff, G., Neumann,J.von: Ann. Math., 37, 823-835, 1936.
5. Varadarajan, V.S.: Geometry of quantum theory, I,Princeton, (1968).
6. Piron, C.: Foundation of quantum physics, Reading,Benjamin (1976).
7. Neumann, J.von: Continuous geometry,Princeton, N.J.,1960.
8. Колмогоров А.Н.: Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936
9. Wick,G.C., Wightman,A.S., Wigner,E.P.: Phys.Rev.,88,101-105 (1952).
10. Боголюбов Н.Н.,Логунов А.А.,Тодоров И.Т.:Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля,Москва,Наука,1969.
11. Морозова Е.А.,Ченцов Н.Н.: Элементы стохастической квантовой логики,Новосибирск, препринт, Ин-та матем.СО АН СССР,1977.
12. Ченцов Н.Н.: Статистические решающие правила и оптимальные выводы, Москва, Наука, 1972. Algebraic foundation of mathematical statistics, Math.Operationsforashung und Statistik, ser.Statistics, 9, (267-276), 1978
13. Ахиезер А.И., Половин Р.В.: УФН, 107, 463-487,1972.
14. Murray, F.J.,Neumann, J.von: Ann.Math.,37,111,1936
15. Fillmore,P.A., Topping, D.M.: Duke Math.Journ.,34,333,1967.
16. Jordan, Camille: Bull.Soc.Math.de France, 3,103-174,1874-75 .
17. Морозова Е.А.,Ченцов Н.Н.: Унитарные эквиваринты семейства подпространств,Инст.прикл.матем.АН СССР,препринт № 52,1974.

18. Gallagher, P.X., Proulx, R.J.: in Contribution to Algebra, A collection of papers, dedicated to E.Kolchin, 157-164, Acad. Press, 1977.

19. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Элементарные йордановы логики, Инст.прикл.матем.АН СССР,препринт № 113, 1975, к теореме Йордана-фон Неймана-Вигнера; препринт № 129, 1975.

20. Morozova, E.A., Čencov, N.N.: in Lecture Notes in Mathematics, 550, 379-418, Springer, 1976.
правильная словесная формулировка теоремы 10.2 дана в 25, теорема 3.5.

21. Topping, D.M.; Jordan algebras of self-adjoint operators, Mem.Amer.Math.Soc.,53, 1965.

22. Gilbert, D.: Grundlagen der Geometrie,Leipzig, Teubner, 1930.

23. Frobenius, G.: J.reine angew.Math., 84, 59-63, 1878.

24. Weyl, H.: The classical groups, their invariant and representations, Princeton Univ. Press, 1939.

25. Морозова Е.А.,Ченцов Н.Н. : Структура семейства стационарных состояний квантовой цепи Маркова, Ин-т прикл.матем. АН СССР, препринт № 130, 1976.

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов "Некоммутативные квантовые логики /конечномерная теория/.
Редактор М.И. Граев. Корректор Н.Н. Ченцов.

Подписано к печати 10.04.81 г. № Т-05359, Заказ №159.
Формат бумаги 60Х90, 1/16. Тираж 200 экз.
Объем 1,3 уч. изд. л. Цена 10 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.