Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов

# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА НЕКОММУТАТИВНЫХ ЛОГИКАХ

( конечномерная теория )

Препринт № 129 за 1981 г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В. КЕЛДЫША АН СССР

Е.А. Морозова, Н.Н. Ченцов

# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА НЕКОММУТАТИВНЫХ ЛОГИКАХ

(конечномерная теория)

Москва - 1981

E.A. Morozova, N.N. Čencov, Probability Distributions on Noncommutative Logics (finite-dimensional theory)

(Abstract)

Recently the authors showed that the approach to quantum logics proposed by Birkhoff and von Neumann and based on the theory of orthocomplemented subspace lattices was incomplete. It has been established that in the finite-dimensional case a convenient complete system of quantum-logical operations in formed by: $1^\circ$ addition $\oplus$ of orthogonal subspaces, $2^\circ$ orthogonal subtraction $\ominus$ of embedded subspace from the embedding one, $3^\circ$ noncommutative generalized intersection of two subspaces, $4^\circ$ superposition of two isoclinic subspaces in an arbitrary relation (real or complex). Each noncommutative logic of subspaces, i.e. the lattice of subspaces closed with respect to the above system of operations, is corresponded by Jordan algebra of Hermitian observables, and vice versa. It is known that a probability measure on the logic induced by state on the algebra of observables is nonnegative, normalized and additive for orthogonal subspaces. One can calculate that it is quadratic on each pencil of isoclinic subspaces (i.e. on the pencil of all possible superpositions of two isoclinic subspaces). In the theory of polarized light such coherence is called a generalized Malus relation. In this paper it is proved that the above mentioned four properties of the induced probability measure are characteristic for any dimension of logic, which supplements the well known Gleason theorem.

C O N T E N T S

## INTRODUCTION

Random phenomena in microphysics cannot be described by the schemes of classical (or commutative as it is said now) probability theory because the logic of quantum events is non-Aristotelian. The following algebraic scheme has proved to be the most convenient method to assign an object of the noncommutative theory. An ultruweakly closed unitial Jordan algebra $\mathfrak{A}$ of bounded Hermitian operators acting on the Hilbert space $\mathcal{H}$ is assumed to be given. The algebra $\mathfrak{A}$ is a noncommutative (generally speaking) analog of classical (commutative) algebra of all bounded measurable functions on the space of elementary event. Elements of the algebra $\mathfrak{A}$ are called (bounded) observables. The probability state of the object is given by a nonnegative normalized normal $\mathbb{R}$ -functional $\mathbb{P}$ on $\mathfrak{A}$, $\mathbb{P}: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, - analog of mathematical expectation induced by the probability measure $\mathbb{P}$, see [1] - [3].

All the idempotents $e$ of the algebra of observables are orthoprojectors on corresponding subspaces $\mathcal{E} = e(\mathcal{H})$ of the space $\mathcal{H}$. By analogy with the commutative case, where the idempotents are indicators of measurable subsets of the space of elementary events, these subspaces are called events (as well as "yes-no"-experiments). The following natural question arises: Can the noncommutative probability theory be constructed in a more usual for probability researchers way, by starting from the "logics" of events and probability measures on them? For this two problems must be solved.

1°. One has to give an internal operational description of a class (or, as it is said, a quantum logic) $\mathcal{L}$ of all events of a random phenomenon (described by a noncommutative algebra $\mathfrak{A}$ of observables).

2°. One has to characterize by the internal way the measures on the logic $\mathcal{L}$ extending to the probability states on $\mathfrak{A}$.

The attempts to solve the first problem have long history. As early as 1936 in their basic paper [4] Birkhoff and von Neumann noted that a system of events in quantum logic was an orthocomplemented, (Weakly) modular lattice under the operations "+" of a (closed) vector sum of subspaces, " $\cap$ " meet of subspaces, and " $\perp$ " orthogonal complement. This notion is valid but only half the truth. Indeed the quantum logics form a remarkably more restricted class of lattices where any "projectively-Euclidean" geometric operations have sense. It is these (complementary) noncommutative operations that make the quantum logic so unlike the classic one. Meanwhile, the authority of [4] was so great that all subsequent works (see, for example, [5] , [6] ) were carried out in the course of a purely lattice (that is commutative) approach.

If one restricts oneself to the finite-dimensional space of "elementary events" a complete system of operation can be obtained by replacing the latice operation of meet of two subspaces with a broader noncommutative operation of contact (resulting in zero only if initial subspaces are orthogonal, and coinciding with their meet when it is different from zero) and by adding a nonclassic operation of superposition of two isoclinic subspaces (see our review in [7] ). The last operation depends on an angular parameter $\varphi$ , $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ ; its particular case is drawing a bisectrix of two isoclinic subspaces. As it is shown in [7] , the following operations are more convenient to consider basic: $1^{\circ}$ vector summation of two orthogonal subspaces, $\oplus$ ; $2^{\circ}$ proper orthogonal subtraction of an embedded subspace from the embedding one, $\ominus$ ; $3^{\circ}$ contact of two subspaces, $|\cap$ (see below formula (4.5)); $4^{\circ}$ superposition (coherent linear combination) of two isoclinic subspaces (see below formula (4.9)). They are convenient by that the orthoprojector onto the operation result can be easily expressed through orthoprojectors onto operands. For infinite-dimensional $\mathcal{H}$ instead of $3^{\circ}$ and $4^{\circ}$ one should introduce a hybrid operation depending on two parameters.

It is easy to see [4] that a probability state on $\mathfrak{A}$ determines on the logic $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$ of subspaces-events a functional additive in the following sense

$$\forall \mathcal{F} \perp \mathcal{G}, \quad \mathrm{P}\{\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}\} = \mathrm{P}\{\mathcal{F}\} + \mathrm{P}\{\mathcal{G}\}$$

It is known, however, that this property is not characteristic for it imposes no essential restrictions on the functional $\mathrm{P}$ at $\dim \mathfrak{L} = 2$ . We have noticed that the functional $\mathrm{P}$ on $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$ determined by the state must satisfy the generalized Malus relation that is well known from the theory of polarized light. Namely, for any four subspaces $\mathcal{G}_{\varphi}$ from an arbitrary pencil of isoclinic subspaces (see below formula (4.IO) at $\theta \equiv 0$ the values $\mathrm{P}(\varphi) = \mathbf{P}\{\mathcal{G}_\varphi\}$ must be related:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \mathrm{P}(\varphi_1) \\ 1 & \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \mathrm{P}(\varphi_2) \\ 1 & \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & \mathrm{P}(\varphi_3) \\ 1 & \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & \mathrm{P}(\varphi_4) \end{vmatrix} = 0 .$$

As it is proved in this paper, the properties of being non-negative, normalized, additive and malusian together distinguish at dim $\mathcal{H} < \infty$ the functionals on $\mathfrak{L}$ generated by states on $\mathfrak{A}$ .

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА НЕКОММУТАТИВНЫХ ЛОГИКАХ (конечномерная теория)

аннотация

Ранее авторы показали, что предложенный Биркгофом и фон Нейманом подход к квантовым логикам, основанный на теории ортодополнительных решеток подпространств гильбертова пространства, является неполным. В конечномерном случае, как установили авторы, удобная полная система квантово-логических операций состоит из: $1^0$ сложения $\oplus$ ортогональных подпространств, $2^0$ ортогонального вычитания $\ominus$ объемлемого подпространства из объемлющего, $3^0$ некоммутативного обобщенного пересечения двух подпространств, $4^0$ суперпозиции двух изоклинных подпространств в произвольном отношении (вещественном или комплексном). Каждой некоммутативной логике подпространств, т.е. решетке подпространств, замкнутой относительно вышеуказанной системы операций, отвечает Йорданова алгебра эрмитовых наблюдаемых, и обратно. Как известно, вероятностная мера на логике, индуцированная состоянием на алгебре наблюдаемых, неотрицательна, нормирована и аддитивна для ортогональных подпространств. Можно подсчитать, что она квадратична на каждом пучке изоклинных подпространств (т.е. на пучке всевозможных суперпозиций двух изоклинных подпространств). В теории поляризованного света такую связь называют обобщенным соотношением Малюса. В работе доказывается характеристичность указанных четырех свойств индуцированной вероятностной меры при любых размерностях логики, что дополняет известную теорему Глисона.

ВВЕДЕНИЕ. Случайные события микромира не описываются схемами классической (как теперь говорят, - коммутативной) теории вероятностей, потому что логика квантовых событий не является аристотелевой. Наиболее удобным способом задания объекта некоммутативной теории оказалась следующая алгебраическая схема. Задается некоторая ультраслабо замкнутая унитальная Йорданова алгебра $\mathfrak{A}$ ограниченных эрмитовых операторов, действующих на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ является некоммутативным (вообще говоря) аналогом классической (коммутативной) алгебры всех ограниченных измеримых функций на пространстве элементарных исходов. Элементы алгебры $\mathfrak{A}$ называются (ограниченными) наблюдаемыми. Вероятностное состояние объекта задается неотрицательным нормированным нормальным $\mathbb{R}$ - линейным функционалом $P$ на $\mathfrak{A}$, $P: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ - аналогом математического ожидания по вероятностной мере $P$, см. [I] - [3].

Все идемпотенты $e$ алгебры наблюдаемых являются ортопроекторами на соответствующие подпространства $\mathcal{E} = e(\mathcal{H})$ пространства $\mathcal{H}$. По аналогии с коммутативным случаем, где идемпотенты суть индикаторы измеримых подмножеств пространства элементарных исходов, эти подпространства называют событиями (а также "да - нет" - экспериментами). Возникает следующий естественный вопрос: Можно ли строить некоммутативную теорию вероятностей на более привычном для вероятностников пути, отправляясь от "логик" событий и вероятностных мер на них? Для этого надо решить две задачи:

I$^{0}$. Дать внутреннее операционное описание класса (или, как говорят, квантовой логики) $\mathcal{L}$ всех событий случайного явления (описываемого некоторой некоммутативной алгеброй $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ наблюдаемых).

2$^{0}$. Охарактеризовать внутренним образом меры на логике $\mathcal{L}$, продолжающиеся до вероятностных состояний на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$.

Попытки решить первую задачу имеют долгую историю. Еще в 1936 году в основополагающей статье [4] Биркгоф и фон Нейман заметили, что система событий в квантовой логике является ортодополнительной (слабо) модулярной решеткой относительно операций " + " (замыкания) векторной суммы подпространств, " $\cap$ " пересечения подпространств, и " $\perp$ " перехода к ортогональному дополнению. Это замечание справедливо, но является только половиной правды. На самом деле, квантовые логики образуют заметно более узкий класс решеток, и в них имеют смысл любые "проективно-евклидовы" геометрические операции. Именно эти (дополнительные) некоммутативные операции и делают квантовую логику столь непохожей на классическую. Между тем, авторитет [4] был столь велик, что все последующие работы, см., например, [5], [6], велись в русле чисто решеточного (т.е. коммутативного) подхода.

Если органичиться конечномерным пространством $\mathcal{H}$ "элементарных исходов", то полную систему операций можно получить, заменив решеточную операцию пересечения двух подпространств более широкой некоммутативной операцией контактирования (приводящей к нулю лишь если исходные подпространства ортогональны и совпадающей с их пересечением, когда оно отлично от нуля, и добавив неклассическую операцию суперпозиции двух изоклинных подпространств, см. наш обзор [7]. Последняя операция зависит от углового параметра $\varphi$, $0\leq\varphi<\pi$ ; ее частным случаем является проведение биссектрисы двух изоклинных подпространств. Как показано в [7], наиболее удобно взять за основные: $1^0$ операцию " $\oplus$ " векторного сложения двух ортогональных подпространств, $2^0$ операцию " $\ominus$ " собственного ортогонального вычитания объемлемого подпространства из объемлющего, $3^0$ операцию " $/\!\!\cap$ " контактирования двух подпространств, см. ниже формулу (4.5), $4^0$ операцию суперпозиции (когерентного линейного комбинирования) двух изоклинных подпространств, см. ниже формулу (4.9), так как для них ортопроектор на результат операции легко выражается через ортопроекторы на операнды. Для бесконечномерных $\mathcal{H}$ вместо $3^0$ и $4^0$ надо ввести гибридную операцию, зависящую от двух параметров.

Нетрудно видеть, см. [4], что вероятностное состояние на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ задает на логике $h=h_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$ подпространств - событий функционал, аддитивный в следующем смысле

$$\forall\ \mathcal{F}\perp\mathcal{G},\quad P\{\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}\}=P\{\mathcal{F}\}+P\{\mathcal{G}\}.$$

Однако, это свойство, как известно, не является характеристическим, так как не накладывает существенных ограничений на функционал $P$ при $dim\ h=2$ . Нами было замечено, что заданный состоянием функционал $P$ на $h_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$ должен удовлетворять обобщенному соотношению Малюса, хорошо известному из теории поляризованного света. А именно, для любых четырех подпространств $\mathcal{G}_\varphi$ из произвольного пучка изоклинных подпространств, см. ниже формулу (4.10) при $\theta\equiv 0$, значения $P(\varphi)=P\{\mathcal{G}_\varphi\}$ должны быть связаны:

$$det\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & P(\varphi_1)\\ 1 & \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & P(\varphi_2)\\ 1 & \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & P(\varphi_3)\\ 1 & \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & P(\varphi_4)\end{vmatrix}=0.$$

Как доказывается в настоящей работе неотрицательность, нормированность, аддитивность и малюсовость в совокупности выделяют при $dim\ \mathcal{H}<\infty$ функционалы на $h$ , порожденные состояниями на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ .

I. В классической теории вероятностей [8] распределение вероятностей описывается вероятностной мерой $P$ на $\sigma$ - алгебре $S$ событий, т.е. на классе $S$ подмножеств множества $\Omega$ всех элементарных исходов $\omega$ рассматриваемого случайного явления, замкнутого относительно операций объединения и пересечения, перехода к дополнению и перехода к монотонному пределу последовательности подмножеств.

Заметим, что элементарные исходы (состояния) $\omega$ этой схемы не обязаны быть событиями, т.е. что одноточечные множества могут не принадлежать алгебре $\mathcal{S}$.

Пусть $\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$ есть алгебра (над полем $\mathbb{R}$) всех $\mathcal{S}$ - измеримых ограничений функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$. При заданном $P$ каждая $f(\cdot)\in\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$ описывает случайную величину (наблюдаемую) со средним значением

$$\langle f\rangle_P=\int f(\omega)P\{d\omega\}=P(f). \tag{I.I}$$

Формула (I.I) сопоставляет каждой вероятностной мере $P$ на $\mathcal{S}$ неотрицательный нормированный нормальный $\mathbb{R}$ - линейный функционал $\mathbb{P}(\cdot)$ на $\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$. При этом

$$\forall\mathcal{F}\in\mathcal{S},\quad P\{\mathcal{F}\}=P(\chi_{\mathcal{F}}(\cdot)), \tag{I.2}$$

где $\chi_{\mathcal{F}}(\cdot)$ - индикатор события $\mathcal{F}$: $\chi_{\mathcal{F}}(\omega)=1$, если $\omega\in\mathcal{F}$, $\chi_{\mathcal{F}}(\omega)=0$, если $\omega\bar{\in}\mathcal{F}$.

Как известно, возможен альтернативный подход. Пусть дана алгебра $\mathfrak{A}$ (над полем $\mathbb{R}$) ограниченных функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$ замкнутая относительно перехода к поточечному монотонному пределу. Тогда $\mathfrak{A}=\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$ при некотором $\mathcal{S}$ и всякий неотрицательный: $P(f^2)\geq 0$, нормированный: $P(f_n)\to P(f)$, нормальный:

$$[\forall\omega\in\Omega,\ f_n(\omega)\to f(\omega)]\Rightarrow P(f_n)\to P(f), \tag{I.3}$$

$\mathbb{R}$ - линейный функционал $P(\cdot)$ на $\mathfrak{A}$ задает по (I.2) вероятностную меру на $\mathcal{S}$.

Пусть дано некоторое семейство $\mathcal{F}\!\!\!\!\!\varphi$ событий $\mathcal{F}\subseteq\Omega$. Семейство $\varphi$ определяет булеву $\sigma$ - алгебру $\mathcal{S}_{\varphi}$, - минимальный класс подмножеств, содержащий $\varphi$ и замкнутый относительно операций объединения, пересечения, перехода к дополнению и перехода к монотонному пределу. Это описание $\mathcal{S}_{\varphi}$ в "логических" терминах согласовано со следующим "алгебраическим" описанием. Пусть $\mathfrak{A}^{\varphi}$ - минимальная $\mathbb{R}$ - алгебра функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$, замкнутая относительно перехода к поточечному монотонному пределу и содержащую индикаторы $\chi_{\mathcal{F}}$ всех $\mathcal{F}\in\varphi$. Тогда идемпотенты алгебры $\mathfrak{A}^{\mathcal{S}}$ суть индикаторы множеств из $S_{\mathcal{B}}$ и обратно.

Вместо поля $\mathbb{R}$ в алгебраическом подходе можно взять поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда от функционала вероятности $\mathbb{P}$ на $\mathbb{C}_S$ надо дополнительно потребовать вещественность:

$$\forall f \in \mathbb{C}_S, \quad \mathbb{P}(f^*) = \overline{\mathbb{P}(f)}, \tag{I.4}$$

где $f^*: \forall \omega \in \Omega, \quad f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}.$

2. Традиционное описание случайного явления, как объекта некоммутативной теории вероятностей, может быть схематизировано следующим образом [9] , [10] , [3] . Задается абстрактное Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ объекта. Единичные векторы $|x\rangle \in \mathcal{H}$ описывают элементарные исходы явления (чистые состояния объекта). Задается замкнутая унитальная Йорданова алгебра $\mathfrak{A}$ ограниченных эрмитовых операторов, действующих на пространстве $\mathcal{H}$, - алгебра (ограниченных) наблюдаемых. Вероятностное состояние объекта описывается неотрицательным нормированным нормальным $\mathbb{R}$ - линейным функционалом на $\mathfrak{A}$ . Событиям ("да - нет" - экспериментам) отвечают идемпотенты алгебры $\mathfrak{A}$ , - ортопроекторы на подпространства $\mathcal{H}$ . Элементарные исходы явления, как мы видим, не являются событиями, равно как чистые (векторные) состояния, строго говоря, не являются вероятностными состояниями.

Обычно принимают, что алгебра $\mathfrak{A}$ есть самосопряженная часть своей обертывающей алгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ . Тогда, аналогично классическому случаю (I.4), вероятностное состояние можно описать нормированным: $P(\mathbb{1}) = 1$ , вещественным неотрицательным:

$$\forall A \in \mathcal{B}, \ Im\,P(A) = -Im\,P(A^*), \quad P(AA^*) \geq 0, \tag{2.1}$$

нормальным $\mathbb{C}$ - линейным функционалом $P$ на $\mathcal{B}$ .

В согласии с названиями алгебр такие схемы мы будем называть схемами фон Неймана, оставляя название схем Йордана за общим случаем. Разумеется, это - чистая условность, ср. [2] , [9] .

Здесь мы рассматриваем конечномерные пространства $\mathcal{H}$ кет-векторов. Благодаря этому мы можем игнорировать проблемы топологии, в том числе требование нормальности функционала $P$ . Кроме того, мы можем использовать известную классификацию конечномерных алгебр фон Неймана и Йордана.

Для любой унитальной алгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ линейных операторов на $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} < \infty$ существует ортогональное разложение:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{H}_j : \quad \forall j, \quad \mathcal{H}_j = \mathcal{N}_j \otimes \mathcal{M}_j ; \tag{2.2}$$

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad A = \bigoplus_{j=1}^{m} A_j \otimes 1^{(j)} ; \quad \mathcal{B} = \bigoplus_{j=1}^{m} (\mathcal{B}_j \otimes 1^{(j)}) \tag{2.3}$$

где $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(\mathcal{N}_j)$ - алгебра всех $C$ - линейных операторов на $\mathcal{N}_j$, $1^{(j)}$ - единичный оператор в пространстве $\mathcal{M}_j$. В простейшем случае, когда все $\mathcal{M}_j$ тривиальны, $\mathcal{H}_j = \mathcal{N}_j$, $\forall j$, получается стандартное описание объекта с помощью системы когерентных секторов [9], [10]. Очевидно, в общем случае описание $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ рассматриваемого объекта может быть редуцировано до $\oplus \mathcal{N}_j$, $\otimes \mathcal{B}_j$. Возникающая проблема изоморфизма описаний объекта решается в терминах категории вполне положительных марковских отображений [11], аналогично тому как она была решена для классической математической статистики, см., например, библиографию в [12].

С любой замкнутой йордановой алгеброй $\mathfrak{A}$ эрмитовых операторов также связывается разложение

$$\mathcal{H} = \quad \mathcal{H}_j ; \quad \mathfrak{A} = \quad \mathfrak{A}_j ; \quad \forall j, \quad \mathfrak{A}_j = H_j \mathfrak{A} H_j , \tag{2.4}$$

где $H_j$ - ортопроектор на $\mathcal{H}_j$. При этом каждый фактор $\mathfrak{A}_j$ изоморфен (т.е. является точным представлением) какой-либо йордановой алгебре $\mathcal{J}_{k,\nu}$ всех эрмитовых линейных операторов на некотором (правом) векторном пространстве $\mathcal{L}_k$, размерности $k = k(j)$, из следующего списка: $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{L}_2 = {}^2\mathbb{H}_\nu^2$, где $\mathbb{H}_\nu$ - алгебра Клиффорда с $\nu$ мнимыми единицами, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, при $k \geq 3$ $\mathcal{L}_k = \mathbb{R}^k$, или $\mathbb{C}^k$, или $\mathbb{Q}^k$, где $\mathbb{Q}$ - тело кватернионов, [2].

Для каждой алгебры $\mathcal{J}_k(j)$ вещественные неотрицательные $\mathbb{R}$ - линейные функционалы $\rho$ описываются стандартной формулой

$$\forall a \in \mathcal{J}, \quad \rho(a) = tr(\rho a); \quad \rho \in \mathcal{J}, \quad \rho \geq 0. \tag{2.5}$$

Эта формула позволяет взаимно однозначно описать "распределение вероятностей" для всей алгебры $\mathfrak{A}$. Разумеется, аналогичная формула $P(A) = tr\, PA$ с матрицей плотности $P = P^+ \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, определяя "меры" на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, определяет их на $\mathfrak{A}$, но по запасу $\mathfrak{A}$ наблюдаемых не всякие два оператора плотности $P$ удается различить.

Возможна обратная ситуация. Задано семейство операторов плотности, действующих на $\mathcal{H}$. Требуется указать минимальную алгебру наблюдаемых, позволяющую различать эти распределения вероятностей. В классической математической статистике это - проблема достаточной статистики. Решение этой проблемы, указанное в п. 7 позволяет давать единообразные взаимно-однозначные описания распределений вероятностей на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ в терминах матриц плотности на $\mathcal{H}$.

3. Обозначение. Условимся далее обозначать линейные подпространства Гильбертова пространства $\mathcal{H}$ рукописными буквами $\mathcal{E},\mathcal{F},\ldots$, а ортопроекторы на них - соответствующими печатными: $E, F, \ldots$,

Пример. $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2;\ \mathcal{F},\ \mathcal{G}\subset\mathcal{H},\ \dim\mathcal{G}=\dim\mathcal{F}=1,\ \mathcal{F}\neq\mathcal{G}^\perp$ [13]

Лемма 3.I. Семейство подпространств $\{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ примера порождает ортодополнительную решетку из 6 элементов: $\{0, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{F}^\perp, \mathcal{G}^\perp, \mathcal{H}\}$. Семейство ортопроекторов $\{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ порождает $C^*$ - алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а также более узкую Йорданову алгебру $J_{1,1}$, содержащую континуум ортопроекторов.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Если выбрать первый координатный орт $|x\rangle\in\mathcal{F}$, то проекторам $F=|x\rangle\langle x|$ и $G$ отвечают матрицы

$$F\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad G\sim\begin{pmatrix}\cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi\\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi\end{pmatrix} \tag{3.I}$$

где $\varphi$ - угол между прямыми $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, $0\neq\varphi\neq\pi/2$.
Матрицы $FGF,\ FG(1-F),\ (1-F)GF,\ (1-F)G(1-F)$ порождают всю алгебру матриц второго порядка над $\mathbb{C}$, а матрицы

$$FGF,\ FG(1-F)+(1-F)GF,\ (1-F)G(1-F),-$$

всю алгебру симметричных матриц второго порядка над $\mathbb{R}$.

Этот простой пример доказывает, что решеточный подход Биркгофа - фон Неймана [4] не эквивалентен алгебраическому подходу. Решеточных операций просто не хватает для построения логики событий.

4. Изложим, следуя нашему обзору [7], связи между теорией проективно-евклидовых ковариантов и бинарными логическими операциями.

Система унитарных инвариантов пары подпространств была указана Камиллом Жорданом сто лет назад [I4]. Пусть $F$ и $G$ суть ортопроекторы на подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Образуем эрмитовы операторы $FGF$ и $GFG$. Их спектр принадлежит отрезку $0\le\varkappa\le 1$. Условимся далее считать $\varkappa=0$ и $\varkappa=1$ всегда принадлежащими их спектру, отвечая может быть нулевому подпространству.

Т е о р е м а 4.I. I) Операторы $FGF$ и $GFG$ унитарно эквивалентны и имеют одинаковый спектр. 2) Справедливы разложения Жордана

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathcal{F} = & \overset{\mathcal{F}\cap\mathcal{G}}{\overset{\|}{\mathcal{F}_0}} & \oplus\, \mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus & \mathcal{F}_s & \oplus & \overset{\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp}}{\overset{\|}{\mathcal{F}_{s+1}}} & & \\
 & \| & + & + & & & & \\
\mathcal{G} = & \mathcal{G}_0 & \oplus\, \mathcal{G}_1 \oplus \ldots \oplus & \mathcal{G}_s & \oplus & (\mathcal{G}\cap\mathcal{F}^{\perp}) & & (\mathcal{F}+\mathcal{G})^{\perp} \\
 & \| & \| & \| & & & & \| \\
\mathcal{H} = & \mathcal{H}_0 & \oplus\, \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus & \mathcal{H}_s & \oplus & (\mathcal{F}_{s+1}\oplus\mathcal{G}_{s+1}) & \oplus & \mathcal{H}_{s+2}
\end{array} \qquad (4.I)$$

где $\varkappa_0=1>\varkappa_1>\ldots>\varkappa_s>0=\varkappa_{s+1}$ – общий спектр, $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ суть собственные подпространства $FGF$ и $GFG$, отвечающие $\varkappa_k$. 3) Формулы

$$\sqrt{\varkappa}\,|y\rangle = G|x\rangle, \quad \sqrt{\varkappa}\,|x\rangle = F|y\rangle, \qquad (4.2)$$

при $\varkappa=\varkappa_k$ устанавливают изметричное соответствие между $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$

Доказательство. Элементарно проверяется, что $\mathcal{F}_j\perp\mathcal{G}_k$ при $j\ne k$, и что справедлива связь (4.I) см. [I5].

Числа $s=s(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $\dim\mathcal{F}_{s+1}$, $\dim\mathcal{G}_{s+1}$ и набор $\{\varkappa_k, \dim\mathcal{F}_k=\dim\mathcal{G}_k\}_{k=1}^{s}$ образуют полную систему унитарных инвариантов пары $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ [I4], см. также библиографию в [I5], [I6]. Очевидно, подпространства $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ при $1\le k\le s$ являются нетривиальными унитарными ковариантами.

Определение. Контактом (некоммутативным пересечением) $\mathcal{F}\Cap\mathcal{G}$ подпространства $\mathcal{F}$ с подпространством $\mathcal{G}$ назовем а) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, когда $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\ne 0$, б) $0$, когда $\mathcal{F}\perp\mathcal{G}$, в) собственное подпространство $\mathcal{F}_1$, когда $\mathcal{F}_0=0$ и $\mathcal{F}\ne\mathcal{F}\cap\mathcal{G}^{\perp}$. Неотрицательную величину $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$:

$$\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \varkappa(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup_{\substack{0\ne|x\rangle\in\mathcal{F}\\ 0\ne|y\rangle\in\mathcal{G}}} \frac{\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle}{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}, \qquad (4.3)$$

$\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})=1$ в случае а), $=0$ в случае б), $=\varkappa^{1/2}$ в случае в), назовем величиной связи $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, а угол

$$\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \tag{4.4}$$

назовем величиной щели между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Вообще говоря, $\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G} \neq \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F}$, но обязательно $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$. Ортопроектор $E$ на $\mathcal{E} = \mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G}$ есть

$$E = \lim_{n \to \infty} (FGF)^n \cdot \|FGF\|^{-n}. \tag{4.5}$$

Формула (4.5) обобщает часто используемое в теории фильтров выражение для ортопроектора на $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Все коварианты $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ могут быть получены из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ последовательным применением операций $/\!\!\cap$ и $\ominus$ (собственного ортогонального вычитания).

В нашей теории фундаментальную роль играет понятие изоклинности.

Определение. Подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ называются изоклинными, когда все векторы первого наклонены под одним и тем же углом $\varphi < \pi/2$ к своим проекциям на второе подпространство, и наоборот.

Для того, чтобы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ были изоклинны, необходимо и достаточно, чтобы

$$FGF = \varkappa F, \quad GFG = \varkappa G, \quad \varkappa > 0, \tag{4.6}$$

где $\varkappa^{1/2} = \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos\varphi$, или, что то же

$$\mathcal{F} /\!\!\cap \mathcal{G} = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{G} /\!\!\cap \mathcal{F} = \mathcal{G}. \tag{4.7}$$

Формулы (4.2) устанавливают между ними изометричное соответствие, которое задается частичными изометриями $\mathcal{H}$:

$$I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \sim \rho^{-1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) GF, \qquad I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \sim \rho^{-1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) FG. \tag{4.8}$$

Подпространства $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ в (4.1) изоклинны при $k \leq s$. Очевидно, что две любые неортогональные прямые изоклинны. Таким образом, нетривиальные примеры изоклинных подпространств возникают только в четырехмерном пространстве.

Определение. Пусть $I$ – каноническая изометрия (4.2), см. также (4.8), подпространства $\mathcal{F}$ на изоклинное подпространство $\mathcal{G}$. Будем называть подпространство

$$\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \{ |u\rangle = a|x\rangle + bI|x\rangle, \ \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \} \tag{4.9}$$

$(a:b)$ – суперпозицией $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Мы будем различать $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – суперпозиции, в зависимости от того $a:b \in \mathbb{R}$ или $a:b \in \mathbb{C}$.

Пара $O:O$ является запрещенной.

Очевидно, $\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\mathcal{S}_{b:a}(\mathcal{G},\mathcal{F})$, $\mathcal{S}_{ca:cb}=\mathcal{S}_{a:b}$, и $\mathcal{S}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ является унитарным ковариантом пары $(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Изучим строение пучка суперпозиций более детально. Пусть $\mathcal{F}\perp\mathcal{E}$, $\dim\mathcal{F}=\dim\mathcal{E}$, $J$ - изометрия $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, $EJF$ - ее представление в виде частичной изометрии на $\mathcal{H}$. Рассмотрим зависящее от двух угловых параметров $\theta$ и $\varphi$ семейство операторов

$$G_{\theta,\varphi}=\cos^2\varphi\cdot F+\cos\varphi\sin\varphi(e^{i\theta}EJF+e^{-i\theta}FJ^*E)+\sin^2\varphi\cdot E= \tag{4.10}$$
$$=[\cos^2\varphi+e^{i\theta}\cos\varphi\sin\varphi EJ]F+[e^{-i\theta}\cos\varphi\sin\varphi FJ^*+\sin^2\varphi]E,$$

имеющих относительно разложения $\mathcal{H}=\mathcal{F}\oplus\mathcal{E}\oplus(\mathcal{F}\oplus\mathcal{E})^{\perp}$ блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi\cdot 1' & e^{-i\theta}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 1' & 0 \\ e^{i\theta}\cos\varphi\sin\varphi\cdot 1' & \sin^2\varphi\cdot 1' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

где $1'$ - единичная диагональная матрица порядка $\dim\mathcal{F}=\dim\mathcal{E}$. Нетрудно проверить, что $G_{\theta,\varphi}$ суть ортопроекторы и что любые два соответствующие подпространства $\mathcal{G}_{\theta,\varphi}$ изоклинны (или ортогональны). Из (4.10) видно, что семейство $\{\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\}$ (семейство $\{\mathcal{G}_{0,\varphi}\}$) алгебраически изоморфно пучку прямых двумерного комплексного (вещественного) гильбертова пространства; в частности

$$\forall\theta,\quad \mathcal{G}_{\theta,0}=\mathcal{F},\quad \mathcal{G}_{\theta,\pi/2}=\mathcal{E};$$
$$\rho(\mathcal{G}_{\theta,\varphi},\mathcal{F})=|\cos\varphi|,\quad \rho(\mathcal{G}_{\theta,\varphi},\mathcal{E})=|\sin\varphi|.$$

<u>Определение.</u> Семейство $\{\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\}$ с ортопроекторами (4.10) построенное по паре изометрических подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$, будем называть $\mathbb{C}$ - пучком (изоклинных подпространств), а его подсемейство $\{\mathcal{G}_{\varphi}:=\mathcal{G}_{0,\varphi}\}$ будем называть $\mathbb{R}$ - пучком.

Ввиду периодичности будем предполагать, что $-\pi<\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le\pi/2$ в $\mathbb{C}$ - пучке и $\theta=0$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi\le\frac{\pi}{2}$ в $\mathbb{R}$ - пучке. Элементарной выкладкой устанавливаются:

Л е м м а 4.2. Суперпозиция любых двух изоклинных подпространств пучка принадлежит пучку, и обратно,

Л е м м а 4.3. Суперпозиции двух изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ образуют пучок, проходящий через $\mathcal{E}:=(\mathcal{F}+\mathcal{G})\ominus\mathcal{F}$, с канонической изометрией в (4.10)

$$EJF = \rho^{-1}(\mathcal{F}, \mathcal{G})\rho^{-1}(\mathcal{G}, \mathcal{E})EGF, \tag{4.12}$$

$$J = J^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = I^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}} I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}. \tag{4.13}$$

Любое $\mathcal{G}_{\theta,\varphi}$ , $\varphi \neq 0, \pi/2$, определяет вместе с $\mathcal{F}$ тот же пучок с канонической изометрией $J_\theta = e^{i\theta} J$.

Отсюда вытекает:

Т е о р е м а 4.4. Через любые два изоклинные подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ проходит единственный $\mathbb{C}$ - пучок (единственный $\mathbb{R}$ - пучок) изоклинных подпространств. Он состоит из всевозможных $\mathbb{C}$ - суперпозиций ($\mathbb{R}$ - суперпозиций) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ . Этот пучок однозначно задается также любыми двумя своими ортогональными подпространствами и связывающей их изометрией, которая определяется с точностью до числового множителя $e^{i\theta}$ (множителя $\pm 1$).

Таким образом, в гильбертовом (евклидовом) пространстве, кроме геометрии инцидентности подпространств, т.е. проективной геометрии, использованной фон Нейманом, см. также [5] , [6] , существует геометрия пучков изоклинных подпространств [17] см. также [18] .

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторая унитальная йорданова алгебра самосопряженных преобразований конечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ . Решетку всех подпространств $\mathcal{E}$ вида $\mathcal{E} = e(\mathcal{H})$ где $e$ - идемпотенты из $\mathfrak{A}$ , будем называть йордановой или некоммутативной логикой $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ (соответствующей алгебре $\mathfrak{A}$ ).

Т е о р е м а 4.5. Операции $\oplus$ , $\ominus$ , $//$ и $\mathcal{S}_{a:b}$, где $a$ , $b \in \mathbb{R}$ , образуют полную систему операции йордановой логики подпространств. Если $\Phi = \{\mathcal{F}_\alpha\}$ - некоторое семейство подпространств, $\mathcal{M}_\Phi$ - наименьший класс подпространств, содержащий семейство $\Phi$ и замкнутый относительно вышеуказанных операций, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ , где $\mathfrak{A}$ - йорданова алгебра, порожденная семейством ортопроекторов $\{F_\alpha\}$ на все $\mathcal{F}_\alpha$ .

Определение. Если йорданова алгебра $\mathfrak{A}$ есть самосопряженная часть некоторой алгебры фон Неймана $\mathcal{L}$ , то некоммутативную логику $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ мы будем называть логикой фон Неймана.

Т е о р е м а 4.6. Операции $\oplus$ , $\ominus$ , $//$ и $\mathcal{S}_{a:b}$ , где $a$ , $b \in \mathbb{C}$ , образуют полную систему операций фон-неймановой логики подпространств. Для любого семейства $\Phi$ подпространств наименьший класс $\mathcal{N}_{\Phi} \supset \Phi$, замкнутый относительно указанной расширенной системы операций, совпадает с $h_{\mathcal{B}^{*}}$, где $\mathcal{B}^{*}$ - самосопряженная часть алгебры фон Неймана $\mathcal{B}$, порожденной всеми ортопроекторами $F_{\alpha}$. С геометрией пучков связана алгебра гомотетий атомов, индуцированных пучками из логики. В частности, для трех попарно изоклинных атомов $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ из логики фон Неймана

$$\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{F})E\mathcal{F}=\rho^{-1}(\mathcal{E},\mathcal{G})\rho(\mathcal{G},\mathcal{F})e^{i\theta}EGF \qquad (4.14)$$

где $\theta=\theta(\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G})$.

5. Опишем теперь, следуя [7] строение йордановых логик подпространств конечномерного пространства.

<u>Определение.</u> Элемент $\mathcal{F}$ логики $h$ подпространств называется атомом, если при $h \ni \mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ или $\mathcal{G}=0$ или $\mathcal{G}=\mathcal{F}$

Ввиду $\dim \mathcal{H} < \infty$, каждый элемент из $h$ разлагается в ортогональную сумму атомов, но такое разложение не обязано быть единственным.

Л е м м а 5.I. Любые два атома логики изоклинны или ортогональны.

<u>Определение.</u> Два атома логики $h$ назовем связуемыми, если существует $\mathbb{R}$ - пучок $h$ - атомов, которому они принадлежат. Каждый $h$ - атом связуем сам с собой по определению.

По леммам 5.I. и 4.3 два неортогональных атома логики всегда связуемы.

Т е о р е м а 5.2. Два связуемые $h$ - атома или изоклинны, или же ортогональны друг другу, но изоклинны каждый некоторому третьему $h$ - атому. Отношение связуемости есть отношение эквивалентности: оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Доказательство транзитивности использует существование в йордановой логике проективно-евклидовой конфигурации теоремы о трех перпендикулярах: "проекция на $\mathcal{E}$ есть проекция на $\mathcal{E}$ проекции на объемлющее $\mathcal{K}$", или $E=EK$ при $K \geq E$.

<u>Определение.</u> Ненулевое подпространство $\mathcal{N} \in h$ называется сектором логики (или факторным пространством), если I$^{0}$ оно содержит любой $h$ - атом, ему не ортогональный, 2$^{0}$ любая пара содержащихся в $\mathcal{N}$ атомов связуема.

Т е о р е м а 5.3. Каждый сектор $\mathcal{N}_j$ логики $h$ есть векторная сумма некоторого класса всех связуемых между собой атомов. $\mathcal{H}=\oplus\mathcal{N}_j$ ; логика $h$ есть прямая сумма всех логик $h_j = h \cap \mathcal{N}_j$.

Очевидно, центр йордановой алгебры $\mathfrak{A}$, отвечающей йордановой логике $\mathfrak{L}$ подпространств, является коммутативной йордановой алгеброй $\mathfrak{Z}$. Ему отвечает коммутативная йорданова логика с атомами $\mathcal{N}_j$, изоморфная конечной булевой алгебре.

Для каждой секторной логики $\mathfrak{L}_j$ соответствующая йорданова алгебра $\mathfrak{A}_j$ является фактором, и $\mathfrak{A}$ есть прямая сумма всех $\mathfrak{A}_j$. Поэтому известный результат Йордана, фон Неймана и Вигнера [2] позволяет получить описание всех факторных, а, следовательно, и вообще всех конечномерных некоммутативных логик. Важно заметить, что координатному алгебраическому описанию [2] факторов можно дать чисто геометрическую интерпретацию.

Определение. Пусть $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{t} \mathcal{E}_j$ есть какое-то разложение сектора $\mathcal{N}$ логики $\mathfrak{L}$ на атомы. Набор $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_t, \mathcal{F}\}$, где $\mathcal{F}$ – атом, контактирующий со всеми $\mathcal{E}_j$, будем называть проективно-евклидовым репером $\mathcal{N}$. Число $t$ назовем (относительной) размерностью логики $\mathfrak{L} \cap \mathcal{N}$.

Каждый атом $\mathcal{G}$ в секторе $\mathcal{N}$ с репером $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_t, \mathcal{F}\}$ можно полностью охарактеризовать величинами $\rho_k = \rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{G}) = \cos\varphi(\mathcal{E}_k, \mathcal{G})$ и изометриями $U_k^j$ координатных атомов:

$$E_k U_k^j E_j = \rho^{-1}(\mathcal{E}_k, \mathcal{G})\rho^{-1}(\mathcal{E}_j, \mathcal{G}) E_k G E_j, \qquad (5.1)$$

определенными, когда $\rho(\mathcal{E}_k, \mathcal{G}) \neq 0$, $\rho(\mathcal{E}_j, \mathcal{G}) = 0$. Эти изометрии связаны цепными соотношениями

$$U_k^k = id_{\mathcal{E}}, \quad U_k^j U_j^k = id_{\mathcal{E}}, \quad U_k^i U_i^j U_j^k = id_{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_k.$$

Теорема 5.4. Каждому атому $\mathcal{G}$ сектора $\mathcal{N}$ с репером $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_t, \mathcal{F}\}$ отвечает определенный с точностью до произвольного ненулевого правого множителя ненулевой набор

$$X_1 : X_2 : \ldots : X_t ; \quad \forall j \in \mathbb{X},$$

где алгебра $\mathbb{X}$ гомотетий атома определяется логикой $\mathfrak{L} \cap \mathcal{N}$. При $\rho_i = \rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{G}) > 0$ можно принять

$$\begin{aligned} &X_i = \rho_i Y \\ &X_j = 0, \quad \forall j : \rho_j = 0 ; \\ &X_k = \rho_k (W_i^k U_k^i) Y, \quad \forall k : \rho_k > 0 ; \end{aligned} \qquad (5.2)$$

6. Т е о р е м а 6.I. Пусть $P$ - эрмитов ядерный оператор на Гильбер_овом пространстве $\mathcal{H}$, $\{\mathcal{G}_\varphi\}$ - $\mathbb{R}$ - пучок изоклинных подпространств из $\mathcal{H}$. Тогда для любых четырех различных подпространств из пучка значения $P(\varphi) := P\{\mathcal{G}_\varphi\} = tr\,PG_\varphi$ связаны обобщенным, см. [24], соотношением Малюса:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & P(\varphi_1) \\ 1 & \cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & P(\varphi_2) \\ 1 & \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & P(\varphi_3) \\ 1 & \cos 2\varphi_4 & \sin 2\varphi_4 & P(\varphi_4) \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.\mathrm{I})$$

<u>Доказательство.</u> По (4.IO) $tr\,PG_\varphi =$

$$= \cos^2\varphi \cdot tr\,PF + \cos\varphi \sin\varphi\, tr\,P(EJF + FJ^*E) + \sin^2\varphi \cdot tr\,PE.$$

Таким образом, каждое распределение вероятностей $P\{\mathcal{G}\}$, задаваемое оператором плотности $P$, должно не только быть аддитивным

$$\forall \mathcal{F} \perp \mathcal{G}, \quad P\{\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}\} = P\{\mathcal{F}\} + P\{\mathcal{G}\}, \qquad (6.2)$$

но и удовлетворять соотношению Малюса (6.I).

Л е м м а 6.2. Пусть $\dim \mathcal{H} < \infty$ и пусть $\mathfrak{h}$ - некоторая Йорданова логика подпространств из $\mathcal{H}$. Если функция $\mathbb{P}\{\cdot\}$ обладает свойством Малюса, т.е. на любых $\mathbb{R}$ - пучках $\mathfrak{h}$ - атомов связана по (6.I), то существует разложение $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{F}_j$ на $\mathfrak{h}$ - атомы такое, что для любого $\mathfrak{h}$ - атома $\mathcal{G}$

$$P\{\mathcal{G}\} = \sum_j \rho^2(\mathcal{G}, \mathcal{F}_j) p_j; \quad \forall j, \; p_j = P\{\mathcal{F}_j\}. \qquad (6.3)$$

<u>Доказательство.</u> Как вытекает из теоремы 5.3, достаточно доказать лемму для секторной подлогики $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}$, так как по ортогональности атомов из разных секторов, в сумме (6.3) отличны от нуля только слагаемые с координатными атомами $\mathcal{F}_j$ из того же сектора, что и $\mathcal{G}$.

Пусть $\Gamma = \{\mathcal{G}_\varphi\}$ - произвольный $\mathbb{R}$ - пучок. Фиксируем три различных значения угла, например, $\varphi = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$. Тогда из (6.I) для произвольного значения $\varphi$ получаем

$$P\{\mathcal{G}_\varphi\} = A_\Gamma \cos^2\varphi + 2B_\Gamma \cos\varphi \sin\varphi + C_\Gamma \sin^2\varphi, \qquad (6.4)$$

где коэффициенты $A_\Gamma$, $B_\Gamma$, $C_\Gamma$ ограничены единицей, ибо $P\{\mathcal{G}_\varphi\}\leq P\{\mathcal{H}\}=1$. Поэтому, функция $P_\Gamma(\varphi)=P\{\mathcal{G}_\varphi\}$ непрерывна по $\varphi$, равностепенно по $\Gamma$. Так как по теореме 5.3 все атомы одного сектора связуемы, то мера $P\{\mathcal{G}\}$ непрерывна по $\mathcal{G}$ в угловой метрике (4.4) на единичной сфере пространства теоремы 5.4. Если при $\varphi=0$ значение (6.4) достигает экстремума, то необходимо $B_\Gamma=0$:

$$P\{\mathcal{G}_\varphi\}=P\{\mathcal{F}\}\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G}_\varphi)+P\{\mathcal{E}\}\rho^2(\mathcal{E},\mathcal{G}_\varphi) \tag{6.5}$$

где $\mathcal{F}=\mathcal{G}_0$, $\mathcal{E}=\mathcal{G}_{\pi/2}$. Следовательно, $P\{\mathcal{G}\}$ на связке $h$ - атомов сектора можно привести к "главным осям", как обыкновенную квадратичную форму. Единичная сфера в наших пространствах компактна, и непрерывная функция $P\{\mathcal{G}\}$ достигает на ней максимума. Примем за $\mathcal{F}_1$ одну из "точек" максимума. Из (6.5)

$$P\{\mathcal{G}\}=P\{\mathcal{F}_1\}\rho^2(\mathcal{F}_1,\mathcal{G})+P\{\mathcal{G}_1\}\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}),\quad \mathcal{E}\subset(\mathcal{N}\ominus\mathcal{F}_1).$$

Остается привести $P\{\mathcal{G}_1\}$ на $\mathcal{N}\ominus\mathcal{F}_1$. Соображения о непрерывности $P\{\mathcal{G}_1\}$ на $\mathcal{N}\ominus\mathcal{F}_1$ справедливы, так как пучок, два атома которого лежат в подпространстве, целиком лежит в этом подпространстве. Снова выбирается "точка" условного максимума $\mathcal{F}_2$:

$$P\{\mathcal{G}_1\}=P\{\mathcal{F}_2\}\rho^2(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)+P\{\mathcal{G}_2\}\rho^2(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_1).$$

Так как $\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})=\rho^2(\mathcal{N}\ominus\mathcal{F}_1,\mathcal{G})$, то по теореме о трех перпендикулярах

$$\rho^2(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})=\rho(\mathcal{F}_2,\mathcal{G});\quad \rho^2(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_1)\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G})=\rho^2(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}),$$

$$P\{\mathcal{G}\}=P\{\mathcal{F}_1\}\rho^2(\mathcal{F}_1,\mathcal{G})+P\{\mathcal{F}_2\}\rho^2(\mathcal{F}_2,\mathcal{G})+P\{\mathcal{F}_3\}\rho^2(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}),$$

и т.д. Процесс заканчивается после конечного числа шагов.

Т е о р е м а 6.3. Пусть $\dim\mathcal{H}<\infty$, и пусть $h$ - некоторая Йорданова логика подпространств из $\mathcal{H}$, и $\mathfrak{A}$ - соответствующая Йорданова алгебра эрмитовых операторов. Если функция $P\{\cdot\}$ на элементах $h$ аддитивна (6.1) и обладает свойством Малюса (6.2), то существует (вообще говоря, неединственный) оператор $P\in\mathfrak{A}$ такой, что

$$\forall\ \mathcal{B}\in h,\quad P\{\mathcal{B}\}=\operatorname{tr}P\mathcal{B}. \tag{6.6}$$

Доказательство. Если $\mathcal{H} = \mathcal{F}_j$ - разложение леммы 6.2, то можно взять

$$P = \sum_j (\dim \mathcal{F}_j)^{-1} P_j F_j . \qquad (6.7)$$

Таким образом, аддитивность и Малюсовость в совокупности являются характеристическими для неотрицательной нормированной функции на логике, чтобы она задавалась оператором плотности. Тонкая теорема Глисона [25] утверждает, что на факторных пространствах $\mathcal{N}$ относительной размерности $t \geq 3$ меры достаточно характеризовать одним свойством аддитивности. При $t=2$ такая характеризация не годится, и наша теорема 6.3 дает правильное ее обобщение.

7. В некоммутативной теории вероятностей фундаментальную роль играет возможность суперпозиции чистых состояний [26]. Опишем, как выглядит эта суперпозиция состояний на логике.

Под носителем эрмитова оператора понимается ортогональное дополнение к его ядру.

Определение. Операторы плотности $P$ и $Q$ с изоклинными носителями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ назовем когерентными, если

$$\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})Q = GPG , \quad \rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})P = FQF \qquad (7.1)$$

Лемма 7.1. Пусть носитель оператора плотности $P$ лежит в подпространстве $\mathcal{F}$ и пусть $\{\mathcal{G}_{\theta,\varphi}\}$ - проходящий через $\mathbb{C}$ - пучок изоклинных подпространств. Тогда

$$Q_{\theta,\varphi} = \rho^{-2}(\mathcal{F},\mathcal{G}_{\theta,\varphi}) G_{\theta,\varphi} P G_{\theta,\varphi} . \qquad (7.2)$$

определяет пучок когерентных операторов плотности.

Доказательство. По (4.14) $G'G''PG''G' =$

$$= G'G''FPFG''G' = \rho^{-2}(\mathcal{G}',\mathcal{F})\rho^2(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')\rho^2(\mathcal{G}'',\mathcal{F}) G'PG'.$$

Таким образом, операторы $Q_{\theta,\varphi}$ можно считать суперпозициями исходного $P$ и любого $Q$ из пучка (7.2), когерентных посредством изометрии (4.2) или (4.13) их носителей (под $Q_{\theta,\pi/2}$ понимается, например, предельное значение $Q_{\theta,\varphi}$ при $\varphi \to \pi/2$).

Лемма 7.2. Всякий оператор плотности $P$, носитель которого лежит в атоме $\mathcal{E}$ сектора $\mathcal{N}$ $\mathbb{C}$ - логики $\hat{h}$, задает на каждом атоме из $\mathcal{N}$ когерентный оператор плотности. Аналогичное утверждение справедливо для $\mathbb{R}$ - логик, если и только если оператор $P$ коммутирует со всеми $\hat{h}$ - индуцированными оператогде $\mathcal{X}$ реализовано как множество гомотетий $\mathcal{E}_i$. При замене атома $\mathcal{E}_i$ на $\mathcal{E}_j$ правило эквивалентности гомотетий $Z_i^i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i$ и $Z_\ell^\ell : \mathcal{E}_\ell \to \mathcal{E}_\ell$ таково:

$$Z_\ell^\ell \longleftrightarrow Z_i^i \quad \text{при } Z_\ell^\ell = W_\ell^i Z_i^i W_i^\ell, \quad Z_i^i = W_i^\ell Z_\ell^\ell W_\ell^i .$$

Доказывается, что при $t=2$ алгебра $\mathcal{X}$ является алгеброй Клиффорда с некоторым количеством мнимых единиц, а при $t \geqslant 3$ эта Клиффордова алгебра должна быть телом. Для доказательства последнего факта в пред-предминимальном (т.е. разлагающемся в ортогональную сумму трех атомов) подпространстве строится конфигурация пересекающихся $\mathbb{R}$ - пучков, позволяющая ввести умножение изометрий, ср. [20], см. [7], [17]. Изоморфизм $\mathcal{X} \simeq \mathbb{R}$, или $\simeq \mathbb{C}$, или $\simeq \mathbb{Q}$ вытекает из теоремы Фробениуса [21]. Заметим, что проективной плоскости Муфанг над октонионами мы не получаем, так как с самого начала проводим построения в комплексном гильбертовом пространстве.

Каждая Йорданова логика $\mathcal{L}$ подпространств комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по-факторно вкладывается в обертывающую логику фон Неймана, отвечающую алгебре фон Неймана, обертывающей исходную Йорданову алгебру эрмитовых операторов. Способ вложения каждого сектора $\mathcal{N}$ определяется гиперкомплексной числовой системой $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}$ - индуцированных гомотетий его атомов. При $\mathcal{X} \simeq \mathbb{H}_{2\nu}$ или $\simeq \mathbb{Q}$ существует (с точностью до эквивалентности) только одно точное неприводимое представление, а при $\mathcal{X} \simeq \mathbb{H}_{2\nu+1}$ или $\mathbb{C}$ - только два, комплексно сопряженные друг другу, см. [22]. Соответственно [23], каждый атом $\mathcal{E}$ логики $\mathcal{L}$ раскладывается $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{z}$ или $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{z'} \oplus \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^{z''}$, (5.3) где, грубо говоря, $\mathbb{C}^{2^\nu}$ - пространство неприводимого представления системы $\mathcal{X}$, $\mathbb{C}^{z}$ - атом обертывающей логики (соответственно, - два атома), $\mathcal{N} = \mathbb{C}^t \otimes \mathcal{E}$. Во втором случае факторное пространство $\mathcal{N}$ исходной логики расщепляется в ортогональную сумму двух факторных из обертывающей. Поэтому, факторная $\mathbb{R}$ - логика типа $\mathbb{C}$, вообще говоря, не является $\mathbb{C}$ - логикой. Значение конструкции вложения необходимо, например, при построении тензорных произведений алгебр наблюдаемых, т.е. при описании систем из независимых (невзаимодействующих) объектов.

рами изометрии атома $\mathcal{E}$ на себя.

Доказательство. Проверка когерентности сводится к проверке коммутируемости $P$ с произведениями индуцированных изометрий. Относительно акторизации (5.3) атома $\mathcal{E}$ оператор $P$ должен иметь вид $1 \otimes P$, соответственно $1 \otimes (P' \oplus P'')$, где $\otimes$ - кронекеровское умножение операторов. Таким образом, связка когерентных операторов плотности на атомах фактора $\mathbb{R}$ - логики задается связкой (двумя связками) когерентных операторов плотности на атомах того же фактора (обоих факторов) обертывающей $\mathbb{C}$ - логики.

Таким образом, в некоммутативной теории вероятностей возможны $\mathbb{R}$ - суперпозиции когерентных (недизъюнктных) состояний. $\mathbb{C}$ - суперпозиция двух когерентных операторов плотности, сосредоточенных, например, на двух контактирующих атомах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ из $\mathbb{R}$ - логики $h$, также будет определять состояние на $h$. Но и на $h$, и на Йордановой алгебре $\mathfrak{A}_h$ наблюдаемых оно будет неотличимо от своей "проекции" на $\mathfrak{A}_h$, вообще говоря смешанного, ср. [27], состояния, сосредоточенного на $\mathcal{F}+\mathcal{G}$. Разумеется, если факторная подлогика $h \ni \mathcal{F}, \mathcal{G}$ оказывается $\mathbb{C}$ - логикой, то и $\mathbb{C}$ - суперпозиции приводят к "векторным" состояниям на $h$.

Когерентность двух дизъюнктных состояний $P$ и $Q$ по своему определению зависит от $\mathbb{R}$ - пучка изоклинных подпространств, связующих их носителей. Поэтому, $\mathbb{R}$ - суперпозиция $P$ и $Q$, сосредоточенных, например, на связуемых атомах $\mathcal{E} \perp \mathcal{F}$, может оказаться неоднозначной. Зато, если $P$ и $Q$ инвариантны относительно всех индуцированных логикой симметрий $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}$, и выбраны "координатные" изометрии, можно определить $\mathbb{X}$ - суперпозиции $P$ и $Q$ над соответствующей предминимальному $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ системе $\mathbb{X}$ "чисел". Все такие тонкости практически невозможно уловить традиционным решеточным подходом, ср. [28].

Эрмитов оператор со спектральным разложением

$$A^{(+)} = \int\limits_{\alpha > 0} \alpha \, dE_\alpha \quad \text{, где} \quad A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha \, dE_\alpha .$$

называют положительной частью эрмитова оператора $A$.

Определение. Любое $\mathbb{R}$ - линейное многообразие $\mathfrak{S}$ (ядерных) эрмитовых операторов будем называть расщепом, если из $A \in \mathfrak{S}$ следует $A^{(+)} \in \mathfrak{S}$.

В [18] и [23] в связи с теорией положительных и вполне положительных марковских отображений нами доказано следующее предложение, описывающее структуру расщепов, как представления системы всех мер на некоторой $\mathcal{R}$ - логике.

Т е о р е м а 7.3. Пусть $\mathfrak{S}$ есть некоторый расщеп операторов, действующих на конечномерном Гильбертовом пространстве Тогда носители всех операторов $A \in \mathfrak{S}$ образуют Йорданову логику $\mathcal{L}$, не обязательно унитальную. Каждый $\mathcal{L}$ - атом $\mathcal{F}$ несет единственный оператор плотности $P_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{S}$, когерентный операторам плотности на связуемых с ним атомах. Его кратные исчерпывают операторы расщепа с носителем $\mathcal{F}$.

Таким образом, Йордановы логики возникают в решении целого класса проблем. Разумеется, всюду они выступают в качестве решеток квадратичных идеалов [21] Йордановых алгебр.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарны И.М.Гельфанду, М.И.Граеву и А.А.Кириллову за полезные советы и обсуждения, а также Р.С.Ингардену, М.Я.Мачинскому и К.Пирону за внимание.

Авторы особенно признательны Р.Л.Добрушину за приглашение прочитать цикл лекций по затронутым в препринте вопросам на Второй летней школе по некоммутативной теории вероятностей (Казань, 1978).

# Л И Т Е Р А Т У Р А


I. Neumann, J.von: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, I932.

2. Jordan, P., Neumann, J.von, Wigner, E.: Ann.Math. 35, 29–64 (I934)

3. Emch, G.: Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, New York: Wiley Interscience I972.

4. Birkhoff, G., Neumann, J.von: Ann.Math., 37, 823-835 (I936).

5. Varadarajan, V.S.: Geometry of quantum theory, Princeton, N.Y. Vol. I, I968.

6. Piron, C.: Foundation of quantum physics, Reading, Mass.: Benjamin I976.

7. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Некоммутативные йордановы логики (конечномерная теория), Инст.прикл.матем. АН СССР, препринт № 57 (I98I).

8. Колмогоров А.Н.: Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, I936.

9. Wick, G.C., Wightman, A.S., Wigner, E.P.: Phys.Rev., 88, IOI-IO5, (I958).

IO. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.: Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, Москва, Наука, I969.

II. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Элементы стохастической квантовой логики, Новосибирск, препринт Ин-та матем. СО АН СССР (I977).

I2. Ченцов Н.Н.: Статистические решающие правила и оптимальные выводы, Москва, Наука, I972.

I3. Ахиезер А.И., Половин Р.В.: УФН, I07, 463-487 (I972).

I4. Jordan, Camille: Bull. Soc. Math. de France, 3, IO3-I74 (I874-75).

I5. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Унитарные эквиварианты семейства подпространств, Инст.прикл.матем. АН СССР, препринт № 52,(I974).

I6. Gallagher, P.X., Proulx, R.J.: in Contribution to Algebra, A collection of papers, dedicated to E.Kolchin, I57-I64, Acad. Press, I977.

I7. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Элементарные йордановы логики, Инст.прикл.матем.АН СССР, препринт, № II3 (I975), к теореме Йордана - фон Неймана - Вигнера, препринт № I29 (I975).

I8. Morozova, E.A., Čencov, N.N.: in Lecture Notes in Mathematics, 550, 379-4I8, Springer, I976.

правильная словесная формулировка теоремы I0.2 дана в [23] , теорема 3.5.

I9. Topping, D.M.: Jordan algebras of self-adjoint operators, Mem.Amer.Math.Soc., 53, I965.

20. Gilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, Leipzig, Teubner,I930.

2I. Frobenius, G.: J.reine angew. Math., 84, 59-63 (I878).

22. Weyl, H.: The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, I939.

23. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.: Структура семейства стационарных состояний квантовой цепи Маркова, Инст.прикл. матем.АН СССР, препринт № I30 (I976)

24. Shurkliff, W.A.: Polarized Light, Cambridge, Harvard Univ. Press, I962.

25. Gleason,A.M.: J.Rat.Mech. Anal., 6, 885-894 (I957).

26. Dirac, P.A.M.: The principles of quantum mechanics, 4 ed., Oxford, I958.

27. Landau, L.D.: Zs.Physik, 45, 430 (I929).

28. Pulmannova, S.: Commun. Math. Phys., 49, 47-5I (I976).