Узбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари—Доклады Академии наук УзССР

1979, № 1

УДК 513.88

М. А. МУРАТОВ

НОРМА ЛЮКСЕМБУРГА В ПРОСТРАНСТВЕ ОРЛИЧА ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работе [1] введены пространства Орлича замкнутых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана A счетного типа. Показано, что пространство Орлича $L_M^*(A)$ является банаховым пространством относительно нормы Орлича, определяемой как

$$\|T\|_M = \sup\{|m(TS)|, \quad S \in L_N(A), \quad m(N(|S|)) \leqslant 1\},$$

где A — конечная алгебра фон Неймана счетного типа, m — точный нормальный конечный след на A, $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N-функции [2—4]. В настоящей статье приводится ряд результатов, полученных для нормы Люксембурга в $L_M^*(A)$ и обобщающих соответствующие результаты из [4, 5].

Для каждого оператора T из пространства Орлича $L_M^*(A)$ определим функцию

$$\|T\|_{(M)} = \sup\left\{|m(TS)|, \quad S \in L_N^*(A), \quad \|S\|_N \leqslant 1\right\},$$

которую назовем нормой Люксембурга.

Отметим, что норма Люксембурга обладает всеми свойствами нормы.

Предложение 1. (1) если $T \in L_M^*(A)$ и $U \in A$ — унитарный оператор, то

$$\|T\|_{(M)} = \||T|\|_{(M)} = \|T^*\|_{(M)} = \|UT\|_{(M)} = \|U^*TU\|_{(M)};$$

(2) для каждого $T \in L_M^*(A)$ верно неравенство

$$\|T\|_{(M)} \leqslant \|T\|_M \leqslant 2\|T\|_{(M)};$$

(3) для каждого ненулевого оператора $T \in L_M^*(A)$

$$m\left(M\left(\frac{|T|}{\|T\|_{(M)}}\right)\right) \leqslant 1;$$

(4) если $T \in L_M^*(A)$ и $\|T\|_{(M)} \leqslant 1$, то $T \in P_M(A)$ и

$$m(M(|T|)) \leqslant \|T\|_{(M)};$$

(5) (усиленные неравенства Гельдера). Если $T \in L^*_M(A)$ и $S \in L^*_N(A,$, то

$$|m(TS)| \leqslant \|T\|_M \|S\|_{(N)} \quad \text{и} \quad |m(TS)| \leqslant \|T\|_{(M)} \|S\|_N.$$

Из п. (2) предложения 1 и [1] следует, что $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)}\right)$ — банахово пространство.

Предложение 2. Если функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для кадого оператора $T \in L^*_M(A)$:

1) $\|T\|_M = \sup\{|m(TS)|, \ S \in P_N(A) \cap A\}$;

2) $\|T\|_{(M)} = \sup\{|m(TS)|, \ S \in A, \|S\|_N \leqslant 1\}$.

Теорема 1. Пространство, сопряженное к $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$, совпадает с $\left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right)$ тогда и только тогда, когда функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Теорема 2. Если функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют Δ_2-условию, то пространство $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ рефлексивно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муратов М. А. ДАН УзССР, 1978, 6.
2. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans L'espace hilbertien (Algebres de von Neumann), Paris, 1957.
3. Segal I. E. Ann. of Math., 57, 1952.
4 Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.
5. Luxemburg W. A. J. Banach function spaces. 1955.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
23. VI 1978 г.