Доклады Академии Наук СССР
1945. Том L

МАТЕМАТИКА

А. П. НОРДЕН

ОБ ИСТОЛКОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ МЕТРИКОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1945)

Пространство аффинной связности с метрикой Weyl'я допускает существование двух аффиноров $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$, связанных соотношением

$$g_{\alpha\lambda}g^{\lambda\beta}=c\delta_\alpha^\beta \tag{1}$$

и удовлетворяющих уравнениям

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma}=2q_\alpha g_{\beta\gamma};\quad \nabla_\alpha g^{\beta\gamma}=-2q_\alpha g^{\beta\gamma}. \tag{2}$$

Если метрика не вырождается, то константа $c\neq 0$ и может быть положена равной единице. В настоящей заметке предполагается, что $c=0$, а ранги матриц $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ равны $n-1$ и 1 соответственно, вследствие чего

$$g^{\alpha\beta}=g^\alpha g^\beta, \tag{3}$$

$$g_{\alpha\beta}g^\beta=0, \tag{4}$$

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}=2q_\gamma g_{\alpha\beta};\quad \nabla_\gamma g^\alpha=-q_\gamma g^\alpha. \tag{5}$$

При наличии этих условий будем называть пространство симметричной аффинной связности дуальным или D_n и считать, что тензоры $g_{\alpha\beta}$ и g^γ или основные тензоры D_n заданы с точностью до преобразования

$$\tilde g_{\alpha\beta}=\lambda^2 g_{\alpha\beta};\quad \tilde g^\gamma=\frac{1}{\lambda}g^\gamma, \tag{6}$$

после которого уравнения (5) остаются в силе при условии замены q_γ через

$$\tilde q_\gamma=q_\gamma+\partial_\gamma \lg\lambda. \tag{7}$$

Остановившись на некотором определенном нормировании основных тензоров, будем использовать $g_{\alpha\beta}$ для опускания индексов. В частности, если $\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ — n-вектор, то условия, принятые относительно ранга тензора $g_{\alpha\beta}$, можно выразить в виде двух следующих равенств:

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=0,\quad \varepsilon^{\alpha_1}{}_{\cdot\,\alpha_2\ldots\alpha_n}\neq 0, \tag{8}$$

откуда следует:

$$\varepsilon^{\alpha}{}_{\cdot\,\alpha_2\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta\alpha_2\ldots\alpha_n}=\mu g^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

и мы условимся считать основным n-вектором, соответствующим данному нормированию основных тензоров, такой, для которого $\mu=(n-1)!$ Основной поливектор удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\alpha\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=-nq_\alpha\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{10}$$

Чтобы доказать существование D_n и выяснить степень произвола в его задании, перейдем к специальной системе координат, которую назовем канонической, определив ее равенствами

$$g^i=0; \quad g^n=1, \tag{11}$$

предполагая теперь и в дальнейшем, что латинские индексы пробегают значение от 1 до $n-1$, в противоположность греческим, принимающим все n значений.

В канонической системе координат и при определенном нормировании $g_{\alpha\beta}$ связность D_n охарактеризуется следующими данными:

1) Компоненты g_{ij} — произвольные функции $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$.

2) Компоненты q_i произвольны, а $q_n=0$.

3) $\Gamma^k_{ij}=\left\{ {}_{i}{}^{k}{}_{l} \right\}$, $\tilde{g}_{ij}$ тензор, взаимный с g_{ij}, а $\left\{ {}_{i}{}^{k}{}_{l} \right\}$ — символ Christoffel'я соответствующей квадратичной формы.

4) $\Gamma^k_{\alpha n}=0$.

5) $\Gamma^n_{n\alpha}=-q_\alpha$.

6) Γ^n_{ij} произвольны.

Переходя к геометрическому истолкованию элементов пространства D_n, применим способ, отличный от общепринятого и основанный на следующих определениях:

1. Назовем гиперплоскостью (или L_{n-1}) пространства D_n элемент аналитического многообразия значений криволинейных координат u^α.

2. Назовем точкой гиперплоскости L_{n-1} ковариантный вектор v_α, приложенный к данной L_{n-1} и заданный с точностью до скалярного множителя.

3. Плоскостью k измерений (или L_k) будем называть простой ковариантный поливектор $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}$, заданный с точностью до скалярного множителя, или дополнительный к нему контравариантный поливектор $a^{\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n}=\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}a_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$. В частности, всякий контравариантный вектор определяет L_{n-2}.

4. Определяя инцидентность точки и плоскости L_k условием

$$a^{\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n}v_{\alpha_n}=0,$$

мы убедимся, что, согласно предыдущим определениям, всякая L_{n-1} обладает всеми свойствами проективного пространства $n-1$ измерения.

5. Будем называть несобственной L_{n-2} плоскость, определенную основным тензором g^α, а несобственной точкой всякую точку, инцидентную этой плоскости. Это определение позволяет рассматривать всякую L_{n-1} как аффинное пространство $n-1$ измерения.

В дальнейшем во всех формулах мы будем считать координаты собственных точек нормированными согласно условию

$$g^\alpha v_\alpha=1. \tag{12}$$

6. Будем называть расстоянием между двумя собственными точками v_α и w_β величину l, определенную следующей формулой:

$$l^2=\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma_1\ldots\gamma_{n-2}}\varepsilon^{\lambda\mu\gamma_1\ldots\gamma_{n-2}}v_\alpha v_\lambda w_\beta w_\mu. \tag{13}$$

В локальных координатах, определенных условиями $g^i=0$, $g^n=0$, $g_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$, $g_{n\alpha}=0$, эта формула принимает вид

$$l^2=\sum_{i=1}^{n-1}(v_i-w_i)^2,$$

и, следовательно, условие (13) определяет всякое L_{n-1} как евклидово пространство $n-1$ измерения.

По отношению к введенной таким образом геометрии объем симплекса с вершинами в точках $\underset{1}{a_{\alpha_1}}, \underset{2}{a_{\alpha_2}}, \ldots, \underset{n}{a_{\alpha_n}}$

$$V = \frac{1}{n!} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \underset{1}{a_{\alpha_1}}, \underset{2}{a_{\alpha_2}}, \ldots, \underset{n}{a_{\alpha_n}}; \tag{14}$$

косинус угла между двумя прямыми a^α и b^β

$$\cos\varphi = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta; \tag{15}$$

расстояние от точки v_α до $L_{n-2} - a^\alpha$

$$d = v_\alpha a^\alpha, \tag{16}$$

причем в последних двух формулах предполагается нормирование координат L_{n-2} согласно условию

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = 1. \tag{17}$$

7. Будем говорить, что точка v_α переносится ортогонально по однопараметрическому семейству L_{n-1}, если для ее ковариантного дифференциала выполняется условие

$$\delta v_\alpha = \nu v_\alpha. \tag{18}$$

Вследствие условий (5), (10) и (12), а также структуры введенных инвариантов имеет место следующая теорема: *расстояния, углы и объемы сохраняются при ортогональном перенесении точек.* Иными словами: *всякая фигура на L_{n-1} остается конгруентной самой себе при ортогональном перенесении ее точек.*

8. Назовем пучком L_{n-1} их однопараметрическое многообразие $u^\alpha = u^\alpha(t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\delta a^\alpha = \nu a^\alpha, \quad \text{где } a^\alpha = du^\alpha/dt. \tag{19}$$

Из хорошо известных свойств уравнений вида (19) следует, что всякому L_{n-2} на данном L_{n-1} соответствует пучок, содержащий данное L_{n-1}.

9. Пучок, соответствующий несобственному L_{n-2}, назовем несобственным. Из (5) следует, что первый интеграл уравнения несобственных пучков имеет вид

$$du^\alpha/dt = \sigma g^\alpha. \tag{20}$$

10. В частном случае эквиаффинного D_n основные тензоры могут быть пронормированы так, чтобы тензор q_α обращался в нуль. В этом случае определим угол между бесконечно близкими L_{n-1} по формуле

$$d\varphi^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta. \tag{21}$$

Вследствие (4) угол между L_{n-1}, принадлежащими несобственному пучку, равен нулю.

11. Будем называть D_n пространством постоянной кривизны, если ее тензор Римана удовлетворяет условию

$$R_{\alpha\beta\gamma.}^{\ \ \ \ \lambda} = c\,(g_{\alpha\gamma}\,\delta^\lambda_\beta - g_{\beta\gamma}\,\delta^\lambda_\alpha), \tag{22}$$

где c — постоянная.

В канонических координатах, при надлежащем нормировании и специальном выборе параметра $u^n = p$ могут быть получены следующие условия, характеризующие D_n постоянной кривизны:

1) Тензор g_{ij} определяет форму постоянной гауссовой кривизны переменных $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$.

2) $q_\alpha = 0$.

3) $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$, т. е. символам Christoffel'я формы g_{ij}.

4) $\Gamma^\alpha_{\beta n} = 0$.

5) $\Gamma^n_{ij} = p g_{ij}$.

Предположим, что форма g_{ij} положительная и кривизна ее равна 1, т. е. определяет линейный элемент сферы единичного радиуса евклидова пространства n измерений E_n с радиусом-вектором точки $\overline{n} = \overline{n}(u^1, \ldots, u^n)$. Отнесем всякой гиперплоскости D_n гиперплоскость E_n, заданную нормальным уравнением $\overline{n}\overline{r} + p = 0$, а всякой точке L_{n-1} $v_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} \underset{1}{du^{\alpha_1}} \underset{2}{du^{\alpha_2}} \ldots \underset{n-1}{du^{\alpha_{n-1}}}$* точку пересечения соотвествующий гиперплоскости с $n-1$ бесконечно близкими гиперплоскостями E_n.

В таком случае окажется, что все понятия, введенные определениями 1—10, совпадут с соответствующими понятиями геометрии E_n. Таким образом, геометрия D_n постоянной кривизны есть геометрия евклидова пространства, рассматриваемого как многообразие своих гиперплоскостей.

Поступило
1 IV 1945

* $\varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ — произвольный n-вектор.