Т. А. САРЫМСАКОВ, Ш. А. АЮПОВ
ДЖ. ХАДЖИЕВ, В. И. ЧИЛИН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ

Посвящается 1200-летнему юбилею
Мухаммеда ибн Мусы Хорезми (Ал-Хорезми)

ФАН

ЎЗБЕКИСТОН ССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В. И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

Т. А. САРИМСОҚОВ, Ш. А. АЮПОВ,
Ж. ҲОЖИЕВ, В. И. ЧИЛИН

ТАРТИБЛАНГАН АЛГЕБРАЛАР

ТОШКЕНТ
ЎЗБЕКИСТОН ССР «ФАН» НАШРИЕТИ
1983

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО

Т. А. САРЫМСАКОВ, Ш. А. АЮПОВ,
Дж. ХАДЖИЕВ, В. И. ЧИЛИН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ

ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
1983

УДК 517.98; 512.55

Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. **Упорядоченные алгебры.** Ташкент: изд-во «Фан» УзССР, 1983, 304 с.

Книга содержит систематическое изложение теории упорядоченных алгебр, аксиоматика которых может быть положена в основу некоммутативной (квантовой) теории вероятностей. Предлагаемый алгебраический подход позволяет с единой точки зрения рассмотреть классические операторные алгебры и их обобщения (алгебры фон Неймана, алгебры измеримых операторов, йордановы, банаховы алгебры и т. д.), которые встречаются в современной теории динамических квантовых систем.

Для специалистов по теории операторных алгебр и теории упорядоченных пространств.

Ил. 1. Библиогр. 176.

Ответственный редактор:

доктор физ.-мат. наук *В. Г. Винокуров*

Рецензенты:

доктора физ.-мат. наук *Д. П. Желобенко, Ш. К. Форманов*

A $\frac{20203-2240}{М\ 355(04)-83}$ 128—83 1702030000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Упорядоченные алгебры, рассматриваемые в этой книге, возникли при попытке алгебраического описания пространства случайных величин в классической и некоммутативной теории вероятностей.

Обычный подход к теории квантомеханических систем, математическое развитие которого дано в монографии фон Неймана «Математические основы квантовой механики», заключается в том, что квантомеханическим наблюдаемым сопоставляются эрмитовы операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Однако впоследствии стало ясно, что квантовую теорию и некоммутативную теорию вероятностей можно изложить на чисто алгебраическом языке. В связи с этим возникла необходимость изучения алгебр, на которых реализуются данные теории. Важный класс таких алгебр образуют W^*-алгебры или алгебры фон Неймана, JW-алгебры.

С появлением работ фон Неймана (von Neumann J. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, vol. 102, p. 370—427) и И. Сигала [120] было положено начало исследованию колец неограниченных операторов. И. Сигалом было введено кольцо $S(\mathcal{B})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{B}$, и построены основы некоммутативной теории интегрирования, которая нашла важные приложения в квантовой механике и теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп, стимулировала целый ряд исследований по некоммутативной теории вероятностей. Кольцо $S(\mathcal{B})$ является естественным некоммутативным аналогом кольца измеримых функций на пространстве с мерой. Конус положительных операторов кольца $S(\mathcal{B})$ порождает в эрмитовой части $S(\mathcal{B})$ частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями в $S(\mathcal{B})$. Эти соображения делают естественным рассмотрение класса инволютивных алгебр, на эрмитовой части которых задан частичный порядок, разумным образом согласованный со структурой этих алгебр.

Основными объектами изучения настоящей работы являются упорядоченные йордановы и инволютивные алгебры, описывающие в аксиоматической форме пространства случайных величин или наблюдаемых в некоммутативной теории вероятностей. При этом исследуются лишь структурные свойства этих объектов, без указания их приложений к некоммутативной теории вероятностей.

В классической теории вероятностей множество всех событий образует булеву алгебру. При алгебраическом описании квантомеханических систем события образуют логику, которая не является булевой алгеброй, если соответствующая алгебра наблюдаемых некоммутативна или неассоциативна.

Первая глава посвящена изучению порядковых и топологических свойств логик. Рассматриваются оценки и внешние оценки на логиках, выясняются условия, при которых на логике существует разделяющее семейство внешних оценок. Выделяется класс логик (которые мы называем равномерными), допускающих только одну равномерность, естественным образом согласованную с частичным порядком.

Во второй главе приводятся необходимые сведения из теории полуполей, которая достаточно подробно изложена в работах [9, 10].

В третьей главе вводится понятие OJ-алгебры — упорядоченной йордановой алгебры, являющейся неассоциативным аналогом полуполей. OJ-Алгебры содержат как частный случай и алгебры наблюдаемых в квантовой механике, введенные в работах Йордана, фон Неймана, Вигнера [63], а также фон Неймана [86]. Для OJ-алгебр получена спектральная теорема, изучена структура множества идемпотентов, ограниченных элементов и т. д. Даны частичная классификация специальных OJ-алгебр и полное описание исключительных OJ-алгебр с разделяющим семейством нормальных состояний.

Важным и наиболее часто встречающимся классом OJ-алгебр являются эрмитовы части O^*-алгебр — упорядоченных инволютивных алгебр, изучению свойств которых посвящена четвертая глава. Примерами O^*-алгебр служат алгебры фон Неймана, алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Получено описание дискретных O^*-алгебр и показано, что всякая O^*-алгебра, допускающая разделяющее семейство нормальных состояний на множестве своих ограниченных элементов, изоморфна заполненной $*$-подалгебре алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к некоторой алгебре фон Неймана.

Пятая глава посвящена топологическим свойствам O^*-алгебр. Существование разделяющего семейства нормальных конечных следов на конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{B}$ позволяет определить в $S(\mathcal{B})$ топологию сходимости по мере [100, 125]. В этой главе выделяется класс O^*-алгебр, на которых можно ввести топологию, аналогичную топологии сходимости по мере. Такие O^*-

алгебры мы называем топологическими, а топологию в них — R-топологией. Приводится критерий для существования R-топологии и доказывается ее единственность. Показывается, что универсальность топологической O^*-алгебры есть необходимое и достаточное условие для ее полноты относительно равномерности, порожденной R-топологией.

Нумерация теорем, предложений и лемм в каждом параграфе самостоятельная. Конец доказательств утверждений обозначается знаком ■.

Список литературы содержит только те работы, которые цитируются или очень близки к тематике, обсуждаемой в книге.

Авторы выражают благодарность профессору Д. П. Желобенко, прочитавшему рукопись и высказавшему много ценных советов и замечаний.

Глава I

ЛОГИКИ

§ 1. Необходимые понятия и сведения из теории полуупорядоченных и равномерных пространств

1. Частично упорядоченные множества. Под частично упорядоченным множеством понимается совокупность X, в которой определено бинарное отношение $x \leqslant y$, удовлетворяющее условиям:

1) $x \leqslant x$ для всех $x \in X$;

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;

3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Бинарное отношение $x \leqslant y$ называется частичным порядком в X. Ясно, что частичный порядок в X полностью определяется множеством $P = \{(x, y): x \leqslant y\} \subset X \times X$, которое, очевидно, обладает следующими свойствами:

1′) $(x, x) \in P$ для всех $x \in X$;

2′) если $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$, то $x = y$;

3′) если $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, то $(x, z) \in P$.

Поэтому любой частичный порядок в X можно задавать с помощью подмножества $P \subset X \times X$, удовлетворяющего условиям 1′) — 3′). Отношение $x \leqslant y$ пишут также в виде $y \geqslant x$. Запись $x < y$ означает по определению, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$. Соотношения вида $x \leqslant y$, $x < y$ называются неравенствами. Если $x \leqslant y$ в частично упорядоченном множестве X, то множество элементов $z \in X$, удовлетворяющих неравенствам $x \leqslant z \leqslant y$, называется сегментом (или отрезком) и обозначается $[x, y]$.

Пусть X — частично упорядоченное множество, частичный порядок в котором задается множеством $P \subset X \times X$. Каждое непустое подмножество $Y \subset X$ становится частично упорядоченным относительно порядка, порожденного множеством $Q = [Y \times Y] \cap P$. В этом случае говорят, что частичный порядок в Y индуцирован из X. Частично упорядоченное множество X называется линейно упорядоченным, если для любых $x, y \in X$ выполняется хотя бы одно из неравенств $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. Примером линейного упорядоченного множества служит множество всех действительных чисел с естественным порядком. Если подмножество $Y \subset X$ относительно индуцированного из X частичного порядка является линейно упорядоченным, то в этом случае Y называется цепью в X. Элемент x из частично упорядоченного множества X называется максимальным, если из неравенства $x \leqslant y$, $y \in X$ следует, что $x = y$.

Лемма Цорна Пусть X — частично упорядоченное множество, в котором для любой цепи $Y \subset X$ найдется такой элемент $y_0 \in X$, что $y \leqslant y_0$ при всех $y \in Y$. Тогда для любого элемента $x \in X$ существует максимальный элемент x_0, удовлетворяющий неравенству $x_0 \geqslant x$.

Лемма Цорна очень часто заменяет в доказательствах принцип математической индукции, позволяя обойтись без трансфинитных чисел. Элемент x из частично упорядоченного множества X называется наименьшим (наибольшим), если $x \leqslant y$ (соответственно $x \geqslant y$) для всех $y \in X$. Наименьший элемент часто называют нулем в X, а наибольший — единицей в X. Говорят, что элемент $x \in X$ является верхней (нижней) гранью множества $Y \subset X$, если $y \leqslant x$ (соответственно $x \leqslant y$) для всех $y \in Y$. Элемент $x \in X$ называется точной верхней гранью (точной нижней гранью) для множества $Y \subset X$, если x — верхняя (нижняя) грань для Y, и $x \leqslant z$ (соответственно $x \geqslant z$) для любой другой верхней (нижней) грани z множества Y. В случае, когда точная верхняя (нижняя) грань x множества Y существует, пишут

$$x = \bigvee Y = \sup Y \text{ (соответственно } x = \bigwedge Y = \inf Y).$$

Частично упорядоченное множество X называется решеткой (или структурой), если для любых $x, y \in X$ существуют $x \vee y$ и $x \wedge y$. Очевидно, что в решетке каждое конечное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Для любых подмножеств Y и Z из решетки X через $Y \vee Z$ $(Y \wedge Z)$ обозначается множество всех элементов из X вида $y \vee z$ (соответственно $y \wedge z$), $y \in Y$, $z \in Z$. Решетка X называется дедекиндовой, если для любых $x, y, z \in X$, $x \leqslant z$, следует

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Примером дедекиндовой решетки служит множество всех подпространств конечномерного пространства. Если в решетке X выполняется соотношение

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

для любых $x, y, z \in X$, то X называется дистрибутивной решеткой. Очевидно, что дистрибутивная решетка является дедекиндовой. Нетрудно видеть, что в каждой дистрибутивной решетке X выполняется „двойственное“ соотношение

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

для любых $x, y, z \in X$.

Частично упорядоченное множество A называется направлением, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует такой элемент $\alpha_3 \in A$, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_3$, $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$. Отображение f, заданное на направлении A, со значениями в произвольном множестве X называется сетью в X. Обычно сеть обозначают как семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha = f(\alpha)$. Пусть X — частично упорядоченное множество и $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сеть в X. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ возрастает (убывает) к элементу x (обозначение: $x_\alpha \uparrow x$ (соответственно $x_\alpha \downarrow x$)), если $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (соответственно $x_\alpha \geqslant x_\beta$) при $\alpha \leqslant \beta$ и $x_{\alpha \in A} = \bigvee x_\alpha$ ($x_{\alpha \in A} = \bigwedge x_\alpha$). Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (o)-сходится к элементу x (обозначение: $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$), если существуют такие сети $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $y_\alpha, z_\alpha \in X$, что $y_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant z_\alpha$, $y_\alpha \uparrow x$ и $z_\alpha \downarrow x$.

Для сетей со значениями в топологическом пространстве (X, τ) имеет смысл понятие предела: элемент $x \in X$ называется пределом сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$, если для любой окрестности V элемента x найдется такой индекс $\alpha_V \in A$, что $x_\alpha \in V$ при $\alpha \geqslant \alpha_V$. Говорят также, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сходится к x (обозначение $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$). Нетрудно убедиться в том, что точка x принадлежит замыканию $\overline{M}$ множества $M \subset (X, \tau)$ в том и только в том случае, когда существует сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset M$, сходящаяся к x. Если сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ не сходится к x, то это означает, что найдутся такие окрестность V элемента x и конфинальное направление $A' \subset A$ (A' конфинально в A, если для любого $\alpha \in A$ существует $\alpha' \in A'$, для которого $\alpha \leqslant \alpha'$), что $x_{\alpha'} \overline{\in} V$ при всех $\alpha' \in A'$ (сеть $\{x_{\alpha'}\}_{\alpha' \in A'}$ называется конфинальной подсетью сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$). Заметим, что, вообще говоря, в произвольном топологическом пространстве сеть может иметь более одного предела. Однако легко видеть, что в T_2-отделимом пространстве каждая сходящаяся сеть имеет только один предел.

Пусть X — произвольное частично упорядоченное множество. Сильнейшая из топологий в X, для которых из (o)-сходимости сетей (последовательностей) следует топологическая сходимость, называется o-топологией (соответственно (os)-топологией) в X и обозначается $\tau_0(X)$. Можно показать, что множество $F \subset X$ замкнуто в (o)-топологии ((os)-топологии) в том и только в том случае, когда F содержит (o)-пределы всех (o)-сходящихся сетей (соответственно последовательностей) своих элементов. Заметим, что если $x_\alpha \xrightarrow{\tau_0(X)} x$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$.

Определим еще одну топологию в частично упорядоченном множестве X. Пусть $\mathscr{F}$ — совокупность всех подмножеств в X вида $\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$, где $x_i \leqslant y_i$; x_i, $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$; n — произвольное натуральное число. Топология в X, базу открытых подмножеств которой образуют множества $\{X \setminus F\}$, $F \in \mathscr{F}$, называется интервальной топологией. Ясно, что в решетке X каждый отрезок $[a, b]$ замкнут относительно (o)-топологии. Поэтому интервальная топология в решетке всегда мажорируется (o)-топологией, но, вообще говоря, с ней не совпадает. Подробнее о свойствах решеток можно прочитать в [41, 52, 65, 122].

II. **Равномерные пространства.** В этом пункте без доказательств приводятся результаты из теории равномерных пространств [48, 72], которые мы используем в гл. I.

Пусть X — произвольное множество, $U \subset X \times X$. Через U^{-1} обозначается совокупность всех пар $(x, y) \in X \times X$ таких, что $(y, x) \in U$. Если $U = U^{-1}$, то множество U называется симметричным. Для произвольных подмножеств U, V из $X \times X$ композиция $U \circ V$ определяется как множество всех пар (x, z), для которых $(x, y) \in U$ и $(y, z) \in V$ при некотором $y \in X$. Через Δ обозначим совокупность всех пар вида (x, x), $x \in X$.

Непустое семейство $\mathscr{U}$ подмножеств из $X \times X$ называется равномерностью на множестве X, если $\mathscr{U}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Delta \subset U$ для любого $U \in \mathscr{U}$;

2) если $U \in \mathscr{U}$, то $U^{-1} \in \mathscr{U}$;

3) если $U \in \mathscr{U}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого V из $\mathscr{U}$;

4) если $U \in \mathscr{U}$, $V \in \mathscr{U}$, то $U \cap V \in \mathscr{U}$;

5) если $U \in \mathscr{U}$ и $U \subset V \subset X \times X$, то $V \in \mathscr{U}$.

Пара $(X, \mathscr{U})$ называется равномерным пространством, а каждое $U \in \mathscr{U}$ — окружением из $\mathscr{U}$.

На множестве X могут существовать разные равномерности. Наибольшую из них образует семейство всех подмножеств множества $X \times X$, содержащих Δ; эту равномерность называют дискретной равномерностью. На множестве X действительных чисел естественная равномерность определяется как семейство $\mathscr{U}$ всех таких подмножеств U из $X \times X$, что $\{(x, y) : |x - y| < r\} \subset U$ для некоторого положительного числа r.

Подсемейство $\mathscr{B}$ равномерности $\mathscr{U}$ называется ее базой, если для любого $U \in \mathscr{U}$ существует такое $V \in \mathscr{B}$, что $V \subset U$. Очевидно, что семейство $\mathscr{B}$ является базой некоторой равномерности на X в том и только в том случае, когда выполнены условия:

1) $\Delta \subset U$ для любого $U \in \mathscr{B}$;

2) если $U \in \mathscr{B}$, то существует $V \in \mathscr{B}$, такое, что $V \subset U^{-1}$;

3) если $U \in \mathscr{B}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого $V \in \mathscr{B}$;

4) если $U \in \mathscr{B}$, $V \in \mathscr{B}$, то $W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathscr{B}$.

Пусть (X, U) — равномерное пространство. Для каждого $x \in X$ и $U \in \mathscr{U}$ положим $U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}$. Обозначим через τ семейство всех таких подмножеств G из X, что какова бы ни была точка $x \in G$, существует $U \in \mathscr{U}$, для которого $U[x] \subset G$. Нетрудно проверить, что τ является топологией на X. Эта топология называется топологией, порожденной равномерностью $\mathscr{U}$. Если $\mathscr{B}$ — база равномерности $\mathscr{U}$, то семейство $\{U[x]\}$, $U \in \mathscr{B}$ есть база окрестностей точки x относительно топологии τ.

Обозначим через $\tau \times \tau$ тихоновскую топологию в прямом произведении $(X, \tau) \times (X, \tau)$. В [72] показано, что в любом равномерном пространстве $(X, \mathscr{U})$ семейство всех открытых относительно топологии $\tau \times \tau$ симметричных окружений, а также семейство всех замкнутых относительно топологии $\tau \times \tau$ симметричных окружений образуют базы равномерности $\mathscr{U}$.

Равномерность $\mathscr{U}$ на X называется отделимой или хаусдорфовой, если $\bigcap\limits_{U \in \mathscr{U}} U = \Delta$. В этом случае топология τ, порожденная равномерностью, является T_2-отделимой.

Отображение f равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ в равномерное пространство (Y, v) называется равномерно непрерывным, если для каждого $V \in v$ множество $(f \times f)^{-1}(V) = \{(x, y) \subset X \times X : (f(x), f(y)) \in V\}$ принадлежит $\mathscr{U}$. Очевидно, что композиция двух равномерно непрерывных отображений снова является равномерно непрерывным отображением. Если f — биекция X на Y и отображения f и f^{-1} равномерно непрерывны, то говорят, что f — равномерный изоморфизм, а пространства X и Y равномерно изоморфны. Легко видеть, что любое равномерно непрерывное отображение непрерывно относительно топологий, порожденных равномерностями, поэтому каждый равномерный изоморфизм является гомеоморфизмом.

Если $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство и Y — произвольное подмножество в X, то семейство подмножеств $\{U \cap (Y \times Y)\}$, $U \in \mathscr{U}$ определяет на Y равномерность v, которая называется равномерностью на Y, индуцируемой равномерностью $\mathscr{U}$ из X. Пространство (Y, v) в этом случае называется равномерным подпространством пространства $(X, \mathscr{U})$. Ясно, что топология в Y, порожденная равномерностью v, индуцируется топологией, порожденной равномерностью $\mathscr{U}$.

Пусть $(X_i, \mathscr{U}_i)$ — равномерное пространство для каждого индекса i из некоторого множества индексов I. Тогда равномерность на прямом произведении $X = \prod_{i \in I} X_i$ есть наименьшая среди тех равномерностей, относительно которых все проектирования на координатные пространства равномерно непрерывны. Эту равномерность называют тихоновской равномерностью на $X = \prod_{i \in I} X_i$. Базу тихоновской равномерности образуют множества вида

$$\{(x, y) \in X \times X : (x(i_k), y(i_k)) \in U_{i_k},\ k = 1, \dots, n\},$$

где $U_{i_k} \in \mathscr{U}_{i_k}$, $i_k \in I$, $k = 1, \dots, n$; n — натуральное число; $x = \{x(i)\}_{i \in I}$. Легко видеть, что топология, порожденная тихоновской равномерностью, совпадает с тихоновской топологией на X.

Пусть $(X, \mathscr{U})$, (Y, v) — произвольные равномерные пространства и $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$, $X_i = X$, $i = 1, \dots, n$. Говорят, что $f(X_1, \dots, X_n)$ равномерно непрерывно по совокупности переменных, если f является равномерно непрерывным отображением $\prod_{i=1}^{n} X_i$ с тихоновской равномерностью в (Y, v).

Рассмотрим теперь равномерности на множестве X, порожденные семейством псевдометрик. Напомним, что псевдометрикой называется неотрицательная функция $d(x, y)$, заданная на $X \times X$, для которой $d(x, y) = d(y, x)$ и $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ при всех $x, y, z \in X$. Пусть D — некоторое семейство псевдометрик на X. Для каждого $d \in D$ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$V(d, \varepsilon) = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Семейство всех множеств вида

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} V(d_i, \varepsilon_i),$$

где $d_i \in D$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, n — произвольное натуральное число, является базой некоторой равномерности на X. Эта равномерность называется равномерностью, порожденной семейством D. Ясно, что относительно этой равномерности каждая псевдометрика $d \in D$ равномерно непрерывна по совокупности переменных. В теории равномерных пространств важной является следующая теорема.

Теорема 1. Каждая равномерность на X порождается некоторым семейством псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$.

Из этой теоремы следует, что равномерность $\mathscr{U}$ на X метризуема (т. е. порождается некоторой метрикой) в том и только в том случае, когда $\mathscr{U}$ отделнма и имеет счетную базу окружений. Отметим также, что теорема 1 позволяет показать, что топология τ на множестве X порождается некоторой равномерностью тогда и только тогда, когда (X, τ) — вполне регулярное пространство.

Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ называется фундаментальной, если для любого окружения $U \in \mathscr{U}$ существует такое $\alpha_U \in A$, что $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_U$. Очевидно, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, сходящаяся относительно топологии, порожденной равномерностью $\mathscr{U}$, является фундаментальной.

Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется полным, если каждая фундаментальная сеть из X сходится к некоторой точке в топологии, порожденной $\mathscr{U}$. Ясно, что замкнутое подпространство полного пространства полно, а полное подпространство отделимого равномерного пространства замкнуто. Пусть f — отображение, заданное на подмножестве Z равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, со значениями в полном отделимом пространстве (Y, v). Если функция f равномерно непрерывна на Z, то можно показать [72], что существует, и притом единственное, равномерно непрерывное продолжение $\hat{f}$ отображения f, областью определения которого служит замыкание множества Z.

Приведем теорему о пополнении равномерных пространств [48].

Теорема 2. Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Существуют полное отделимое равномерное пространство $(\hat{X}, \hat{\mathscr{U}})$ и равномерно непрерывное отображение $i: X \to \hat{X}$, обладающие следующим свойством:

(P). Для любого равномерно непрерывного отображения f пространства X в полное отделимое равномерное пространство (Y, v) существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $g: \hat{X} \to Y$, такое, что $f = g \circ i$.

Если $(i_1, (X_1, \mathscr{U}_1))$ — вторая пара, состоящая из полного отделимого равномерного пространства $(X_1, \mathscr{U}_1)$ и равномерно непрерывного отображения $i_1: X \to X_1$, обладающая свойством (P), то существует, и притом единственный, равномерный изоморфизм $\varphi: \hat{X} \to X_1$, такой, что $i_1 = \varphi \circ i$.

Равномерное пространство $(\hat{X}, \hat{\mathscr{U}})$ называется отделимым пополнением равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, а отображение $i: X \to \hat{X}$ — **каноническим отображением пространства X в его отделимое пополнение.** Из теоремы 2 следует, что образ $i(X)$

плотен в $\hat{X}$, и если $(X, \mathscr{U})$ — отделимое равномерное пространство, то каноническое отображение $i: X \to \hat{X}$ есть изоморфизм X на всюду плотное подпространство пространства $\hat{X}$. Отметим также, что базу окружений равномерности $\hat{\mathscr{U}}$ образуют замыкания в $\hat{X} \times \hat{X}$ множеств

$$(i \times i)(U) = \{(i(x), i(y)) : (x, y) \in U\}, \quad U \in \mathscr{U}.$$

Подробнее о теории равномерных пространств можно прочитать в книгах [48, 72].

§ 2. Определение логики, простейшие свойства логик

Пусть ∇ — частично упорядоченное множество с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Отображение $a \to a^{\perp}$ из ∇ в ∇ называется ортодополнением, если:

1) из $a \leqslant b$ следует $b^{\perp} \leqslant a^{\perp}$;

2) $(a^{\perp})^{\perp} = a$ для всех $a \in \nabla$;

3) $a \vee a^{\perp} = \mathbf{1}$ для всех $a \in \nabla$.

Элементы a, b из частично упорядоченного множества ∇ с ортодополнением $\perp$ называются ортогональными (обозначение $a \perp b$), если $a \leqslant b^{\perp}$. Заметим, что последнее неравенство равносильно неравенству $b \leqslant a^{\perp}$.

Определение 1. Решетка ∇ с ортодополнением $\perp$ называется логикой, если для любых $a, b \in \nabla$, $a \leqslant b$ существует такой элемент $c \in \nabla$, что $a \perp c$ и $a \vee c = b$.

Перечислим простейшие свойства логик.

1°. Пусть $\{a_i\} \subset \nabla$ и существует $\bigvee_i a_i$. Тогда существует $\bigwedge_i a_i^{\perp}$ и $(\bigvee_i a_i)^{\perp} = \bigwedge_i a_i^{\perp}$.

Действительно, если $a = \bigvee_i a_i$, то $a^{\perp} \leqslant a_i^{\perp}$ для всех i. Пусть $b \in \nabla$ и $b \leqslant a_i^{\perp}$ для всех i. Тогда $a_i \leqslant b^{\perp}$ и $a \leqslant b^{\perp}$; поэтому $b \leqslant a^{\perp}$. Следовательно, $a^{\perp} = \bigwedge_i a_i^{\perp}$.

2°. Для любого $a \in \nabla$ справедливо равенство $a \wedge a^{\perp} = \mathbf{0}$.

Это свойство непосредственно следует из 1° и равенства $\mathbf{1}^{\perp} = 0$ (последнее равенство вытекает из соотношения $\mathbf{1}^{\perp} \leqslant a^{\perp}$ для всех $a \in \nabla$).

3°. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\} \subset \nabla$, $a_i \perp b_j$ для любых i, j и существуют $a = \bigvee_i a_i$ и $b = \bigvee_i b_j$. Тогда $a \perp b$.

Действительно, так как $a_i \perp b_j$, то $a_i \leqslant b_j^{\perp}$ при всех i. Поэтому $a \leqslant b_j^{\perp}$, отсюда $b_j \leqslant a^{\perp}$ для всех j. Следовательно, $b \leqslant a^{\perp}$, т. е. $a \perp b$.

4°. Если $a, b \in \nabla$, $a \leqslant b$, то существует единственное $c \in \nabla$, такое, что $a \perp c$ и $a \vee c = b$, при этом $c = (a \vee b^{\perp})^{\perp} = a^{\perp} \wedge b$.

Пусть $c_1 \in \nabla$, $c_1 \perp a$ и $c_1 \vee a = b$ (существование такого элемента c_1 следует из определения логики). Тогда $a \leqslant c_1^{\perp}$ и $b^{\perp} \leqslant c_1^{\perp}$, следовательно, $(a \vee b^{\perp}) \leqslant c_1^{\perp}$. Отсюда $c = (a \vee b^{\perp})^{\perp} \geqslant c_1$, поэтому существует элемент $d \in \nabla$, такой, что $d \perp c_1$ и $d \vee c_1 = c$; в частности, $d \leqslant c$ и потому $d \perp a$. Из свойства 1° следует, что $d \perp (a \vee c_1)$, т. е. $d \perp b$, но $d \leqslant c \leqslant b$, следовательно, $d \leqslant b \wedge b^{\perp} = 0$. Таким образом, $d = 0$ и $c_1 = c = (a \vee b^{\perp})^{\perp}$.

Элементы $a, b \in \nabla$ называются одновременно наблюдаемыми (обозначение: $a \leftrightarrow b$), если существуют попарно ортогональные элементы $a_1, b_1, c \in \nabla$, такие, что $a = a_1 \vee c$, $b = b_1 \vee c$. Очевидно, что любые попарно ортогональные элементы являются одновременно наблюдаемыми.

5°. Пусть $a \leftrightarrow b$ и a_1, b_1, c — такие попарно ортогональные элементы из ∇, что $a = a_1 \vee c$ и $b = b_1 \vee c$. Тогда $c = a \wedge b$.

Так как $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$, то $c \leqslant a \wedge b$. Из определения логики следует, что существует элемент $d \in \nabla$, такой, что $d \perp c$ и $d \vee c = a \wedge b$, при этом в силу свойств 1° и 4° $d = c^{\perp} \wedge (a \wedge b)$. Тогда $d \leqslant c^{\perp} \wedge a = (c \vee a^{\perp})^{\perp} = a_1$ и $d \leqslant c^{\perp} \wedge b = (c \vee b^{\perp})^{\perp} = b_1$, т. е. $d \leqslant a_1 \wedge b_1 = 0$. Следовательно, $c = a \wedge b$.

В дальнейшем, если $a, b \in \nabla$, $a \leqslant b$, то элемент $a^{\perp} \wedge b$ будем записывать в виде $(b - a)$. Из свойства 5° следует, что если $a \leftrightarrow b$, то $a = (a - a \wedge b) \vee (a \wedge b)$ и $b = (b - a \wedge b) \wedge (a \wedge b)$.

Следствие. Если $a \leftrightarrow b$ и $a \wedge b = 0$, то $a \perp b$.

6°. Элементы a и b одновременно наблюдаемы в том и только в том случае, когда существует элемент $c \in \nabla$, такой, что $c \leqslant a \wedge b$ и $(i - c) \perp a$.

Если $a \leftrightarrow b$, $c = a \wedge b$, $a_1 = a - c$, $b_1 = b - c$, то $b_1 \leqslant a_1^{\perp} \wedge c^{\perp} = (a_1 \vee c)^{\perp} = a^{\perp}$.

Для доказательства достаточности положим $a_1 = a - c$, $b_1 = b - c$; тогда $b_1 \perp a$ и, следовательно, $b_1 \perp a_1$, при этом $a = a_1 \vee c$, $b = b_1 \vee c$, т. е. $a \leftrightarrow b$.

7°. Если $\{a_i\} \subset \nabla$, $a_i \leftrightarrow a$ при всех i и существуют $\bigvee_i a_i$ и $\bigvee_i (a \wedge a_i)$, то $a \leftrightarrow \bigvee_i a_i$ и $a \wedge (\bigvee_i a_i) = \bigvee_i (a \wedge a_i)$.

Положим $c = \bigvee_i (a \wedge a_i)$, тогда $c \leqslant a \wedge (\bigvee_i a_i)$. Так как $a \leftrightarrow a_i$, то $(a - (a \wedge a_i)) \perp a_i$ (свойство 6°). Следовательно, $(a - c) \perp a_i$ при всех i, отсюда в силу свойства 3° $(a - c) \perp \bigvee_i a_i$. Из 6° получаем, что $a \leftrightarrow \bigvee_i a_i$ и $\bigvee_i (a \wedge a_i) = c = a \wedge (\bigvee_i a_i)$.

8°. Если $a \leftrightarrow b$, то элементы $a^{\perp}$, $b^{\perp}$, $a \vee b$, $a \wedge b$, a, b попарно одновременно наблюдаемы.

Так как $a \leftarrow b$, то элементы $c = a \wedge b$, $a_1 = a - c$, $b_1 = b - c$ попарно ортогональны. Далее

$$a \vee b = (a_1 \vee c) \vee (b_1 \vee c) = a_1 \vee b_1 \vee c = a_1 \vee (b_1 \vee c)$$

и $(b_1 \vee c) \perp a_1$. Следовательно, $(a \vee b) - a_1^{\perp} = b_1 \vee c = b$ и $b^{\perp} = a_1 \vee (a \vee b)^{\perp}$. Аналогично $a^{\perp} = b_1 \vee (a \vee b)^{\perp}$. Поэтому $a^{\perp} \leftrightarrow b^{\perp}$. Кроме того, $b_1 \leqslant a^{\perp} \wedge b$ и $b - b_1 = c$, $c \perp a^{\perp}$. В силу свойства 6° $b \leftrightarrow a^{\perp}$. Используя свойство 7°, можно установить одновременную наблюдаемость остальных пар элементов.

9°. Если $a \leftrightarrow b$, то $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$.

Используя обозначения из доказательства предыдущего свойства, имеем $a = a_1 \vee c$, где $c = a \wedge b$ и $a_1 \leqslant a \wedge b^{\perp}$, но $(a \wedge b^{\perp}) - a_1 = a \wedge b^{\perp} \wedge a_1^{\perp} = c \wedge b^{\perp} = 0$, следовательно, $a_1 = a \wedge b^{\perp}$ и $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$.

10°. Пусть $a \in \nabla$ и $\nabla_a = \{b \in \nabla : b \leqslant a\}$. Для каждого $b \in \nabla_a$ положим $b' = a \wedge b^{\perp} = a - b$. Тогда ∇_a является логикой относительно ортодополнения $b \to b'$.

Очевидно, что ∇_a — решетка относительно индуцированного частичного порядка с нулем 0 и единицей a. Если b_1, $b_2 \in \nabla_a$ и $b_1 \leqslant b_2$, то $b_2' = a \wedge b_2^{\perp} \leqslant a \wedge b_1' = b_1'$. Так как $b \leqslant a$ для каждого $b \in \nabla_a$, то $b \leftrightarrow a$ и в силу свойства 7°

$$(b')' = a \wedge (b')^{\perp} = a \wedge (a \wedge b^{\perp})^{\perp} = a \wedge (a^{\perp} \vee b) = (a \wedge a^{\perp}) \vee \vee (a \wedge b) = b.$$

Далее $b \vee b' = b \vee (a - b) = a$ для всех $b \in \nabla_a$. Если b_1, $b_2 \in \nabla_a$ и $b_1 \leqslant b_2$, то поскольку ∇ — логика, существует $c \in \nabla$, такое, что $c \perp b_1$ и $b_1 \vee c = b_2$. Следовательно, $c \in \nabla_a$ и $b_1 \leqslant a \wedge c^{\perp} = c'$. Таким образом, ∇_a является логикой.

Примеры логик. 1. Пусть ∇ — произвольная алгебра подмножеств в множестве X. Для любых A, $B \in \nabla$ положим $A \leqslant B$, если $A \subset B$, и $A^{\perp} = X \setminus A$. Тогда, очевидно, ∇ является логикой.

2. Пусть ∇ — множество всех замкнутых подпространств в гильбертовом пространстве H. Для любых M, $N \in \nabla$ положим $M \leqslant N$, если $M \subset N$, и $M^{\perp} = H \ominus M$. Тогда ∇ становится решеткой с нулем и единицей и ортодополнением, при этом нулем служит подпространство $M = \{0\}$, единицей — гильбертово пространство H, $M_1 \wedge M_2 = M_1 \cap M_2$ и $M_1 \vee M_2$ совпадает с наименьшим замкнутым подпространством в H, содержащим M_1 и M_2. Если $M \leqslant N$, M, $N \in \nabla$ и $K = (H \ominus M) \cap N$, то $K \perp M$ и $N = K \vee M$, так как $K = N \ominus M$. Следовательно, ∇ является логикой.

3. Рассмотрим множество ∇, состоящее из шести различных элементов $a_1, \dots, a_6$. Зададим на ∇ частичный порядок, считая $a_1 \leqslant a_i$, $i = 2, \dots, 6$, $a_i \leqslant a_6$, $i = 1, \dots, 5$, $a_i \leqslant a_i$, $i = 1, \dots, 6$. Очевидно, что $(\nabla, \leqslant)$ — решетка с нулем a_1 и единицей a_6, причем $a_i \vee a_j = a_6$, если $i = 1$, $j \neq 1$, и $a_i \wedge a_j = a_1$, если $i \neq 6$, $j \neq 6$. Определим на ∇ ортодополнение, полагая $a_1^{\perp} = a_6$, $a_2^{\perp} = a_3$, $a_4^{\perp} = a_5$, $a_6^{\perp} = a_1$, $a_3^{\perp} = a_2$, $a_5^{\perp} = a_4$. Тогда ∇ становится логикой. Заметим, что эта логика не является дистрибутивной решеткой, так как $a_2 \vee (a_3 \wedge a_4) = a_2 \neq a_6 = (a_2 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_4)$.

Определение 2. Логика, являющаяся дистрибутивной решеткой, называется булевой алгеброй.

Предложение 1. Пусть ∇ — произвольная логика. Следующие условия эквивалентны:

1) $a \leftrightarrow b$ для любых $a, b \in \nabla$;

2) ∇ — булева алгебра.

Доказательство. Пусть $a \leftrightarrow b$ для всех $a, b \in \nabla$ и $a, b, c \in \nabla$ произвольные элементы из ∇. В силу свойства 7° $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; отсюда $a^{\perp} \vee (b^{\perp} \wedge c^{\perp}) = (a^{\perp} \vee b^{\perp}) \wedge (a^{\perp} \vee c^{\perp})$ для любых $a, b, c \in \nabla$. Следовательно, ∇ — дистрибутивная решетка.

Если же ∇ — булева алгебра и $a, b \in \nabla$, то $a = a_1 \vee c$, $b = b_1 \vee c$, где $c = a \wedge b$; $a_1 = a - a \wedge b = a \wedge (a \wedge b)^{\perp}$; $b_1 = b - a \wedge b = b \wedge (a \wedge b)^{\perp}$; a_1, b_1, c попарно ортогональны, т. е. $a \leftrightarrow b$. ■

Подмножество ∇_1 логики ∇ называется подлогикой, если $0, 1 \in \nabla_1$ и $a \vee b$, $a^{\perp} \in \nabla$ для любых $a, b \in \nabla_1$. Очевидно, что относительно индуцированного частичного порядка и ортодополнения ∇_1 является логикой. В случае, когда ∇_1 — булева алгебра, подлогика ∇_1 называется булевой подалгеброй логики ∇. Если в логике ∇ всех замкнутых подпространств гильбертова пространства H (пример 2) в качестве ∇_1 взять все замкнутые подпространства, порожденные всевозможными подмножествами некоторой полной ортонормированной системы в H, то ∇_1 будет булевой подалгеброй в ∇. Из предложения 1 следует, что подмножество ∇_1 в логике ∇ является булевой подалгеброй в том и только в том случае, когда $0, 1 \in \nabla_1$, $a \vee b$, $a^{\perp} \in \nabla_1$ и $a \leftrightarrow b$ для любых $a, b \in \nabla_1$.

Множество $\mathscr{B}$ всех булевых подалгебр в логике ∇ можно естественным образом упорядочить, положив $\nabla_1 \leqslant \nabla_2$, если $\nabla_1 \subset \nabla_2$, $\nabla_1, \nabla_2 \in \mathscr{B}$. Максимальные элементы из $\mathscr{B}$ называются максимальными булевыми подалгебрами в ∇. Если $\{\nabla_i\}_{i \in I}$ — цепь в $\mathscr{B}$ и $\nabla_0 = \bigcup_{i \in I} \nabla_i$, то $0, 1 \in \nabla_0$, $a \vee b$, $a^{\perp} \in \nabla_0$ и $a \leftrightarrow b$ для любых $a, b \in \nabla_0$. Поэтому $\nabla_0 \in \mathscr{B}$ и $\nabla_i \leqslant \nabla_0$ при всех $i \in I$. По лемме Цорна получаем следующее предложение.

Предложение 2. Для любой булевой подалгебры ∇_1 в логике ∇ существует максимальная булева подалгебра ∇_0, содержащая ∇_1.

Пусть ∇ — произвольная логика. Для элементов $a, b \in \nabla$ положим

$$a \Delta b = (a - a \wedge b) \vee (b - a \wedge b), \quad a \cdot b = a \wedge b.$$

Если ∇ — булева алгебра, то относительно введенных операций ∇ становится коммутативным кольцом с единицей, в котором $a^2 = a$ для каждого $a \in \nabla$ (см., например, [9, 51]).

Предложение 3. В каждой логике ∇ выполняются следующие соотношения:

1) $a \Delta b = a \vee b - a \wedge b$, $a, b \in \nabla$;

2) $(a \vee b) \Delta (c \vee d) \leqslant (a \Delta c) \vee (a \Delta d) \vee (b \Delta c) \vee (b \Delta d)$, $a, b, c, d \in \nabla$;

3) $\left(c \wedge (a \wedge c)^{\perp}\right) \vee \left(c \wedge (b \wedge c)^{\perp}\right) = c \wedge (a \wedge b \wedge c)^{\perp}$, $a, b, c \in \nabla$;

4) $a \Delta b \leqslant (a \Delta c) \vee (c \Delta b)$, $a, b, c \in \nabla$.

Доказательство. 1. Очевидно, что $a \vee b - a \wedge b \geqslant a \Delta b$. Положим $t = \left((a \vee b) \wedge (a \wedge b)^{\perp}\right) - a \Delta b = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)^{\perp} \wedge \wedge (a - a \wedge b)^{\perp} \wedge (b - a \wedge b)^{\perp}$. Тогда $t \leqslant (a \vee b) \wedge \left((a \wedge b) \vee (a - a \wedge b)\right)^{\perp} = (a \vee b) \wedge a^{\perp}$. Аналогично $t \leqslant (a \vee b) \wedge b^{\perp}$ и потому $t \leqslant \leqslant (a \vee b) \wedge a^{\perp} \wedge b^{\perp} = 0$. Следовательно, $a \Delta b = a \vee b - a \wedge b$.

2. Покажем сначала, что

$$(a \vee b) \Delta c \leqslant (a \Delta c) \vee (b \Delta c)$$

для любых $a, b, c \in \nabla$. Пусть $t_1 = (a \vee c) - (a \vee b) \wedge c$, $t_2 = (b \vee c) - (a \vee b) \wedge c$ и $t_0 = (a \vee b) \Delta c - t_1 \vee t_2$. Тогда

$$t_0 \leqslant (a \vee b \vee c) \wedge \left((a \vee b) \wedge c\right)^{\perp} \wedge t_1^{\perp} \wedge t_2^{\perp} = (a \vee b \vee c) \wedge$$
$$\wedge \left(\left[(a \vee b) \wedge c\right] \vee t_1\right)^{\perp} \wedge \left(\left[(a \vee b) \wedge c\right] \vee t_2\right)^{\perp} =$$

$= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee c)^{\perp} \wedge (b \vee c)^{\perp} = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)^{\perp} = 0.$
Следовательно,
$(a \vee b) \Delta c = t_1 \vee t_2 \leqslant (a \vee c - a \wedge c) \vee (b \vee c - b \wedge c) = (a \Delta c) \vee (b \Delta c).$
Если a, b, c, d — произвольные элементы из ∇, то

$$(a \vee b) \Delta (c \vee d) \leqslant \left(a \Delta (c \vee d)\right) \vee \left(b \Delta (c \vee d)\right) \leqslant (a \Delta c) \vee (a \Delta d) \vee$$
$$\vee (b \Delta c) \vee (b \Delta d).$$

3. Так как $a \wedge c \leqslant c$, то $a \wedge c \leftrightarrow c$ и в силу свойства 8° $(a \wedge c)^{\perp} \leftrightarrow c$. Аналогично $(b \wedge c)^{\perp} \leftrightarrow c$. Согласно свойству 7°,

$$\left(c \wedge (a \wedge c)^{\perp}\right) \vee \left(c \wedge (b \wedge c)^{\perp}\right) = c \wedge \left((a \wedge c)^{\perp} \vee (b \wedge c)^{\perp}\right) =$$
$$= c \wedge (a^{\perp} \vee b^{\perp} \vee c^{\perp}) = c \wedge (a \wedge b \wedge c)^{\perp}.$$

4. Положим $e = a \wedge b \wedge c$ и покажем, что $(a \vee c) \wedge e^{\perp} \leqslant \leqslant (a\Delta c) \vee (c\Delta b)$. Очевидно, что

$$(a \vee c) \wedge e^{\perp} \geqslant (a \wedge (a \wedge c)^{\perp}) \vee (c \wedge e^{\perp}),$$

но

$$(a \vee c) \wedge e^{\perp} - (a \wedge (a \wedge c)^{\perp}) \vee (c \wedge e^{\perp}) =$$
$$= (a \vee c) \wedge e^{\perp} \wedge (a \wedge (a \wedge c)^{\perp})^{\perp} \wedge (c \wedge e^{\perp})^{\perp} =$$
$$= (a \vee c) \wedge (e \vee (c \wedge e^{\perp}) \vee (a \wedge (a \wedge c)^{\perp}))^{\perp} =$$
$$= (a \vee c) \wedge (c \vee (a \wedge (a \wedge c)^{\perp}))^{\perp} = (a \vee c) \wedge (c \vee (a \wedge c) \vee$$
$$\vee (a \wedge (a \wedge c)^{\perp})^{\perp} = (a \vee c) \wedge (a \vee c)^{\perp} = 0.$$

Следовательно,

$$(a \vee c) \wedge e^{\perp} = (a \wedge (a \wedge c)^{\perp}) \vee (c \wedge e^{\perp}) =$$
$$= a \wedge (a \wedge c)^{\perp}) \vee (c \wedge (a \wedge c)^{\perp}) \vee (c \wedge (b \wedge c)^{\perp}) \leqslant (a\Delta c) \vee (c\Delta b),$$

(здесь в последнем равенстве использовался п. 3). Таким образом,

$$a \wedge (a \wedge b)^{\perp} \leqslant (a \vee c) \wedge e^{\perp} \leqslant (a\Delta c) \vee (c\Delta b).$$

Аналогично

$$b \wedge (a \wedge b) \leqslant (b \vee c) \wedge e^{\perp} \leqslant (b\Delta c) \vee (c\Delta a).$$

Следовательно,

$$a\Delta b \leqslant (a\Delta c) \vee (c\Delta b). \quad \blacksquare$$

Замечание. Вообще говоря, неравенство

$$(a \vee b)\,\Delta\,(c \vee d) \leqslant (a\Delta c) \vee (b\Delta d)$$

в логиках не выполняется.

Пример. Пусть ∇ — логика всех подпространств трехмерного гильбертова пространства H и ξ_1, ξ_2, ξ_3 — ортонормированный базис в H. Обозначим через a подпространство, порожденное векторами ξ_1 и ξ_2, а через c — подпространство, порожденное вектором ξ_2. Пусть $\xi = \lambda\xi_1 + \mu\xi_3$, λ, μ — ненулевые числа и b — одномерное подпространство, порожденное вектором ξ. Тогда $(a \vee b)\,\Delta\,(c \vee b) = (c \vee b)^{\perp}$ — одномерное подпространство, ортогональное подпространству, порожденному векторами ξ_2, ξ, и $(a\Delta c) \vee (b\Delta b) = a\Delta c$ — подпространство, порожденное вектором ξ_1. Следовательно, элементы $(a \vee b)\,\Delta\,(c \vee b)$ и $(a\Delta c) \vee (b\Delta b)$ не сравнимы.

Предложение. 4. Пусть A — подмножество попарно одновременно наблюдаемых элементов из логики ∇, такое, что $a^{\perp} \in A$ для всех $a \in A$. Тогда

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{k=1}^{m_i} = \bigvee_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant m_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ 1\leqslant k_n\leqslant m_n}} (a_{1k_1}\wedge a_{2k_2}\wedge\ldots\wedge a_{nk_n}),$$

$$\bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{m_i} = \bigwedge_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant m_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ 1\leqslant k_n\leqslant m_n}} (a_{1k_1}\vee a_{2k_2}\vee\ldots\vee a_{nk_n})$$

для любых $a_{ik}\in A$, $k=1,\ldots,m_i$, $i=1,\ldots,n$.

Доказательство. В силу свойства 7° и замкнутости множества A относительно операции ортодополнения имеем

$$a\wedge\bigvee_{i=1}^{n} a_i=\bigvee_{i=1}^{n}(a\wedge a_i),$$

$$a\vee\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right)=\bigwedge_{i=1}^{n}(a\vee a_i)$$

для любых a, $a_i\in A$, $i=1,\ldots,n$. Отсюда

$$\left(\bigvee_{k_1=1}^{m_1} a_{1k_1}\right)\wedge\left(\bigvee_{k_2=1}^{m_2} a_{2k_2}\right)=\bigvee_{k_2=1}^{m_2}\left(\left(\bigvee_{k_1=1}^{m_1} a_{1k_1}\right)\wedge a_{2k_2}\right)=$$

$$=\bigvee_{k_1=1}^{m_1}\bigvee_{k_2=1}^{m_2}(a_{1k_1}\wedge a_{2k_2})$$

для любых a_{1k_1}, $a_{2k_2}\in A$.

Наконец, используя математическую индукцию, получаем утверждение предложения 4. ■

Предложение 5. Пусть A — произвольное множество попарно одновременно наблюдаемых элементов из логики ∇. Тогда существует булева подалгебра ∇_1 в ∇, содержащая множество A.

Доказательство. Пусть

$$A_0=A\cup\{a^{\perp}: a\in A\};$$

тогда A_0 — множество попарно одновременно наблюдаемых элементов из ∇, замкнутое относительно операции ортодополнения.

Положим

$$\nabla_1=\left\{b=\bigvee_{k=1}^{n(b)}(a_{k1}\wedge a_{k2}\wedge\ldots\wedge a_{km_k}): a_{ki}\in A_0,\ 1\leqslant i\leqslant m_k,\ k=1,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,n(b)\right\}.$$

В силу предложения 4

$$b^{\perp}=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{k1}\wedge a_{k2}\wedge\ldots\wedge a_{km_k})\right]^{\perp}=$$

$$= \bigwedge_{k=1}^{n} \bigvee_{l=1}^{m_k} a_{kl}^{\perp} = \bigvee_{\substack{1 < l_1 \leqslant m_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 < l_n \leqslant m_n}} \left(a_{1l_1}^{\perp} \wedge a_{2l_2}^{\perp} \wedge \ldots \wedge a_{nl_n}^{\perp}\right) \in \nabla_1,$$

так что $b^{\perp} \in \nabla_1$ для всех $b \in \nabla_1$. Далее из свойств 7° и 8° следует, что

$$\bigvee_{k=1}^{n} \left(a_{k1} \wedge a_{k2} \wedge \ldots \wedge a_{km_k}\right) \wedge \left(\bigvee_{l=1}^{m} \left(b_{l1} \wedge b_{l2} \wedge \ldots \wedge b_{lm_l}\right)\right) =$$

$$= \bigvee_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} \left(a_{k1} \wedge a_{k2} \wedge \ldots \wedge a_{km_k} \wedge b_{l1} \wedge b_{l2} \wedge \ldots \wedge b_{lm_l}\right).$$

Поэтому, если b, $c \in \nabla_1$, то $b \wedge c \in \nabla_1$. Согласно свойству 8°, $b \leftrightarrow c$ для любых b, $c \in \nabla_1$. Кроме того, $0 \in \nabla_1$ и, следовательно, $1 \in \nabla_1$. Таким образом, ∇_1 — булева подалгебра в ∇ и, очевидно, $\nabla_1 \supset A$. ■

Следствие. Если A — произвольное множество попарно одновременно наблюдаемых элементов из логики ∇, то существует максимальная булева подалгебра ∇_1 в ∇, содержащая A.

Логика ∇ называется полной (σ-полной), если для любого ее подмножества M (любого счетного M) существует точная верхняя грань $\vee M$. В силу свойства 1° в полной логике ∇ для каждого подмножества $M \subset \nabla$ существует $\wedge M$ и $\wedge M = \left(\bigvee_{m \in M} m^{\perp}\right)^{\perp}$.

Теорема 1. Если в логике ∇ для всякого семейства (счетного семейства) M попарно ортогональных элементов существует $\vee M$, то ∇ — полная (σ-полная) логика.

Доказательство. Пусть $M = \{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $b_n = \bigvee_{k=1}^{n} a_k$, $c_1 = b_1$, $c_n = b_n \wedge b_{n-1}^{\perp}$ при $n \geqslant 2$. Тогда $\{c_n\}$ — последовательность попарно ортогональных элементов и потому существует $\bigvee_{n=1}^{\infty} c_n = a$. Покажем, что $a = \vee M$. Пусть $c \geqslant a_n$ при всех n, тогда $c \geqslant c_n$ и поэтому $c \geqslant a$. Из построения последовательности $\{c_n\}$ следует, что $b_2 = b_1 \vee c_2 = c_1 \vee c_2$, $b_3 = b_2 \vee c_3 = c_1 \vee c_2 \vee c_3, \ldots, b_n = \bigvee_{i=1}^{n} c_i$, т. е. $b_n \leqslant a$ при всех n. Таким образом, $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} b_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$. Далее воспользуемся методом трансфинитной индукции. Пусть теорема доказана для всех подмножеств, имеющих мощность, меньшую, чем τ, и пусть $M \subset \nabla$ и $\operatorname{card} M = \tau$. Обозначим через α_0 первое трансфинитное число, соответствующее мощности τ, и занумеруем все элементы из M в трансфинитную последовательность $\{a_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$. Положим $b_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} a_\beta$ для любого $\alpha < \alpha_0$. По предположению индукции этот элемент существует. Пусть

$c_\alpha = b_{\alpha+1} \wedge b_\alpha^\perp$; тогда $\{c_\alpha\}$ — семейство попарно ортогональных элементов. Поэтому существует точная верхняя грань $\bigvee_{\alpha<\alpha_0} c_\alpha = a$. Покажем, что $a_1 \vee a = \vee M$. Если $c \geqslant a_\alpha$ при всех $\alpha < \alpha_0$, то $c \geqslant c_\alpha$ и поэтому $c \geqslant a_1 \vee a$. Из построения элементов $\{c_\alpha\}$ следует, что $b_2 = a_1 \vee c_1$, $b_3 = b_2 \vee c_2 = a_1 \vee c_1 \vee c_2, \ldots$, $b_n = a_1 \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} c_i$, т. е. $b_n \leqslant a_1 \vee a$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $b_\alpha \leqslant a_1 \vee a$ для всех трансфинитных чисел $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Если α_1 — не предельное трансфинитное число, то определено число $\alpha_1 - 1$, и $b_{\alpha_1} = b_{\alpha_1 - 1} \vee c_{\alpha_1 - 1} \leqslant a_1 \vee a$. Пусть α_1 — предельное трансфинитное число, тогда $b_{\alpha_1} = \bigvee_{\beta<\alpha_1} a_\beta = \bigvee_{\beta<\alpha_1} b_\beta \leqslant a_1 \vee a$. Таким образом, $b_\alpha \leqslant a_1 \vee a$ при всех $\alpha < \alpha_0$. Следовательно, существует $\vee M \bigvee_{\alpha<\alpha_0} a_\alpha = \bigvee_{\alpha<\alpha_0} b_\alpha = a_1 \vee a$. ■

Следствие. Логика ∇ полна (σ-полна) в том и только в том случае, когда полна (σ-полна) каждая максимальная булева подалгебра в ∇.

Доказательство. Пусть ∇ — полная логика, ∇_0 — максимальная булева подалгебра в ∇ и M — произвольное подмножество в ∇_0. Положим $a = \vee M$; в силу свойства 7° $a \leftrightarrow b$ для всех $b \in \nabla_0$. Существует булева подалгебра ∇_1 в ∇, содержащая a и ∇_0 (предложение 5). Так как ∇_0 — максимальная булева подалгебра в ∇, то $\nabla_0 = \nabla_1$ и потому $a \in \nabla_0$, т. е. ∇_0 — полная булева алгебра.

Наоборот, пусть каждая максимальная булева подалгебра в ∇ является полной. Возьмем произвольное множество M попарно ортогональных элементов из ∇, для которого 1 не является точной верхней гранью. Тогда существует элемент $a \in \nabla$, такой, что $a \neq 0$, $a \perp m$ для всех $m \in M$. Обозначим через $\mathscr{A}$ совокупность всех подмножеств A из ∇, состоящих из ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇, таких, что $a \perp m$ для любых $a \in A$, $m \in M$, $A \in \mathscr{A}$. Очевидно, что $\mathscr{A}$ — непустое множество и в $\mathscr{A}$ можно ввести частичный порядок, полагая $A_1 \leqslant A_2$, если $A_1 \subset A_2$. Если $\{A_i\}_{i \in I}$ — цепь в $\mathscr{A}$ и $A_0 = \bigcup_{i \in I} A_i$, то $A_0 \in \mathscr{A}$ и, следовательно, по лемме Цорна, существует максимальный элемент $\bar{A}$ в $\mathscr{A}$. Так как элементы из $\bar{A}$ и M попарно одновременно наблюдаемы, то в силу следствия 2 найдется максимальная булева подалгебра ∇_1 в ∇, содержащая $\bar{A}$ и M. По предположению, ∇_1 — полная булева алгебра, следовательно существует $d = \vee \bar{A}$ в ∇_1, при этом $m \leqslant d^\perp$ для всех $m \in M$. Покажем, что $d^\perp$ есть точная верхняя грань множества M в ∇. Пусть существует элемент $b \in \nabla$, такой, что $m \leqslant b$ для всех $m \in M$ и $d^{\perp} \wedge b \neq \neq d^{\perp}$. Положим $c = d^{\perp} - (d^{\perp} \wedge b)$, тогда $c \neq 0$ и $\bar{A} \cup \{c\} \in \mathscr{A}$, что противоречит максимальности $\bar{A}$. Следовательно, $d^{\perp} = \vee M$ в ∇ и, по теореме 1, ∇ является полной логикой. ■

Логика ∇ называется логикой счетного типа, если всякое подмножество попарно ортогональных ненулевых элементов из ∇ не более чем счетно. Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 6. Всякая σ — полная логика счетного типа является полной логикой.

Логика всех замкнутых подпространств гильбертова пространства H (пример 2) имеет счетный тип в том и только в том случае, когда H — сепарабельное пространство.

Предложение 7. Пусть ∇ — полная логика счетного типа и M — произвольное подмножество из ∇. Тогда существует счетное множество $M_1 \subset M$, такое, что $\vee M_1 = \vee M$.

Доказательство. Если существует элемент $a \in M$, такой, что $a = \vee M$, то в качестве M_1 берется множество $\{a\}$. Пусть $m < \vee M$ для всех $m \in M$ и m_1 — произвольный элемент из M. Тогда найдется элемент $m_2 \in M$, такой, что $m_1 < m_1 \vee m_2$ и $m_2 < < m_1 \vee m_2$. Затем выбираем элемент $m_3 \in M$, такой, что $m_1 \vee m_2 < < m_1 \vee m_2 \vee m_2$ и $m_3 < m_1 \vee m_2 \vee m_3$ и т. д. Если $\bigvee_{i=1}^{n} m_i = \vee M$ на некотором шаге n, то полагаем $M_1 = \{m_1, \dots, m_n\}$. В противном случае построим последовательность $\{m_n\} \subset M$, такую, что $a_n < a_{n+1}$, где $a_n = \bigvee_{i=1}^{n} m_i$. Пусть $a_0 = \bigvee_{n=1}^{\infty} m_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $a_0 = = \vee M$, то полагаем $M_1 = \{m_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. В противном случае найдется элемент $m_w \in M$, такой, что $a_0 < m_w \vee a_0$ и т. д. Покажем что этот процесс оборвется на счетном трансфинитном числе и тем самым предложение 7 будет доказано. Пусть для каждого счетного трансфинитного числа α построены элементы $m_\alpha \in M$, для которых $a_\alpha < a_{\alpha+1}$, где $a_\alpha = \bigvee_{\beta \leqslant \alpha} m_\beta$. Положим $b_\alpha = = a_{\alpha+1} - a_\alpha$, тогда $\{b_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$, где α_0 — первое несчетное трансфинитное число, является несчетным множеством ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇, что противоречит счетности типа логики ∇. ■

Следствие. В полной логике ∇ счетного типа для каждого подмножества $M \subset \nabla$ существует счетное подмножество $M_1 \subset M$, такое, что $\wedge M = \wedge M_1$.

Для доказательства достаточно использовать операцию ортодополнения и предложение 7.

Библиография: [9, 50, 80, 122, 157].

§ 3. Прямое произведение логик

Пусть ∇_i, $i\in I$, — некоторое семейство логик. Их прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ состоит из всевозможных функций φ, заданных на I и принимающих значения $\varphi(i)\in\nabla_i$. Для двух элементов φ, $\psi\in \prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ положим $\varphi\leqslant\psi$, если $\varphi(i)\leqslant\psi(i)$ для всех $i\in I$. Тогда $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ становится решеткой с нулем и единицей, при этом если $\mu=\varphi\vee\psi$, $\nu=\varphi\wedge\psi$, то $\mu(i)=\varphi(i)\vee\psi(i)$ и $\nu(i)=\varphi(i)\wedge\psi(i)$. Определим в $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ ортодополнение, полагая

$$(\varphi^\perp)(i)=(\varphi(i))^\perp$$

для всех $i\in I$.

Предложение 1. Прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ семейства логик ∇_i, $i\in I$, также является логикой.

Доказательство. Очевидно, что введенная операция $(\varphi)^\perp(i)=(\varphi(i))^\perp$ является ортодополнением в $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$. Пусть φ, $\psi\in\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$, $\varphi\leqslant\psi$. Тогда $\varphi(i)\leqslant\psi(i)$ для всех $i\in I$ и поэтому существует $\lambda(i)\in\nabla_i$, такое, что $\lambda(i)\perp\varphi(i)$ и $\varphi(i)\vee\lambda(i)=\psi(i)$, $i\in I$. Следовательно, $\lambda\perp\varphi$ и $\varphi\vee\lambda=\psi$, т. е. $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ является логикой. ■

Предложение 2. Прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ семейства логик ∇_i, $i\in I$, является полной логикой в том и только в том случае, когда каждая логика ∇_i-полна, $i\in I$.

Доказательство очевидно, так как частичный порядок в $\prod\limits_{i\in I} \nabla_i$ покоординатный.

Множество всех тех элементов из логики ∇, которые одновременно наблюдаемы с каждым элементом из ∇, называется центром логики ∇ и обозначается $Z(\nabla)$.

Предложение 3. Центр $Z(\nabla)$ логики ∇ является булевой подалгеброй в ∇. Если ∇ — полная логика, то $Z(\nabla)$ — тоже полная подалгебра.

Доказательство. Очевидно, что $0, 1\in Z(\nabla)$. Если a, $b\in Z(\nabla)$, то $a\leftrightarrow c$, $b\leftrightarrow c$ для всех $c\in\nabla$. Поэтому в силу свойства 8° логик $a\vee b\leftrightarrow c$, $a^\perp\leftrightarrow c$ для всех $c\in\nabla$. Так как $a\leftrightarrow b$, a, $b\in Z(\nabla)$, то $Z(\nabla)$ — булева подалгебра в ∇. Пусть ∇ — полная логика, $M\subset Z(\nabla)$ и $a=\sup M$. Тогда из свойства 7° логик следует, что $a\leftrightarrow c$ для всех $c\in\nabla$, т. е. $a\in Z(\nabla)$. Поэтому $Z(\nabla)$ — полная булева подалгебра в ∇. ■

Пусть ∇_1, ∇_2 — произвольные логики. Отображение $f:\nabla_1\to\nabla_2$ называется гомоморфизмом логик, если

1) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $a, b \in \nabla_1$;

2) $f(a^{\perp}) = (f(a))^{\perp}$, $a \in \nabla_1$.

Очевидно, что каждый гомоморфизм логик сохраняет порядок, т. е. $f(a) \leqslant f(b)$, если $a \leqslant b$. Кроме того,

$$f(a \wedge b) = f((a^{\perp} \vee b^{\perp})^{\perp}) = (f^{\perp}(a) \vee f^{\perp}(b))^{\perp} = f(a) \wedge f(b)$$

для всех $a, b \in \nabla_1$.

Если гомоморфизм $f: \nabla_1 \to \nabla_2$ является биекцией, то f называется изоморфизмом логик ∇_1 и ∇_2. В этом случае говорят, что логики ∇_1 и ∇_2 изоморфны. Легко видеть, что для каждого изоморфизма логик $f: \nabla_1 \to \nabla_2$ обратное отображение $f^{-1}: \nabla_2 \to \nabla_1$ также является изоморфизмом логик ∇_2 и ∇_1.

Предложение 4. Пусть ∇ — полная логика, $Z(\nabla)$ — центр в ∇ и M — произвольное множество ненулевых попарно ортогональных элементов из $Z(\nabla)$, таких, что $\bigvee M = \mathbf{1}$. Тогда логика ∇ изоморфна прямому произведению $\prod\limits_{m \in M} \nabla_m$ логик $\nabla_m = \{b \in \nabla : b \leqslant m\}$.

Доказательство. Для каждого $a \in \nabla$ и любого $m \in M$ положим $\varphi_m(a) = a \wedge m$. Элемент логики $\prod\limits_{m \in M} \nabla_m$ с координатами $\varphi_m(a)$, $m \in M$ обозначим через $\varphi(a)$. Получим отображение $\varphi: \nabla \to \prod\limits_{m \in M} \nabla_m$. Если $a, b \in \nabla$, $m \in M$, то из свойства 7° логик вытекает, что

$$\varphi_m(a \vee b) = m \wedge (a \vee b) = (m \wedge a) \vee (m \wedge b) = \varphi_m(a) \vee \varphi_m(b),$$

т. е. $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$. Так как ортодополнение в ∇_m определяется по правилу

$$b' = m \wedge b^{\perp} = m - b, \ b \in \nabla_m,$$

(см. свойство 10° логик), то, используя свойство 7° логик, получаем

$$\varphi_m(a)' = m - a \wedge m = m \wedge (a \wedge m)^{\perp} = m \wedge (a^{\perp} \vee m^{\perp}) =$$
$$= (m \wedge a^{\perp}) \vee (m \wedge m^{\perp}) = m \wedge a^{\perp} = \varphi_m(a^{\perp}),$$

т. е. $\varphi(a^{\perp}) = \varphi^{\perp}(a)$. Следовательно, $\varphi: \nabla \to \prod\limits_{m \in M} \nabla_m$ является гомоморфизмом. Покажем, что φ — инъекция. Пусть $a \leqslant b$, $c = b - a$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда $b = a \vee c$ и

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(a) \vee \varphi(c),$$

причем $\varphi(c) \perp \varphi(a)$. Следовательно, $\varphi(c) = 0$, т. е. $c \wedge m = 0$ для всех $m \in M$. Отсюда по свойству 7° логик получаем, что

$$c = c \wedge 1 = c \wedge \vee M = \bigvee_{m \in M} (c \wedge m) = 0.$$

Поэтому $a=b$, т. е. φ — инъекция. Покажем теперь, что φ — сюръекция. Пусть $z \in \prod\limits_{m \in M} \nabla_m$ и z_m — координаты элемента z, $m \in M$. Положим $a = \bigvee\limits_{m \in M} z_m$. Для каждого $m_0 \in M$ имеем

$$\varphi_{m_0}(a) = m_0 \wedge a = m_0 \wedge \Big(\bigvee_{m \in M} z_m\Big) = \bigvee_{m \in M} (m_0 \wedge z_m),$$

но если $m \neq m_0$, то $z_m \perp m_0$. Следовательно,

$$\varphi_{m_0}(a) = m_0 \wedge z_{m_0} = z_{m_0},$$

т. е. $\varphi(a) = z$. Таким образом, φ — биекция и потому логики ∇ и $\prod\limits_{m \in M} \nabla_m$ изоморфны. ■

Элемент a из логики ∇ называется атомом, если не существует такого элемента $b \in \nabla$, что $0 < b < a$. Логика ∇ называется дискретной, если для каждого ненулевого элемента $b \in \nabla$ существует атом $a \in \nabla$, такой, что $a \leqslant b$. Логика всех замкнутых подпространств гильбертова пространства является дискретной. Логика, не содержащая ни одного атома, называется непрерывной. В таких логиках для каждого ненулевого $b \in \nabla$ существует $a \in \nabla$, удовлетворяющий неравенствам $0 < a < b$.

Предложение 5. Если ∇_1 — максимальная булева подалгебра в логике ∇ и a — атом в ∇_1, то a является атомом и в ∇.

Доказательство. Пусть существует элемент $b \in \nabla$, такой, что $0 < b < a$. Так как a — атом в булевой алгебре ∇_1, то для каждого $d \in \nabla_1$ либо $a \leqslant d$, либо $a \perp d$. Поэтому $b \leftrightarrow d$ для всех $d \in \nabla_1$. Однако ∇_1 — максимальная булева подалгебра в ∇, следовательно, $b \in \nabla_1$ и потому a — не атом в ∇_1. Из полученного противоречия следует, что a является атомом в ∇. ■

Следствие. Логика ∇ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна каждая максимальная булева подалгебра в ∇.

Предложение 6. В дискретной логике ∇ каждый ненулевой элемент есть точная верхняя грань некоторого множества попарно ортогональных атомов.

Доказательство. Пусть $b \in \nabla$, $b \neq 0$ и $\mathscr{A}$ — совокупность всех таких подмножеств $A \subset \nabla$, состоящих из попарно ортогональных атомов, что $a \leqslant b$ для всех $a \in A$, $A \in \mathscr{A}$. В $\mathscr{A}$ естественным образом вводится частичный порядок по включению: $A_1 \leqslant A_2$, если $A_1 \subset A_2$. Очевидно, что для любой цепи $\{A_i\}_{i \in I}$ множество $A_0 = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ снова принадлежит $\mathscr{A}$, так что, по лемме Цорна, существует максимальный элемент $\bar{A}$ в $\mathscr{A}$. Покажем, что $b = \bigvee \bar{A}$. Если $b \neq \bigvee \bar{A}$, то найдется элемент $c \in \nabla$, такой, что $a \leqslant c$ для всех $a \in \bar{A}$ и $c \wedge b < b$. Так как ∇ — дискретная логика, то существует атом $a_0 \leqslant b - (c \wedge b)$. Тогда $\bar{A} \cup \{a_0\}$ принадлежит совокупности $\mathscr{A}$, что противоречит максимальности $\bar{A}$. Следовательно, $b = \bigvee \bar{A}$. ■

Если $\bigtriangledown$ — произвольная полная булева алгебра, Δ — совокупность всех атомов в $\bigtriangledown$ и $a = \bigvee\Delta$, то легко видеть, что $\bigtriangledown_a$ — дискретная булева алгебра, а $\bigtriangledown_{a^\perp}$ — непрерывная булева алгебра, при этом $\bigtriangledown$ изоморфна прямому произведению $\bigtriangledown_a \times \bigtriangledown_{a^\perp}$ (предложение 4). Для произвольных логик этот результат, вообще говоря, неверен.

Пример. Пусть $\bigtriangledown_1$ — булева алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств из отрезка $[0, 1]$ (равные mod 0 множества отождествляются) и $\bigtriangledown_2$ — булева алгебра, состоящая из четырех элементов $\{0, a, a^\perp, 1\}$. Тогда $\bigtriangledown_1$ — полная непрерывная булева алгебра, а $\bigtriangledown_2$ — полная дискретная булева алгебра. Рассмотрим $\bigtriangledown = \bigtriangledown_1 \cup \bigtriangledown_2$ и отождествим в $\bigtriangledown$ нули и единицы из $\bigtriangledown_1$ и $\bigtriangledown_2$. Определим в $\bigtriangledown$ частичный порядок, считая

$$0 \leqslant b \leqslant 1 \text{ для всех } b \in \bigtriangledown_1,$$

$$0 \leqslant a < 1, \quad 0 \leqslant a^\perp \leqslant 1;$$

для элементов из $\bigtriangledown_1$ и $\bigtriangledown_2$ частичный порядок индуцируется из $\bigtriangledown_1$ и $\bigtriangledown_2$. Ортодополнение в $\bigtriangledown$ также индуцируется из $\bigtriangledown_1$ и $\bigtriangledown_2$. Тогда $\bigtriangledown$ становится полной логикой (заметим, что $b \vee a = 1 = b \vee a^\perp$ для каждого $b \in \bigtriangledown_1$, $b \neq 0$ и $b \wedge a = 0 = b \wedge a^\perp$ для каждого $b \in \bigtriangledown_1$, $b \neq 1$). Очевидно, что $\bigtriangledown$ не является ни дискретной, ни непрерывной логикой, при этом центр в $\bigtriangledown$ состоит только из нуля и единицы, так что $\bigtriangledown$ не изоморфна прямому произведению дискретной и непрерывной логик.

Библиография: [9, 51, 80, 122, 134, 145].

§ 4. (o)-Сходимость и (o)-топология в логиках

Подлогика $\bigtriangledown_1$-полной (σ-полной) логики $\bigtriangledown$ называется правильной (σ-правильной), если $\bigvee M \in \bigtriangledown_1$ для любого (любого счетного) $M \subset \bigtriangledown_1$. Очевидно, что пересечение правильных (σ-правильных) подлогик есть опять правильная (σ-правильная) подлогика и поэтому для любого множества $A \subset \bigtriangledown$ существует наименьшая правильная (σ-правильная) подлогика, содержащая A.

Предложение 1. Пусть $\bigtriangledown$ — полная логика. Тогда:

а) каждая максимальная булева подалгебра в $\bigtriangledown$ является правильной подлогикой;

б) если $\bigtriangledown_1$ — правильная подлогика в $\bigtriangledown$, то (o)-топология в $\bigtriangledown$ индуцирует (o)-топологию в $\bigtriangledown_1$;

в) подлогика $\bigtriangledown_1$ в $\bigtriangledown$ является правильной в том и только в том случае, когда она замкнута в (o)-топологии в $\bigtriangledown$.

Доказательство. Пункт а) получен при доказательстве следствия к теореме 1 из § 2.

б) Пусть $F \subset \bigtriangledown$ — подмножество, замкнутое в (o)-топологии в $\bigtriangledown$, $D = F \cap \bigtriangledown_1$, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset D$ и $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ в $\bigtriangledown_1$. Тогда существуют сети $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\nabla_1$, $\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\nabla_1$, такие, что $\{b_\alpha\}$ возрастает, $\{c_\alpha\}$ убывает, $b_\alpha\leqslant a_\alpha\leqslant c_\alpha$ и $\bigvee_\alpha b_\alpha = x = \bigwedge_\alpha c_\alpha$ в ∇_1. Значит, $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ в ∇ и, следовательно, $a\in F\cap\nabla_1 = D$, т. е. D — замкнуто в (o)-топологии в ∇_1.

Наоборот, пусть D — замкнутое в (o)-топологии подмножество из ∇_1 и $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset D$, $a_\alpha\xrightarrow{(o)} a$ в ∇. Положим $b_\alpha = \bigwedge_{\alpha\leqslant\beta} a_\beta$, $c_\alpha = \bigvee_{\alpha\leqslant\beta} a_\beta$, тогда $b_\alpha\leqslant a_\alpha\leqslant c_\alpha$, $\{b_\alpha\}$ возрастает, $\{c_\alpha\}$ убывает и так как $a_\alpha\xrightarrow{(o)} a$ в ∇, то $\bigvee_\alpha b_\alpha = a = \bigwedge_\alpha c_\alpha$ в ∇, но ∇_1 — правильная подлогика в ∇, поэтому $b_\alpha\in\nabla_1$, $c_\alpha\in\nabla_1$ и $\bigvee_\alpha b_\alpha = a = \bigwedge_\alpha c_\alpha$ в ∇_1, т. е. $a_\alpha\xrightarrow{(o)} a$ в ∇_1. Следовательно, $a\in D$ и поэтому D — замкнутое множество в (o)-топологии в ∇_1. Таким образом, (o)-топология в ∇ индуцирует (o)-топологию в ∇_1.

в) Пусть ∇_1 — правильная подлогика в ∇, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\nabla_1$, $a_\alpha\xrightarrow{(o)} a$ в ∇ и $b_\alpha = \bigwedge_{\alpha\leqslant\beta} a_\beta$. Тогда $b_\alpha\in\nabla_1$ и $a = \left(\bigvee_{\alpha\in A} b_\alpha\right)\in\nabla_1$, т. е. ∇_1 замкнуто в (o)-топологии.

Наоборот, если ∇_1 — замкнутая в (o)-топологии подлогика, $M\subset\nabla_1$ и $a = \vee M$, то $a = \bigvee_{\alpha\in A} a_\alpha$, где A — направление, составленное из всех конечных подмножеств $\alpha = (m_1, \dots, m_n)\subset M$, упорядоченных по включению, и $a_\alpha = \vee\{m : m\in\alpha\}$. При этом $a_\alpha\in\nabla_1$ и $a_\alpha\uparrow a$. Следовательно, $a\in\nabla_1$, т. е. ∇_1 — правильная подлогика в ∇. ■

Предложение 2. Пусть ∇ — полная логика счетного типа, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\nabla$ и $a_\alpha\xrightarrow{(o)} a$. Тогда существует возрастающая последовательность индексов $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\dots\leqslant\alpha_n\leqslant\dots$, такая, что $a_{\alpha_n}\xrightarrow{(o)} a$.

Доказательство. Положим $b_\alpha = \bigwedge_{\alpha\leqslant\beta} a_\beta$, $c_\alpha = \bigvee_{\alpha\leqslant\beta} a_\beta$, тогда $b_\alpha\uparrow a$, $c_\alpha\uparrow a$. В силу предложения 7 из § 1 существуют две последовательности индексов $\{\alpha_n'\}$, $\{\alpha_n''\}$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\bigvee_{n=1}^{\infty} b_{\alpha_n'} = a = \bigwedge_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n''}$. Построим последовательность индексов $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\dots\leqslant\alpha_n\leqslant\dots$ так, чтобы

$$\alpha_1', \dots, \alpha_n', \alpha_1'', \dots, \alpha_n''\leqslant\alpha_n.$$

Тогда $\bigvee_{n=1}^{\infty} b_{\alpha_n} = a = \bigwedge_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n}$ и, следовательно, $a_{\alpha_n}\xrightarrow{(o)} a$. ■

Предложение 3 (ср. [51]). В полной логике ∇ (o)-топология совпадает с (os)-топологией тогда и только тогда, когда ∇ имеет счетный тип.

Доказательство проводится точно так же, как и в [51] для булевых алгебр. Если ∇ не является логикой счетного типа, то существует несчетное множество M ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇. Занумеруем M с помощью трансфинитных чисел, получим $M = \{a_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, где α_0—несчетное трансфинитное число. Положим $b = \bigvee_{\alpha\beta\leqslant\alpha} a_\beta$, тогда $\{b_\alpha\}$ возрастает к элементу $b = \bigvee_{\alpha<\alpha_0} b_\alpha = \bigvee M$ и $b_\alpha \neq b_\beta$ при $\alpha\neq\beta$. Так как $b\overline{\in}\{b_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, то множество $\{b_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ не замкнуто в (o)-топологии. С другой стороны, если $\{b_{\alpha_n}\}$—произвольная последовательность из $\{b_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ и $b_{\alpha_n} \xrightarrow{(o)} d$, $d\in\nabla$, то в силу вполне упорядоченности множества трансфинитных чисел существует возрастающая подпоследовательность $\left\{b_{\alpha_{n_k}}\right\}$, (o)-сходящаяся к d. Обозначим через α_1 — наименьшее трансфинитное число среди тех трансфинитных чисел, которые больше α_{n_k} для всех k. Тогда $d = b_{\alpha_1}$ и, следовательно, множество $\{b_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ замкнуто относительно (os)-топологии. Таким образом, если (os)-топология совпадает с (o)-топологией, то логика ∇ имеет счетный тип.

Наоборот, если $\mathscr{B}$ имеет счетный тип, то в силу предложения 2 каждое множество, замкнутое в (o)-топологии, будет замкнутым и в (os)-топологии, т. е. эти две топологии совпадают. ■

Теорема 1. Пусть ∇ — полная непрерывная логика. Тогда ∇ является связным множеством в (o)-топологии $\tau_0(\nabla)$.

Доказательство. Покажем, что любая максимальная цепь C в ∇ замкнута и связана в $\tau_0(\nabla)$. Так как цепь C максимальна, то $\bigvee M\in C$ и $\bigwedge M\in C$ для любого подмножества $M\subset C$. Отсюда, повторяя доказательство п. в) предложения 1, получаем, что C замкнуто в $\tau_0(\nabla)$. Если C не является связным в $\tau_0(\nabla)$, то существуют непустые замкнутые в (o)-топологии множества C_1 и C_2, такие, что $C_1\cap C_2=\varnothing$ и $C=C_1\cup C_2$. Выберем произвольное $a\in C_1$, тогда найдется элемент $b\in C_2$, такой, что либо $b<a$, либо $a<b$. Пусть для определенности $b<a$. Обозначим через A множество тех $r\in C$, для которых $\{d\in C: r\leqslant d\leqslant a\}\subset C_1$, и пусть $a_0=\bigwedge A$. Так как A — цепь в C_1 и C_2 замкнуто в (o)-топологии, то $a_0\in C_1$ и $b<a_0$, но логика ∇ непрерывна, следовательно, и в максимальной цепи C для любых $d_1, d_2\in C$, $d_1<d_2$, существует $d_3\in C$, такое, что $d_1<d_3<d_2$. Поэтому для каждого $d<a_0$, $d\in C$, найдется $c\in C_2$, такое, что $d<c<a_0$. Следовательно, $\bigvee\{c\in C_2: c< <a_0\}=a_0$. Однако C_2 замкнуто в (o)-топологии, поэтому $a_0\in C_2$, т. е. $a_0\in C_1\cap C_2$. Полученное противоречие показывает, что C — связное множество в (o)-топологии. Предположим теперь, что ∇ —

не связное множество в топологии $\tau_0(\nabla)$. Тогда найдутся непустые замкнутые в (o)-топологии множества A_1 и A_2, такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A_1 \cup A_2 = \nabla$. Пусть $a \in A_1$, $b \in A_2$. Элемент $c = a \wedge b$ лежит либо в A_1, либо в A_2. Пусть для определенности $c \in A_1$. По лемме Цорна, для цепи $C_0 = \{0, c, b, 1\}$ существует максимальная цепь $C > C_0$, но тогда $C_1 = C \cap A_1$, $C_2 = C \cap A_2$ — непустые замкнутые в (o)-топологии подмножества и $C = C_1 \cup C_2$, что противоречит связности цепи C. Следовательно, ∇ — связное множество относительно (o)-топологии $\tau_0(\nabla)$.

Следствие. Если ∇ — непрерывная логика и f — действительная функция на ∇, такая, что $f(a_\alpha) \to f(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, (o)-сходящейся к $a \subset \nabla$, то $f(\nabla)$ — связное подмножество в поле действительных чисел R.

Доказательство. Пусть D — замкнутое подмножество в R и $F = f^{-1}(D)$. Если $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset F$ и $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, то $f(a_\alpha) \in D$ и $f(a_\alpha) \to f(a) \in D$. Следовательно, $a \in F$ и потому F замкнуто в (o)-топологии. Таким образом, функция f непрерывна на $(\nabla, \tau_0(\nabla))$ и в силу теоремы 1 $f(\nabla)$ — связное подмножество в $\boldsymbol{R}$. ■

Библиография: [9, 15, 16, 41, 51, 53, 80, 129—131, 135, 136, 145].

§ 5. Оценки и внешние оценки на логиках

Функция m, заданная на логике ∇, называется внешней оценкой, если

M1) $m(a) \geqslant 0$ для всех $a \in \nabla$ и $m(0) = 0$;

M2) $m(a) \leqslant m(b)$ при $a \leqslant b$;

M3) $m(a \vee b) \leqslant m(a) + m(b)$ для всех a, $b \in \nabla$.

Внешняя оценка m называется строго положительной, если из $m(a) = 0$ следует $a = 0$. В случае, когда ∇ — булева алгебра, внешнюю оценку на ∇ обычно называют внешней мерой.

Предложение 1. Пусть m — внешняя оценка на логике ∇. Тогда

$$|m(a) - m(b)| \leqslant m(a \Delta b)$$

для любых a, $b \in \nabla$.

Доказательство. Положим $t = a - a \wedge b$. Тогда

$$b \vee t = (b \vee (a \wedge b)) \vee t = b \vee ((a \wedge b) \vee t) = b \vee a,$$

отсюда

$$a \leqslant b \vee a = b \vee t \leqslant (a \Delta b) \vee b.$$

Следовательно,

$$m(a) \leqslant m(a \Delta b) + m(b).$$

Аналогично

$$m(b) \leqslant m(a\Delta b) + m(a).$$

Поэтому

$$|m(a) - m(b)| \leqslant m(a\Delta b). \quad \blacksquare$$

Внешняя оценка m называется (o)-непрерывной ((os)-непрерывной), если выполнено следующее условие:

M4) $m(a_\alpha) \to 0$ ($m(a_n) \to 0$) для любой убывающей к нулю сети $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \nabla$ (соответственно последовательности $\{a_n\} \subset \nabla$).

Предложение 2. Любая (o)-непрерывная ((os)-непрерывная) внешняя оценка на логике ∇ непрерывна относительно (o)-топологии ((os)-топологии) на ∇.

Доказательство. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \nabla$, $a_\alpha \downarrow a$, $a\in\nabla$. Положим $b_\alpha = a_\alpha \Delta a = a_\alpha - a$. Тогда $\bigwedge\limits_\alpha b_\alpha = \bigwedge\limits_\alpha (a_\alpha \wedge a_\alpha^\perp) = 0$, т. е. $b_\alpha \downarrow 0$, и поэтому $m(b_\alpha) \to 0$. В силу предложения 1

$$|m(a_\alpha) - m(a)| \leqslant m(b_\alpha).$$

Следовательно, $m(a_\alpha) \to m(a)$. Аналогично, если $a_\alpha \uparrow a$, то $m(a_\alpha) \to m(a)$. Пусть $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, тогда существуют сети $\{b_\alpha\} \subset \nabla$, $\{c_\alpha\} \subset \nabla$, такие, что $b_\alpha \leqslant a_\alpha \leqslant c_\alpha$ и $b_\alpha \uparrow a$, $c_\alpha \downarrow a$. Следовательно,

$$m(b_\alpha) \leqslant m(a_\alpha) \leqslant m(c_\alpha),\ m(b_\alpha) \to a,\ m(c_\alpha) \to m(a),$$

т. е. $m(a_\alpha) \to m(a)$.

Теперь, повторяя начало доказательства следствия к теореме 1 из § 4, получаем, что m непрерывна на ∇ относительно (o)-топологии на ∇. Для (os)-непрерывных внешних оценок доказательство аналогичное. $\blacksquare$

Отметим, что в силу следствия к теореме 1 из § 4 значения (o)-непрерывной внешней оценки на непрерывной логике сплошь заполняют отрезок $[0, m(1)]$.

Пусть m — строго положительная (o)-непрерывная внешняя оценка на полной логике ∇. Положим

$$U_n = \left\{ a\in\nabla : m(a) < \frac{1}{2^n} \right\},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

1) U_n заполнено, т. е. из $b \leqslant a$, $a\in U_n$, вытекает $b\in U_n$;

2) $U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) если $\{a_n\} \subset \nabla$ (o)-сходится к нулю, то для любого n найдется номер k_n, такой, что $a_k \in U_n$ при всех $k \geqslant k_n$;

4) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$.

Любая последовательность $\{a_n\}$ попарно ортогональных элементов в полной логике (o)-сходится к нулю. Действительно, если $b_n = \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, $c_n = \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, $c = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, то $b_n = 0$ для всех n, $c \leqslant \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $c \perp a_n$ для всех n; поэтому $c = 0$, т. е. $c_n \downarrow 0$. В силу условия 3) каждое множество U_n содержит только конечные подмножества ненулевых попарно ортогональных элементов. Тогда по условию 4) каждое множество ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇ не более чем счетно, т. е. ∇ имеет счетный тип. Отсюда, в частности, следует, что любая строго положительная (os)-непрерывная оценка на полной логике ∇ является (o)-непрерывной.

Теорема 1 (ср. [79]). Пусть на полной логике ∇ задана последовательность множеств $\{U_n\}$, удовлетворяющая условиям 1) — 4). Тогда на ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная внешняя оценка m, при этом

$$U_{n+1} \subset \left\{ a \in \nabla : m(a) < \frac{1}{2^n} \right\} \subset U_n .$$

Доказательство. Для каждого двоично рационального числа $r = \frac{k}{2^n}$ из отрезка $[0, 1]$ определим множество $U(r)$, считая

$$U(0) = 0,\ U\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n,\ U\left(\frac{2h}{2^n}\right) = U\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right),$$

если $k = 2h$, и

$$U\left(\frac{2h+1}{2^n}\right) = U\left(\frac{2h}{2^n}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

если $k = 2h + 1$, где $1 \leqslant h \leqslant 2^{n-1}$. Покажем, что $U(r) \vee U(s) \subset \subset U(r + s)$ для любых двоично рациональных чисел $r, s \in [0, 1]$ (если $r + s > 1$, то считаем, что $U(r + s) = \nabla$). В силу условия 2)

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Предположим, что

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) \vee U\left(\frac{k}{2^n}\right) \subset U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

для всех $k < k_0$ и $n < n_0$. Тогда, если $k_0 = 2k + 1$, то

$$U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee \left(\frac{k_0}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{2k}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \subset$$

$$\subset U\left(\frac{1}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{k}{2^{n_0-1}}\right) \subset U\left(\frac{k+1}{2^{n_0-1}}\right) = U\left(\frac{2k+2}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{k_0+1}{2^{n_0}}\right).$$

Если $k_0 = 2k$, то

$$U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{k_0}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{2k}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{2k+1}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{k_0+1}{2^{n_0}}\right).$$

Покажем теперь, что

$$U\left(\frac{h}{2^n}\right) \vee U\left(\frac{k}{2^n}\right) \subset U\left(\frac{h+k}{2^n}\right). \tag{1}$$

Будем проводить индукцию по n и $h+k$. При $n = 1$, 2 отношение (1) верно. Если h или k равны нулю или единице, то, согласно доказанному выше, соотношение (1) верно для любых n. Пусть соотношение (1) верно для любых $n < n_0$, $h+k < t$ и $h_0 + k_0 = t$. Если $h_0 = 2h$, $k_0 = 2k$, то

$$U\left(\frac{h_0}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{k_0}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{h}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{k}{2^{n_0-1}}\right) \subset U\left(\frac{h+k}{2^{n_0-1}}\right) = \\ = U\left(\frac{h_0+k_0}{2^{n_0}}\right).$$

Если, например, $k_0 = 2k+1$, $h_0 = 2h$, то

$$U\left(\frac{h_0}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{k_0}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{h}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{2k}{2^{n_0-1}}\right) \vee \\ \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \subset U\left(\frac{h+k}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{h_0+k_0}{2^{n_0}}\right).$$

Наконец, в случае, когда $k_0 = 2k+1$, $h_0 = 2h+1$, получим

$$U\left(\frac{h_0}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{k_0}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{h}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{k}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee \\ \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{h+k}{2^{n_0-1}}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \vee U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = U\left(\frac{2h+2k+2}{2^{n_0}}\right) = \\ = U\left(\frac{h_0+k_0}{2^{n_0}}\right).$$

Таким образом,

$$U(r) \vee U(s) = U(r+s) \tag{2}$$

для всех двоично рациональных чисел r, $s \in [0, 1]$, в частности, $U(r) \subset U(s)$ при $r < s$. Положим

$$\hat{U}(r) = \bigcup_{b \in U(r)} [0, b].$$

Тогда $\hat{U}(r)$ — заполненное множество для каждого двоичного рационального $r \in [0, 1]$, $\hat{U}(r) \subset \hat{U}(s)$ при $r < s$ и $\hat{U}\left(\frac{1}{2^n}\right) = U\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Если $a \in \hat{U}(r) \vee \hat{U}(s)$, то $a = b \vee c$, где $b \in \hat{U}(r)$; $c \in \hat{U}(s)$, и поэтому существуют $b_0 \in U(r)$, $c_0 \in U(s)$, такие, что $b \leqslant b_0$, $c \leqslant c_0$. Тогда $a = b \vee c \leqslant b_0 \vee c_0$ и в силу соотношения (2) $a \in \hat{U}(r+s)$. Таким, образом,

$$\hat{U}(r) \vee \hat{U}(s) \subset \hat{U}(r+s) \tag{3}$$

для всех двоично рациональных чисел r, $s \in [0, 1]$. Положим

$$m(a) = \inf\{s : a \in \hat{U}(s)\},$$

тогда $0 \leqslant m(a) \leqslant 1$ для всех $a \in \nabla$ и $m(0) = 0$. Если $a \leqslant b$ и $b \in \hat{U}(s)$, то $a \in \hat{U}(s)$, поэтому $m(a) \leqslant m(b)$. Покажем, что $m(a \vee b) \leqslant \leqslant m(a) + m(b)$ для любых a, $b \in \nabla$. Пусть $a \in \hat{U}(r)$, $b \in \hat{U}(s)$, тогда в силу (3) $a \vee b \in \hat{U}(r+s)$. Поэтому $m(a \vee b) \leqslant r + s$ для любых двоично рациональных чисел r и s, таких, что $a \in \hat{U}(r)$, $b \in \hat{U}(s)$. Следовательно, $m(a \vee b) \leqslant m(a) + m(b)$. Так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{U}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \{0\}$, то $m(a) > 0$ для каждого $a \neq 0$. Таким образом, m является строго положительной внешней оценкой на ∇, при этом

$$U_{n+1} = \hat{U}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \subset \left\{a \in \nabla : m(a) < \frac{1}{2^n}\right\} \subset \hat{U}\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n.$$

Покажем, что m — (o)-непрерывная внешняя оценка. Пусть $a_\alpha \downarrow 0$, $a_\alpha \in \nabla$. В силу условий 2) и 3) логика ∇ имеет счетный тип, поэтому существует последовательность индексов $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots$, такая, что $a_{\alpha_n} \downarrow 0$. Из условия 3) следует, что $m(a_{\alpha_n}) \to 0$, следовательно, $m(a_\alpha) \to 0$. Таким образом, m — (o)-непрерывная внешняя оценка на логике ∇. ■

Замечание. Для булевых алгебр теорема 1 доказана в [79].

Неотрицательная функция m, заданная на логике ∇, называется оценкой, если

М3′) $m(a \vee b) = m(a) + m(b)$ при $a \wedge b = 0$, a, $b \in \nabla$.

Легко видеть, что из условия М3′) вытекает условие М2) и равенство $m(a - b) = m(a) - m(b)$, если $b \leqslant a$, b, $a \in \nabla$. Кроме того, если $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — множество попарно ортогональных элементов из ∇, то, очевидно,

$$m\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(a_i).$$

В случае, когда ∇ — булева алгебра, оценку на ∇ обычно называют мерой.

Предложение 3. Для любой оценки m на логике ∇ справедливо равенство

$$m(a) + m(b) = m(a \vee b) + m(a \wedge b)$$

при всех $a, b \in \nabla$.

Доказательство. Пусть $a, b \in \nabla$ и $t = b - a \wedge b$. Тогда $m(b) = m(t) + m(a \wedge b)$. Далее

$$a \wedge t = a \wedge (b \wedge t) = (a \wedge b) \wedge t = 0$$

и

$$a \vee t = a \vee (a \wedge b) \vee t = a \vee b.$$

Поэтому $m(a \vee t) = m(a) + m(t)$, так что

$$m(a) + m(b) = m(a \vee b) + m(a \wedge b). \qquad \blacksquare$$

Из этого предложения, в частности, следует, что каждая оценка удовлетворяет условию M3) и поэтому является внешней оценкой.

Примерами оценок служат вероятности и меры на булевых алгебрах множеств и размерность подпространств в логике всех подпространств конечномерного гильбертова пространства.

Предложение 4. Пусть m — строго положительная оценка на логике ∇. Тогда ∇ является дедекиндовой решеткой и имеет счетный тип.

Доказательство. Если $a, b, c \in \nabla$ и $a \leqslant b$, то, используя предложение 3, получаем

$$m(a \vee (c \wedge b)) - m((a \vee c) \wedge b) = m(a) + m(c \wedge b) -$$
$$- m(a \wedge c) - m(a \vee c) - m(b) + m(c \vee b) =$$
$$= m(a) + m(c) + m(b) - m(a) - m(c) - m(b) = 0,$$

т. е. $m(a \vee (c \wedge b)) = m((a \vee c) \wedge b)$.

Так как m строго положительна, то из последнего равенства следует, что строгое неравенство $a \vee (c \wedge b) < (a \vee c) \wedge b$ невозможно. Следовательно, $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$, т. е. ∇ — дедекиндова решетка. Положим $\nabla_n = \left\{ b \in \nabla : m(b) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если в ∇ существует несчетное множество M ненулевых попарно ортогональных элементов, то найдется такой номер n_0, что множество $M_{n_0} = M \cap \nabla_{n_0}$ также будет несчетным. Выберем натуральное число k так, чтобы $n_0 m(1) < k$, и выделим в M_{n_0} подмножество $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \subset M_{n_0}$. Тогда

$$m(1) < \frac{k}{n_0} \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(a_i) = m\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_i\right) \leqslant m(1),$$

что невозможно. Следовательно, логика ∇ имеет счетный тип. ■

Оценка m на логике ∇ называется (o)-непрерывной ((os)-непрерывной), если она удовлетворяет условию М4). В этом случае для каждого (каждого счетного) множества M попарно ортогональных элементов из ∇ справедливо равенство

$$m(\vee M) = \sum_{a \in M} m(a),$$

где $s = \sum_{a \in M} m(a)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество $M_\varepsilon \subset M$, такое, что из включения $M_\varepsilon \subset \subset M_1 \subset M$ (M_1 конечно) следует неравенство

$$\left| s - \sum_{a \in M_1} m(a) \right| < \varepsilon.$$

Предложение 5. Пусть m — (o)-непрерывная оценка на полной логике ∇ и $a_0 = \vee\{a \in \nabla : m(a) = 0\}$. Тогда $a_0 \leftrightarrow a$ для всех $a \in \nabla$.

Доказательство. Положим $M = \{a \in \nabla : m(a) = 0\}$ и $b_\alpha = \vee\{a_i : a_i \in \alpha\}$, где $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ — конечное подмножество из M. Тогда $\{b_\alpha\}$ — возрастающая сеть элементов из ∇, для которой $m(b_\alpha) = 0$. Так как m — (o)-непрерывная оценка и $b_\alpha \uparrow a_0$, то $m(b_\alpha) \to m(a_0)$ и поэтому $m(a_0) = 0$. Следовательно, $M = \nabla_{a_0} = [0, a_0]$. Если $b \leqslant a_0$, то, очевидно, $b \leftrightarrow a_0$. Пусть $b \overline{\in} M$ т. е. $m(b) > 0$. Положим $c = b \wedge a_0$, $b_1 = b - c = b \wedge c^\perp$ и $b_2 = b_1 \wedge (b_1 \wedge a_0^\perp)^\perp = b_1 - b_1 \wedge a_0^\perp$. Если $m(b_2) > 0$, то

$$m(b_1 \wedge a_0^\perp) < m(b_1 \wedge a_0^\perp) + m(b_2) = m(b_1),$$

но

$$m(b_1 \wedge a_0^\perp) = m(b_1) + m(a_0^\perp) - m(b_1 \vee a_0^\perp) =$$

$$= m(b_1) + m(1) - m(1) = m(b_1).$$

Из полученного противоречия вытекает, что $m(b_2) = 0$, т. е. $b_2 \leqslant a_0$ и потому $b_2 \leqslant b \wedge a_0 = c$, но $b_2 \leqslant b_1 \leqslant c^\perp$, следовательно, $b_2 = 0$, т. е. $b_1 = b_1 \wedge a_0^\perp$. Таким образом, $(b - c) \perp a_0$. Из свойства 6° логик получаем, что $b \leftrightarrow a_0$. ■

Следствие. Если m — ненулевая (o)-непрерывная оценка на полной логике ∇ с тривиальным центром, то m строго положительна.

Доказательство. Пусть $a_0 = \vee\{a \in \nabla : m(a) = 0\}$, тогда

$a_0 \neq 1$ и a_0 принадлежит центру $Z(\nabla)$ логики ∇. Но $Z(\nabla)$ состоит только из нуля и единицы, поэтому $a_0 = 0$, т. е. оценка m строго положительна. ■

Предложение 6. Если ∇ — полная логика счетного типа и для каждого ненулевого $a \in \nabla$ существует (o)-непрерывная оценка m_a на ∇, такая, что $m_a(a) \neq 0$, то на ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка.

Доказательство. Пусть $a \in \nabla$, $a \neq 0$ и $b_a = \vee\{c \in \nabla : m_a(c) = 0\}$. Тогда b_a принадлежит центру $Z(\nabla)$ логики ∇ и $\bigwedge\limits_{a \in \nabla} b_a = 0$ (так как в противном случае на ненулевом элементе $\bigwedge\limits_{a \in \nabla} b_a$ все оценки m_a обратятся в нуль, что противоречит предположению предложения 6). В силу предложения 7 из § 1 существует счетное подмножество $\left\{b_{a_n}\right\}$ ненулевых элементов из $Z(\nabla)$, таких, что $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} b_{a_n}^{\perp} = 1$. Положим

$$m(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{a_n}(b)}{2^n m_{a_n}(1)}, \quad b \in \nabla.$$

Тогда, очевидно, m — оценка на ∇. Пусть $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ — убывающая к нулю сеть и $\varepsilon > 0$. Выберем номер n_0 так, чтобы $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Так как $m_{a_n}(b_\alpha) \to 0$ для любого n, то существует $\alpha_0 \in A$, такое, что $\frac{m_{a_n}(b_\alpha)}{m_{a_n}(1)} < \frac{\varepsilon}{n_0}$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для всех $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Тогда

$$m(b_\alpha) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{m_{a_n}(b_\alpha)}{2^n m_{a_n}(1)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{m_{a_n}(b_\alpha)}{2^n m_{a_n}(1)} < 2\varepsilon$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Следовательно, m — (o)-непрерывная оценка на ∇. Пусть $b \in \nabla$ и $b \neq 0$. Так как $b_{a_n}^{\perp} \in Z(\nabla)$ для всех n, то существует максимальная булева подалгебра, содержащая b и $b_{a_n}^{\perp}$, $n = 1, 2 \ldots$, поэтому

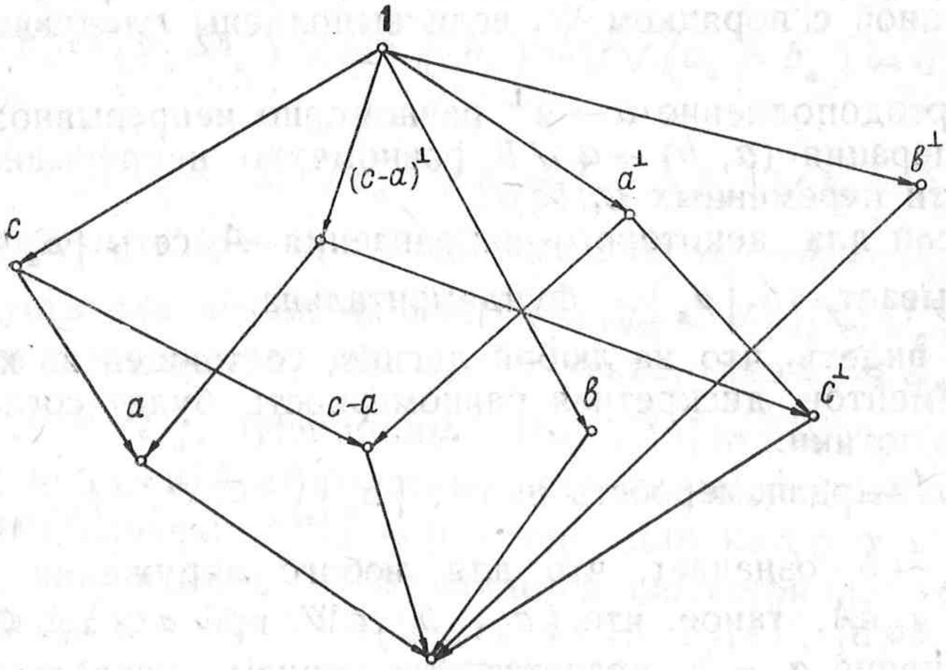
$$b = b \wedge 1 = b \wedge \bigvee_{n=1}^{\infty} b_{a_n}^{\perp} = \bigvee_{n=1}^{\infty} (b \wedge b_{a_n}^{\perp}).$$

Следовательно, найдется номер k_0, такой, что $b \wedge b_{a_{k_0}}^{\perp} \neq 0$ и тогда $m_{a_{k_0}}(b) \neq 0$. Отсюда $m(b) \neq 0$. Таким образом, m — строго положительная оценка на ∇. ■

Пусть m, μ — оценки на логике ∇. Оценка μ называется абсолютно непрерывной относительно оценки m, если для всякого $a \in \nabla$, для которого $m(a) = 0$, вытекает, что $\mu(a) = 0$.

Предложение 7. На полной логике ∇ счетного типа существует (o)-непрерывная оценка, относительно которой все другие (o)-непрерывные оценки, заданные на ∇, абсолютно непрерывны.

Доказательство. Пусть M — совокупность всех (o)-непрерывных оценок на ∇ и $a_m = \bigvee \{ a \in \nabla : m(a) = 0 \}$, $m \in M$. Положим $a_0 = \bigwedge\limits_{m \in M} a_m$, тогда a_0 — элемент центра логики ∇ и $m(a_0) = 0$ для всех $m \in M$. Логика $\nabla_{a_0^{\perp}} = [0, a_0^{\perp}]$ является полной логикой



счетного типа, причем для каждого ненулевого $a \in \nabla_{a_0^{\perp}}$ существует оценка $m \in M$, такая, что $m(a) \neq 0$. В силу предложения 6 на $\nabla_{a_0^{\perp}}$ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка μ. Положим

$$m_0(b) = \mu\left(b \wedge a_0^{\perp}\right)$$

для каждого $b \in \nabla$. Так как $a_0^{\perp} \in Z(\nabla)$, то $(b \vee c) \wedge a_0^{\perp} = (b \wedge a_0^{\perp}) \vee (c \wedge a_0^{\perp})$. Поэтому m_0 является оценкой на ∇, причем $\bigvee \{ b \in \nabla : m_0(b) = 0 \} = a_0$. Если $\{ b_\alpha \}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $b_\alpha \downarrow 0$, то $(b_\alpha \wedge a_0^{\perp}) \downarrow 0$, следовательно, $m_0(b_\alpha) \to 0$, т. е. m_0 — (o)-непрерывная оценка на ∇. Наконец, если $m_0(b) = 0$, то $b \leqslant a_0$ и потому $m(b) = 0$ для всех $m \in M$. ■

Замечание. Существуют полные логики счетного типа, на которых нет ни одной ненулевой (o)-непрерывной оценки.

Пример. Рассмотрим логику ∇, состоящую из десяти элементов (рисунок). Стрелка $c \to a$ означает, что $a \leqslant c$. Эта логика не является дедекиндовой, так как при $a \leqslant c$ имеем

$$a \vee (b \wedge c) = a \neq c = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Кроме того, центр логики ∇ состоит только из 0 и 1. Если на ∇ существует ненулевая (o)-непрерывная оценка, то в силу следствия к предложению 5 она строго положительна, но тогда по предложению 4 логика ∇ дедекиндова, что не так. Следовательно, на ∇ нет ненулевых (o)-непрерывных оценок.

Библиография: [31, 41, 51, 55, 79, 80, 106, 109, 146, 147].

§ 6. Равномерности на логиках, согласованные с порядком

Отделимую равномерность *И* на логике ∇ будем называть согласованной с порядком ∇, если выполнены следующие условия:

R1) ортодополнение $a \to a^{\perp}$ равномерно непрерывно;

R2) операция $(a, b) \to a \vee b$ равномерно непрерывна по совокупности переменных $a, b \in \nabla$;

R3) если для некоторого направления A сеть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ монотонно убывает, то $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фундаментальна.

Легко видеть, что на любой логике, состоящей из конечного числа элементов, дискретная равномерность будет согласована с порядком логики.

Если *И* — равномерность на ∇, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, то запись $a_\alpha \sim b_\alpha$ означает, что для любого окружения $W \in$ *И* существует $\alpha_W \in A$, такое, что $(a_\alpha, b_\alpha) \in W$ при $\alpha \geqslant \alpha_W$. Очевидно, что отношение $a_\alpha \sim b_\alpha$ является отношением эквивалентности на множестве всех сетей по направлению A.

Предложение 1. Пусть *И* — равномерность на логике ∇, согласованная с ее порядком, и τ — топология, порожденная *И*. Тогда:

1) операция $(a, b) \to a \wedge b$ равномерно непрерывна по совокупности переменных $a, b \in \nabla$;

2) $a_\alpha \sim b_\alpha$ в том и только в том случае, когда $a_\alpha \Delta b_\alpha \sim 0$, $a_\alpha b_\alpha \in \nabla$;

3) для любой окрестности U_a элемента $a \in (\nabla, \tau)$ найдется такая окрестность V_a, что если $c \leqslant d \leqslant b$, $c, b \in V_a$, то $d \in U_a$;

4) для любого окружения $W \in$ *И* существует симметричное окружение $U \in$ *И*, такое, что из $(a, b) \in U$, $(0, c\Delta d) \in U$ следует, что $(0, a\Delta b) \in W$ и $(c, d) \in W$.

Доказательство. Пункт 1) следует из условий R1), R2) и равенства $a \wedge b = (a^{\perp} \vee b^{\perp})^{\perp}$.

2) Так как операции $(a, b) \to a \vee b$ и $(a, b) \to a \wedge b$ равномерно непрерывны, то для любых сетей $a_\alpha \sim b_\alpha$, $c_\alpha \sim d_\alpha$, a_α, b_α, c_α, $d_\alpha \in \nabla$ следует, что

$$a_\alpha \vee c_\alpha \sim b_\alpha \vee d_\alpha \text{ и } a_\alpha \wedge c_\alpha \sim b_\alpha \wedge d_\alpha .$$

В частности, если $a_\alpha \sim b_\alpha$, то

$$a_\alpha \vee b_\alpha \sim b_\alpha \text{ и } a_\alpha \wedge b_\alpha \sim b_\alpha ;$$

здесь используется очевидное соотношение $b_\alpha \sim b_\alpha$. Отсюда

$$(a_\alpha \vee b_\alpha) \wedge (a_\alpha \wedge b_\alpha)^\perp \sim b_\alpha \wedge b_\alpha^\perp = 0.$$

Следовательно, $(a_\alpha \Delta b_\alpha) \sim 0$.

Наоборот, если $a_\alpha \Delta b_\alpha \sim 0$, то

$$a_\alpha \vee b_\alpha = (a_\alpha \Delta b_\alpha) \vee (a_\alpha \wedge b_\alpha) \sim 0 \vee (a_\alpha \wedge b_\alpha) = a_\alpha \wedge b_\alpha .$$

Поэтому

$$a_\alpha \vee b_\alpha = (a_\alpha \vee b_\alpha) \vee b_\alpha \sim (a_\alpha \wedge b_\alpha) \vee b_\alpha = b_\alpha .$$

Аналогично $a_\alpha \vee b_\alpha \sim a_\alpha$. Следовательно, $a_\alpha \sim b_\alpha$.

3) Пусть для любой окрестности $V_a = V[a] \subset U_a$, $V \in \mathscr{U}$ существуют элементы b_V, d_V, $c_V \in \nabla$, такие, что $c_V \leqslant d_V \leqslant b_V$, c_V, $b_V \in V_a$, но $d_V \bar{\in} U_a$. (Напомним, что $V[a] = \{b \in \nabla;\ (a, b) \in V\}$). Обозначим через A направление всех симметричных окружений $V \in \mathscr{U}$, упорядоченных по включению, для которых $V[a] \subset U_a$. Так как для любого $V_1 \in A$ найдется симметричное окружение $V_2 \in A$, такое, что $V_2 \circ V_2 \subset V_1$, то из $(a, c_V) \in V$, $(a, b_V) \in V$ следует, что $(c_V, b_V) \in V_1$ при $V \subset V_2$. Поэтому $c_V \sim b_V$ и $c_V \sim a$. Тогда

$$d_V = d_V \wedge b_V \sim d_V \wedge c_V = c_V \sim a,$$

т. е. $d_V \in V[a]$, если только $V \subset V_1$ для некоторого $V_1 \in A$, но это противоречит предположению о том, что $d_V \bar{\in} U_a$.

4) Пусть W — произвольное окружение из $\mathscr{U}$. Из п. 2) следует, что существуют такие U_1, $U_2 \in \mathscr{U}$, что если $(a, b) \in U_1$, $(0, c \Delta d) \in U_2$, то $(0, a \Delta b) \in W$ и $(c, d) \in W$. Поэтому $U = U_1 \cap U_2$ является искомым окружением из $\mathscr{U}$. ■

Следствие 1. Пусть $(\nabla, \mathscr{U})$ — логика с равномерностью $\mathscr{U}$, согласованной с порядком, и τ — топология, порожденная $\mathscr{U}$. Тогда τ имеет базис заполненных замкнутых окрестностей нуля.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность нуля в (∇, τ) и V — такая окрестность нуля, что из $a \leqslant b$, $b \in V$ следует $a \in U$ (п. 3) предложения 1). Положим $G = \bigcup_{b \in V} [0, b]$, тогда $V \subset G \subset U$, т. е. G — заполненная окрестность нуля, содержащаяся в U. Следовательно, заполненные окрестности образуют базис окрестностей нуля в (∇, τ). Так как пространство

(∇, τ) вполне регулярно, то в (∇, τ) для каждого элемента $a \in \nabla$ существует базис замкнутых окрестностей. Поэтому совокупность $\mathscr{B} = \{\overline{U} : U$ — заполненная окрестность нуля$\}$ является базисом окрестностей нуля в (∇, τ). Осталось заметить, что если $a \leqslant b$, $b \in \overline{U}$, $\overline{U} \in \mathscr{B}$, то найдется сеть $\{b_\alpha\} \subset U$, такая, что $b_\alpha \xrightarrow{\tau} b$ и $a_\alpha = a \wedge b_\alpha \xrightarrow{\tau} a \wedge b = a$ (в силу непрерывности операции $(a, b) \to \to a \wedge b$), но $a_\alpha \in U$, следовательно, $a \in \overline{U}$, т. е. $\overline{U}$ — замкнутая заполненная окрестность нуля. ■

Следствие 2. Пусть $\mathscr{U}$ — равномерность на логике ∇, согласованная с ее порядком, и τ — топология, порожденная $\mathscr{U}$. Если $a_\alpha \xrightarrow{\tau} a$, a_α, $a \in \nabla$ и $b \leqslant a_\alpha \leqslant c$, $b, c \in \nabla$, то $b \leqslant a \leqslant c$.

Для доказательства достаточно заметить, что $a_\alpha = a_\alpha \vee b \xrightarrow{\tau} a \vee b$ и $a_\alpha = a_\alpha \wedge c \xrightarrow{\tau} a \wedge c$. Поэтому $a = a \vee b$ и $a = a \wedge c$, т. е. $b \leqslant \leqslant a \leqslant c$. ■

Внешнюю оценку m на логике ∇ будем называть внешней R-оценкой, если выполнено следующее условие:

M5) $m((a_\alpha \vee c_\alpha) \Delta (b_\alpha \vee d_\alpha)) \to 0$, если $m(a_\alpha \Delta b_\alpha) \to 0$, $m(c_\alpha \Delta d_\alpha) \to 0$, $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \nabla$.

В случае, когда ∇ — булева алгебра, внешняя оценка на ∇ всегда удовлетворяет условию M5), так как в булевых алгебрах выполняется неравенство (см., например, [51])

$$(a \vee c) \Delta (b \vee d) \leqslant (a \Delta b \vee (c \Delta d),$$

$a, b, c, d \in \nabla$. Для произвольных логик внешняя оценка, вообще говоря, не удовлетворяет условию M5).

Пример. Пусть ∇ — логика всех подпространств трехмерного гильбертова пространства H и ξ_1, ξ_2, ξ_3 — ортонормированный базис в H. Обозначим через a_0 подпространство, порожденное векторами ξ_1 и ξ_2. Определим функцию m на ∇, полагая, $m(b) = 0$, если $b \leqslant a_0$, и $m(b) = 1$ во всех остальных случаях. Тогда, очевидно, функция m удовлетворяет условиям M1) и M2). Покажем, что $m(a \vee b) \leqslant m(a) + m(b)$ для всех a, $b \in \nabla$. Если a и b не меньше a_0, то

$$m(a \vee b) = 1 < 2 = m(a) + m(b).$$

Если $a \leqslant a_0$ и b не меньше a_0 (или $b \leqslant a_0$ и a не меньше a_0), то

$$m(a \vee b) = 1 = m(a) + m(b).$$

Наконец, в случае, когда $a \leqslant a_0$ и $b \leqslant a_0$, имеем

$$m(a \vee b) = 0 = m(a) + m(b).$$

Таким образом, m — внешняя оценка на ∇.

Пусть b_0 — подпространство в H, порожденное вектором ξ_1, и c_0 — подпространство, порожденное вектором $\xi = \lambda\xi_2 + \mu\xi_3$, где λ и μ — ненулевые числа. Для произвольного направления A положим

$$a_\alpha = a_0\,,\ b_\alpha = b_0\,,\ c_\alpha = d_\alpha = c_0\,,\ \alpha\in A.$$

Тогда

$$c_\alpha \Delta d_\alpha = 0,\ a_\alpha \Delta b_\alpha = a_1\,,\ (a_\alpha \vee c_\alpha)\Delta(b_\alpha \vee d_\alpha) = a_2\,,$$

где a_1 — подпространство в H, порожденное вектором ξ_2, и a_2 — одномерное подпространство в H, ортогональное плоскости, порожденной векторами ξ и ξ_1. Следовательно, $m(a_\alpha \Delta b_\alpha) = 0$, $m(c_\alpha \Delta d_\alpha) = 0$, но

$$m((a_\alpha \vee c_\alpha)\Delta(b_\alpha \vee d_\alpha)) = 1,$$

т. е. m не является внешней R-оценкой на ∇.

Предложение 2. Если m — оценка на логике ∇, то m — внешняя R-оценка на ∇.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$m((a \vee b)\Delta(a \vee d)) + m((a \wedge b)\Delta(a \wedge d)) \leqslant m(b\Delta d) \qquad (1)$$

для любых a, b, $d\in\nabla$. Действительно,

$$m((a \vee b)\Delta(a \vee d)) + m((a \wedge b)\Delta(a \wedge d)) = m(a \vee b \vee d) -$$
$$- m((a \vee b)\wedge(a \vee d)) + m((a \wedge b)\vee(a \wedge d)) - m(a \wedge b \wedge d) \leqslant$$
$$\leqslant m(a \vee b \vee d) - m(a \vee (b \wedge d)) + m(a \wedge (b \vee d)) - m(a \wedge b \wedge d) =$$
$$= m(a) + m(b \vee d) - m(a) - m(b \wedge d) = m(b\Delta d).$$

Из неравенства (1) и п. 4 предложения 3 из § 1 следует

$$m((a \vee c)\Delta(b \vee d)) \leqslant m((a \vee c)\Delta(c \vee b)) + m((c \vee b)\Delta(b \vee d)) \leqslant$$
$$\leqslant m(a\Delta b) + m(c\Delta d),$$

т. е. оценка m удовлетворяет условию M5) и поэтому m является внешней R-оценкой. ■

Семейство $\mathscr{M}$ внешних оценок на логике ∇ называется разделяющим, если для любого ненулевого элемента $a\in\nabla$ существует $m\in\mathscr{M}$, такое, что $m(a) \neq 0$. Пусть $\mathscr{M}$ — разделяющее семейство внешних R-оценок на логике ∇. Для каждого $m\in\mathscr{M}$ положим $\rho_m(a, b) = m(a\Delta b)$, a, $b\in\nabla$. Тогда

$$\rho_m(a, b) \geqslant 0,\ \rho_m(a, a) = 0,\ \rho_m(a, b) = \rho_m(b, a)$$

и в силу п. 4 предложения 3 из § 1

$$\rho_m(a, b) \leqslant \rho_m(a, c) + \rho_m(c, b)$$

для всех a, b, $c \in \bigtriangledown$. Следовательно, $\rho_m(a, b)$ является квазиметрикой на $\bigtriangledown$. Семейство квазиметрик $\{\rho_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ определяет на $\bigtriangledown$ равномерность $\mathcal{U}$, предбазу окружений которой образуют множества вида

$$W(m, \varepsilon) = \{(a, b) : \rho_m(a, b) < \varepsilon,\ a, b \in \bigtriangledown\},\ m \in \mathcal{M},\ \varepsilon > 0.$$

Покажем, что равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условиям R1) и R2). Прежде всего заметим, что так как семейство $\mathcal{M}$ разделяющее, то равномерность $\mathcal{U}$ отделима. Далее, если $(a, b) \in W(m, \varepsilon)$, то $(a^{\perp}, b^{\perp}) \in W(m, \varepsilon)$, т. е. ортодополнение в $(\bigtriangledown, \mathcal{U})$ равномерно непрерывно. Пусть $W(m, \varepsilon)$ — произвольное окружение из предбазы равномерности $\mathcal{U}$. Если $U \vee U$ не содержится в $W(m, \varepsilon)$ для всех $U \in \mathcal{U}$, где $U \vee U = \{(a \vee c, b \vee d) : (a, b) \in U, (c, d) \in U\}$, то существуют сети $\{a_U\}$, $\{b_U\}$, $\{c_U\}$, $\{d_U\}$, $U \in \mathcal{U}$, такие, что $(a_U, b_U) \in U$, $(c_U, d_U) \in U$ для всех $U \in \mathcal{U}$, но $(a_U \vee c_U, b_U \vee d_U) \bar{\in} W(m, \varepsilon)$. Тогда

$$m(a_U \Delta b_U) = \rho_m(a_U, b_U) \to 0,$$

$$m(c_U \Delta d_U) = \rho_m(c_U, b_U) \to 0,$$

но

$$m((a_U \vee c_U) \Delta (b_U \vee d_U)) = \rho_m(a_U \vee c_U, b_U \vee d_U) \geqslant \varepsilon,$$

что противоречит условию M5), которому удовлетворяет внешняя R-оценка m. Следовательно, существует такое окружение $U \in \mathcal{U}$, что $U \vee U \subset W(m, \varepsilon)$.

Таким образом, получено следующее предложение.

Предложение 3. Если $\mathcal{M}$ — разделяющее семейство внешних R-оценок по логике $\bigtriangledown$, то система множеств $\{W(m, \varepsilon)\}$, $m \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ определяет на $\bigtriangledown$ отделимую равномерность, удовлетворяющую условиям R1) и R2).

Следствие 1. Пусть $\mathcal{M}$ — разделяющее семейство оценок на логике $\bigtriangledown$. Тогда равномерность $\mathcal{U}$, построенная в предложении 3, согласована с порядком $\mathcal{U}$.

Доказательство. Покажем, что равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R3). Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — убывающая сеть элементов из $\bigtriangledown$, но $\{a_\alpha\}$ не фундаментальна. Тогда существует окружение $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(m_i, \varepsilon_i) \in \mathcal{U}$, такое, что для любого $\alpha_1 \in A$ найдутся γ_1, $\beta_1 \in A$, $\alpha_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \beta_1$, такие, что $(a_{\gamma_1}, a_{\beta_1}) \bar{\in} W$, т. е.

$m_i(a_{\gamma_1}-a_{\beta_1})\geqslant\varepsilon_1$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$. Выберем $\alpha_2\in A$ так, чтобы $\beta_1\leqslant\alpha_2$. Существуют γ_2, $\beta_2\in A$, такие, что $\alpha_2\leqslant\gamma_2\leqslant\beta_2$ и $m_i(a_{\gamma_2}-a_{\beta_2})\geqslant\varepsilon_i$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$, и т. д. Построенные последовательности $\{a_{\gamma_k}\}$, $\{a_{\beta_k}\}$ обладают следующими свойствами:

$$(a_{\gamma_n}-a_{\beta_n})\perp(a_{\gamma k}-a_{\beta_k})\text{ при } k\neq n,$$

и $m_i(a_{\gamma k}-a_{\beta_k})\geqslant\varepsilon_i$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$. Так как число индексов i конечно, то найдется такой индекс i_0, $1\leqslant i_0\leqslant n$, и такие подпоследовательности $\{a_{\gamma k_s}\}$, $\{a_{\beta_{k_s}}\}$, что $m_{i_0}(a_{\gamma k_s}-a_{\beta_{k_s}})\geqslant\varepsilon_{i_0}$, но

$$\sum_{s=1}^{\infty} m_{i_0}(a_{\gamma_{k_s}}-a_{\beta_{k_s}})\leqslant m_{i_0}\left(\bigvee(a_{\gamma k_s}-a_{\beta_{k_s}})\right)\leqslant m_{i_0}(1).$$

Из полученного противоречия следует, что сеть $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ фундаментальна, т. е. равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R3) и в силу предложения 3 $\mathcal{U}$ согласована с порядком ∇. ■

Следствие 2. Если m — строго положительная оценка на логике ∇, то $\rho(a, b)=m(a\Delta b)$, a, $b\in\nabla$, является метрикой на ∇, определяющей равномерность, согласованную с порядком ∇.

Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — логика с равномерностью $\mathcal{U}$, согласованной с порядком, и $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ — ее пополнение по равномерности $\mathcal{U}$.

Обозначим через τ (соответственно $\hat{\tau}$) топологию в ∇ (соответственно в $\hat{\nabla}$), порожденную равномерностью $\mathcal{U}$ (соответственно $\hat{\mathcal{U}}$). Тогда $\hat{\tau}$ индуцирует в ∇ (мы считаем, что ∇ вложено в $\hat{\nabla}$) топологию τ и семейство $\{\hat{W}[a]\}$, $\hat{W}\in\hat{\mathcal{U}}$ образует базис окрестностей точки $a\in\hat{\nabla}$ в топологии $\hat{\tau}$, так что сходящиеся сети в $(\hat{\nabla}, \hat{\tau})$ можно рассматривать только по направлению A, составленному из окружений $\hat{W}\in\hat{\mathcal{U}}$, упорядоченных по включению: $W\leqslant U$, если $U\subset W$. Определим в $\hat{\nabla}$ частичный порядок, полагая $a\leqslant b$, $a, b\in\hat{\nabla}$, если существуют сети $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$,

a_α, $b_\alpha\in\nabla$, такие, что $a_\alpha\leqslant b_\alpha$, $a_\alpha\xrightarrow{\hat{\tau}}a$, $b_\alpha\xrightarrow{\hat{\tau}}b$. Покажем, что введенное отношение есть отношение частичного порядка в ∇. Очевидно, что $a\leqslant a$ для всех $a\in\nabla$. Так как операции $(a, b)\to$ $\to a\vee b$ и $(a, b)\to a\wedge b$ равномерно непрерывны в $(\nabla, \mathcal{U})$, то для любых фундаментальных сетей $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$, a_α, $b_\alpha \in \nabla$ сети $\{a_\alpha \vee b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{a_\alpha \wedge b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ тоже фундаментальные. Следовательно, если $a_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a$, $b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b$, a_α, $b_\alpha \in \nabla$, то существуют элементы c, $d \in \hat{\nabla}$, такие, что $a_\alpha \vee b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} c$, $a_\alpha \wedge b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} d$, при этом если

$$a'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a,\ b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b,\ a'_\alpha,\ b'_\alpha \in \nabla, \quad \text{то}$$

$$a'_\alpha \vee b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} c \quad \text{и} \quad a'_\alpha \wedge b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} d.$$

Пусть a, $b \in \hat{\nabla}$ и $a \leqslant b$, $b \leqslant a$. Тогда найдутся сети

$$\{a_\alpha\}_{\alpha\in A},\ \{b_\alpha\}_{\alpha\in A},\ \{a'_\alpha\}_{\alpha\in A},\ \{b'_\alpha\}_{\alpha\in A},\ a_\alpha,\ b_\alpha,\ a'_\alpha,\ b'_\alpha \in \nabla,$$

такие, что $a_\alpha \leqslant b_\alpha$, $a'_\alpha \leqslant b'_\alpha$ и

$$a_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a,\ b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b,\ a'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a,\ b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b.$$

Отсюда

$$b_\alpha = a_\alpha \vee b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b,$$

$$a'_\alpha = a'_\alpha \vee b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a,$$

так что в силу сказанного выше $a = b$.

Пусть $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, a, b, $c \in \hat{\nabla}$ и $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{b'_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{b''_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — такие сети элементов из ∇, что $a_\alpha \leqslant b'_\alpha$, $b''_\alpha \leqslant c_\alpha$, $a_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a$, $b'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b$, $b''_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b$, $c_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} c$. Тогда $b_\alpha = b'_\alpha \vee b''_\alpha \sim b''_\alpha$ и потому $b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b$. Аналогично $c'_\alpha = c_\alpha \vee b_\alpha \sim c_\alpha \vee b''_\alpha = c_\alpha$ и $c'_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} c$. Следовательно, $a \leqslant c$. Покажем теперь, что $\hat{\nabla}$ — решетка. Пусть a, $b \in \hat{\nabla}$, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — сети элементов из ∇, такие, что $a_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} a$, $b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} b$ и c — элемент из $\hat{\nabla}$, для которого $a_\alpha \vee b_\alpha \overset{\hat{\tau}}{\to} c$. Тогда $a \leqslant c$, $b \leqslant c$. Если $d \in \hat{\nabla}$, $a \leqslant d$, $b \leqslant d$ и $\{a'_\alpha\}$, $\{b'_\alpha\}$, $\{d'_\alpha\}$, $\{d''_\alpha\}$ —

— сети из ∇, для которых $a'_\alpha \leqslant d'_\alpha$, $b'_\alpha \leqslant d''_\alpha$, $a'_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a$, $b'_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} b$, $d'_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} d$, $d''_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} d$, то $d_\alpha = d'_\alpha \vee d''_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} d$ и $a'_\alpha \vee b'_\alpha \leqslant d_\alpha$. Следовательно, $c \leqslant d$ и потому $c = a \vee b$. Аналогично показывается, что для любых $a, b \in \hat\nabla$ существует $a \wedge b$. Таким образом, $\hat\nabla$ является решеткой с нулем 0 и единицей 1. Определим в $\hat\nabla$ ортодополнение. Так как операция $a \to a^\perp$ равномерно непрерывна в $(\nabla, \mathcal{U})$, то для любой фундаментальной сети $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ сеть $\{a_\alpha^\perp\}_{\alpha \in A}$ тоже фундаментальна. Следовательно, если $a \in \hat\nabla$, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, $a_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a$, то существует элемент $a^\perp \in \hat\nabla$, такой, что $a_\alpha^\perp \xrightarrow{\hat\tau} a^\perp$, при этом если $a'_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a$, $a'_\alpha \in \nabla$, то $(a'_\alpha)^\perp \xrightarrow{\hat\tau} a^\perp$. Очевидно, что введенная операция $a \to a^\perp$, $a \in \hat\nabla$, является ортодополнением на $\hat\nabla$.

Заметим также, что так как операции $(a, b) \to a \vee b$, $(a, b) \to a \wedge b$, $a, b \in \nabla$ и ортодополнение $a \to a^\perp$, $a \in \nabla$, равномерно непрерывны на $(\nabla, \mathcal{U})$, то они останутся равномерно непрерывными и на $(\hat\nabla, \hat{\mathcal{U}})$, в частности, если $a_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a$, $b_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} b$, a_α, b_α, a, $b \in \hat\nabla$, то $a_\alpha \vee b_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a \vee b$, $a_\alpha \wedge b_\alpha \to a \wedge b$, $a_\alpha^\perp \to a^\perp$.

Покажем, что $\hat\nabla$ — логика. Пусть $a, b \in \hat\nabla$, $a \leqslant b$, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сети из ∇, для которых $a_\alpha \leqslant b_\alpha$, $a_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} a$, $b_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} b$. Положим $c = b \wedge a^\perp$ и $c_\alpha = b_\alpha \wedge a_\alpha^\perp$, тогда $c \perp a$ и $c \vee a = b$, так как $c_\alpha \vee a_\alpha = b_\alpha$ и $c_\alpha \vee a_\alpha \xrightarrow{\hat\tau} c \vee a$. Следовательно, $\hat\nabla$ есть логика, причем ∇ — подлогика в $\hat\nabla$.

Теорема 1. Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — логика с равномерностью $\mathcal{U}$, согласованной с порядком, и $(\hat\nabla, \hat{\mathcal{U}})$ — ее пополнение по равномерности $\mathcal{U}$. Тогда $\hat\nabla$ — полная логика, равномерность $\hat{\mathcal{U}}$ согласована с порядком $\hat\nabla$ и топология $\hat\tau$, порожденная $\hat{\mathcal{U}}$, мажорируется (o)-топологией.

Доказательство. Из рассуждений, приведенных перед теоремой, следует, что $\hat{\nabla}$ — логика и $\hat{\mathcal{U}}$ — отделимая равномерность на $\hat{\nabla}$, удовлетворяющая условиям R1) и R2). Покажем, что $\hat{\nabla}$ — полная логика. Пусть сначала M — счетное подмножество в $\hat{\nabla}$. Для доказательства существования $\vee M$ без ограничения общности можно считать, что $M = \{a_n\}$ — возрастающая последовательность из $\hat{\nabla}$. Покажем, что $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность в $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$. Пусть $\hat{W}$ — произвольное окружение из $\hat{\mathcal{U}}$ и $\hat{\mathcal{U}}_n$ — такие симметричные окружения из $\hat{\mathcal{U}}$, что $\hat{U}_1 \circ \hat{U}_1 \circ \hat{U}_1 \subset W$ и

$$\hat{U}_{n+1} \vee \hat{U}_{n+1} \subset \hat{U}_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

Для каждого $a_n \in M$ существует сеть $\{a_\alpha^{(n)}\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, для которой $a_\alpha^{(n)} \xrightarrow{\hat{\tau}} a_n$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому для каждого номера n найдется $\alpha_n \in A$, такое, что $(a_{\alpha_n}^{(n)}, a_n) \in \hat{U}_{n+1}$. Положим $b_k = \bigvee_{n=1}^{k} a_{\alpha_n}^{(n)}$, тогда $\{b_k\}$ — возрастающая последовательность элементов из ∇ и

$$(b_k, a_k) = \left(\bigvee_{n=1}^{k} a_{\alpha_n}^{(n)}, \bigvee_{n=1}^{k} a_n\right) \in \hat{U}_1,$$

так как

$$\hat{U}_2 \vee \hat{U}_3 \vee \dots \vee \hat{U}_{n+1} \subset \hat{U}_1$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

Последовательность $\{b_n\}$ является фундаментальной (условие R3) для равномерности $\mathcal{U}$). Поэтому существует номер n_0, такой, что $(b_n, b_m) \in \hat{U}_1$ при $n, m \geqslant n_0$. Тогда

$$(b_n, a_m) \in \hat{U}_1 \circ \hat{U}_1$$

и

$$(a_n, a_m) \in \hat{U}_1 \circ \hat{U}_1 \circ \hat{U}_1 \subset W \text{ при } n, m \geqslant n_0.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность в $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ и потому найдется элемент $a \in \hat{\nabla}$, для которого $a_n \xrightarrow{\hat{\tau}} a$. Отсюда для $n \geqslant m$

$$a_n = a_n \vee a_m \xrightarrow{\hat{\tau}} a \vee a_m \text{ при } n \to \infty,$$

т. е. $a = a \vee a_m$. Это означает, что $a_n \leqslant a$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Если $b \in \hat{\nabla}$ и $a_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, то из следствия 2 к предложению 1 вытекает, что $a \leqslant b$. Таким образом, $a = \vee M$. Предположим теперь, что $\vee M$ существует для любого подмножества $M \subset \hat{\nabla}$, мощность которого строго меньше мощности ω, и пусть $M \subset \nabla$ имеет мощность ω. Обозначим через α_0 первое трансфинитное число, соответствующее мощности ω. Тогда все элементы множества M можно занумеровать трансфинитными числами, не превосходящими α_0, т. е. $M = \{a_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$. Для каждого $\alpha < \alpha_0$ положим $b_\alpha = \bigvee_{\beta \leqslant \alpha} a_\beta$ (по предположению эта точная верхняя грань существует). Сеть $\{b_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$ является возрастающей. Покажем, что она фундаментальна. Если это не так, то существует окружение $\hat{W} \in \hat{\mathcal{U}}$, такое, что для любого $\alpha_1 < \alpha_0$ найдутся $\beta_1 \geqslant \gamma_1 \geqslant \alpha_1$, для которых $(b_{\beta_1}, b_{\gamma_1}) \overline{\in} \hat{W}$. Выбираем $\alpha_2 \geqslant \beta_1$, $\alpha_2 < \alpha_0$ и строим $\beta_2 \geqslant \gamma_2 \geqslant \alpha_2$ так, чтобы $(b_{\beta_2}, b_{\gamma_2}) \overline{\in} \hat{W}$, и т. д. Построим возрастающую последовательность $b_{\gamma_1} \leqslant b_{\beta_1} \leqslant b_{\gamma_2} \leqslant \ldots$, которая не является фундаментальной в $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$, что невозможно. Следовательно, сеть $\{b_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$ фундаментальна и потому существует элемент $b \in \hat{\nabla}$, такой, что $b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} b$. Повторяя те же рассуждения, что и для счетного случая, получаем $b = \vee M$. Таким образом, $\hat{\nabla}$ — полная логика, причем одновременно показано, что $c_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} \bigvee_\alpha c_\alpha$ для любой возрастающей сети $\{c_\alpha\} \subset \hat{\nabla}$. Отсюда, в частности, следует, что $d_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} \bigwedge_\alpha d_\alpha$ для любой убывающей сети $\{d_\alpha\} \subset \hat{\nabla}$, т. е. равномерность $\hat{\mathcal{U}}$ удовлетворяет условию R3). Следовательно, $\hat{\mathcal{U}}$ — согласована с порядком логики $\hat{\nabla}$. Пусть теперь $\{a_\alpha\} \subset \hat{\nabla}$, $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, $a \in \hat{\nabla}$ и $b_\alpha = \bigwedge_{\alpha \leqslant \beta} a_\beta$, $c_\alpha = \bigvee_{\alpha \leqslant \beta} a_\beta$. Тогда $b_\alpha \leqslant$ $\leqslant a_\alpha \leqslant c_\alpha$, $b_\alpha \uparrow a$ и $c_\alpha \downarrow a$, отсюда $b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$ и $c_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$. Из п. 3) предложения 1 вытекает, что $a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$. Поэтому топология $\hat{\tau}$ мажорируется (o)-топологией. ■

Замечание. Пополнение произвольных структур по равномерности рассматривалось в [73], доказательство теоремы 1 также во многом заимствовано из этой работы.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие.

Следствие. Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — логика с равномерностью $\mathcal{U}$, согласованной с порядком, и τ — топология, порожденная $\mathcal{U}$. Если $(\nabla, \mathcal{U})$ — полное равномерное пространство, то

1) ∇ — полная логика;

2) топология τ мажорируется (o)-топологией, в частности, для $(\nabla, \mathcal{U})$ выполняется более сильное, чем R3), условие:

R3′) если сеть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ монотонно убывает к элементу $a \in \nabla$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} a$.

Библиография: [9, 41, 51, 71, 73, 92, 109, 129, 130, 147].

§ 7. Равномерные логики

Пусть $\mathcal{U}$ — отделимая равномерность на полной логике ∇ и τ — топология, порожденная $\mathcal{U}$.

Определение. Пара $(\nabla, \mathcal{U})$ называется равномерной логикой, если выполнены условия R1), R2) и R3′). В этом случае равномерность $\mathcal{U}$ называется R-равномерностью, а топология τ — R-топологией.

Очевидно, что R-равномерность согласована с порядком логики ∇. В силу следствия к теореме 1 из § 6 любая логика $(\nabla, \mathcal{U})$ с равномерностью $\mathcal{U}$, согласованной с порядком, являющаяся полным равномерным пространством, есть равномерная логика. Из условия R3′) и п. 3) предложения 1 из § 6 следует, что в равномерной логике R-топология мажорируется (o)-топологией.

Замечание. В работах [9, 10, 105] изучались полные булевы алгебры, на которых можно ввести T_1-отделимую топологию τ, такую, что:

1) ортодополнение $a \to a^\perp$ непрерывно;

2) операция $(a, b) \to a \vee b$ непрерывна по совокупности переменных;

3) если $a_\alpha \downarrow 0$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$.

Такие булевы алгебры были названы топологическими. Очевидно, что любая равномерная булева алгебра является топологической булевой алгеброй. Наоборот, пусть (∇, τ) — топологическая булева алгебра и $\mathcal{B}$ — совокупность всех окрестностей нуля в (∇, τ). Для каждого $V \in \mathcal{B}$ положим $W(V) = \{(a, b) \in \nabla \times \times \nabla : a \Delta b \in V\}$. Так как (∇, τ) относительно алгебраических операций $a \Delta b$, $a \cdot b = a \wedge b$ является топологическим кольцом, то семейство $\mathcal{U} = \{W(V) : V \in \mathcal{B}\}$ является равномерностью на ∇, причем нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{U}$ — R-равномерность на

∇. Следовательно, любая топологическая булева алгебра является равномерной логикой, т. е. в классе булевых алгебр понятия топологической булевой алгебры и равномерной логики совпадают.

Элемент a из логики ∇ назовем элементом счетного типа, если логика $\nabla_a = [0, a]$ имеет счетный тип.

Теорема 1. Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика и τ — топология, порожденная $\mathcal{U}$. Тогда:

1) если ∇ имеет счетный тип, то R-топология τ совпадает с (o)-топологией;

2) каждый элемент $a \in \nabla$ есть точная верхняя грань монотонно возрастающей сети элементов счетного типа;

3) если $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — монотонно возрастающая к $\mathbf{1}$ сеть, то равномерность $\mathcal{U}$ есть слабейшая из равномерностей на ∇, для которых отображения $p_\alpha : \nabla \to (\nabla_{a_\alpha}, \mathcal{U}_{a_\alpha})$ равномерно непрерывны при всех $\alpha \in A$, где $p_\alpha(a) = a \wedge a_\alpha$ и $\mathcal{U}_{a_\alpha}$ — равномерность на $\nabla_{a_\alpha} = [0, a_\alpha]$, индуцируемая $\mathcal{U}$ из ∇.

Доказательство. 1. Пусть ∇ — логика счетного типа, $a \in \nabla$, $a \neq \mathbf{0}$, $a \neq \mathbf{1}$. Выберем замкнутые симметричные окружения W_n из $\mathcal{U}$ так, чтобы $0, \mathbf{1} \overline{\in} W_1[a]$ и

$$W_{n+1} \vee W_{n+1} \subset W_n, \ W_{n+1} \wedge W_{n+1} \subset W_n, \ n = 1, 2, \ldots . \qquad (1)$$

Положим $M_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n[a]$. Тогда M_1 — замкнутое подмножество в (∇, τ), при этом если $a_i \in M_1$, $i = 1, \ldots, n$, то в силу соотношения (1) $\bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i \in M_1$ и $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} a_i \in M_1$. Для каждого конечного подмножества $\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset M_1$ положим $a_\alpha = \bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i$, $b_\alpha = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} a_i$. Тогда $\{a_\alpha\}$ — возрастающая, а $\{b_\alpha\}$ — убывающая сети элементов из M_1. Следовательно, $a_\alpha \xrightarrow{\tau} \vee M_1$, $b_\alpha \xrightarrow{\tau} \wedge M_1$ и так как M_1 замкнуто, то $b_1 = \wedge M_1 \in M_1$ и $d_1 = \vee M_1 \in M_1$, причем $0 < b_1 \leqslant a \leqslant d_1 < \mathbf{1}$. Если $b_1 \neq a$, $d_1 \neq a$, то выберем замкнутые симметричные окружения $U_n \in \mathcal{U}$ так, чтобы $b_1, d_1 \overline{\in} U_1[a]$ и

$$U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n, \ U_{n+1} \wedge U_{n+1} \subset U_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Положим $M_2 = M_1 \cap (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n[a])$ и $b_2 = \wedge M_2$, $d_2 = \vee M_2$. Тогда, так же, как и выше, получим, что $b_1 < b_2 \leqslant a \leqslant d_2 < d_1$. Проведя эту конструкцию для любого натурального n, построим последовательности элементов $\{b_n\}$, $\{d_n\}$ из ∇, для которых $b_n < b_{n+1} \leqslant a \leqslant d_{n+1} < d_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть ω — первое счетное трансфинитное число. Положим $b_\omega = \bigvee_{n=1}^{\infty} b_n$, $d_\omega = \bigwedge_{n=1}^{\infty} d_n$ и для пары элементов b_ω и a_ω проведем ту же конструкцию, что и для элементов a_1, b_1, и т. д. Покажем, что эта конструкция оборвется на счетном, трансфинитном числе, т. е существует такое счетное трансфинитное число α_0, что $b_{\alpha_0} = a = d_{\alpha_0}$. Если это не так, то для любого счетного трансфинитного числа α найдутся элементы b_α и d_α, такие, что $b_\alpha < b_{\alpha+1} \leqslant a \leqslant d_{\alpha+1} < d_\alpha$. Положим $c_\alpha = d_\alpha - d_{\alpha+1}$, тогда $\{c_\alpha\}$ — несчетное множество ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇ (так как множество всех счетных трансфинитных чисел несчетно), что противоречит счетности типа логики ∇. Следовательно, существует счетный набор замкнутых симметричных окружений $G_n \in \mathscr{U}$, такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n[a] = \{a\}$. Выберем замкнутые симметричные окружения $V_n \in \mathscr{U}$ так, чтобы

$$V_1 \vee V_1 \subset G_1,\ V_1 \wedge V_1 \subset G_1,$$

$$V_{n+1} \vee V_{n+1} \subset G_n \cap V_n,\ V_{n+1} \wedge V_{n+1} \subset G_n \cap V_n.$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n[a] = \{a\}$$

и

$$V_{n+1} \vee V_{n+1} \subset V_n,\ V_{n+1} \wedge V_{n+1} \subset V_n \tag{2}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажем теперь, что любая сеть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset (\nabla, \tau)$, сходящаяся к элементу a в топологии τ, сходится к a и в (o)-топологии $\tau_0(\nabla)$. Если $\{a_\alpha\}$ не сходится к a в топологии $\tau_0(\nabla)$, то существует окрестность Γ элемента a в (o)-топологии и конфинальная подсеть $\{a_{\alpha_\beta}\}$, такие, что $a_{\alpha_\beta} \bar{\in} \Gamma$ для всех β. Так как $a_{\alpha_\beta} \xrightarrow{\tau} a$, то существуют $d_n = a_{\alpha_{\beta_n}} \in V_n[a]$. Положим $c_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} d_k$, $f_n = \bigwedge_{k=n}^{\infty} d_k$, тогда $f_n \leqslant d_n \leqslant c_n$, $\{f_n\}$ — возрастающая и $\{c_n\}$ — убывающая последовательности из ∇.

Из соотношения (2) вытекает

$$\bigvee_{k=n}^{p} d_k \in V_{n-1}[a],\ \bigwedge_{k=n}^{p} d_k \in V_{n-1}[a]$$

для всех $p \geqslant n$, $n = 2, 3, \ldots$. Поэтому $c_n \in V_{n-1}[a]$ и $f_n \in V_{n-1}[a]$, $n=2, 3, \ldots$. Пусть $c = \bigwedge_{n=1}^{\infty} c_n$, $f = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$, тогда $c_n \xrightarrow{\tau} c$, $f_n \xrightarrow{\tau} f$. Отсюда в силу замкнутости $V_n[a]$ и вложения $V_{n+1}[a] \subset V_n[a]$

следует, что $c, f \in V_n[a]$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $c = f = a$. Поэтому $d_n \xrightarrow{(o)} a$ и, следовательно, существует номер n_0, для которого $d_{n_0} \in \Gamma$, что противоречит соотношению $a_{\alpha_\beta} \bar{\in} \Gamma$ для всех β. Таким образом, $a_\alpha \xrightarrow{\tau_0(\nabla)} a$, т. е. $\tau_0(\nabla)$ мажорируется R-топологией τ, но $\tau \leqslant \tau_0(\nabla)$, следовательно, $\tau = \tau_0(\nabla)$.

2) Пусть $a \in \nabla$, $a \neq 0$. Выберем замкнутые симметричные окружения W_n так, чтобы $a \bar{\in} W_1[0]$ и

$$W_{n+1} \vee W_{n+1} \subset W_n, \quad W_{n+1} \wedge W_{n+1} \subset W_n$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $M = \nabla_a \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right)$ и $b = \vee M$. Тогда, как и при доказательстве п. 1), $b \in M$ и $b < a$. Поэтому $c = a - b \neq 0$, причем $\nabla_c \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right) = \{0\}$.

Так как R-топология τ мажорируется (o)-топологией и любая последовательность попарно ортогональных элементов (o)-сходится к нулю, то каждое множество попарно ортогональных элементов, лежащее вне окрестности нуля $W_n[0]$, является конечным. Поэтому, если D—множество ненулевых попарно ортогональных элементов из ∇_c, то $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (D \cap (\nabla_c \setminus W_n[0]))$ и, следовательно, D не более чем счетно. Таким образом, для любого $a \in \nabla$, $a \neq 0$, существует ненулевой элемент счетного типа c, такой, что $c \leqslant a$ и

$$\nabla_c \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right) = \{0\}, \tag{3}$$

где $\{W_n\}$ — последовательность замкнутых симметричных окружений, для которой

$$c \perp \vee \left(\nabla_a \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right) \right). \tag{4}$$

Пусть $c_1, \ldots, c_k$ —элементы счетного типа из ∇, $c_i < a$, $i = 1, \ldots, k$ и $\left\{ W_n^{(i)} \right\}$ — последовательность замкнутых симметричных окружений из $\mathcal{U}$, для которой

$$\nabla_{c_i} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(i)}[0] \right) = \{0\} \text{ и } c_i \perp \vee \left(\nabla_a \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(i)}[0] \right), i = 1, \ldots, k.$$

Если $d \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n^{(i)}$ и $d \leqslant a$, то $d \perp c_i$ для всех i. Следовательно, $d < \bigwedge\limits_{i=1}^{k} c_i^{\perp} = \left(\bigvee\limits_{i=1}^{k} c_i \right)^{\perp}$, т. е. $d \perp c_0$, где $c_0 = \bigvee\limits_{i=1}^{n} c_i$. Отсюда

$$\bigtriangledown_{c_0} \cap \left(\bigcap_{l=1}^{k} \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(l)} \right) = \{0\}$$

и потому $c_0 = \bigvee_{i=1}^{n} c_i$ также элемент счетного типа. Пусть M—совокупность всех элементов c счетного типа из $\bigtriangledown_a$, удовлетворяющих (3) и (4). Обозначим через A всевозможные конечные подмножества из M (тогда A — направление при естественном введении частичного порядка по включению) и для каждого $\alpha = (c_1, \ldots, c_n) \in A$ положим $c_\alpha = \bigvee_{c_i \in \alpha} c_i$. Сеть $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ монотонно возрастает, причем $c_\alpha \leqslant a$ и c_α — элемент счетного типа при всех $\alpha \in A$. Пусть $c_0 = \bigvee_{\alpha \in A} c_\alpha$. Если $c_0 \neq a$, то для элемента $d = a - c_0$ найдется такой ненулевой элемент f счетного типа, что $f \leqslant d$ и

$$\bigtriangledown_f \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right) = 0, \; f \perp \vee \left(\bigtriangledown_f \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n[0] \right)$$

для некоторой последовательности $\{W_n\}$ замкнутых симметричных окружений из $\mathscr{U}$, но тогда, очевидно, $f \in M$ и потому $f \leqslant c_0$, что невозможно. Следовательно, $c_0 = a$, т. е. $c_\alpha \uparrow a$.

3) Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — монотонно возрастающая к **1** сеть из $\bigtriangledown$ и $\mathscr{U}_{a_\alpha}$ — равномерность на $\bigtriangledown_{a_\alpha}$, индуцируемая $\mathscr{U}$ из $\bigtriangledown$. Базу окружений в $\mathscr{U}_{a_\alpha}$ образуют множества вида $W^{(\alpha)} = W \cap (\bigtriangledown_{a_\alpha} \times \bigtriangledown_{a_\alpha})$, $W \in \mathscr{U}$. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$\widetilde{W}^\alpha = (p_\alpha \times p_\alpha)^{-1} (W^{(\alpha)}) = \{(a, b) : (a \wedge a_\alpha, b \wedge a_\alpha) \in W\}.$$

Базу слабейшей равномерности $\mathscr{U}_1$ на $\bigtriangledown$, относительно которой все p_α равномерно непрерывны, $\alpha \in A$, образуют множества вида

$$W(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) = \bigcap_{k=1}^{n} \widetilde{W}^{\alpha_{i_k}}.$$

Так как отображения $p_\alpha : (\bigtriangledown, \mathscr{U}) \to (\bigtriangledown_{a_\alpha}, \mathscr{U}_{a_\alpha})$, очевидно, равномерно непрерывны, $\alpha \in A$, то равномерность $\mathscr{U}$ сильнее равномерности $\mathscr{U}_1$. Пусть W — произвольное окружение из $\mathscr{U}$ и W_1, W_2 — такие симметричные окружения из $\mathscr{U}$, что

$$W_1 \wedge W_1 \subset W_2 \text{ и } W_2 \circ W_2 \circ W_2 \subset W.$$

Так как $a_\alpha \uparrow \mathbf{1}$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} \mathbf{1}$ и поэтому существует $\alpha_0 \in A$, для которого $(a_{\alpha_0}, \mathbf{1}) \in W_1$. Отсюда $(a \wedge a_{\alpha_0}, a) \in W_2$ для всех $a \in \bigtriangledown$. Если $(a, b) \in \widetilde{W}_2^{\alpha_0}$, то $(a \wedge a_{\alpha_0}, b \wedge a_{\alpha_0}) \in W_2$, но

$$(a \wedge a_{\alpha_0}, a) \in W_2 \text{ и } (b \wedge a_{\alpha_0}, b) \in W_2.$$

Следовательно, $(a, b) \in W_2 \circ W_2 \circ W_2 \subset W$, т. е. $\widetilde{W}_2^{\alpha_0} \subset W$. Таким образом, равномерность $\mathcal{U}$ мажорируется равномерностью $\mathcal{U}_1$ и потому $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$. ■

Замечание. В случае, когда ∇ — булева алгебра, пп. 1), 2) теоремы 1 получены в работе [51].

Теорема 2. Равномерная логика $(\nabla, \mathcal{U})$ является логикой счетного типа в том и только в том случае, когда равномерность $\mathcal{U}$ метризуема.

Доказательство. Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика счетного типа и $\{V_n\}$ — последовательность замкнутых симметричных окружений из $\mathcal{U}$, для которой

$$V_{n+1} \vee V_{n+1} \subset V_n, \; V_{n+1} \wedge V_{n+1} \subset V_n, \; n = 1, 2, \dots$$

и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n [0] = \{0\}$$

(см. доказательство п. 1) теоремы 1). В силу п. 4) предложения 1 из § 6 можно считать, что из $(a, b) \in V_{n+1}$ следует $(0, a \Delta b) \in V_n$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что последовательность $\{V_n\}$ образует базис равномерности $\mathcal{U}$. Пусть $W \in \mathcal{U}$ и существуют $(a_n, b_n) \in V_n \setminus W$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $(0, a_n \Delta b_n) \in V_{n-1}$, т. е. $(a_n \Delta b_n) \in V_{n-1} [0]$, поэтому $a_n \Delta b_n \xrightarrow{(o)} 0$ (см. доказательство п. 1) теоремы 1), в частности, $a_n \Delta b_n \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $a_n \Delta b_n \sim 0$, отсюда в силу п. 2) предложения 1 из § 6 $a_n \sim b_n$ и потому $(a_{n_0}, b_{n_0}) \in W$ для некоторого номера n_0, что противоречит построению последовательности $\{(a_n, b_n)\}$. Таким образом, для каждого $W \in \mathcal{U}$ существует такое V_n, что $V_n \subset W$. Следовательно, равномерность $\mathcal{U}$ метризуема.

Наоборот, пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ метризуемо и $\{W_n\}$ — базис симметричных окружений в $\mathcal{U}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n [0] = \{0\}$ и любой набор попарно ортогональных элементов из множества $\nabla \setminus W_n [0]$ является конечным (см. доказательство п. 2) теоремы 1). Поэтому ∇ имеет счетный тип. ■

На логиках, вообще говоря, могут существовать различные равномерности, согласованные с их порядком.

Пример. Обозначим через ∇ полную булеву алгебру всех последовательностей $x = \{x_n\}$ из нулей и единиц, т. е. $\nabla = \prod\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, где $D_i = D = \{0, 1\}$ — тривиальная булева алгебра. Пусть l_∞ — банахово пространство всех ограниченных числовых последовательностей. Тогда, очевидно, можно считать, что $\nabla \subset l_\infty$. При введении покоординатного частичного порядка ($x \leqslant y$, если $x_n \leqslant y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $x = \{x_n\} \in l_\infty$, $y = \{y_n\} \in l_\infty$) пространство l_∞ становится банаховой векторной решеткой ([66], с. 377) и потому множество всех непрерывных линейных функционалов на l_∞ совпадает с множеством всех линейных функционалов φ, представимых в виде $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ и Φ — совокупность всех положительных линейных функционалов на l_∞ ([66], с. 377). Сужение m_φ любого $\varphi \in \Phi$ на ∇ является оценкой на ∇. Поэтому семейство $\{m_\varphi\}$, $\varphi \in \Phi$, порождает на ∇ равномерность $\mathcal{U}_1$, согласованную с порядком ∇ (следствие 1 к предложению 3 из § 6). Эта равномерность не удовлетворяет условию R3′), так как в противном случае $\varphi(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\varphi \in \Phi$ и любой убывающей к нулю последовательности $x_n \in l_\infty$, что невозможно ([66], с. 381).

Пусть m — оценка на ∇, определенная по формуле

$$m(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

Оценка m строго положительна и (o)-непрерывна на ∇. Равномерность $\mathcal{U}_2$, порожденная m, согласована с порядком ∇ и удовлетворяет условию R3′). Следовательно, $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$.

Следующая теорема показывает, что R-равномерность на логике может быть только одна.

Теорема 3. Если $(\nabla, \mathcal{U}_1)$ и $(\nabla, \mathcal{U}_2)$ — равномерные логики, то $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Доказательство. Пусть τ_1 и τ_2 — R-топологии в ∇, порожденные равномерностями $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ соответственно. Покажем, что $a_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$ в том и только в том случае, когда $a_\alpha \xrightarrow{\tau_2} 0$, $a_\alpha \in \nabla$, $\alpha \in A$. Пусть $\{b_i\}_{i \in I}$ — возрастающая к $\mathbf{1}$ сеть элементов счетного типа из ∇ (такая сеть существует в силу п. 2) теоремы 1). Если $a_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$, то $a_\alpha \wedge b_i \xrightarrow{\tau_1} 0$ для каждого фиксированного $i \in I$. Логика ∇_{b_i} имеет счетный тип и относительно равномерностей, индуцированных равномерностями $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, является равномерной логикой. Из п. 1) теоремы 1 следует, что топологии τ_1 и τ_2 индуцируют в ∇_{b_i} (o)-топологию, т. е. эти топологии на ∇_{b_i} совпадают. Поэтому $a_\alpha \wedge b_i \xrightarrow{\tau_2} 0$ для каждого фиксированного $i \in I$.

Пусть W — произвольное окружение из $\mathcal{U}_2$. Выберем симметричные окружения W_1, W_2 из $\mathcal{U}_2$ так, чтобы

$$W_1 \wedge W_1 \subset W_2, \; W_2 \circ W_2 \subset W.$$

Так как $b_i \uparrow 1$, то $b_i \xrightarrow{\tau_2} 1$ и потому существует такое $i_0 \in I$, что $(b_{i_0}, 1) \in W_1$. Тогда $(a_\alpha \wedge b_{i_0}, a_\alpha) \in W_2$ при всех $\alpha \in A$, но $a_\alpha \wedge \wedge b_{i_0}, 0) \in W_2$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Следовательно, $(a_\alpha, 0) \in W$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, т. е. $a_\alpha \xrightarrow{\tau_2} 0$. Если $a_\alpha \xrightarrow{\tau_1} a$, то $a_\alpha \Delta a \xrightarrow{\tau_1} 0$ (п. 2) предложения 1 из § 6) и потому $a_\alpha \Delta a \xrightarrow{\tau_2} 0$, откуда в силу п. 2) предложения 1 из § 6 $a_\alpha \xrightarrow{\tau_2} a$. Аналогично, если $a_\alpha \xrightarrow{\tau_2} a$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau_1} a$. Таким образом, R-топологии τ_1 и τ_2 совпадают. Покажем теперь, что $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$. Пусть W — произвольное окружение из $\mathcal{U}_2$ и W_1 — такое симметричное окружение из $\mathcal{U}_2$, что из $(0, a\Delta b) \in W_1$ следует $(a, b) \in W$ (п. 4) предложения 1 из § 6). Так как $\tau_1 = \tau_2$, то найдется такое симметричное окружение $U_1 \in \mathcal{U}_1$, что $U_1 [0] \subset W_1 [0]$. Выберем окружение $U_2 \in \mathcal{U}_1$ так, чтобы из $(a, b) \in U_2$ следовало $(0, a\Delta b) \in U_1$. Тогда, очевидно, $U_2 \subset W$. Следовательно, $\mathcal{U}_2 \leqslant \mathcal{U}_1$. Аналогично $\mathcal{U}_1 \leqslant \mathcal{U}_2$ и потому $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$. ■

Следствие. Пусть $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$, $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ — равномерные логики и $\varphi : \nabla_1 \to \nabla_2$ — изоморфизм ∇_1 и ∇_2. Тогда φ является изоморфизмом равномерных пространств $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ и $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{U}_1'$ равномерность в ∇_1, базу окружений которой образуют множества вида

$$W' = (\varphi \times \varphi)^{-1} (W) = \{(a, b) \in \nabla_1 \times \nabla_1 : (\varphi (a), \varphi (b)) \in W\},$$

где $W \in \mathcal{U}_2$. Так как φ—изоморфизм логик ∇_1 и ∇_2, то $\mathcal{U}_1'$ является R-равномерностью на ∇_1. В силу теоремы 3 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1'$, следовательно, $\varphi : (\nabla_1, \mathcal{U}_1) \to (\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ равномерно непрерывно. Аналогично $\varphi^{-1} : (\nabla_2, \mathcal{U}_2) \to (\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ равномерно непрерывно, т. е. φ — изоморфизм равномерных пространств $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ и $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$. ■

Мы уже отмечали, что любая логика $(\nabla, \mathcal{U})$ с равномерностью $\mathcal{U}$, согласованной с порядком, являющаяся полным равномерным пространством, есть равномерная логика. Верно и обратное.

Предложение 1. Если $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика, то $(\nabla, \mathcal{U})$ является полным равномерным пространством.

Доказательство. Обозначим через $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ пополнение

$(\nabla, \mathcal{U})$ по равномерности $\mathcal{U}$ и пусть $\hat{\tau}$ — топология в $\hat{\nabla}$, порожденная $\hat{\mathcal{U}}$. В силу теоремы 1 из § 6, $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ есть равномерная логика, при этом ∇ — правильная подлогика в $\hat{\nabla}$, так как если $\{a_\alpha\} \subset \nabla$ и $a_\alpha \uparrow a$ в ∇, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} a$, где τ — R-топология в ∇, и потому $a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$, т. е. a совпадает с точной верхней гранью для сети $\{a_\alpha\}$ в $\hat{\nabla}$. Если логика ∇ имеет счетный тип, то равномерность $\mathcal{U}$ метризуема (теорема 2). Следовательно, равномерность $\hat{\mathcal{U}}$ также метризуема и потому $\hat{\nabla}$ имеет счетный тип. В этом случае R-топология $\hat{\tau}$ совпадает с (o)-топологией (п. 1) теоремы 1), причем если $a_n \xrightarrow{\hat{\tau}} a$, a_n, $a \in \hat{\nabla}$, то существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, которая (o)-сходится к элементу a (см. доказательство п. 1) теоремы 1). Пусть $a \in \hat{\nabla}$, тогда найдется последовательность $\{a_n\} \subset \nabla$, которая сходится к a в топологии $\hat{\tau}$. Выберем подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ из $\{a_n\}$, (o)-сходящуюся к a. Положим $c_k = \bigvee\limits_{i=k}^{\infty} a_{n_i}$, тогда $c_k \downarrow a$, но ∇ — правильная подлогика в $\hat{\nabla}$, следовательно, $c_{k_i} \in \nabla$ и $a \in \nabla$. Поэтому $\nabla = \hat{\nabla}$, т. е. в случае, когда ∇ — логика счетного типа, равномерное пространство $(\nabla, \mathcal{U})$ полное. Пусть ∇ не является логикой счетного типа. В силу п. 2) теоремы 1 в ∇ существует возрастающая к единице сеть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ элементов счетного типа. Положим $\nabla_\alpha = \{a \in \nabla : a \leqslant a_\alpha\}$, $\hat{\nabla}_\alpha = \{a \in \hat{\nabla} : a \leqslant a_\alpha\}$ и обозначим через $\hat{\mathcal{U}}_\alpha$ равномерность в $\hat{\nabla}_\alpha$, индуцируемую равномерностью $\hat{\mathcal{U}}$. Так как $\hat{\nabla}_\alpha$ — замкнутое подмножество в $(\hat{\nabla}, \hat{\tau})$ (следствие 2 к предложению 1 из § 6), то $(\hat{\nabla}_\alpha, \hat{\mathcal{U}}_\alpha)$ — полное равномерное пространство. Пусть $a \in \hat{\nabla}_\alpha$ и $\{b_i\}_{i \in I}$ — сеть из ∇, для которой $b_i \xrightarrow{\hat{\tau}} a$. Тогда $b_i \wedge a_\alpha \in \nabla_\alpha$ и $b_i \wedge a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a \wedge a_\alpha = a$. Следовательно, $\overline{\nabla}_\alpha = \hat{\nabla}_\alpha$, $\alpha \in A$. Равномерность $\hat{\mathcal{U}}_\alpha$ индуцирует на ∇_α ту же равномерность $\mathcal{U}_\alpha$ что и равномерность $\mathcal{U}$, но $(\nabla_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ — равномерная логика счетного типа. Следовательно, $(\nabla_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ — полное равномерное пространство и потому ∇_α — замкнутое подмножество в $\hat{\nabla}_\alpha$. Таким образом, $\nabla_\alpha = \hat{\nabla}_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Пусть a — произвольный элемент из $\hat{\nabla}$. Положим $b_\alpha = a \wedge a_\alpha$, тогда $b_\alpha \in \nabla_\alpha$ и $b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$, но $\{b_\alpha\}$ — возрастающая сеть, следовательно, $a = \bigvee_{\alpha \in A} b_\alpha$. Так как ∇ — правильная подлогика в $\hat{\nabla}$, то $a \in \nabla$. Поэтому $\nabla = \hat{\nabla}$, т. е. $(\nabla, \mathcal{U})$ является полным равномерным пространством. ■

Заметим, что если ∇ — полная логика и $\mathcal{U}$ — равномерность на ∇, согласованная с порядком, то $(\nabla, \mathcal{U})$, вообще говоря, не является полным равномерным пространством. Так, в примере, рассмотренном перед теоремой 3, полная булева алгебра ∇ не будет полным равномерным пространством относительно равномерности $\mathcal{U}_1$ (в противном случае в силу следствия к теореме 1 из § 6 и теоремы 3 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, что не так).

Укажем теперь связь между существованием R-равномерности на полной логике ∇ и существованием (o)-непрерывных внешних R-оценок на ∇.

Теорема 4. Если на полной логике ∇ существует разделяющее семейство (o)-непрерывных внешних R-оценок, то на ∇ можно задать R-равномерность. Наоборот, если $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика, то на ∇ существует разделяющее семейство (o)-непрерывных внешних R-оценок.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — разделяющее семейство (o)-непрерывных внешних R-оценок на ∇ и $\mathcal{U}$ — равномерность на ∇, порожденная семейством квазиметрик $\{\rho_m\}_{m \in \mathcal{M}}$, где $\rho_m(a, b) = m(a \Delta b)$, $a, b \in \nabla$. Тогда в силу предложения 3 из § 6 равномерность $\mathcal{U}$ отделима и удовлетворяет условиям $R1$) и $R2$). Базу окружений равномерности $\mathcal{U}$ образуют множества вида $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(m_i, \varepsilon_i)$, где $W(m_i, \varepsilon_i) = \{(a, b) \in \nabla \times \nabla : \rho_{m_i}(a, b) < \varepsilon_i\}$, $m_i \in \mathcal{M}$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Если $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — убывающая сеть элементов из ∇ и $a = \bigwedge_{\alpha \in A} a_\alpha$, то $m(a_\alpha \Delta a) \to 0$ для всех $\alpha \in A$. Поэтому для каждого окружения $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(m_i, \varepsilon_i)$ существует такое $\alpha_0 \in A$, что $(a_\alpha, a) \in W$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Следовательно, $\{a_\alpha\}$ сходится к элементу a в топологии, порожденной равномерностью $\mathcal{U}$, т. е. $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R3′). Поэтому $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика.

Наоборот, пусть на полной логике ∇ задана R-равномерность $\mathcal{U}$ и τ — топология, порожденная $\mathcal{U}$. Для произвольного ненулевого элемента $a_0 \in \nabla$ построим последовательность $\{W_n\}$ симметричных окружений из $\mathcal{U}$ и последовательность $\{U_n\}$ заполненных окрестностей нуля в (∇, τ) так, чтобы $a_0 \bar{\in} W_1[0]$ и

а) $W_{n+1} \vee W_{n+1} \subset W_n$;

б) если $(a, b) \in W_{n+1}$, $(0, c\Delta d) \in W_{n+1}$, то $(0, a\Delta b) \in W_n$, $(c, d) \in W_n$;

в) $U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n$;

г) $U_{n+1} \subset W_{n+1}[0] \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$

(такое построение возможно в силу условия R2) п. 4) предложения 1 и следствия 1 к предложению 1 из § 6). Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 из § 5, можно построить такую внешнюю оценку m на логике ∇, что

$$U_{n+1} \subset \left\{ a \in \nabla : m(a) < \frac{1}{2^n} \right\} \subset U_n$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Если $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $a_\alpha \downarrow 0$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ и потому $a_\alpha \in U_n$ при $\alpha \geqslant \alpha(n)$ для некоторого $\alpha(n) \in A$. Следовательно, $m(a_\alpha) < \frac{1}{2^{n-1}}$ при $\alpha \geqslant \alpha(n)$, т. е. $m(a_\alpha) \to 0$. Таким образом, внешняя оценка m является (o)-непрерывной, при этом так как $a_0 \bar{\in} U_2$, то $m(a_0) \neq 0$. Покажем теперь, что m — внешняя R-оценка. Пусть $m(a_\alpha \triangle b_\alpha) \to 0$ и $m(c_\alpha \triangle d_\alpha) \to 0$, $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ — элементы из ∇, $\alpha \in A$. Тогда для любой окрестности U_n существует такое $\alpha(n) \in A$, что $(a_\alpha \triangle b_\alpha) \in U_n \subset W_n[0]$ и $(c_\alpha \triangle d_\alpha) \in U_n \subset W_n[0]$ при $\alpha \geqslant \alpha(n)$. Следовательно, $(a_\alpha, b_\alpha) \in W_{n-1}$ и $(c_\alpha, d_\alpha) \in W_{n-1}$ и потому $(a_\alpha \vee c_\alpha, b_\alpha \vee d_\alpha) \in W_{n-2}$ при $\alpha \geqslant \alpha(n)$. Отсюда $\big(0, (a_\alpha \vee c_\alpha) \triangle (b_\alpha \vee d_\alpha)\big) \in W_{n-3}$ и $(a_\alpha \vee c_\alpha) \triangle (b_\alpha \vee d_\alpha) \in U_{n-4}$, т. е. $m\big((a_\alpha \vee c_\alpha) \triangle (b_\alpha \vee d_\alpha)\big) < \frac{1}{2^{n-5}}$ при $\alpha \geqslant \alpha(n)$.

Таким образом, $m(a_\alpha \vee c_\alpha) \triangle (b_\alpha \vee d_\alpha) \to 0$. Поэтому m — внешняя R-оценка на ∇. ■

Следствие 1. Если на полной логике ∇ существует разделяющее семейство (o)-непрерывных оценок, то на ∇ можно задать R-равномерность.

Для доказательства достаточно заметить, что каждая оценка является внешней R-оценкой (предложение 2 из § 6).

Следствие 2. Пусть $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика. Тогда каждая (o)-непрерывная внешняя R-оценка является равномерно непрерывной на $(\nabla, \mathcal{U})$.

Доказательство. Из теоремы 4 вытекает, что на ∇ существует разделяющее семейство $\mathcal{M}$ (o)-непрерывных внешних R-оценок. Пусть μ-произвольная (o)-непрерывная внешняя R-оценка на ∇. Семейство $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cup \{\mu\}$, очевидно, тоже разделяющее. Это семейство определяет на ∇ R-равномерность (теорема 4), которая в силу единственности R-равномерности совпадает с $\mathcal{U}$. Поэтому множества $W(\mu, \varepsilon) = \{(a, b) \in \nabla \times \nabla :$ $: \mu(a \triangle b) < \varepsilon\}$ являются окружениями из $\mathcal{U}$. Следовательно, μ равномерно непрерывно на $(\nabla, \mathcal{U})$. ■

Следствие 3. Для полной логики ∇ следующие условия эквивалентны:

1) ∇ — равномерная логика счетного типа;

2) на ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная внешняя R-оценка.

Доказательство. Импликация 2) $\to$ 1) непосредственно следует из теоремы 4. Наоборот, если $(\nabla, \mathcal{U})$ — равномерная логика счетного типа, то равномерность $\mathcal{U}$ метризуема (теорема 2) и поэтому при доказательстве теоремы 4 последовательность заполненных окрестностей нуля в (∇, τ) можно выбрать так, что, кроме условий в) и г), для них будет выполняться равенство $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, но тогда (o)-непрерывная внешняя R-оценка m, построенная по последовательности $\{U_n\}$, будет строго положительной. ■

Следствие 4. Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность на логике ∇, согласованная с ее порядком. Тогда существует такой базис $v \subset \mathcal{U}$ симметричных окружений, что для любого $W \in v$ пара $(a, b) \in W$ в том и только в том случае, когда $(0, a \triangle b) \in W$.

Доказательство. Обозначим через $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ пополнение ∇ относительно равномерности $\mathcal{U}$. Пара $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$ есть равномерная логика, и потому на ней существует разделяющее семейство $\mathcal{M}$ (o)-непрерывных внешних R-оценок. Обозначим через $\mathcal{U}_1$ равномерность на $\hat{\nabla}$, порожденную этим семейством $\mathcal{M}$. Базу симметричных окружений в $\mathcal{U}_1$ образуют множества вида $W =$ $= \bigcap\limits_{i=1}^{n} W(m_i, \varepsilon_i)$, где $W(m_i, \varepsilon_i) = \left\{(a, b) \in \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} : m_i(a \triangle b) < \varepsilon_i\right\}$, $m_i \in \mathcal{M}$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (предложение 3 из § 6), при этом $\mathcal{U}_1$ является R-равномерностью на полной логике $\hat{\nabla}$ (см. доказательство теоремы 4). В силу единственности R-равномерности $\mathcal{U}_1 = \hat{\mathcal{U}}$ и потому $\mathcal{U}_1$ индуцирует на ∇ равномерность $\mathcal{U}$. Следовательно, $\mathcal{U}$ имеет базу окружений, состоящую из множеств вида $W \cap (\nabla \times \nabla)$, где $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(m_i, \varepsilon_i)$, $m_i \in \mathcal{M}$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Но $(a, b) \in W(m_i, \varepsilon_i)$ тогда и только тогда, когда $(0, a \Delta b) \in$ $\in W(m_i, \varepsilon)$. Поэтому $\mathcal{U}$ имеет базу окружений с указанным в следствии 4 свойством. ■

Из следствия 1, в частности, вытекает, что на любой полной логике со строго положительной (o)-непрерывной оценкой существует R-равномерность. Так, на логике всех подпространств конечномерного гильбертова пространства размерность подпространств является строго положительной (o)-непрерывной оценкой и потому на ∇ можно задать R-равномерность. Нетрудно видеть, что эта равномерность на ∇ будет дискретной. Однако следует отметить, что полная логика ∇ всех замкнутых подпространств бесконечномерного гильбертова пространства H не является равномерной (в частности, на ней не существует разделяющего семейства (o)-непрерывных оценок). Действительно, пусть $\{\xi_i\}_{i \in I}$ — полная ортонормированная система векторов в H. Для каждого конечного подмножества $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$ обозначим через a_α конечномерное подпространство в H, порожденное векторами $\xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_n}$. Множество $A = \{\alpha\}$ всех конечных подмножеств из I образует направление при введении частичного порядка по включению, так что $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — возрастающая сеть элементов из ∇, причем $\bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha = 1$. Обозначим через X объединение всех подпространств a_α, $\alpha \in A$. Тогда X — линейное подпространство в H и так как H бесконечномерно, то $X \neq H$. Пусть ξ — произвольный вектор из $H \setminus X$ и a — одномерное пространство, порожденное ξ. Очевидно, что $a \cap X = \{0\}$, поэтому $a \wedge a_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in A$. Если на ∇ существует R-равномерность $\mathcal{U}$, то $a_\alpha \xrightarrow{\tau} 1$, где τ — топология, порожденная $\mathcal{U}$. Следовательно,

$$0 = a \wedge a_\alpha \xrightarrow{\tau} a \neq 0,$$

что невозможно. Таким образом, ∇ не является равномерной логикой.

Важный класс равномерных логик образуют логики всех проекторов конечных алгебр фон Неймана (см. гл. IV).

В заключение параграфа укажем условие, позволяющее продолжать внешнюю R-оценку до (o)-непрерывной внешней R-оценки, заданной на полной логике.

Теорема 5 (о продолжении). Пусть $\mathcal{M}$ — разделяющее семейство внешних R-оценок на логике ∇. Если для любой последовательности $\{a_n\} \subset \nabla$ попарно ортогональных элементов $m(a_n) \to 0$ для всех $m \in \mathcal{M}$, то существует единственная с точностью до изоморфизма равномерная логика $(\hat{\bigtriangledown}, \hat{\mathcal{U}})$, такая, что $\bigtriangledown$ является всюду плотной подлогикой в $\hat{\bigtriangledown}$ и каждая $m \in \mathcal{M}$ продолжается до (o)-непрерывной внешней R-оценки $\hat{m}$ на $\hat{\bigtriangledown}$, причем $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{m} : m \in \mathcal{M}\}$ — разделяющее семейство на $\hat{\bigtriangledown}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — равномерность на $\bigtriangledown$, порожденная семейством $\mathcal{M}$ (см. предложение 3 из §6). Эта равномерность отделима и удовлетворяет условиям R 1) и R 2). Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве следствия 1 к предложению 3 из § 6, получаем, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R 3), т. е. $\mathcal{U}$ согласована с порядком $\bigtriangledown$. Так как каждое множество $W(m, \varepsilon) = \{(a, b) \in \bigtriangledown \times \bigtriangledown : m(a\Delta b) < \varepsilon\}$, $m \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$, является окружением из $\mathcal{U}$, то любая внешняя R-оценка $m \in \mathcal{M}$ равномерно непрерывна на $(\bigtriangledown, \mathcal{U})$. Следовательно, m продолжается до равномерно непрерывной функции $\hat{m}$ на пополнение $(\hat{\bigtriangledown}, \hat{\mathcal{U}})$ логики $\bigtriangledown$ относительно равномерности $\mathcal{U}$. Логика $(\hat{\bigtriangledown}, \hat{\mathcal{U}})$ является равномерной логикой, причем $\bigtriangledown$ — всюду плотная подлогика в $(\hat{\bigtriangledown}, \hat{\tau})$, где $\hat{\tau}$ — R-топология, порожденная $\hat{\mathcal{U}}$. Покажем, что $\hat{m}$ — (o)-непрерывная внешняя R-оценка на $\bigtriangledown$. Очевидно, что $\hat{m}(a) \geqslant 0$ для всех $a \in \hat{\bigtriangledown}$ и $\hat{m}(0) = 0$. Если $a \leqslant b$, $a, b \in \hat{\bigtriangledown}$ и $\{a_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$ — такие сети из $\bigtriangledown$, что $a_\alpha \leqslant b_\alpha$ и $a_\alpha \xrightarrow{\tau} a$, $b_\alpha \xrightarrow{\tau} b$, то $\hat{m}(a_\alpha) = m(a_\alpha) \leqslant m(b_\alpha) = \hat{m}(b_\alpha)$ и $\hat{m}(a_\alpha) \to \hat{m}(a)$, $\hat{m}(b_\alpha) \to \hat{m}(b)$, т. е. $\hat{m}(a) \leqslant \hat{m}(b)$. Аналогично $\hat{m}(a \vee b) \leqslant \hat{m}(a) + \hat{m}(b)$ для всех $a, b \in \hat{\bigtriangledown}$. Если $\{a_\alpha\} \subset \hat{\bigtriangledown}$ и $a_\alpha \downarrow 0$, то $a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} 0$ и потому $\hat{m}(a_\alpha) \to 0$. Следовательно, $\hat{m}$ — (o)-непрерывная внешняя оценка на $\hat{\bigtriangledown}$. Покажем, что $\hat{m}$ — внешняя R-оценка. Пусть $(a_\alpha, b_\alpha) \subset W(m, \varepsilon)$ для всех $\alpha \in A$ и $a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$, $b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} b$. Тогда $\hat{m}(a_\alpha \Delta b_\alpha) < \varepsilon$ и $a_\alpha \Delta b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a\Delta b$. Поэтому $\hat{m}(a\Delta b) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, множество $\hat{W}(\hat{m}, \varepsilon) = \{(a, b) \in \hat{\bigtriangledown} \times \hat{\bigtriangledown} : \hat{m}(a\Delta b) \leqslant \varepsilon\}$ содержит замыкание множества $W(m, \varepsilon)$ в тихоновской топологии в $(\hat{\bigtriangledown}, \hat{\tau}) \times (\hat{\bigtriangledown}, \hat{\tau})$ и потому $\hat{W}(\hat{m}, \varepsilon)$ является окружением в $\hat{\mathcal{U}}$. Кроме того, если $(a, b) \subset$

$\subset \hat{W}\left(\hat{m}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — такие сети из ∇, что $a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a$, $b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} b$, то $m(a_\alpha \Delta b_\alpha) < \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Следовательно, $\hat{W}\left(\hat{m}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \overline{W}(m, \varepsilon) \subset \hat{W}(\hat{m}, \varepsilon)$. Так как m — внешняя R-оценка, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$W(m, \delta) \vee W(m, \delta) \subset W(m, \varepsilon)$$

(в противном случае для любого натурального n существуют пары $(a_n, b_n) \in W\left(m, \frac{1}{n}\right)$, $(c_n, d_n) \in W\left(m, \frac{1}{n}\right)$, для которых $(a_n \vee c_n, b_n \vee d_n) \overline{\in} W(m, \varepsilon)$, т. е. из $m(a_n \Delta b_n) \to 0$, $m(c_n \Delta d_n) \to 0$ следует $m((a_n \vee c_n) \Delta (b_n \vee d_n)) \geqslant \varepsilon$, что невозможно). Пусть $(a, b) \in W\left(\hat{m}, \frac{\delta}{2}\right)$, $(c, d) \in \hat{W}\left(m, \frac{\delta}{2}\right)$ и $\{a_\alpha, b_\alpha\}$, $\{c_\alpha, d_\alpha\}$ — такие сети из $W(m, \delta)$, что

$$a_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a, \quad b_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} b, \quad c_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} c, \quad d_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} d.$$

Тогда $(a_\alpha \vee c_\alpha, b_\alpha \vee d_\alpha) \in W(m, \varepsilon)$ и

$$a_\alpha \vee c_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} a \vee c, \quad b_\alpha \vee d_\alpha \xrightarrow{\hat{\tau}} b \vee d,$$

отсюда $(a \vee b, c \vee d) \in \overline{W}(m, \varepsilon) \subset \hat{W}(\hat{m}, \varepsilon)$. Поэтому

$$\hat{W}\left(\hat{m}, \frac{\delta}{2}\right) \vee \hat{W}\left(\hat{m}, \frac{\delta}{2}\right) \subset \hat{W}(\hat{m}, \varepsilon).$$

Из этого соотношения сразу следует, что m — внешняя R-оценка на ∇. Заметим также, что если $a \in \hat{\nabla}$ и $\hat{m}(a) = 0$ для всех $\hat{m} \in \mathcal{M}$, то $m(a_\alpha) \to 0$ для всех $m \in \mathcal{M}$ и сети $\{a_\alpha\} \subset \nabla$, сходящейся к a в топологии $\hat{\tau}$. Тогда $a_\alpha \sim 0$ и потому $a = 0$. Таким образом, $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{m} : m \in \mathcal{M}\}$ — разделяющее семейство (o)-непрерывных внешних R-оценок на ∇.

Покажем теперь, что равномерная логика $(\hat{\nabla}, \hat{\mathcal{U}})$, определяемая условиями теоремы 5, единственная с точностью до изоморфизма. Пусть $(\hat{\nabla}_1, \hat{\mathcal{U}}_1)$ — другая равномерная логика, содержащая всюду плотную подлогику, изоморфную ∇, для которой каждая $m \in \mathcal{M}$ продолжается до (o)-непрерывной внешней R-оценки $\hat{m}$ на $\hat{\nabla}_1$, причем семейство $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{m} : m \in \mathcal{M}\}$, разделяющее на $\hat{\nabla}_1$. Семейство $\hat{\mathcal{M}}$ определяет на $\hat{\nabla}_1$ R-равномерность, совпадающую с $\hat{\mathcal{U}}_1$ (теоремы 3 и 4). Поэтому базу окружений в $\hat{\mathcal{U}}_1$ образуют множества вида $W=\bigcap_{i=1}^{n} W\left(\hat{m}_i,\ \varepsilon_i\right)$, где $W\left(\hat{m}_i,\ \varepsilon_i\right)=$ $=\left\{(a,\ b)\in\hat{\nabla}_1\times\hat{\nabla}_1 : \hat{m}_i(a\Delta b)<\varepsilon_i\right\}$, $\hat{m}_i\in\hat{\mathcal{M}}$, $\varepsilon_i>0$, $i=1, \ldots, n$, но $W\left(\hat{m}_i,\ \varepsilon_i\right)\cap\nabla\times\nabla=W(m_i,\ \varepsilon_i)$. Следовательно, вложение $(\nabla,\mathcal{U})\subset\left(\hat{\nabla}_1,\ \hat{\mathcal{U}}_1\right)$ является изоморфизмом равномерного пространства $(\nabla,\ \mathcal{U})$ в равномерное пространство $\left(\hat{\nabla}_1,\ \hat{\mathcal{U}}_1\right)$. В силу единственности пополнения равномерных пространств получим, что $\left(\hat{\nabla},\ \hat{\mathcal{U}}\right)$ и $\left(\hat{\nabla}_1,\ \hat{\mathcal{U}}_1\right)$ изоморфны, при этом изоморфизм равномерных пространств $\left(\hat{\nabla},\ \hat{\mathcal{U}}\right)$ и $\left(\hat{\nabla}_1,\ \hat{\mathcal{U}}_1\right)$ можно выбрать так, чтобы он являлся изоморфизмом логик $\hat{\nabla}$ и $\hat{\nabla}_1$. ■

Следствие. Пусть m — строго положительная оценка на логике ∇. Тогда существуют единственная с точностью до изоморфизма равномерная логика $\left(\hat{\nabla},\ \hat{\mathcal{U}}\right)$ и (o)-непрерывная строго положительная оценка $\hat{m}$ на $\hat{\nabla}$, такие, что $\hat{\nabla}$ содержит всюду плотную в (o)-топологии подлогику, изоморфную ∇, и $\hat{m}$ является продолжением m.

Библиография: [9, 51, 79, 92, 109, 147].

§ 8. Гомоморфизмы равномерных логик

В этом параграфе дается критерий для равномерной непрерывности гомоморфизмов равномерных логик. Рассматриваются также прямые произведения и правильные подлогики равномерных логик.

Пусть ∇ — произвольная логика и ∇_1 — подлогика в ∇. Очевидно, что любая равномерность, заданная на ∇ и согласованная с порядком ∇, индуцирует на ∇_1 равномерность, которая также согласована с порядком ∇_1.

Предложение 1. Пусть ∇_1 — подлогика равномерной логики $(\nabla,\ \mathcal{U})$. Следующие условия эквивалентны:

1) ∇_1 — правильная подлогика;
2) ∇_1 замкнуто в (o)-топологии;
3) ∇_1 замкнуто в R-топологии;
4) ∇_1 с индуцированной из $(\nabla,\mathcal{U})$ равномерностью является равномерной логикой.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) получена в п. в) предложения 1 из § 4. Для доказательства импликации 1) $\longrightarrow$ 4) достаточно заметить, что правильная подлогика ∇_1 в $(\nabla, \mathcal{U})$ является полной логикой, и если $\{a_\alpha\} \subset \nabla_1$, $a \in \nabla_1$, $a_\alpha \downarrow a$ в ∇_1, то $a_\alpha \downarrow a$ в ∇ и потому $\{a_\alpha\}$ сходится к a в топологии, порожденной равномерностью, индуцированной из $(\nabla, \mathcal{U})$ на ∇_1. Докажем импликацию 4) $\to$ 3). Пусть $\mathcal{U}_1$ — равномерность на ∇_1, индуцированная из $(\nabla, \mathcal{U})$. Тогда по условию 4) $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ — равномерная логика. Следовательно, $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ — полное равномерное пространство (предложение 1 из § 7) и потому ∇_1 — замкнутое подмножество в (∇, τ), где τ — R-топология в ∇. Импликация 3) $\to$ 2) очевидна, так как R-топология τ мажорируется (o)-топологией $\tau_0(\nabla)$. ■

Выясним теперь условия, при которых гомоморфизм равномерных логик равномерно непрерывен. Напомним, что отображение φ из логики ∇_1 в логику ∇_2 называется гомоморфизмом, если

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b) \text{ и } \varphi(a^\perp) = (\varphi(a))^\perp$$

для всех $a, b \in \nabla_1$; в частности, для каждого гомоморфизма $\varphi: \nabla_1 \to \nabla_2$:

$$\varphi(1) = 1, \ \varphi(0) = 0, \ \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b).$$

Следовательно, образ $\varphi(\nabla_1)$ любого гомоморфизма $\varphi: \nabla_1 \to \nabla_2$ есть подлогика в ∇_2.

Предложение 2. Пусть ∇_1, ∇_2 — произвольные полные логики, $\varphi: \nabla_1 \to \nabla_2$ — гомоморфизм и $N(\varphi) = \{a \in \nabla_1 : \varphi(a) = 0\}$ — ядро φ. Если $\varphi(\vee N(\varphi)) = 0$, то элемент $\vee N(\varphi)$ принадлежит центру $Z(\nabla_1)$ логики ∇_1.

Доказательство. Пусть $a_0 = \vee N(\varphi)$ и $\varphi(a_0) = 0$. Тогда, очевидно, $N(\varphi) = [0, a_0]$. Покажем, что $b \leftrightarrow a_0$ для всех $b \in \nabla_1$. Если $b \leqslant a_0$, то, очевидно, что $b \leftrightarrow a_0$. Пусть $b \overline{\in} N(\varphi)$, т. е. $\varphi(b) \neq 0$. Положим $c = b \wedge a_0$, $b_1 = b - c$ и $b_2 = b_1 - b_1 \wedge a_0^\perp$. Тогда $\varphi(b_2) \perp \varphi(b_1 \wedge a_0^\perp)$ и $\varphi(b_1) = \varphi(b_2) \vee \varphi(b_1 \wedge a_0^\perp)$, но

$$\varphi(b_1 \wedge a_0^\perp) = \varphi(b_1) \wedge \varphi(a_0^\perp) = \varphi(b_1) \wedge (\varphi(a_0) \vee \varphi(a_0^\perp)) =$$

$$= \varphi(b_1) \wedge \varphi(1) = \varphi(b_1).$$

Следовательно, $\varphi(b_2) = 0$ и потому $b_2 \leqslant a_0$. Тогда $b_2 \leqslant b \wedge a_0 = c$ и так как $b_2 \leqslant b_1 \leqslant c^\perp$, то $b_2 = 0$, т. е. $b_1 = b_1 \wedge a_0^\perp$. Следовательно, $(b - c) \perp a_0$ и по свойству 6° логик получаем, что $b \leftrightarrow a_0$. ■

Следствие. Если центр полной логики ∇_1 состоит только из 0 и 1, $\varphi: \nabla_1 \to \nabla_2$ — гомоморфизм логик ∇_1 и ∇_2 и $\varphi(\vee N(\varphi)) = 0$, то φ — инъекция.

Доказательство. В силу предложения 2 $N(\varphi) = \{0\}$. Пусть $a, b \in \nabla_1$ и $a \neq b$, тогда $a \Delta b \neq 0$ и поэтому

$$\varphi(a)\Delta\varphi(b)=\varphi(a\Delta b)\neq 0.$$

Следовательно, $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. ■

Предложение 3. Пусть ∇_1 и ∇_2 — полные логики и $\varphi:\nabla_1\to\nabla_2$ — гомоморфизм, для которого $\varphi(\vee M)=\vee\varphi(M)$ для любого подмножества M попарно ортогональных элементов из ∇_1. Тогда $\varphi(\vee N(\varphi))=0$ и образ $\varphi(\nabla_1)$ является правильной подлогикой в ∇_2, при этом $\varphi(\vee M)=\vee\varphi(M)$ для любого подмножества $M\subset\nabla_1$.

Доказательство. Очевидно, что $a\vee b\in N(\varphi)$ для любых $a, b\in N(\varphi)$ и если $c\leqslant a$, $a\in N(\varphi)$, то $c\in N(\varphi)$. Кроме того, $\vee M\in N(\varphi)$ для любого множества M попарно ортогональных элементов из $N(\varphi)$. Повторяя дословно доказательство теоремы 1 из § 2, получаем, что $\vee M\in N(\varphi)$ для любого подмножества $M\subset N(\varphi)$, в частности, $(\vee N(\varphi))\in N(\varphi)$, т. е. $\varphi(\vee N(\varphi))=0$. В силу предложения 2 элемент $a_0=\vee N(\varphi)$ принадлежит центру $Z(\nabla_1)$ логики ∇_1 и поэтому

$$\varphi(b)=\varphi\left(b\wedge a_0^{\perp}\right)$$

для всех $b\in\nabla_1$. Следовательно, для любого элемента $d\in\varphi(\nabla_1)$ существует единственный элемент $b\in\left[0, a_0^{\perp}\right]$, такой, что $\varphi(b)=d$ (так как если $\varphi(b_1)=d$ и $b_1\in\left[0, a_0^{\perp}\right]$, то $\varphi(b\Delta b_1)=0$ и $(b\Delta b_1)\in\left[0, a_0^{\perp}\right]\cap N(\varphi)$, т. е. $b\Delta b_1=0$, откуда $b=b_1$). Пусть d_1, $d_2\in\varphi(\nabla_1)$, $d_1\leqslant d_2$ и b_1, b_2 — такие элементы из $\left[0, a_0^{\perp}\right]$, для которых $\varphi(b_1)=d_1$, $\varphi(b_2)=d_2$. Отображение $\varphi:\left[0, a_0^{\perp}\right]\to\nabla_2$ является инъекцией, поэтому, если $b_1\wedge b_2<b_1$ то

$$d_1=d_1\wedge d_2=\varphi(b_1)\wedge\varphi(b_2)=\varphi(b_1\wedge b_2)<\varphi(b_1)=d_1.$$

Из этого противоречия следует, что $b_1\leqslant b_2$. Пусть теперь $d_1, d_2\in\varphi(\nabla_1)$, $d_1\perp d_2$ и b_1, $b_2\in\left[0, a_0^{\perp}\right]$, для которых $\varphi(b_1)=d_1$, $\varphi(b_2)=d_2$. Тогда $d_1\leqslant d_2^{\perp}$ и $\varphi\left(b_2^{\perp}\wedge a_0^{\perp}\right)=d_2^{\perp}$, отсюда $b_1\leqslant b_2^{\perp}\wedge a_0^{\perp}$, т. е. $b_1\perp b_2$. Поэтому для любого множества D попарно ортогональных элементов из $\varphi(\nabla_1)$ существует множество M попарно ортогональных элементов из $\left[0, a_0^{\perp}\right]$, для которого $\varphi(M)=D$. Следовательно,

$$\vee D=\vee\varphi(M)=\varphi(\vee M)\in\varphi(\nabla_1).$$

Так как $\varphi(\nabla_1)$ — подлогика в ∇_2, то, опять повторяя доказательство теоремы 1 из § 2, получаем, что $\vee K\in\varphi(\nabla_1)$ для любого подмножества $K\subset\varphi(\nabla_1)$. Поэтому $\varphi(\nabla_1)$ — правильная подлогика в ∇_2. Пусть теперь M — произвольное подмножество из ∇_1 и $M_0=\left\{a\wedge a_0^{\perp}: a\in M\right\}$, $b_0=\vee M_0$. Тогда $\varphi(M)=\varphi(M_0)$

и $\varphi(b) \leqslant \varphi(b_0)$ для всех $b \in M_0$. Если $d_1 = \vee \varphi(M)$, то $d_1 \in \varphi(\nabla_1)$ и $d_1 \leqslant \varphi(b_0)$. Обозначим через b_1 элемент из $[0, a_0^{\perp}]$, для которого $\varphi(b_1) = d_1$. Тогда $b_1 \leqslant b_0$ и $b \leqslant b_1$ для всех $b \in M_0$. Следовательно, $b_1 = b_0$, т. е. $\varphi(\vee M) = \vee \varphi(M)$. ■

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для равномерной непрерывности гомоморфизмов равномерных логик.

Теорема 1. Пусть $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$, $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ — равномерные логики, τ_1, τ_2 — R-топологии в ∇_1 и ∇_2 соответственно и $\varphi: (\nabla_1, \mathcal{U}_1) \to (\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ — гомоморфизм. Следующие условия эквивалентны:

1) φ равномерно непрерывно;

2) φ непрерывно относительно R-топологий τ_1 и τ_2;

3) φ непрерывно относительно (o)-топологий $\tau_0(\nabla_1)$ и $\tau_0(\nabla_2)$;

4) график φ замкнут в $(\nabla_1, \tau_1) \times (\nabla_2, \tau_2)$;

5) график φ замкнут в $(\nabla_1, \tau_0(\nabla_1)) \times (\nabla_2, \tau_0(\nabla_2))$;

6) $N(\varphi)$ и $\varphi(\nabla_1)$ замкнуты в (∇_1, τ_1) и (∇_2, τ_2) соответственно;

7) $N(\varphi)$ и $\varphi(\nabla_1)$ замкнуты в $(\nabla_1, \tau_0(\nabla_1))$ и $(\nabla_2, \tau_0(\nabla_2))$ соответственно;

8) $\varphi(\vee M) = \vee \varphi(M)$ для любого подмножества M попарно ортогональных элементов из ∇_1.

Доказательство. Импликации $1) \to 2) \to 4) \to 5)$, $3) \to 5)$, $6) \to 7)$ очевидны. Докажем импликацию $2) \to 8)$. Пусть M — произвольное подмножество попарно ортогональных элементов из ∇_1 и A — совокупность всех конечных подмножеств $\alpha \subset M$. Очевидно, что A — направление относительно частичного порядка: $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha \subset \beta$. Для каждого $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ положим $b_\alpha = \bigvee_{a_i \in \alpha} a_i$, тогда $b_\alpha \uparrow \vee M$ и $\varphi(b_\alpha) = \bigvee_{a_i \in \alpha} \varphi(a_i)$. Отсюда $b_\alpha \xrightarrow{\tau_1} \vee M$ и потому $\varphi(b_\alpha) \xrightarrow{\tau_2} \varphi(\vee M)$. Следовательно,

$$\varphi(\vee M) = \bigvee_{\alpha \in A} \varphi(b_\alpha) = \bigvee_{a \in M} \varphi(a) = \vee \varphi(M).$$

Аналогично доказывается импликация $3) \to 8)$. Покажем теперь, что из условия 8) следуют условия 1) и 3). Пусть $\varphi(\vee M) = \vee \varphi(M)$ для любого подмножества M попарно ортогональных элементов из ∇_1 и $a_0 = \vee N(\varphi)$. В силу предложения 3, $N(\varphi) = [0, a_0]$ и образ $\varphi(\nabla_1)$ является правильной подлогикой в ∇_2. Обозначим через $\mathcal{U}_3$ равномерность на $\varphi(\nabla_1)$, индуцируемую из $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$. Тогда $(\varphi(\nabla_1), \mathcal{U}_3)$ — равномерная логика (предложение 1). Из доказательства предложения 3 следует, что логики $[0, a_0^{\perp}]$ и $\varphi(\nabla_1)$ изоморфны. Поэтому равномерные пространства $([0, a_0^{\perp}], \mathcal{U}_4)$ и $(\varphi(\nabla_1), \mathcal{U}_3)$ также изоморфны, где $\mathcal{U}_4$ — R-равномерность на $[0, a_0^{\perp}]$, индуцируемая из $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ (см. следствие к теореме 3 из § 7). Таким образом, для любого окружения W из $\mathcal{U}_2$ существует такое окружение U из $\mathcal{U}_1$, что $(\varphi(a), \varphi(b)) \in W$, если $(a, b) \in U \cap \left(\left[0, a_0^{\perp}\right] \times \left[0, a_0^{\perp}\right]\right)$. Выберем окружение V из $\mathcal{U}$ так, чтобы $V \wedge V \subset U$. Тогда если $(c, d) \in V$, то $\left(c \wedge a_0^{\perp}, d \wedge a_0^{\perp}\right) \in U$ и потому $(\varphi(c), \varphi(d)) \in W$, так как $\varphi(c) = \varphi\left(c \wedge a_0^{\perp}\right)$ для любого $c \in \nabla_1$. Следовательно, отображение φ равномерно непрерывно. Далее в силу предложения 3 $\varphi(\vee M) = \vee \varphi(M)$ для любого подмножества $M \subset \nabla_1$. Поэтому если $a_\alpha \xrightarrow{(0)} a$, $a_\alpha, a \in \nabla_1$, то $\varphi(a_\alpha) \xrightarrow{(0)} \varphi(a)$ $\Big($действительно, $b_\alpha \leqslant a_\alpha \leqslant c_\alpha$, $b_\alpha \uparrow a$, $c_\alpha \downarrow a$, где $b_\alpha = \bigwedge\limits_{\beta \geqslant \alpha} a_\beta$, $c_\alpha = \bigvee\limits_{\beta \geqslant \alpha} a_\beta$, отсюда $\varphi(b_\alpha) \leqslant \varphi(a_\alpha) \leqslant \varphi(c_\alpha)$ и $\varphi(b_\alpha) \uparrow \varphi(a)$, $\varphi(c_\alpha) \downarrow \varphi(a)\Big)$. Пусть F — замкнутое подмножество в $(\nabla_2, \tau_0(\nabla_2))$ и $G = \varphi^{-1}(F)$. Если $\{a_\alpha\} \subset G$ и $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, то $\varphi(a_\alpha) \xrightarrow{(o)} \varphi(a)$, $\varphi(a_\alpha) \in F$. Поэтому $\varphi(a) \in F$ и $a \in G$, т. е. G замкнуто в (o)-топологии $\tau_0(\nabla_1)$. Следовательно, φ непрерывно относительно (o)-топологий $\tau_0(\nabla_1)$ и $\tau_0(\nabla_2)$.

Импликация 8)$\longrightarrow$6) непосредственно следует из предложений 1 и 3. Далее если $N(\varphi)$ и $\varphi(\nabla_1)$ замкнуты в $(\nabla_1, \tau_0(\nabla_1))$ и $(\nabla_2, \tau_0(\nabla_2))$ соответственно, то $N(\varphi) = [0, a_0]$, где $a_0 = \vee N(\varphi)$ и $\varphi(\nabla_1)$ — правильная подлогика в ∇_2 (предложение 3). Теперь, повторяя доказательство импликации 8) $\to$ 1), получаем, что из условия 7) следует условие 1). Для завершения доказательства осталось показать, что условие 5) влечет, например, условие 3). Пусть график $\Gamma = \{(a, b) \in \nabla_1 \times \nabla_2 : \varphi(a) = b\}$ отображения φ замкнут в $(\nabla_1, \tau_0(\nabla_1)) \times (\nabla_2, \tau_0(\nabla_2))$, $\{a_\alpha\} \subset \nabla_1$, $a \in \nabla_1$ и $a_\alpha \uparrow a$. Тогда $\varphi(a_\alpha)$ — возрастающая сеть в ∇_2. Положим $b = \bigvee\limits_{\alpha \in A} \varphi(a_\alpha)$. Очевидно, что

$$a_\alpha \xrightarrow{\tau_0(\nabla_1)} a \text{ и } \varphi(a_\alpha) \xrightarrow{\tau_0(\nabla_2)} b.$$

Так как Γ замкнуто и $(a_\alpha, \varphi(a_\alpha)) \in \Gamma$, то $(a, b) \in \Gamma$, т. е. $\varphi(a) = b$. Поэтому $\bigvee\limits_{\alpha \in A} \varphi(a_\alpha) = \varphi\left(\bigvee\limits_{\alpha \in A} a_\alpha\right)$ для любой сети $a_\alpha \uparrow a$. Отсюда сразу следует, что $\varphi(a_\alpha) \xrightarrow{(o)} \varphi(a)$, если только $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, $a_\alpha, a \in \nabla_1$. Тогда φ непрерывно относительно (o)-топологий $\tau_0(\nabla_1)$ и $\tau_0(\nabla_2)$. ∎

Следствие. Если непрерывный гомоморфизм φ равномерных логик $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$ и $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ является сюръекцией, то φ — открытое отображение.

Доказательство. Пусть $a_0 = \vee N(\varphi)$ и $\nabla_0 = \left[0, a_0^{\perp}\right]$, тогда $N(\varphi) = [0, a_0]$ и φ есть инъективный гомоморфизм логики ∇_0 в ∇_2. Так как $\varphi(\nabla_0) = \varphi(\nabla_1) = \nabla_2$, то логики ∇_0 и ∇_2 изоморфны. Обозначим через $\mathcal{U}_0$ R-равномерность в ∇_0, индуцируемую из $(\nabla_1, \mathcal{U}_1)$. В силу следствия к теореме 3 из §7 равномерные пространства $(\nabla_0, \mathcal{U}_0)$ и $(\nabla_2, \mathcal{U}_2)$ изоморфны. Поэтому для любой окрестности V_a элемента $a \in \nabla_0$ в топологии τ_0, порожденной равномерностью $\mathcal{U}_0$, множество $\varphi(V_a)$ является окрестностью элемента $\varphi(a)$ в топологии τ_2, порожденной равномерностью $\mathcal{U}_2$. Пусть $b \in \nabla_1$, W—произвольное окружение из $\mathcal{U}_1$ и U — такое симметричное окружение из $\mathcal{U}_1$, что $U \vee U \subset W$. Так как a_0—центральный элемент в ∇_1, то $b = (b \wedge a_0) \vee \left(b \wedge a_0^{\perp}\right)$. Следовательно, $U[b \wedge a_0] \vee U\left[b \wedge a_0^{\perp}\right] \subset W[b]$. Множество $V_0 = U\left[b \wedge a_0^{\perp}\right] \cap \nabla_0$ является окрестностью элемента $\left(b \wedge a_0^{\perp}\right)$ в (∇_0, τ_0). Поэтому из соотношений

$$\varphi(V_0) = \varphi(b \wedge a_0) \vee \varphi(V_0) \subset \varphi(W[b])$$

вытекает, что $\varphi(W[b])$ есть окрестность элемента $\varphi\left(b \wedge a_0^{\perp}\right) = \varphi(b)$ в (∇_2, τ_2). Следовательно, φ — открытое отображение. ∎

В заключение параграфа рассмотрим прямые произведения равномерных логик.

Предложение 4. Пусть $(\nabla_i, \mathcal{U}_i)$ — логика с равномерностью $\mathcal{U}_i$, согласованной с порядком, $i \in I$, и $(\nabla, \mathcal{U}) = \prod\limits_{i \in I} (\nabla_i, \mathcal{U}_i)$ — тихоновское произведение логик $(\nabla_i, \mathcal{U}_i)$. Тогда равномерность $\mathcal{U}$ согласована с порядком логики ∇. Если $(\nabla_i, \mathcal{U}_i)$ — равномерная логика для всех $i \in I$, то $(\nabla, \mathcal{U})$ — также равномерная логика.

Доказательство. Базу окружений равномерности $\mathcal{U}$ на $\nabla = \prod\limits_{\in I} \nabla_i$ образуют множества вида

$$W = \left(\prod_{k=1}^{n} W_{i_k}\right) \times \prod_{i \neq i_k} (\nabla_i \times \nabla_i),$$

где $W_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$, i_k, $i \in I$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Выберем $V_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$ так, чтобы $V_{i_k} \vee V_{i_k} \subset W_{i_k}$, $V_{i_k}^{\perp} = \left\{(a^{\perp}, b^{\perp}) : (a, b) \in V_{i_k}\right\} \subset W_{i_k}$, и положим $V = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} V_{i_k}\right) \times \prod\limits_{i \neq i_k} (\nabla_i \times \nabla_i)$. Тогда $V \in \mathcal{U}$ и так как частичный порядок и ортодополнение в $\nabla = \prod\limits_{i \in I} \nabla_i$ покоординатные (см. предложение 1 из §3), то $V \vee V \subset W$ и $V^{\perp} \subset W$. Следовательно, $\mathcal{U}$ — отделимая равномерность на ∇, для которой выполнены условия R1) и R2). Если $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ — убывающая сеть, то $\varphi_\alpha(i)$ убывает в ∇_i для каждого фиксированного $i \in I$ и потому $\{\varphi_\alpha(i)\}_{\alpha \in A}$ — фундаментальная сеть в $(\nabla_i, \mathscr{U}_i)$, но тогда сеть $\{\varphi_\alpha\}$ фундаментальна в $(\nabla, \mathscr{U})$. Следовательно, $\mathscr{U}$ удовлетворяет условию R3) и равномерность $\mathscr{U}$ согласована с порядком логики ∇. Аналогично устанавливается, что если каждая равномерность $\mathscr{U}_i$, $i \in I$, удовлетворяет условию R3'), то и равномерность $\mathscr{U}$ удовлетворяет условию R3'). Поэтому произведение $(\nabla, \mathscr{U}) = \prod_{i \in I} (\nabla_i, \mathscr{U}_i)$ равномерных логик $(\nabla_i, \mathscr{U}_i)$, $i \in I$, также является равномерной логикой. ∎

Следствие. Пусть $(\nabla, \mathscr{U})$ — равномерная логика, $Z(\nabla)$ — центр в ∇ и M — произвольное множество ненулевых попарно ортогональных элементов из $Z(\nabla)$. Обозначим через $\mathscr{U}_m$ R-равномерность на логике $\nabla_m = [0, m]$, $m \in M$, индуцируемую из $(\nabla, \mathscr{U})$, Тогда $(\nabla, \mathscr{U})$ изоморфно тихоновскому произведению $\prod_{m \in M} (\nabla_m, \mathscr{U}_m)$.

Доказательство. В силу предложения 4 из §3 логика ∇ изоморфна прямому произведению $\nabla_0 = \prod_{m \in M} \nabla_m$ логик ∇_m. Пусть $\mathscr{U}_0$ — произведение R-равномерностей $\mathscr{U}_m$ на ∇_0. Тогда из предложения 4 следует, что $(\nabla_0, \mathscr{U}_0) = \prod_{m \in M} (\nabla_m, \mathscr{U}_m)$ является равномерной логикой. В силу следствия к теореме 3 из §7 равномерные пространства $(\nabla, \mathscr{U})$ и $(\nabla_0, \mathscr{U}_0)$ изоморфны. ∎

Библиография: [109, 111, 141, 142].

§ 9. Интервальная топология в логиках

В этом параграфе изучается связь между интервальной топологией и R-топологией в логиках.

Пусть ∇ — произвольная логика. Напомним, что интервальной топологией в ∇ называется топология, базу замкнутых множеств которой образуют подмножества из ∇ вида $F = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, где $a_i, b_i \in \nabla$; $a_i \leqslant b_i$ и $[a_i, b_i] = \{b \in \nabla : a_i \leqslant b \leqslant b_i\}$, $i = 1, \ldots; n$. Очевидно, что интервальная топология в логике мажорируется (o)-топологией. Если ∇ — логика, состоящая из конечного числа элементов $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, то любой элемент $a \in \nabla$ представим $a = \nabla \setminus \bigcup_{a_i \neq a} [a_i, a_i]$ и поэтому $\{a\}$ — открытое подмножество в ∇ относительно интервальной топологии. Таким образом, в этом случае интервальная топология дискретна. Так как любая логика, состоящая из конечного числа элементов, является равномерной логикой относительно дискретной равномерности, то получаем следующее предложение.

Предложение 1. Если $(\nabla, \mathcal{И})$ — равномерная логика, состоящая из конечного числа элементов, то R-топология в ∇ совпадает с интервальной топологией.

Из этого предложения, в частности, следует, что существуют равномерные логики, не являющиеся булевыми алгебрами, в которых R-топология совпадает с интервальной топологией (такой, например, является логика с тривиальным центром, построенная в конце § 5).

Предложение 2. Пусть t — интервальная топология в логике $\bigtriangledown$, $a \in \bigtriangledown$ и $\bigtriangledown_1$ — правильная подлогика в $\bigtriangledown$. Тогда t индуцирует в логике $\bigtriangledown_a = [0, a]$ интервальную топологию, и если $\bigtriangledown$ — полная логика, то в $\bigtriangledown_1$ также индуцируется интервальная топология.

Доказательство. Если $\bigtriangledown_a = [0, a]$ и $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ — замкнутое множество из $(\bigtriangledown, t)$, то

$$\bigtriangledown_a \cap [a_i, b_i] = \begin{cases} [a_i, a \wedge b_i], & \text{если } a_i \leqslant a, \\ \varnothing & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, $\bigtriangledown_a \cap F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigtriangledown_a \cap [a_i, b_i]$ — замкнутое множество относительно интервальной топологии в $\bigtriangledown_a$. С другой стороны, если $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [d_i, c_i] \subset \bigtriangledown_a$, то M замкнуто в $(\bigtriangledown, t)$. Поэтому t индуцирует в $\bigtriangledown_a$ интервальную топологию.

Пусть $\bigtriangledown$ — полная логика и $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ — произвольное замкнутое множество из базы замкнутых множеств топологии t, $a_i, b_i \in \bigtriangledown$, $a_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Положим $c_i = \bigvee (\bigtriangledown_1 \cap [a_i, b_i])$ и $d_i = \bigwedge (\bigtriangledown_1 \cup [a_i, b_i])$. Так как $\bigtriangledown_1$ — правильная подлогика, то $c_i \in \bigtriangledown_1$, $d_i \in \bigtriangledown_1$ и $a_i \leqslant d_i \leqslant c_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $[d_i, c_i]_{\bigtriangledown_1} = \{b \in \bigtriangledown_1 : d_i \leqslant b \leqslant c_i\}$. Тогда $F \cap \bigtriangledown_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [d_i, c_i]_{\bigtriangledown_1}$, т. е $F \cap \bigtriangledown_1$ замкнуто относительно интервальной топологии t_1 в $\bigtriangledown_1$. Наоборот, если $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [d_i, c_i]_{\bigtriangledown_1}$ — произвольное замкнутое множество из базы замкнутых множеств топологии t_1, то $M = \bigtriangledown_1 \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} [d_i, c_i] \right)$. Следовательно, топология t индуцирует в $\bigtriangledown_1$ топологию t_1. ■

Следствие. Если ∇_1 — максимальная булева подалгебра в полной логике ∇, то интервальная топология в ∇ индуцирует в ∇_1 интервальную топологию.

Выясним теперь, когда интервальная топология t является T_2-отделимой, т. е. хаусдорфовой. Так как каждая точка $\{a\} = [a, a]$ замкнута в топологии t, то t всегда T_1-отделимо.

Теорема 1. Если ∇ — непрерывная булева алгебра, то интервальная топология t в ∇ не является T_2-отделимой.

Доказательство. Покажем, что ∇ нельзя представить в виде $\nabla = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, где $[a_i, b_i] \neq [0, 1]$; $a_i \leqslant b_i$; $a_i, b_i \in \nabla$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\nabla = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$, $[a_i, b_i] \neq [0, 1]$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = 0$, $b_2 = 1$ (так как $0, 1 \in [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$). Булева алгебра ∇ непрерывна, поэтому существуют $c, d \in \nabla$, такие, что $0 < c < b_1$ и $0 < d < a_2$. Если $b_1 \wedge a_2 = 0$, то $c \perp d$, $c \vee d \overline{\in} [0, b_1]$ и $c \vee d \overline{\in} [a_2, 1]$. Действительно, если $c \vee d \leqslant b_1$, то $d \leqslant a_2 \wedge a_2^{\perp} = 0$, т. е. $d = 0$, что не так. Аналогично, если $a_2 \leqslant c \vee d$, то

$$a_2 = a_2 \wedge (c \vee d) = (a_2 \wedge c) \vee (a_2 \wedge d) = a_2 \wedge d = d < a_2.$$

Таким образом, равенство $b_1 \wedge a_2 = 0$ невозможно. Пусть $b_1 \wedge a_2 < a_2$; выберем элементы $c_0, d_0 \in \nabla$ так, чтобы $0 < c_0 < b_1 \wedge a_2$ и $0 < d_0 < a_2 - (b_1 \wedge a_2)$. Если $c_0 \vee d_0 \leqslant b_1$, то

$$d_0 \leqslant b_1 \wedge \left(a_2 \wedge (b_1 \wedge a_2)^{\perp}\right) = a_2 \wedge b_1 \wedge \left(b_1^{\perp} \vee a_2^{\perp}\right) =$$

$$= a_2 \wedge \left(b_1 \wedge a_2^{\perp}\right) = 0;$$

следовательно, $d_0 = 0$, что не так. Кроме того,

$$c_0 \vee d_0 < (b_1 \wedge a_2) \vee (a_2 - (b_1 \wedge a_2)) = a_2.$$

Таким образом, $c_0 \vee d_0 \overline{\in} [0, b_1]$ и $c_0 \vee d_0 \overline{\in} [a_2, 1]$. Следовательно, предположение о том, что $b_1 \wedge a_2 < a_2$, неверно и поэтому $a_2 \leqslant b_1$, но в этом случае можно взять элемент $c \in \nabla$ так, чтобы $0 < c < b_1^{\perp}$, и тогда $c \overline{\in} [0, b_1]$, $c \overline{\in} [a_2, 1]$. Следовательно, любую непрерывную булеву алгебру ∇ нельзя представить в виде объединения двух замкнутых интервалов, не равных интервалу $[0, 1]$. Предположим, что каждую непрерывную булеву алгебру ∇ нельзя представить в виде объединения k замкнутых интервалов, не равных интервалу $[0, 1]$, $k < n$, $n \geqslant 3$, и пусть $\nabla = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $a_i \leqslant b_i$, $a_i, b_i \in \nabla$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует такое i_0, что $1 \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$, т. е. $b_{i_0} = 1$, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, при этом $a_{i_0} \neq 0$ (можно считать, что $i_0 = n$). Выберем $b \in \nabla$ так, чтобы $0 < b < a_n$ и положим $\nabla_0 = [0, b] = \nabla_b$. Очевидно, что ∇_0 — непрерывная булева алгебра и

$$\nabla_0 \cap [a_i,\ b_i] = \begin{cases} [a_i,\ b \wedge b_i], \text{ если } a_i \leqslant b, \\ \varnothing \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $a \in \nabla_0$, тогда $a \bar{\in} [a_n,\ 1]$ и потому найдется такое i, что $a \in [a_i,\ b_i]$, $1 \leqslant i \leqslant (n-1)$. Следовательно, $\nabla_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} [a_i,\ b \wedge b_i]$, что противоречит предположению индукции.

Покажем теперь, что интервальная топология t в ∇ не является T_2-отделимой. Пусть G_1, G_2 — такие открытые подмножества в $(\nabla,\ t)$, что $G_1 = \nabla \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i]$ и $G_2 = \nabla \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} [c_j,\ d_j]$, где $a_i \leqslant b_i$; $c_j \leqslant d_j$; $a_i,\ b_i,\ c_j$; $d_j \in \nabla$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Если $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то

$$(\nabla \setminus G_1) \cup (\nabla \setminus G_2) = \nabla,$$

но $(\nabla \setminus G_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i]$ и $(\nabla \setminus G_2) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [c_j,\ d_j]$, поэтому

$$\nabla = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i] \cup \bigcup_{j=1}^{k} [c_j,\ d_j],$$

что невозможно. Следовательно, любые открытые множества из $(\nabla,\ t)$ пересекаются, т. е. $(\nabla,\ t)$ не является T_2-отделимым пространством. ■

Теорема 1 позволяет получить критерий для T_2-отделимости интервальной топологии в булевых алгебрах.

Теорема 2. Интервальная топология t в булевой алгебре ∇ является T_2-отделимой в том и только в том случае, когда ∇ — дискретная булева алгебра.

Доказательство. Пусть t T_2-отделима, но ∇ — не дискретная булева алгебра. Тогда существует такой ненулевой элемент $a \in \nabla$, что $\nabla_a = [0,\ a]$ является непрерывной булевой алгеброй. Из предложения 2 следует, что t индуцирует в ∇_a интервальную топологию, которая будет T_2-отделимой, но это противоречит теореме 1. Следовательно, ∇ — дискретная булева алгебра.

Наоборот, пусть ∇ — дискретная булева алгебра, $a,\ b \in \nabla$, $a \neq b$. Тогда существует атом $q \in \nabla$, такой, что $q < a \wedge b^{\perp}$ (если $a \wedge b^{\perp} = 0$, то $a < b$ и в этом случае атом q берется так, чтобы $q < b \wedge a^{\perp}$). Множество $G_1 = \nabla \setminus [0,\ q^{\perp}]$ является открытым в $(\nabla,\ t)$ и $a \in G_1$. Если $d \in G_1$, то $d \bar{\in} [0,\ q^{\perp}]$ и поэтому $(d - d \wedge q^{\perp}) \neq 0$, т. е. существует атом $q_1 \leqslant d - (d \wedge q^{\perp}) = d \wedge (d \wedge q^{\perp})^{\perp} = d \wedge (d^{\perp} \vee q) = d \wedge q \leqslant q$. Следовательно, $q = q_1$, т. е. $d \in [q,\ 1]$, откуда $G_1 = [q,\ 1]$. Множество $G_2 = \nabla \setminus G_1 = \nabla \setminus [q,\ 1]$ открыто в $(\nabla,\ t)$ и так как $q < b^{\perp}$, то $b \in G_2$. Таким образом, G_1 и G_2 — непересекающиеся открытые окрестности элементов a и b соответственно в (∇, t), т. е. (∇, t) — T_2-отделимое топологическое пространство. ■

Следствие. Если в полной логике ∇ интервальная топология T_2-отделима, то ∇ — дискретная логика.

Доказательство вытекает из следствия к предложению 2, теоремы 2 и предложения 5 из § 3.

Замечание. Дискретность булевых алгебр, у которых интервальная топология T_2-отделима, впервые получена в работе [71].

Отметим, что для логик свойство дискретности не является, вообще говоря, достаточным условием для T_2-отделимости интервальной топологии.

Пример. Пусть ∇ — логика всех подпространств двумерного гильбертова пространства. Эта логика, очевидно, дискретна. Покажем, что интервальная топология в ней не является T_2-отделимой. Для любых $a, b, c, d \in \nabla$, $a \neq 0$, $d \neq 1$, $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ имеем

$$[a, b] = \{a\}, \quad \text{либо } [a, b] = \{a, 1\},$$
$$[c, d] = \{d\}, \quad \text{либо } [c, d] = \{0, d\}.$$

Пусть $G_1 = \nabla \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ и $G_2 = \nabla \setminus \bigcup_{j=1}^{k} [c_j, d_j]$ — открытые окрестности соответственно нуля и единицы в ∇ относительно интервальной топологии.

Так как $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $d_j \neq 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$, то множества G_1 и G_2 отличаются от ∇ только на конечное число элементов. Поэтому $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$, следовательно, интервальная топология в ∇ не хаусдорфова.

Из этого примера, в частности, следует, что существуют дискретные равномерные логики, для которых R-топология не совпадает с интервальной топологией (такой является построенная в примере логика всех подпространств двумерного гильбертова пространства). Для булевых алгебр такой ситуации быть не может.

Теорема 3. В равномерной булевой аглебре $(\nabla, \mathcal{U})$ R-топология совпадает с интервальной топологией в том и только в том случае, когда ∇ — дискретная булева алгебра.

Доказательство. Если R-топология совпадает с интервальной топологией, то интервальная топология T_2-отделима и потому ∇ — дискретная булева алгебра (теорема 2).

Наоборот, пусть ∇ — дискретная булева алгебра и Δ — множество всех атомов в ∇. Так как ∇ — полная булева алгебра, то в силу предложения 4 из § 3 ∇ изоморфно прямому произведению $\prod_{q \in \Delta} \nabla_q$ тривиальных булевых алгебр $\nabla_q = [0, q] = \{0, q\}$ (можно считать, что $\nabla = \prod_{q \in \Delta} \nabla_q$), при этом R-топология в ∇ совпадает с тихоновской топологией $\tau = \prod_{q \in \Delta} \tau_q$, где τ_q — топология в ∇_q, индуцируемая R-топологией (следствие к предложению 4 из § 8).

Очевидно, что τ_q — дискретная топология в ∇_q и потому τ совпадает с интервальной топологией в ∇. ■

Библиография: [9, 71, 129, 130].

§ 10. Регулярные логики

В этом параграфе изучается класс полных логик счетного типа, в которых выполняется принцип диагонали для (o)-сходящихся последовательностей. Приводится достаточное условие для существования (o)-непрерывной строго положительной оценки на логике.

Пусть ∇ — произвольная логика. Она называется (o)-непрерывной ((os)-непрерывной), если из $a_\alpha \uparrow a$, $a_\alpha, a \in \nabla$, $\alpha \in A$ (соответственно $a_n \uparrow a$; $a_n, a \in \nabla$) следует $(a_\alpha \wedge b) \uparrow (a \wedge b)$ ($(a_n \wedge b) \uparrow (a \wedge b)$) для любого $b \in \nabla$. Очевидно, что любая булева алгебра и равномерная логика служат примерами (o)-непрерывных логик. Переходя к ортодополнению, получаем, что в каждой (o)-непрерывной логике ∇ из $a_\alpha \downarrow a$, $a_\alpha, a \in \nabla$ вытекает $(a_\alpha \vee b) \downarrow (a \vee b)$ для всех $b \in \nabla$. В силу предложения 7 из § 2 для полных логик счетного типа понятия (o)- и (os)-непрерывных логик совпадают.

В работе [69] показано, что любая полная дедекиндова решетка X с ортодополнением является непрерывной геометрией, т. е. в X выполнено следующее свойство: если $a_\alpha \uparrow a$, $b_\alpha \downarrow b$, $a_\alpha, b_\alpha, a, b, c \in X$, то $c \wedge a = \bigvee_\alpha (c \wedge a_\alpha)$ и $c \vee b = \bigwedge_\alpha (c \vee b_\alpha)$. Поэтому любая полная дедекиндова логика является (o)-непрерывной.

Предложение 1. Пусть ∇ — (o)-непрерывная логика, тогда:

1) если $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, $b_\alpha \xrightarrow{(o)} b$, $a_\alpha, b_\alpha, a, b \in \nabla$, то

$$a_\alpha \vee b_\alpha \xrightarrow{(o)} a \vee b, \quad a_\alpha \wedge b_\alpha \xrightarrow{(o)} a \wedge b;$$

2) $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ в том и только в том случае, когда

$$a_\alpha \Delta a \xrightarrow{(o)} 0, \quad a_\alpha, a \in \nabla.$$

Доказательство. 1) Пусть $a_\alpha \uparrow a$, $b_\alpha \uparrow b$, $\alpha \in A$. Для каждого фиксированного $\beta \in A$

$$\bigvee_{\alpha \in A} (a_\alpha \wedge b_\beta) = a \wedge b_\beta.$$

Поэтому

$$\bigvee_{\alpha,\, \beta \in A} (a_\alpha \wedge b_\beta) = \bigvee_{\beta \in A} (a \wedge b_\beta) = a \wedge b.$$

Так как сети $\{a_\alpha\}$ и $\{b_\alpha\}$ возрастают, то

$$a \wedge b = \bigvee_{\alpha,\,\beta \in A} (a_\alpha \wedge b_\beta) = \bigvee_{\alpha \in A} (a_\alpha \wedge b_\alpha),$$

следовательно, $(a_\alpha \wedge b_\alpha) \uparrow (a \wedge b)$.

Аналогично, если $a_\alpha \downarrow a$, $b_\alpha \downarrow b$, то $(a_\alpha \vee b_\alpha) \downarrow (a \vee b)$. Пусть теперь $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$, $b_\alpha \xrightarrow{(o)} b$ и $\{a'_\alpha\}$, $\{a''_\alpha\}$, $\{b'_\alpha\}$, $\{b''_\alpha\}$ — такие сети из ∇, что $a'_\alpha \leqslant a_\alpha \leqslant a''_\alpha$, $b'_\alpha \leqslant b_\alpha \leqslant b''_\alpha$ и $a'_\alpha \uparrow a$, $a''_\alpha \downarrow a$, $b'_\alpha \uparrow b$, $b''_\alpha \downarrow b$. Тогда

$$\left(a'_\alpha \vee b'_\alpha\right) \uparrow (a \vee b), \quad \left(a''_\alpha \vee b''_\alpha\right) \downarrow (a \vee b)$$

и $a'_\alpha \vee b'_\alpha \leqslant a_\alpha \vee b_\alpha \leqslant a''_\alpha \vee b''_\alpha$. Поэтому $a_\alpha \vee b_\alpha \xrightarrow{(o)} a \vee b$. Аналогично $a_\alpha \wedge b_\alpha \xrightarrow{(o)} a \wedge b$.

2) Пусть $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ и $\{b_\alpha\}$, $\{c_\alpha\}$ — такие сети из ∇, что $b_\alpha \leqslant a_\alpha \leqslant c_\alpha$, $b_\alpha \uparrow a$ и $c_\alpha \downarrow a$. Из п. 4) предложения 3 § 2 следует, что

$$a_\alpha \Delta a \leqslant (a_\alpha \Delta c_\alpha) \vee (c_\alpha \Delta a),$$

но

$$a_\alpha \Delta c_\alpha = c_\alpha - a_\alpha \leqslant c_\alpha - b_\alpha \text{ и } c_\alpha \Delta a = c_\alpha - a \leqslant c_\alpha - b_\alpha.$$

Следовательно,

$$a_\alpha \Delta a \leqslant c_\alpha - b_\alpha = c_\alpha \wedge b_\alpha^\perp.$$

Так как $\left(c_\alpha \wedge b_\alpha^\perp\right) \downarrow 0$, то $a_\alpha \Delta a \xrightarrow{(o)} 0$.

Наоборот, пусть $a_\alpha \Delta a \xrightarrow{(o)} 0$ и $\{b_\alpha\}$ — убывающая к нулю сеть из ∇, для которой $a_\alpha \Delta a \leqslant b_\alpha$ при всех α. Из п. 4) предложения 3 § 2 следует, что

$$a_\alpha = a_\alpha \Delta 0 \leqslant (a_\alpha \Delta a) \vee a \leqslant b_\alpha \vee a.$$

В силу доказанного п. 1)

$$a''_\alpha = (b_\alpha \vee a) \downarrow a.$$

Из свойств 7° и 8° логик вытекает

$$(a_\alpha \Delta a)^\perp \wedge a = \left((a_\alpha \vee a)^\perp \vee (a_\alpha \wedge a)\right) \wedge a =$$
$$= \left((a_\alpha \vee a)^\perp \wedge a\right) \vee (a_\alpha \wedge a) = a_\alpha \wedge a \leqslant a_\alpha.$$

Поэтому $a'_\alpha = \left(b_\alpha^\perp \wedge a\right) \leqslant a_\alpha$ и $a'_\alpha \uparrow a$. Следовательно, $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$. ■

Следствие. Если $(\nabla, \mathcal{И})$ — равномерная логика и a_α, $a \in \nabla$, то $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ тогда и только тогда, когда $a_\alpha \Delta a \xrightarrow{(o)} 0$.

Определение. Полная логика ∇ счетного типа называется регулярной, если в ней выполнен принцип диагонали, т. е. для любой двойной последовательности $\{a_{nm}\} \subset \nabla$, удовлетворяющей условию $a_{nm} \xrightarrow{(o)} a_n$ при $m \to \infty$ и $a_n \xrightarrow{(o)} a$, существует диагональная последовательность $\{a_{nm_n}\}$, (o)-сходящаяся к a.

Укажем некоторые свойства (o)-топологии в регулярных логиках.

Предложение 2. Пусть ∇ — регулярная логика и $\tau_0(\nabla)$ — (o)-топология в ∇. Тогда:

1) элемент a принадлежит замыканию множества $M \subset \nabla$ относительно $\tau_0(\nabla)$ в том и только в том случае, когда существует последовательность $\{a_n\} \subset M$, такая, что $a_n \xrightarrow{(o)} a$;

2) $(\nabla, \tau_0(\nabla))$ имеет базис заполненных окрестностей нуля.

Доказательство. 1) Обозначим через K множество всех элементов a из ∇, для которых существует последовательность $\{a_n\} \subset M$, такая, что $a_n \xrightarrow{(o)} a$. Очевидно, что K содержится в замыкании множества M относительно (o)-топологии $\tau_0(\nabla)$. Пусть $b_k \in K$ и $b_k \xrightarrow{(o)} b$, $b \in \nabla$. Тогда найдутся последовательности $\{a_{kn}\} \subset M$, такие, что $a_{kn} \xrightarrow{(o)} b_k$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного k. Так как ∇ — регулярная логика, то существует диагональная последовательность $\{a_{kn_k}\}$, (o)-сходящаяся к элементу b. Следовательно, $b \in K$ и потому K замкнуто относительно (os)-топологии, которая в силу счетности типа логики ∇ совпадает с $\tau_0(\nabla)$ (предложение 3 из § 4). Таким образом, K совпадает с замыканием множества M в топологии $\tau_0(\nabla)$.

2) Пусть W — произвольная окрестность нуля в $(\nabla, \tau_0(\nabla))$. Покажем, что существует такая окрестность нуля V в $(\nabla, \tau_0(\nabla))$, что из $0 \leqslant a \leqslant b$, $b \in V$, следует $a \in W$. Если это не так, то для любой окрестности нуля U в $(\nabla, \tau_0(\nabla))$ найдется элемент $a_U \in \nabla$, для которого $a_U \leqslant b_U$, $b_U \in U$, но $a_U \bar{\in} W$. Очевидно, что сеть $\{b_U\}$ сходится к нулю в $(\nabla, \tau_0(\nabla))$. Поэтому в силу доказанного п. 1) существует последовательность $\{b_{U_n}\} \subset \{b_U\}$, которая (o)-сходится к нулю. Тогда $a_{U_n} \xrightarrow{(o)} 0$ и, следовательно, $a_{U_n} \in W$ начиная с некоторого номера. Из этого противоречия вытекает, что найдется окрестность нуля V в $(\nabla, \tau_0(\nabla))$ с указанным выше свойством. Положим $G = \bigcup_{b \in V} [0, b]$, тогда G — заполненное множество и $V \subset G \subset W$. ■

Замечание. Регулярные булевы алгебры изучались в [51, 52]. Доказательство предложения 2 аналогично доказательству соответствующего предложения для булевых алгебр [51].

Следующее предложение выделяет широкий класс регулярных логик.

Предложение 3. Любая равномерная логика $(\nabla, \mathcal{U})$ счетного типа является регулярной логикой.

Доказательство. Так как $(\nabla, \mathcal{U})$ имеет счетный тип, то R-топология τ в ∇ имеет счетный базис $\{U_n\}$ замкнутых заполненных окрестностей нуля (теорема 2 из § 7 и следствие 1 к предложению 1 из § 6), для которых

$$U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{a_{nm}\}$ — двойная последовательность в ∇, удовлетворяющая условию $a_{nm} \xrightarrow{(o)} a_n$ при $m \to \infty$ и $a_n \xrightarrow{(o)} a$. Положим $b_{nm} = a_n \Delta a_{nm}$, тогда в силу следствия к предложению 1 $b_{nm} \xrightarrow{(o)} 0$ при $m \to \infty$ для каждого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому для любого n существует такой номер m_n, что $b_{nm_n} \in U_n$. Пусть $c_n = \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} b_{km_k}$. Так как каждое U_n замкнуто и

$$\bigvee_{k=n}^{p} b_{km_k} \in U_n \vee U_{n+1} \vee \cdots \vee U_p \subset U_{n-1}$$

при всех $p \geqslant n$, то $c_n \in U_{n-1}$. Следовательно, $c_n \xrightarrow{\tau} 0$, но $c_n \downarrow \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и потому $c_n \xrightarrow{\tau} \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Таким образом, $c_n \downarrow 0$. Пусть $\{d_n\}$ — убывающая к нулю последовательность из ∇, для которой $a\Delta a_n \leqslant d_n$. Из п. 4) предложения 3 из § 2 следует, что

$$a\Delta a_{nm_n} \leqslant (a\Delta a_n) \vee (a_n \Delta a_{nm_n}) \leqslant d_n \vee c_n,$$

но $(d_n \vee c_n) \downarrow 0$ (п. 1) предложения 1), поэтому $a\Delta a_{nm_n} \xrightarrow{(o)} 0$ и, следовательно, $a_{nm_n} \xrightarrow{(o)} a$ (следствие к предложению 1). ■

Следствие. Если на полной логике ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка, то ∇ — регулярная логика.

Естественно возникает вопрос о существовании строго положительных (o)-непрерывных оценок на регулярных логиках. В классе булевых алгебр этот вопрос до сих пор не решен. В работе [79] доказано, что гипотеза о существовании строго положительной оценки на регулярных булевых алгебрах, во всяком случае, не слабее, чем известная в теории множеств гипотеза Суслина. В классе же всех регулярных логик ответ на поставленный вопрос отрицательный. В качестве примера достаточно взять не дедекиндову логику ∇, состоящую из конечного числа элементов (такой пример построен в конце § 5). Тогда ∇, очевидно, регулярна, но на ней нет строго положительных оценок. Отметим также, что ∇ — равномерная логика относительно дискретной равномерности и потому на

∇ существует строго положительная (o)-непрерывная внешняя R-оценка. В связи с этим укажем на известную проблему [79] о существовании строго положительной (o)-непрерывной оценки на полной булевой алгебре, на которой имеется строго положительная (o)-непрерывная внешняя оценка. Эта проблема эквивалентна следующей проблеме: на всякой ли равномерной булевой алгебре счетного типа существует строго положительная (o)-непрерывная оценка? Окончательный ответ на этот вопрос еще не получен. Несколько эквивалентных формулировок для указанной проблемы приведено в [55]. В классе же равномерных логик данная проблема имеет, очевидно, отрицательное решение (в качестве примера можно взять указанную выше не дедекиндову логику).

Покажем теперь, что существуют регулярные логики, на которых нельзя задать R-равномерность. Пусть ∇_1 — булева алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств из отрезка $[0, 1]$ (равные $\mathrm{mod}\,0$ множества отождествляются), ∇_2 — булева алгебра, состоящая из четырех элементов $\{0, a, a^{\perp}, 1\}$ и $\nabla = \nabla_1 \cup \nabla_2$ — логика, построенная в конце § 3. Тогда ∇ — полная логика счетного типа (заметим, что на ∇_1 существует строго положительная (o)-непрерывная оценка (мера Лебега), поэтому ∇_1 — регулярная булева алгебра). Выберем последовательность $\{b_n\}$ из ∇_1 так, чтобы $b_n \uparrow 1$, $b_n \neq 1$. Если на ∇ существует R-топология τ, то $b_n \xrightarrow{\tau} 1$ и $0 = b_n \wedge a \xrightarrow{\tau} 1 \wedge a = a \neq 0$. Следовательно, на ∇ нельзя задать R-равномерность. Покажем, что ∇ — регулярная логика. Пусть $b_{nm} \xrightarrow{(o)} b_n$ при $m \to \infty$ и $b_n \xrightarrow{(o)} b$, b_{nm}, b_n, $b \in \nabla$, $n, m = 1, 2, \ldots$. Если последовательность $\{b_n\}$ имеет подпоследовательность $b_{n_k} = a$ $\left(\text{или } b_{n_k} = a^{\perp}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $b = a$ (соответственно $b = a^{\perp}$), и так как ∇_1 — правильная подлогика в ∇, то $b_n = a$ $\left(\text{соответственно } b_n = a^{\perp}\right)$ начиная с некоторого номера n_0, но тогда для каждого $n \geqslant n_0$ существует такой номер $m(n)$, что $b_{nm} = a$ $\left(\text{соответственно } b_{nm} = a^{\perp}\right)$ при $m \geqslant m(n)$, поэтому $b_{nm(n)} \xrightarrow{(o)} a$. Пусть теперь все элементы b_n, кроме конечного числа, лежат в ∇_1 $\left(\text{без ограничения общности можно считать, что все } b_n \text{ отличны от } a \text{ и } a^{\perp}, \text{ т. е. } \{b_n\} \subset \nabla_1\right)$. Тогда для каждого фиксированного n последовательность $\{b_{nm}\}$ начиная с некоторого номера $m(n)$ принадлежит ∇_1. Так как ∇_1 — регулярная булева алгебра и ∇_1 — правильная подлогика в ∇, то существует такая последовательность номеров

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots, \quad m_n > m(n),$$

что $b_{nm_n} \xrightarrow{(o)} b$. Следовательно, ∇ — регулярная логика. Заметим, что попытка построения регулярной булевой алгебры, на которой нельзя задать R-равномерность, наталкивается на теоретико-множественные трудности. Из результатов [79] следует, что гипотеза о существовании такой регулярной булевой алгебры не слабее, чем гипотеза Суслина.

Пусть ∇ — произвольная регулярная логика. Так как центр $Z(\nabla)$ в ∇ и каждая максимальная булева подалгебра ∇_1 в ∇ являются правильными подлогиками в ∇, то $Z(\nabla)$ и ∇_1 — регулярные булевы алгебры. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Пусть $H = L_2(0, 1)$ — гильбертово пространство всех комплексных интегрируемых с квадратом функций на полуинтервале $(0, 1]$ и ∇ — логика всех замкнутых подпространств в H. Положим $\xi_n(t) = t^n$, $0 < t \leqslant 1$, $n = 0, 1, \ldots$, тогда $\xi_n \in H$ и замыкание линейной оболочки $L(\{\xi_n\})$ последовательности $\{\xi_n\}$ совпадает с H. Обозначим через T сдвиг полуинтервала $(0, 1]$ на $\frac{1}{2}$ (mod 1), т. е.

$$T(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ t + \frac{1}{2}, & 0 < t \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, что T — автоморфизм пространства $(0, 1]$, сохраняющий меру Лебега. Этот автоморфизм порождает унитарный оператор U в H, определенный по формуле

$$(Uf)(t) = f(T(t)), \quad t \in (0, 1].$$

Положим $\eta_n = U\xi_n$, $n = 0, 1, \ldots$ и пусть a_n (соответственно b_n) — подпространство в H, порожденное векторами $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ (соответственно $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$). Через P_n (соответственно Q_n) обозначим проектор на подпространство a_n (соответственно b_n). Очевидно, что $Q_n = UP_n U^*$ где U^* — оператор в H, сопряженный к U.

Лемма 1. Если $n < m$, то $a_n \wedge b_m = a_0 = b_0$.

Доказательство. Очевидно, что $a_0 = b_0 \leqslant a_n \wedge b_m$. Если $c = a_n \wedge b_m$, то c — конечномерное подпространство в H. Предположим, что $a_0 < c$, тогда существует ненулевой вектор $\xi \in c$, такой, что $\xi \perp a_0$, и так как $\xi \in a_n$ и $\xi \in b_m$, то

$$\xi = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \xi_l = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \eta_j. \tag{1}$$

Пусть n_1 — наибольший номер, для которого $\lambda_{n_1} \neq 0$. Функция $g(t) = \sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l t^l$ непрерывна на $(0, 1]$, а функция $f(t) =$

$= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \eta_j(t)$ может иметь разрыв только в точке $t = \frac{1}{2}$, при этом $f(t)$ непрерывна слева в этой точке. Поэтому из соотношения (1) следует, что $g(t) = f(t)$ для всех $t \in (0, 1]$, т. е.

$$\sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l t^l \equiv \sum_{j=1}^{m} \mu_j \eta_j(t).$$

Так как количество нулей у многочлена конечное и

$$\sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l t^l = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(t - \frac{1}{2}\right)^j$$

для всех $t \in \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right)$, то

$$\mu_m = \mu_{m-1} = \cdots = \mu_{n_1+1} = 0, \; \mu_{n_1} = \lambda_{n_1} \neq 0$$

и

$$\lambda_{n_1-1} = \mu_{n_1-1} - \frac{1}{2}\mu_{n_1} \cdot n_1.$$

С другой стороны,

$$\sum_{l=1}^{n_1} \lambda_l t^l = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(t + \frac{1}{2}\right)^j$$

для всех $t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Поэтому

$$\lambda_{n_1-1} = \mu_{n_1-1} + \frac{1}{2}\mu_{n_1} \cdot n_1,$$

откуда следует $\mu_{n_1} = 0$, что не так. Таким образом, $a_n \wedge b_m = a_0$ при всех $n < m$. ■

Покажем теперь, что логика ∇ не регулярна. Пусть $a_{nk} = a_k$, если n четное, и $a_{nk} = b_k$, если n нечетное. По построению $a_k \uparrow 1$. Так как отображение $a \to U(a)$ является, очевидно, изоморфизмом логики ∇ на себя, то $b_k \uparrow 1$. Поэтому $a_{nk} \xrightarrow{(o)} 1$ при $k \to \infty$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Выберем произвольную диагональную последовательность $\{a_{nk_n}\}$ и предположим, что $a_{nk_n} \xrightarrow{(o)} 1$. Тогда $\left(\bigwedge_{n=s}^{\infty} a_{nk_n}\right) \uparrow 1$ при $s \to \infty$, но в силу леммы 1 $\bigwedge_{n=s}^{\infty} a_{nk_n} = a_0 \neq 1$ для всех $s = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\{a_{nk_n}\}$ не может (o)-сходиться к единице и поэтому логика ∇ всех замкнутых подпространств в H не является регулярной. В то же время любая максимальная булева подалгебра $\bigtriangledown_1$ в $\bigtriangledown$ является полной дискретной булевой алгеброй счетного типа, т. е. изоморфна булевой алгебре $\underset{\smile}{\bigtriangledown} = \prod_{i=1} D_i$, где $D_i = D = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и потому на $\bigtriangledown_1$ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка, т. е. $\bigtriangledown_1$ — регулярная булева алгебра. Центр $Z(\bigtriangledown)$ в $\bigtriangledown$ состоит только из нуля и единицы. Следовательно, $Z(\bigtriangledown)$ — также регулярная булева алгебра.

Из построенного выше примера вытекает следующее предложение.

Предложение 4. Логика ∇ всех замкнутых подпространств произвольного бесконечномерного гильбертова пространства H не является регулярной.

Доказательство. Выберем ортонормированную последовательность $\{\xi_n\} \subset H$ и пусть H_0 — замкнутое подпространство порожденное векторами ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда H_0 сепарабельно и потому изоморфно $L_2(0, 1)$. Следовательно, логика $\bigtriangledown_0$ всех замкнутых подпространств в H_0 не регулярна, но тогда, очевидно, $\bigtriangledown$ — также не регулярная логика. ■

Для дальнейшего изучения свойств регулярных логик нам понадобится результат, полученный в [80], о существовании размерностных функций на непрерывных геометриях, в частности, на полных дедекиндовых логиках. Напомним вначале известную теорему Стоуна о реализации булевой алгебры в виде алгебры множеств. Топологическое пространство (X, τ) называется вполне несвязным, если открыто-замкнутые множества в нем образуют базу топологии. Компакт (X, τ) называется экстремальным, если замыкание $\overline{G}$ любого открытого множества $G \subset X$ открыто.

Теорема 1. а) (М. Стоун). Для любой булевой алгебры ∇ существует вполне несвязный компакт $X(\nabla)$, алгебра всех открыто-замкнутых множеств которого изоморфна ∇;

б) (М. Стоун, Т. Огасавара). Булева алгебра ∇ является полной в том и только в том случае, когда реализующий алгебру ∇ компакт $X(\nabla)$ экстремален.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [51, 52].

Пусть ∇ — произвольная полная булева алгебра и $X(\nabla)$ — реализующий ее экстремальный компакт. Обозначим через $C(X(\nabla))$ множество всех действительных непрерывных функций на $X(\bigtriangledown)$. Каждый элемент $a \in \bigtriangledown$ можно отождествить с непрерывной функцией $\underline{a}(t)$ на $X(\bigtriangledown)$, полагая $a(t) = 1$, если $t \in U(a)$, и $a(t) = 0$, если $t \bar{\in} U(a)$, где $U(a)$ — открыто-замкнутое множество из $X(\bigtriangledown)$, соответствующее элементу a. Поэтому можно считать, что $\bigtriangledown \subset C(X(\bigtriangledown))$. Линейное пространство $C(X(\bigtriangledown))$ является условно полной векторной решеткой (частичный порядок в $C(X(\bigtriangledown))$ вводится поточечно). Теория условно полных векторных решеток (или K-пространств) в настоящее время является одним из важных разделов функционального анализа.

Подробное изложение этой теории можно найти, например, в монографиях [52, 65] (см. также гл. II). Мы используем один результат из [52] для пространства $C(X(\nabla))$.

Предложение 5. Если ∇ — полная булева алгебра счетного типа, то для любой убывающей ограниченной снизу сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset C(X(\nabla))$ существует такая последовательность индексов $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots$, что $\bigwedge\limits_{\alpha\in A} x_\alpha=\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n}$.

В [52] это предложение доказано для произвольных условно полных векторных решеток счетного типа. Еще одним важным примером условно полных векторных решеток является кольцо $C_\infty(X(\nabla))$ всех действительных непрерывных функций на $X(\nabla)$, принимающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных множествах (см. [9, 52] и гл. II).

Ясно, что кольцо $C(X(\nabla))$ является подкольцом в $C_\infty(X(\nabla))$. Пространство $C_\infty(X(\nabla))$ обладает следующим свойством.

Предложение 6 ([9, 52], гл. II). Пусть G — открытое всюду плотное множество в $X(\nabla)$ и f — непрерывная действительная функция на G. Тогда существует единственный элемент $\hat{f}\in C_\infty(X(\nabla))$, для которого $\hat{f}(t)=f(t)$ при всех $t\in G$.

Из этого предложения вытекает следствие.

Следствие. Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность попарно ортогональных элементов из полной булевой алгебры ∇ и $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} a_n=1$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}\subset C(X(\nabla))$, $x_n\geqslant 0$, существует $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ в $C_\infty(X(\nabla))$ (считаем, что $\nabla\subset C(X(\nabla))$).

Доказательство. Обозначим через U_n открыто-замкнутое множество в $X(\nabla)$, соответствующее элементу a_n. Тогда $U_n\cap U_k=\varnothing$, $n\neq k$, и $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ является открытым всюду плотным множеством в $X(\nabla)$. Положим

$$f(t)=x_n(t),\quad \text{если}\quad t\in U_n.$$

Ясно, что f — непрерывная функция на G. В силу предложения 6 существует такое $x\in C_\infty(X(\nabla))$, что $x(t)=f(t)$ для всех $t\in G$. Нетрудно видеть, что x является точной верхней гранью для последовательности $\{x_n a_n\}$ в кольце $C_\infty(X(\nabla))$. ■

Замечание. Из доказательства следствия легко получить, что $x=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x a_n$ для каждого неотрицательного $x\in C(X(\nabla))$.

Пусть ∇ — произвольная логика. Элементы a и b из ∇ называются перспективными, если существует такой элемент $c\in\nabla$, что $a \wedge c = b \wedge c = 0$ и $a \vee c = b \vee c$. Из результатов работ [80] и [69] (см. также [122]) вытекает следующая важная теорема.

Теорема 2 (Ф. Маеда). Пусть ∇ — полная дедекиндова логика, $Z(\nabla)$ — центр в ∇, $X(Z(\nabla))$ — экстремальный компакт, реализующий $Z(\nabla)$. Тогда существует отображение D из ∇ в $C(X(Z(\nabla)))$, обладающее следующими свойствами:

1) $0 \leqslant D(a) \leqslant \mathbf{1}$ для всех $a \in \nabla$ (здесь $\mathbf{1}(t) \equiv 1$), $D(0) = 0$ и $D(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

2) если $a \neq 0$, $a \in \nabla$, то $D(a) \neq 0$;

3) если $a \wedge b = 0$, a, $b \in \nabla$, то $D(a \vee b) = D(a) + D(b)$;

4) $D(a) = D(b)$ в том и только в том случае, когда a и b перспективны;

5) если $a_\alpha \downarrow 0$, то $D(a_\alpha) \downarrow 0$.

Отображение D из ∇ в $C(X(Z(\nabla)))$, обладающее свойствами 1)—5), называется размерностной функцией на ∇ со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$. Из свойств 3) и 5) вытекает, что если $a_\alpha \downarrow a$ (или $a_\alpha \uparrow a$), то $D(a_\alpha) \downarrow D(a)$ (соответственно $D(a_\alpha) \uparrow D(a)$). Повторяя доказательство предложения 3 из § 5, получаем, что

$$D(a \vee b) + D(a \wedge b) = D(a) + D(b)$$

для всех a, $b \in \nabla$, в частности,

$$D(a \vee b) \leqslant D(a) + D(b), \quad a, b \in \nabla.$$

Мы уже отмечали, что из регулярности центра логики ∇, вообще говоря, не следует регулярность самой логики ∇ (предложение 4). Однако для дедекиндовых логик регулярность центра уже обеспечивает регулярность самих логик. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2. Если ∇ — полная дедекиндова логика и центр $Z(\nabla)$ в ∇ имеет счетный тип, то ∇ также имеет счетный тип.

Доказательство. Пусть в ∇ существует несчетное семейство $\{a_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных элементов. Можно считать, что $\bigvee\limits_{i \in I} a_i = \mathbf{1}$. Обозначим через A направление всех конечных подмножеств $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$ и для каждого $\alpha \in A$ положим $a_\alpha = \left(\bigvee\limits_{i_k \in \alpha} a_{i_k}\right)^\perp$. Тогда, очевидно, $a_\alpha \neq 0$, $\alpha \in A$, и $a_\alpha \downarrow 0$. Пусть D — размерностная функция на ∇ со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$. Из свойств отображения D следует, что $D(a_\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in A$ и $D(a_\alpha) \downarrow 0$. В силу предложения 5 найдется такая последовательность индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots$, что

$$\mathbf{0} = \bigwedge_{\alpha \in A} D(a_\alpha) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} D(a_{\alpha_n}).$$

Положим $I_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $a = \left(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{i_k \in \alpha_n} a_{i_k}\right)^\perp = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n}$. Так как

$a_{\alpha_n} \downarrow a$, то $D(a_{\alpha_n}) \downarrow D(a)$, поэтому $D(a)=0$ и, следовательно, $a=0$. Множество I_0, очевидно, счетное. Поэтому существует $i_0 \in I \setminus I_0$, но тогда $a_{i_0} \perp \left(\bigvee_{i \in I_0} a_i\right)$, т. е. $a_{i_0} \perp \mathbf{1}$, что невозможно, так как $a_{i_0} \neq 0$. Таким образом, множество I не может быть несчетным. Следовательно, логика ∇ имеет счетный тип. ■

Следствие. Полная дедекиндова логика с тривиальным центром ($Z(\nabla) = \{0, \mathbf{1}\}$) имеет счетный тип.

Лемма 3. Пусть ∇ — регулярная булева алгебра, $x_{nm} \in C(X(\nabla))$ и $x_{nm} \downarrow 0$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного n. Тогда существует такая диагональная последовательность $\{x_{nm_n}\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{nm_n}$ (o)-сходится в $C_\infty(X(\nabla))$ $\left(\text{т. е. найдется такое } x \in C_\infty(X(\nabla)),\text{ что } \sum_{n=1}^{k} x_{nm_n} \xrightarrow{(o)} x\right)$.

Доказательство. Положим

$$G_{nm} = \left\{t \in X(\nabla) : x_{nm}(t) > \frac{1}{2^n}\right\}$$

и $U_{nm} = \bar{G}_{nm}$. Множество U_{nm} открыто-замкнуто и потому ему соответствует элемент a_{nm} из ∇, при этом можно считать, что $\nabla \subset C(X(\nabla))$. Так как $x_{nm}(t) \geqslant \frac{1}{2^n}$ для всех $t \in U$, то $a_{nm} \leqslant 2^n x_{nm}$. Тогда $\bigvee_{k=m}^{\infty} a_{nk} \leqslant \left(2^n x_{nm}\right) \downarrow 0$ при $m \to \infty$, следовательно, $a_{nm} \xrightarrow{(o)} 0$ при $m \to \infty$ для каждого фиксированного n. Булева алгебра ∇ регулярна, поэтому существует диагональная последовательность $a_{nm_n} \xrightarrow{(o)} 0$. Обозначим через $\{b_n\}$ убывающую к нулю последовательность из ∇, для которой $a_{nm_n} \leqslant b_n$, причем можно считать, что $b_1 = \mathbf{1}$. Так как $b_n^\perp \leqslant a_{nm_n}^\perp$ и $x_{nm_n} a_{nm_n}^\perp \leqslant \frac{1}{2^n} a_{nm_n}^\perp$, то $x_{nm_n} b_n^\perp \leqslant \frac{1}{2^n}\mathbf{1}$.

Положим $d_n = b_n - b_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $y_n = \left(\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{n} x_{km_k}\right) d_n$. Очевидно, что элементы d_n попарно ортогональны и $\bigvee_{n=1}^{\infty} d_n = b_1 = \mathbf{1}$. В силу следствия к предложению 6 в $C_\infty(X(\nabla))$ существует $y = \bigvee_{n=1}^{\infty} y_n$. Покажем, что $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_{km_k} \leqslant y$. Действительно, так как $d_1 \leqslant b_k^\perp$ при $k \geqslant 2$, то

$$z_n d_1 = \sum_{k=1}^{n} x_{km_k} d_1 \leqslant x_{1m_1} d_1 + \frac{1}{2^2} d_1 + \frac{1}{2^3} d_1 + \cdots + \frac{1}{2^n} d_1 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + x_{1m_1}) d_1 = y_1.$$

Аналогично

$$z_n d_2 = (x_{1m_1} + x_{2m_2}) d_2 + \frac{1}{2^3} d_2 + \cdots + \frac{1}{2^n} d_2 \leqslant y_2$$

и т. д. Получаем, что $z_n d_s \leqslant y_s$ при $s = 1, \ldots, n$ и если $s \geqslant n+1$, то $z_n d_s \leqslant \left(\sum_{k=1}^{s} x_{km_k} \right) d_s \leqslant y_s$. Отсюда

$$z_n = z_n \cdot \bigvee_{s=1}^{\infty} d_s = \bigvee_{s=1}^{\infty} z_n d_s \leqslant \bigvee_{s=1}^{\infty} y_s = y$$

для любого $n=1, 2, \ldots$. Таким образом, возрастающая последовательность частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} x_{km_k}$ ограничена сверху в $C_\infty(X(\bigtriangledown))$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{nm_n}$ (o)-сходится в $C_\infty(X(\bigtriangledown))$. ■

Теорема 3. Если ∇ — полная дедекиндова логика и центр $Z(\nabla)$ в ∇ является регулярной булевой алгеброй, то $\bigtriangledown$ — регулярная логика.

Доказательство. Так как $Z(\nabla)$ имеет счетный тип, то, по лемме 2, логика $\bigtriangledown$ также имеет счетный тип. Пусть $\{a_{nm}\}$ — двойная последовательность из $\bigtriangledown$, удовлетворяющей условию $a_{nm} \xrightarrow{(o)} a_n$ при $m \to \infty$ и $a_n \xrightarrow{(o)} a$. Как уже было отмечено, полная дедекиндова логика является (o)-непрерывной логикой. Поэтому $b_{nm} = a_{nm} \Delta a_n \xrightarrow{(o)} 0$ при $m \to \infty$ для каждого n, т. е. существует убывающая к нулю последовательность $\{c_{nm}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что $b_{nm} \leqslant c_{nm}$, $n, m = 1, 2, \ldots$. Тогда $x_{nm} = D(c_{nm}) \downarrow 0$ при $m \to \infty$, где D — размерностная функция на $\bigtriangledown$ со значениями в $C(X(Z(\bigtriangledown)))$. В силу леммы 2 существует диагональная последовательность $\{x_{nm_n}\}$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{nm_n}$ (o)-сходится в $C_\infty(X(Z(\bigtriangledown)))$. Покажем, что $\{b_{nm_n}\}$ (o)-сходится к нулю в $\bigtriangledown$. Пусть

$$d_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} b_{km_k} \quad \text{и} \quad g_s = \bigvee_{k=n}^{s} b_{km_k}, \quad s \geqslant n.$$

Тогда $g_s \uparrow d_n$ при $s \to \infty$ и $D(g_s) \leqslant \sum_{k=n}^{s} D(b_{km_k}) \leqslant \sum_{k=n}^{s} D(c_{km_k}) =$

$=\sum_{k=n}^{s} x_{km_k} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} x_{km_k}$, но $D(g_s) \uparrow D(d_n)$, поэтому $D(d_n) \leqslant \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} x_{km_k}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{km_k}$ (o)-сходится в $C_\infty(X(Z(\bigtriangledown)))$, то $D(d_n) \downarrow 0$ в $C(X(Z(\bigtriangledown)))$. Отсюда $D\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} d_n\right)=0$, т. е. $\bigwedge_{n=1}^{\infty} d_n = 0$. Тогда $d_n \downarrow 0$ и потому $b_{nm_n} \xrightarrow{(o)} 0$. Пусть $\{e_n\}$ и $\{g_n\}$ — убывающие к нулю последовательности из $\bigtriangledown$, для которых $b_{nm_n} \leqslant e_n$, $a_n \Delta a \leqslant g_n$. В силу п. 4) предложения 3 из § 2

$$a\Delta a_{nm_n} \leqslant (a\Delta a_n) \vee (a_n \Delta a_{nm_n}) \leqslant g_n \vee e_n,$$

но $\bigtriangledown$ — (o)-непрерывная логика, поэтому $(g_n \vee e_n) \downarrow 0$ (предложение 1). Следовательно, $a\Delta a_{nm_n} \xrightarrow{(o)} 0$, откуда $a_{nm_n} \xrightarrow{(o)} a$, т. е. $\bigtriangledown$ — регулярная логика. ■

Теорема Маеды позволяет получить разложение дедекиндовых равномерных логик в произведение равномерных логик счетного типа.

Теорема 4. Пусть $\bigtriangledown$ — полная логика. Следующие условия эквивалентны:

1) $\bigtriangledown$ — дедекиндова равномерная логика;

2) $\bigtriangledown$ — дедекиндова логика и ее центр $Z(\bigtriangledown)$ — равномерная булева алгебра;

3) $\bigtriangledown$ изоморфно прямому произведению $\prod_{i\in I} \bigtriangledown_i$ равномерных дедекиндовых логик $\bigtriangledown_i$ счетного типа, $i \in I$, I — некоторое множество индексов.

Доказательство. Импликация 1)⟶2) очевидна. Импликация 3)⟶1) следует из предложения 4 из § 8 и очевидного замечания о том, что произведение дедекиндовых логик является дедекиндовой логикой. Покажем, что условие 1) влечет условие 3). Пусть $(\bigtriangledown, \mathcal{U})$ — равномерная логика и $\mathcal{U}_1$ — равномерность на $Z(\bigtriangledown)$, индуцируемая $\mathcal{U}$. Тогда $(Z(\bigtriangledown), \mathcal{U}_1)$ — равномерная логика. Из п. 2) теоремы 1 § 7 и леммы Цорна (которая применяется к упорядоченному семейству всех подмножеств из $Z(\bigtriangledown)$, состоящих из попарно ортогональных элементов счетного типа) следует, что существует множество M ненулевых попарно ортогональных элементов счетного типа из $Z(\bigtriangledown)$, таких, что $\vee M = 1$. Для каждого $m \in M$ положим $\bigtriangledown_m = [0, m]$. Очевидно, что $\bigtriangledown_m$ — полная дедекиндова логика и равномерность $\mathcal{U}$ индуцирует на $\bigtriangledown_m$ R-равномерность $\mathcal{U}_m$. В силу предложения 4 из § 3, $(\bigtriangledown, \mathcal{U})$ изоморфно прямому произведению $\prod_{m\in M} (\bigtriangledown_m, \mathcal{U}_m)$. Ясно, что $Z(\bigtriangledown) \cap \bigtriangledown_m \subset Z(\bigtriangledown_m)$. Пусть $a \in Z(\bigtriangledown_m)$, тогда $a \leftrightarrow b$ для всех

$b \in \nabla_m$. Если c — произвольный элемент из ∇, то $c = (c \wedge m) \vee (c \wedge m^{\perp})$. Так как $a \perp (c \wedge m^{\perp})$, то $a \leftrightarrow (c \wedge m^{\perp})$ и потому в силу свойства 7° логик $a \leftrightarrow c$, т. е. $a \in Z(\nabla)$. Таким образом, $Z(\nabla_m) = Z(\nabla) \cap \nabla_m$. Следовательно, центр $Z(\nabla_m)$ имеет счетный тип и поэтому ∇_m — логика счетного типа (лемма 2).

Докажем теперь импликацию 2)→1). Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность всех окрестностей нуля в равномерной булевой алгебре $(Z(\nabla), \mathcal{U}_1)$. Для каждого $V \in \mathcal{B}$ и числа $\varepsilon > 0$ обозначим через $\Omega(V, \varepsilon)$ множество тех функций x из $C(X(Z(\nabla)))$, для которых существует элемент $a \in V$, такой, что $|x(t)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \bar{\in} U(a)$, где $U(a)$ — открыто-замкнутое множество из реализующего булеву алгебру $Z(\nabla)$ экстремального компакта $X(Z(\nabla))$, соответствующее элементу $a \in Z(\nabla)$. Очевидно, что $\Omega(U, \varepsilon) = -\Omega(U, \varepsilon)$, Покажем, что семейство $\{\Omega(V, \varepsilon)\}$, $V \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ обладает следующими свойствами:

1) если $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, $V_1 \vee V_1 \subset V_2$, то

$$\Omega\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) + \Omega\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \Omega(V_2, \varepsilon);$$

2) если $x \in \Omega(V, \varepsilon)$ и $|y| \leqslant |x|$, $y \in C(X(Z(\nabla)))$, то $y \in \Omega(V, \varepsilon)$;

3) $\bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ \varepsilon > 0}} \Omega(V, \varepsilon) = \{0\}$;

4) если $\{x_\alpha\} \subset C(X(Z(\nabla)))$ и $x_\alpha \downarrow 0$, то для любого $\Omega(V, \varepsilon)$ существует такое α_0, что $x_\alpha \in \Omega(V, \varepsilon)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Пусть $x, y \in \Omega\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и a, b — такие элементы из V_1, что $|x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \bar{\in} U(a)$ и $|y(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \bar{\in} U(b)$. Тогда $a \vee b \in V_2$ и $|x(t) + y(t)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \bar{\in} U(a) \cup U(b) = U(a \vee b)$, т. е. $x + y \in \Omega(V_2, \varepsilon)$. Свойство 2) очевидно. Если $x \in \bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ \varepsilon > 0}} \Omega(V, \varepsilon)$, то $|x| \in \bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ \varepsilon > 0}} \Omega(V, \varepsilon)$. Предположим, что $|x|(t) \not\equiv 0$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и открыто-замкнутое множество $U(b)$, что $|x|(t) > \varepsilon_0$ для всех $t \in U(b)$. Выберем заполненную окрестность $V_0 \in \mathcal{B}$ так, чтобы $b \bar{\in} V_0$. Так как $|x| \in \Omega(V_0, \varepsilon_0)$, то найдется такое $a \in V_0$, что $|x(t)| \leqslant \varepsilon_0$ при $t \bar{\in} U(a)$. Отсюда $U(b) \subset U(a)$, т. е. $b \leqslant a$, но тогда $b \in V_0$, что не так. Следовательно, $|x|(t) \equiv 0$ и $\bigcap\limits_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ \varepsilon > 0}} \Omega(V, \varepsilon) = \{0\}$.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — произвольная убывающая к нулю сеть элементов из $C(X(Z(\nabla)))$, $\varepsilon > 0$, $V \in \mathcal{B}$. Положим $G_\alpha = \{t \in X(Z(\nabla)) : x_\alpha(t) > \varepsilon\}$ и $U_\alpha = \bar{G}_\alpha$. Тогда U_α — открыто-замкнутое подмножество в $X(Z(\nabla))$ и $0 \leqslant x_\alpha(t) \leqslant \varepsilon$, если $t \,\bar{\in}\, U_\alpha$. Обозначим через a_α элемент из $Z(\nabla)$, соответствующий множеству U_α. Тогда $a_\alpha \leqslant \frac{1}{\varepsilon} x_\alpha$ (напомним, что a_α отождествляется с характеристической функцией множества U_α). Нетрудно видеть, что если $M \subset Z(\nabla)$, то $\vee M$ в $Z(\nabla)$ совпадает с точной верхней гранью множества M в $C(X(Z(\nabla)))$. Поэтому $d_\alpha = \bigvee_{\beta \geqslant \alpha} a_\beta \leqslant \frac{1}{\varepsilon} x_\alpha$ и $d_\alpha \downarrow 0$ в $Z(\nabla)$, т. е. $a_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в $Z(\nabla)$. Следовательно, существует такое $\alpha_0 \in A$, что $a_\alpha \in V$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тогда $x_\alpha \in \Omega(V, \varepsilon)$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Пусть D — размерностная функция на ∇ со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$. Положим

$$W(V, \varepsilon) = \{(a, b) \in \nabla \times \nabla : D(a \Delta b) \in \Omega(V, \varepsilon)\},$$

$V \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$. Каждое множество $W(V, \varepsilon)$ симметрично. В силу свойств 1), 2) и п. 4) предложения 3 из § 2

$$W\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \circ W\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset W(V_2, \varepsilon),$$

где $V_1 V_2 \in \mathcal{B}$ и $V_1 \vee V_1 \subset V_2$.

Очевидно, что каждое множество $W(V, \varepsilon)$ содержит $\{(a, a) : a \in \nabla\}$ и

$$W(V_1 \cap V_2, \varepsilon) \subset W(V_1, \varepsilon) \cap W(V_2, \varepsilon),$$

$V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$. Поэтому семейство $\{W(V, \varepsilon)\}$, $V \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ определяет на ∇ базу некоторой равномерности $\mathcal{U}$. Если $(a, b) \in W(V, \varepsilon)$ для всех $V \in \mathcal{B}$ и $\varepsilon > 0$, то $D(a \Delta b) = 0$ (свойство 3)) и потому $a \Delta b = 0$, т. е. $a = b$. Следовательно, $\mathcal{U}$ — отделимая равномерность на ∇. Если $(a, b) \in W(V, \varepsilon)$, то $D(a^\perp \Delta b^\perp) = D(a \Delta b) \in \Omega(V, \varepsilon)$, т. е. $(a^\perp, b^\perp) \in W(V, \varepsilon)$. Поэтому равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R1). Повторяя доказательство предложения 2 из § 6, получаем, что

$$D((a \vee c) \Delta (b \vee d)) \leqslant D(a \Delta b) + D(c \Delta d)$$

для любых $a, b, c, q \in \nabla$. Отсюда и из свойств 1) и 2) следует

$$W\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \vee W\left(V_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset W(V_2, \varepsilon),$$

где V_1, $V_2 \in \mathcal{B}$, $V_1 \vee V_1 \subset V_2$ и $\varepsilon > 0$. Таким образом, равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию R2). Пусть теперь a_α, $a \in \nabla$,

$\alpha \in A$ и $a_\alpha \downarrow a$. Тогда $D(a_\alpha \Delta a) \downarrow 0$ и в силу свойства 4) для каждого $W(V, \varepsilon)$ существует такое $\alpha_0 \in A$, что $(a_\alpha, a) \in W(V, \varepsilon)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, т. е. сеть $\{a_\alpha\}$ сходится к a относительно топологии, порожденной равномерностью $\mathcal{U}$. Следовательно, $(\nabla, \mathcal{U})$— равномерная логика. ■

Следствие. Любая равномерная булева алгебра изоморфна прямому произведению равномерных булевых алгебр счетного типа.

В заключение параграфа приведем достаточное условие для существования строго положительной (o)-непрерывной оценки на логике. В случае булевых алгебр это условие дается в теореме А. Г. Пинскера, которая гласит следующее: если на регулярной булевой алгебре ∇ существует строго положительная оценка, то на ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка. Доказательство этой теоремы можно найти в [51, 65].

Теорема 5. Пусть ∇ — полная логика. Следующие условия эквивалентны:

1) ∇ регулярна и на ней существует строго положительная оценка;

2) на ∇ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка;

3) ∇ дедекиндова и на ее центре существует строго положительная (o)-непрерывная оценка.

Доказательство. Импликация 2) → 1) следует из теоремы 4 § 7 и предложения 3, а импликация 2) → 3) — из предложения 4 § 5. Пусть ∇ — регулярная логика, $Z(\nabla)$ — центр в ∇ и m — строго положительная оценка на ∇. Тогда ∇ дедекиндова и потому на ∇ существует размерностная функция D со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$, где $X(Z(\nabla))$ — реализующий булеву алгебру $Z(\nabla)$ экстремальный компакт. По теореме А. Г. Пинскера на $Z(\nabla)$ существует строго положительная (o)-непрерывная оценка. Эта оценка индуцирует на алгебре $\mathcal{B}$ всех открыто-замкнутых подмножеств в $X(Z(\nabla))$ меру, которую также будем обозначать через μ, причем эта мера будет счетно-аддитивной на $\mathcal{B}$ $\Big($действительно, если $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, U, $U_n \in \mathcal{B}$, $U_n \cap U_k = \varnothing$, $n \neq k$, то все $U_n = \varnothing$ начиная с некоторого номера, так как в противном случае можно выбрать по одной точке t_n из U_n и тогда множество изолированных точек $X = \{t_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет предельную точку в компакте $X(Z(\nabla))$, которая принадлежит U, но не принадлежит каждому U_n, $n = 1, 2, \ldots\Big)$. Обозначим через $\bar{\mu}$ продолжение меры μ по Лебегу, а через $\bar{\mathcal{B}}$ — σ-алгебру всех измеримых по Лебегу подмножеств из $X(Z(\nabla))$ (см. [137]).

Покажем, что каждое открытое множество G в $X(Z(\nabla))$ принадлежит $\overline{\mathcal{B}}$. Пусть $\{a_\alpha\}$ — возрастающая сеть из $Z(\nabla)$, для которой $G = \bigcup_\alpha U(a_\alpha)$, где $U(a_\alpha)$ — открыто-замкнутое множество, соответствующее элементу a_α. Положим $a = \bigvee_\alpha a_\alpha$, тогда $U(a) = \overline{G}$. Так как $Z(\nabla)$ имеет счетный тип, то можно выбрать такую возрастающую последовательность индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots$, что $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n}$. Пусть $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(a_{\alpha_n})$, тогда

$$G_0 \subset G, \quad \overline{G}_0 = U(a), \quad G_0 \in \overline{\mathcal{B}}$$

и

$$\overline{\mu}(G_0) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}\left(U(a_{\alpha_n})\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_{\alpha_n}) = \mu(a) = \overline{\mu}(U(a)).$$

Так как мера $\overline{\mu}$ полная, то $G \in \overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mu} G = \overline{\mu}(U(a))$. Отсюда следует, что каждая функция x из $C(X(Z(\nabla)))$ является измеримой относительно σ-алгебры $\overline{\mathcal{B}}$ и потому интегрируемой по мере $\overline{\mu}$. Покажем теперь, что если $\{x_n\} \subset C(X(Z(\nabla)))$ и $x_n \downarrow 0$ в $C(X(Z(\nabla)))$, то $x_n \to 0$ почти всюду относительно меры $\overline{\mu}$ (п. в. $\overline{\mu}$). Пусть $x(t) = \inf_n x_n(t)$, тогда $x(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(X(Z(\nabla)), \overline{\mathcal{B}})$ и если $x(t) \neq 0$ п. в., то существуют такие $F \in \overline{\mathcal{B}}$ и $\varepsilon > 0$, что $\overline{\mu} F \neq 0$ и $x(t) > 2\varepsilon$ для всех $t \in F$. Положим $G_n = \{t \in X(Z(\nabla)) : x_n(t) > \varepsilon\}$ и $U_n = \overline{G}_n$. Очевидно, что $U_{n+1} \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{a_n\}$ — убывающая последовательность из $Z(\nabla)$, для которой $U(a_n) = U_n$. Тогда $a_n \leqslant \frac{1}{\varepsilon} x_n$ и $a_n \downarrow 0$ в $Z(\nabla)$, поэтому $\mu(a_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\mu\left(a_n^{\perp}\right) \to \mu(1)$. Если $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U\left(a_n^{\perp}\right)$, то $N = (X(Z(\nabla)) \setminus G) \in \overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mu}(N) = 0$. Пусть $F_n = U\left(a_n^{\perp}\right) \cup N$, тогда $F_n \in \overline{\mathcal{B}}$, $F_n \subset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X(Z(\nabla))$. Следовательно,

$$\overline{\mu}(F) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(F \cap F_n).$$

Поэтому существует такое n_0, что $\overline{\mu}(F \cap F_{n_0}) \neq 0$, т. е. $\mu \times \times \left(F \cap U\left(a_{n_0}^{\perp}\right)\right) \neq 0$. Но для каждого $t \in F \cap U\left(a_{n_0}^{\perp}\right)$

$$2\varepsilon < x(t) \leqslant x_{n_0}(t) \leqslant \varepsilon.$$

Из полученного противоречия вытекает, что $x_n \to 0$ (п. в. $\bar{\mu}$). Покажем теперь, что из условия 1) следует условие 2). Для каждого $b \in \nabla$ положим $\nu(b) = \int\limits_{X(Z(\nabla))} D(b)\, d\bar{\mu}$. Очевидно что $\nu(b) \geqslant 0$, $\nu(0) = 0$ и $\nu(a \vee b) = \nu(a) + \nu(b)$ при $a \wedge b = 0$. Если $\nu(b) = 0$, то $D(b) = 0$ (п. в. $\bar{\mu}$) и так как $D(b) \in C(X(Z(\nabla)))$, то $D(b) = 0$. Поэтому $b = 0$, т. е. ν — строго положительная оценка на ∇. Пусть $\{a_n\} \subset \nabla$ и $a_n \downarrow 0$, тогда $D(a_n) \downarrow 0$ и, согласно доказанному выше, $D(a_n) \to 0$ (п. в. $\bar{\mu}$) при $n \to \infty$. Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что $\nu(a_n) \to 0$. Таким образом, ν — (os)-непрерывная оценка на ∇ и так как ∇ имеет счетный тип, то ν — строго положительная (o)-непрерывная оценка на ∇. Аналогично доказывается импликация 3) $\to$ 2).

Библиография: [51, 52, 54, 55, 79, 80, 122, 146].

Глава II

ПОЛУПОЛЯ

§ 1. Аксиомы полуполя

Коммутативное кольцо E будем называть частично упорядоченным, если на E задано отношение частичного порядка «$\geqslant$», для которого:

1) из $x \geqslant y$ следует $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in E$;

2) из $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ следует $xy \geqslant 0$.

Очевидно, что в частично упорядоченном кольце E из неравенств $x \geqslant y$, $z \geqslant 0$ вытекает $xz \geqslant yz$. Частично упорядоченное кольцо E называется условно полным, если для всякого ограниченного сверху подмножества $M \subset E$ существует точная верхняя грань. Множество $\overline{F}$ из E назовем (o)-замыканием множества $F \subset E$, если для любого $x \in \overline{F}$ существует сеть $\{x_\gamma\} \subset F$, которая (o)-сходится к x.

Определение. Условно полное частично упорядоченное кольцо E, содержащее более одного элемента, называется полуполем, если в нем выделено множество K со следующими свойствами*):

1°: $\overline{K}$ совпадает с множеством всех неотрицательных элементов E, где $\overline{K}$ есть (o)-замыкание множества K в E;

2°: $K+\overline{K} \subset K$, $K \cdot K \subset K$;

3°: $E = K - K$;

4°: при $\alpha, \beta \in K$ уравнение $\alpha x = \beta$ имеет в K хотя бы одно решение.

Простейший пример полуполя — множество R действительных чисел, причем K есть совокупность положительных чисел.

Приведем другие примеры полуполей.

1. Полуполе R^Δ. Пусть Δ — произвольное непустое множество. Обозначим через R^Δ множество всех действительных функций на Δ. Для любого подмножества $A \subset \Delta$ через 1_A условимся обозначать характеристическую функцию множества A, т. е.

---

*) В предложении 6 из § 2 будет доказано, что K совпадает с совокупностью всех неотрицательных элементов E, для которых существуют обратные.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in A, \\ 0 \text{ при } x \in \overline{A}. \end{cases}$$

Если A состоит из одной точки q, то пишем $1_A = 1_q$. В дальнейшем будем отождествлять функцию 1_q с элементом $q \in \Delta$, считая, таким образом, множество Δ вложенным в R^Δ.

Относительно обычных операций сложения и умножения функций R^Δ является коммутативным ассоциативным кольцом. Введем в R^Δ частичный порядок, считая $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(q) \leqslant f_2(q)$ для любого $q \in \Delta$. При этом R^Δ становится условно полным частично упорядоченным кольцом. Через K обозначим множество всех положительных функций; $\overline{K}$ состоит из всех неотрицательных функций. При этом, очевидно, аксиомы $1^\circ - 4^\circ$ выполняются.

2. Полуполе $S(L)$. Рассмотрим все измеримые по Лебегу функции на отрезке $[0, 1]$ и отождествим те, которые отличаются лишь на множестве меры нуль. Обозначим через $S(L)$ совокупность классов эквивалентных функций. Относительно естественных операций сложения и умножения и естественного упорядочения — это условно полное частично упорядоченное кольцо. Определим K как совокупность классов функций, которые положительны почти всюду. При этом $\overline{K}$ составляют классы функций, неотрицательных почти всюду.

3. Полуполе $M(L)$. Это есть совокупность классов эквивалентных функций из $S(L)$, содержащих существенно ограниченные функции. Множество K состоит из классов функций, содержащих положительные почти всюду функции f, для которых $\frac{1}{f}$ — также существенно ограниченная функция.

4. Прямое произведение полуполей. Пусть A — некоторое множество индексов и каждому $\alpha \in A$ сопоставляется полуполе (E_α, K_α). Рассмотрим совокупность E функций x, заданных на A и принимающих значения $x^\alpha = x(\alpha) \in E_\alpha$; E является коммутативным ассоциативным кольцом относительно обычного сложения и умножения функций.

Определим в E отношение частичного порядка «$\geqslant$», считая, что $x \geqslant y$, если $x^\alpha \geqslant y^\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Легко видеть, что $x_\gamma \xrightarrow{(o)} x$ в том и только в том случае, когда $x_\gamma^\alpha \xrightarrow{(o)} x^\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Пусть $K = \{x : x^\alpha \in K_\alpha \text{ для любого } \alpha \in A\}$, $\overline{K}$ совпадает с множеством всех элементов $x \in E$, для которых $x^\alpha \in \overline{K}_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Следовательно, выполнена аксиома 1°. Справедливость аксиом $2^\circ - 4^\circ$ для E очевидным образом вытекает из справедливости этих аксиом в каждом из полуполей E_α. Полуполе E называется прямым произведением полуполей E_α и обозначается через $E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$. Отметим, что R^Δ является прямым произведением Δ экземпляров полуполей R.

Элемент x полуполя E будем называть положительным (неотрицательным) и писать $x > 0$ $(x \geqslant 0)$, если $x \in K$ $(x \in \overline{K})$. Условимся считать также, что $x > y$, если $x - y \in K$.

Предложение 1. Во всяком полуполе E существует единица; она определена однозначно и является положительным элементом.

Доказательство. В самом деле, пусть α — произвольный элемент множества K. Согласно аксиоме 4°, уравнение $\alpha x = \alpha$ имеет в K хотя бы одно решение. Обозначим через 1_α это решение (любое из них, если решение не единственно). Таким образом, $\alpha \cdot 1_\alpha = 1_\alpha \cdot \alpha = \alpha$ (напомним, что умножение коммутативно) и $1_\alpha > 0$. Пусть теперь β — любой другой элемент множества K. По аксиоме 4°, существует x, такой, что $\beta = \alpha x$. Имеем

$$1_\alpha \cdot \beta = 1_\alpha (\alpha x) = (1_\alpha \alpha) x = \alpha x = \beta.$$

Из аксимомы 3° следует, что любой элемент $z \in E$ представим в виде $z = \beta' - \beta''$, где β', $\beta'' \in K$ и потому

$$1_\alpha z = 1_\alpha (\beta' - \beta'') = 1_\alpha \beta' - 1_\alpha \beta'' = \beta' - \beta'' = z.$$

Следовательно, 1_α является единицей в E. Она определена однозначно (ибо если $1'$ и $1''$ — две единицы, то $1' = 1' \cdot 1'' = 1''$). ■

В дальнейшем единица будет обозначаться символом 1.

В приведенных выше примерах полуполей единицей служит функция, тождественно равная 1, или содержащий ее класс эквивалентных функций.

Предложение 2. Уравнение $\alpha x = 1$ $(\alpha > 0)$ имеет в E единственное решение; оно является положительным элементом. Этот элемент мы обозначим через α^{-1}.

Доказательство. Действительно, пусть α — произвольный положительный элемент. По аксиоме 4°, существует $\beta > 0$, такое, что $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$.

Если β' — любое решение уравнения $\alpha x = 1$, то

$$\beta = \beta \cdot 1 = \beta(\alpha\beta') = (\beta\alpha)\beta' = 1 \cdot \beta' = \beta'. \ ■$$

В примерах 1—4 обратным элементом для f является функция $\frac{1}{f}$ (или содержащий ее класс эквивалентных функций).

Предложение 3. В полуполе E всякое конечное подмножество имеет точную верхнюю и нижнюю грани (т. е. E является решеткой).

Доказательство. Достаточно доказать существование точной верхней грани. В силу условной полноты нужно только проверить, что конечное множество ограничено сверху, но это непосредственно следует из неравенства

$$x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

где

$$x_i = a_i - b_i;\ a_i,\ b_i \in K,\ i = \overline{1, m}. \blacksquare$$

Отметим некоторые свойства $\vee$ и $\wedge$.

Предложение 4. Если $\vee M$ существует, то

$$\vee (a + M) = a + \vee M.$$

Это утверждение очевидно.

Предложение 5*). Если $\alpha \geqslant 0$ — такой элемент, что множество M, состоящее из элементов α, $\alpha+\alpha$, $\alpha+\alpha+\alpha, \ldots$, ограничено сверху, то $\alpha = 0$.

Доказательство. Действительно, множество M', состоящее из элементов $\alpha+\alpha$, $\alpha+\alpha+\alpha, \ldots$, ограничено сверху и $\vee M' = \vee M$, но $M' = \alpha + M$ и в силу предложения 4 $\vee M' = \alpha + \vee M$, стало быть, $\alpha = 0$. $\blacksquare$

Предложение 6. Для любых элементов $x, y \in E$ верно соотношение

$$x \vee y + x \wedge y = x + y.$$

Доказательство. Действительно,

$$x - (x \wedge y) = x + (-x) \vee (-y) = 0 \vee (x - y) = y \vee x - y. \blacksquare$$

Библиография: [9, 10, 52].

§ 2. Положительная и отрицательная части. Дизъюнктность

Пусть x — произвольный элемент полуполя. Элементы $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0$ называются соответственно положительной и отрицательной частями элемента x, а элемент $|x| = x_+ + x_-$ — модулем элемента x. Очевидно, что x_+, x_-, $|x|$ неотрицательны и $x = 0$ тогда и только тогда, когда $|x| = 0$. Например, в R^Δ для элемента $f \in R^\Delta$

$$f_+(q) = \begin{cases} f(q), & \text{если } f(q) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(q) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(q) \geqslant 0, \\ -f(q), & \text{если } f(q) < 0. \end{cases}$$

---

*) Это свойство часто называют аксиомой Архимеда.

Для любого элемента $x \in E$ справедливо соотношение $x = x_+ - x_-$. Действительно,

$$x_+ - x = (x \vee 0) - x = 0 \vee (-x) = x_-.$$

Это разложение минимально в том смысле, что если $x = x' - x''$, где $x' \geqslant 0$, $x'' \geqslant 0$, то $x' \geqslant x_+$, $x'' \geqslant x_-$.

Предложение 1. Для любых двух элементов x, y полуполя E существует такой положительный элемент γ, что $\gamma x < 1$, $\gamma y < 1$.

Доказательство. Пусть $x = x' - x''$, $y = y' - y''$, где элементы x', x'', y', y'' положительны.

Положим $\gamma = (x' + y')^{-1}$. Тогда имеем

$$1 = \gamma(x' + y') = \gamma(x + x'' + y') = \gamma(x' + y + y'')$$

и потому, учитывая аксиому 2° и неравенство $\gamma > 0$, получаем

$$1 - \gamma x = \gamma(x'' + y') > 0, \quad 1 - \gamma y = \gamma(x' + y'') > 0. \blacksquare$$

Предложение 2. Для любого элемента $x \in E$ справедливо равенство $x_+ x_- = 0$.

Доказательство. Пусть γ — такой положительный элемент, что $1 - \gamma x_+ > 0$, $1 - \gamma x_- > 0$ (см. предложение 1). Положим $x' = x_+ - \gamma x_+ x_-$, $x'' = x_- - \gamma x_+ x_-$. Тогда $x' = x_+(1 - \gamma x_-) \geqslant 0$, $x'' = x_-(1 - \gamma x_+) \geqslant 0$. Очевидно, $x' - x'' = x_+ - x_- = x$. Отсюда вытекает, что $x' \geqslant x_+$, т. е. $\gamma x_+ x_- \leqslant 0$. Таким образом, $\gamma x_+ x_- \in -\overline{K}$. Так как, кроме того, $\gamma x_+ x_- \in \overline{K}$, то $\gamma x_+ x_- = 0$; умножив последнее равенство на γ^{-1}, получим равенство $x_+ x_- = 0$. $\blacksquare$

Предложение 3. Для любого $\alpha \in E$ выполнены соотношения $\alpha^2 = |\alpha|^2 \geqslant 0$. Если $\alpha^2 = 0$, то $\alpha = 0$.

Доказательство. Первое утверждение сразу вытекает из предложения 2. Далее, если $\alpha^2 = 0$, то $|\alpha|^2 = 0$ и поэтому для любого натурального числа n

$$(1 - n|\alpha|)(1 + n|\alpha|) = 1.$$

Очевидно, что $1 + n|\alpha| > 0$. Значит, $1 - n|\alpha| > 0$. Таким образом, множество $\{|\alpha|, 2|\alpha|, \ldots\}$ ограничено сверху и в силу предложения 5 $|\alpha| = 0$. Отсюда $\alpha = 0$. $\blacksquare$

Предложение 4. Если α и β — такие элементы из $\overline{K}$, что $\alpha\beta = 0$, то $(\alpha - \beta)_+ = \alpha$, $(\alpha - \beta)_- = \beta$.

Доказательство. Пусть $(\alpha - \beta)_+ = \alpha'$, $(\alpha - \beta)_- = \beta'$. Тогда $\alpha'\beta' = 0$ (см. предложение 2) и, кроме того, $\alpha \geqslant \alpha'$, $\beta \geqslant \beta'$, т. е. $\alpha - \alpha' \geqslant 0$, $\beta - \beta' \geqslant 0$.

Таким образом, $(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') \geqslant 0$. Отсюда, учитывая соотношения $\alpha\beta = 0$, $\alpha'\beta' = 0$, получаем $-\alpha\beta' - \beta\alpha' \geqslant 0$. Так как, с другой стороны, $\alpha\beta' + \beta\alpha' \geqslant 0$, то $\alpha\beta' = \beta\alpha' = 0$. Далее, так как

$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$, то $(\alpha-\alpha')^2=(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')=0$. Следовательно, $\alpha-\alpha'=0$ и потому $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$. ■

Предложение 5. Для любых двух элементов $x, y \in E$: $(xy)_+=x_+y_++x_-y_-$, $(xy)_-=x_-y_++x_+y_-$, $|xy|=|x||y|$.

Доказательство. Пусть $\alpha=x_+y_++x_-y_-$, $\beta=x_-y_++x_+y_-$. В силу предложения 2 имеем $\alpha\beta=0$. Кроме того, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$. Поэтому, согласно предложению 4, $(\alpha-\beta)_+=\alpha$, $(\alpha-\beta)_-=\beta$.

Далее

$$\alpha-\beta=x_+y_+-x_-y_++x_-y_--x_+y_-=(x_+-x_-)(y_+-y_-)=xy$$

и потому

$$(xy)_+=(\alpha-\beta)_+=\alpha=x_+y_++x_-y_-,$$
$$(xy)_-=(\alpha-\beta)_-=\beta=x_-y_++x_+y_-.$$

Отсюда

$$|xy|=(xy)_++(xy)_-=x_+y_++x_-y_-+x_-y_++x_+y_-=$$
$$=(x_++x_-)(y_++y_-)=|x|\cdot|y|. \blacksquare$$

Предложение 6. Элемент $x\in E$ тогда и только тогда обладает обратным элементом x^{-1}, когда $|x|\in K$.

Доказательство. Действительно, пусть $|x|>0$. Тогда обратным элементом для x является элемент $x^{-1}=x\left(|x|^{-1}\right)^2$; в самом деле,

$$x\cdot x\left(|x|^{-1}\right)^2=x^2\left(|x|^{-1}\right)^2=|x|^2\left(|x|^{-1}\right)^2=\left(|x||x|^{-1}\right)^2=1.$$

Наоборот, пусть элемент $x\in E$ обладает обратным, т. е. существует такой элемент $y\in E$, что $xy=1$. Тогда $|x||y|=1$.

Пусть затем β', β'' — такие положительные элементы, что $\beta'-\beta''=|y|$. Тогда $|x|\beta'-|x|\beta''=|x||y|=1$ и потому $|x|\beta'=1+|x|\beta'>0$. Умножив это соотношение на положительный элемент $(\beta')^{-1}$, получим $|x|>0$. ■

Замечание. Из предложения 6 вытекает, что, зная алгебраические операции в частично упорядоченном кольце E, можно однозначно восстановить множество K как совокупность неотрицательных элементов из E, для которых существуют обратные.

Следующие неравенства имеют место в любых векторных решетках. Их доказательства можно найти в [52].

Предложение 7. Для любых элементов x, y, u, v полуполя E справедливы неравенства

$$(x+y)_+\leqslant x_++y_+;\quad (x+y)_-\leqslant x_-+y_-;$$
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|;\quad |x\vee y-u\vee v|\leqslant|x-u|+|y-v|. \blacksquare$$

Предложение 8. Пусть $x_i \in E$, $i \in I$, I — некоторое множество индексов, и существует $x = \bigvee_{i \in I} x_i$. Тогда

а) $x_+ = \bigvee_{i \in I} x_i^+$, $x_- = \bigwedge_{i \in I} x_i^-$;

б) для любого $y \in E$ справедливо равенство

$$y \wedge \left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{i \in I} (y \wedge x_i).$$

Доказательство. Первая из формул а) вытекает из ассоциативного закона для верхних граней. Действительно,

$$x_+ = x \vee 0 = \left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \vee 0 = \bigvee_{i \in I} (x_i \vee 0) = \bigvee_{i \in I} x_i^+.$$

Докажем вторую формулу. Из $x \geqslant x_i$ для любого $i \in I$ следует, что $x_- \leqslant x_i^-$ для всех $i \in I$. Пусть элемент $y \in E$ такой, что $y \leqslant x_i^-$ для любого $i \in I$. Тогда $-y \geqslant -x_i^-$, или $x_i^+ - y \geqslant x_i$. Отсюда $x_+ - y \geqslant x = x_+ - x_-$, или $-y \geqslant -x_-$, а это значит, что $y \leqslant x_-$, т. е. $x_- = \bigwedge_{i \in I} x_i^-$.

Перейдем к п. б). Так как $(x - y) = \bigvee_{i \in I} (x_i - y)$, то на основании п. а) имеем

$$(x - y)_- = \bigwedge_{i \in I} \left[(x_i - y)_-\right].$$

Отсюда

$$-(x - y)_- = \bigvee_{i \in I} \left[-(x_i - y)_-\right],$$

или

$$(x - y) \wedge 0 = \bigvee_{i \in I} \left[(x_i - y) \wedge 0\right].$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства y, получаем

$$x \wedge y = \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge y). \blacksquare$$

Определение. Элементы x и y полуполя E называются дизъюнктными, если $|x| \wedge |y| = 0$. Например, в R^Δ элементы f и g дизъюнктны, если множества $\{f \neq 0\}$ и $\{g \neq 0\}$ не имеют общих точек.

Предложение 9. Элементы x и y тогда и только тогда дизъюнктны, когда $xy = 0$.

Доказательство. Пусть элементы x, y, дизъюнктны, т. е. $|x| \wedge |y| = 0$. Тогда $(|x| - |y|) \wedge 0 = -|y|$ и потому $(-|x| + |y|) \vee 0 = |y|$. Таким образом, $(|x| - |y|)_- = |y|$, откуда $(|x| - |y|)_+ = |x|$. Отсюда в силу предложения 2 следует, что $|x||y| = 0$ и потому $xy = 0$.

Наоборот, пусть $xy = 0$. Тогда $|x||y| = 0$, $(|x| - |y|)_+ = |x|$, $(|x| - |y|)_- = |y|$.

Второе из этих соотношений означает, что $(|y|-|x|) \vee 0 = |y|$, или $(-|x|) \vee (-|y|) = 0$. Отсюда $|x| \wedge |y| = 0$, т. е. x и y дизъюнктны. ■

Предложение 10. Если $x = y - z$, где $y, z \in \overline{K}$ и $y \wedge z = 0$, то $y = x_+$, $z = x_-$.

Доказательство. Из предложения 4 следует, что $(y-z)_+ = y$, $(y-z)_- = z$, т. е. $x_+ = y$, $x_- = z$. ■

Предложение 11. Если $x = \bigvee_{i \in I} x_i$ и y дизъюнктно с x_i при любом $i \in I$, то y дизъюнктно с x.

Доказательство. Положим $z^{(i)} = x_i - x_{i_0}$, $z = x - x_{i_0}$. В силу предложения 4 из § 1 $\bigvee_i z^{(i)} = z \geqslant 0$ и, согласно предложению 8, $z = \bigvee_i z_+^{(i)}$. Имеем

$$z \wedge |y| = \left(\bigvee_i z_+^{(i)}\right) \wedge |y| = \bigvee_i \left(z_+^{(i)} \wedge |y|\right) = 0$$

(так как из дизъюнктности y и x_i, $i \in I$, вытекает дизъюнктность $|y|$ и $z^{(i)}$). Из дизъюнктности z и y следует, что дизъюнктны $x = z + x_{i_0}$ и y. ■

Библиография: [9, 10, 52].

§ 3. Идемпотенты. Ось полуполя

Рассмотрим связь между полуполями и алгебрами Буля. Элемент $e \in E$ называется идемпотентным, если $e^2 = e$. Совокупность ∇ всех идемпотентов полуполя E оказывается булевой алгеброй. Более того, ∇ является полной булевой алгеброй. Прежде чем рассматривать общую ситуацию, поясним это на примере полуполя R^Δ. В этом полуполе идемпотентами являются функции с двумя значениями 0 и 1, т. е. индикаторы подмножеств множества Δ. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех идемпотентов полуполя R^Δ и булевой алгеброй 2^Δ всех подмножеств из Δ. Это соответствие является изоморфизмом и можно считать, что 2^Δ вложено в R^Δ.

Переходим теперь к общему случаю.

Теорема 1. Совокупность ∇ всех идемпотентов произвольного полуполя E с отношением порядка, индуцированным из E, является полной булевой алгеброй.

Доказательство. Проверим, что для любого подмножества $M \subset \nabla$ элементы $\vee M$ и $\wedge M$ существуют и принадлежат ∇. Действительно, для любого $e \in \nabla$ $0 \leqslant e \leqslant 1$. Поэтому множество M ограничено и элементы $\vee M$, $\wedge M$ существуют. Положим $x = \vee M$. Тогда $x \leqslant 1$. Так как $x \geqslant e$ для любого $e \in M$, то $x^2 \geqslant e^2 = e$ и потому $x^2 \geqslant x$, но так как $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 1$, то, умножив неравенство $x \leqslant 1$ на x, получим $x^2 \leqslant x$. Следовательно, $x^2 = x$, т. е. $x = \bigvee M$ есть идемпотент. Далее, если $e \in \nabla$, то $1 - e \in \nabla$, так что все элементы множества $1 - M$ являются идемпотентами. В частности, идемпотентом является и элемент $\bigvee (1 - M) = 1 + \bigvee (-M) = 1 - \bigwedge M$ (см. предложение 4 из § 1). Из этого следует, что $\bigwedge M$ есть идемпотент. Заметим, что идемпотенты e и $1 - e$ дизъюнктны. Если e и e' — дизъюнктные идемпотенты, то $e' \leqslant 1 - e$ и элемент $e + e'$ также является идемпотентом. Действительно, если идемпотенты e и e' дизъюнктны, т. е. $e \wedge e' = 0$, то в силу предложения 6 из § 1 $e + e' = e \vee e'$ и потому элемент $e + e'$ также является идемпотентом. Проверим, что для любых двух идемпотентов e_1, e_2 справедливы соотношения $e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2$, $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_2 - e_1 e_2$. В самом деле, так как $e_1 \leqslant 1$, то $e_1 e_2 \leqslant e_2$. Аналогично $e_1 e_2 \leqslant e_1$. Таким образом, $e_1 e_2 \leqslant e_1 \wedge e_2$. Далее, так как $e_1 \wedge e_2 \geqslant 0$, то из очевидного неравенства $e_1 \wedge e_2 \leqslant e_1$ получаем $(1 - e_1)(e_1 \wedge e_2) \leqslant 0$, откуда $(1 - e_1)(e_1 \wedge e_2) = 0$, т. е. $(e_1 \wedge e_2) e_1 = e_1 \wedge e_2$. Аналогично $(e_1 \wedge e_2) e_2 = e_1 \wedge e_2$. Теперь мы имеем $e_1 \wedge e_2 = (e_1 \wedge e_2) e_2 = (e_1 \wedge e_2) e_1 e_2 \leqslant e_1 e_2$ (потому что $e_1 \wedge e_2 \leqslant 1$). Из установленных неравенств $e_1 e_2 \leqslant e_1 \wedge e_2$ и $e_1 \wedge e_2 \leqslant e_1 e_2$ вытекает, что $e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2$. Из предложения 6 § 1 следует, что $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_2 - e_1 e_2$. Опираясь на доказанные соотношения, нетрудно проверить, что ∇ — полная булева алгебра (причем $e^{\perp} = 1 - e$). ■

Условимся отождествлять натуральное число 1 с единицей 1 полуполя E, натуральное число n с суммой $1 + 1 + \cdots + 1$ (n слагаемых), число 0 с нулем 0 полуполя E, а число $(-n)$ (где n — целое положительное число) с элементом $-\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n}$.

Такое отождествление не приведет к противоречию, так как все эти элементы полуполя E отличны друг от друга (в частности, элемент $1 + 1 + \cdots + 1$ является строго положительным и потому отличен от нуля); они складываются и умножаются по тем же правилам, что и целые числа. В соответствии со сказанным будем именовать эти элементы полуполя E целыми числами.

Далее, если a, b, m — три целых числа, причем $b \neq 0$, $m \neq 0$, то уравнения $bx = a$ и $(mb)x = ma$ имеют в полуполе E одно и то же решение

$$x = (ma)(mb)^{-1} = mam^{-1}b^{-1} = mm^{-1}ab^{-1} = ab^{-1}.$$

Это решение условимся отождествлять с рациональным числом $\frac{a}{b}$.

Таким образом, в полуполе E выделено подмножество Q элементов вида $\frac{a}{b}$ (где a и b — целые), причем множество Q (рассматриваемое с имеющимися в E сложением и умножением) изоморфно полю рациональных чисел. Кроме того, для любых двух элементов r_1, r_2 из Q выполнено одно из трех соотношений:

$r_1 < r_2$, $r_1 = r_2$, $r_1 > r_2$, и эти неравенства согласуются с неравенствами для рациональных чисел $\Bigl($так как $1 > 0$, $1+1+\cdots+1>0$ и потому $\frac{a}{b} > 0$ при $b > 0$, $a > 0$; отсюда следуют и остальные неравенства$\Bigr)$. Пусть теперь α — произвольное положительное действительное число. Обозначим через P множество всех тех положительных элементов из Q, которые, как рациональные числа, меньше α, а через R — множество всех тех элементов из Q, которые, как рациональные числа, больше α. Для любых элементов $p \in P$, $q \in R$ имеем $p < q$. Поэтому множество P ограничено сверху, а множество R — снизу. Следовательно, элементы $\bigvee P$, $\bigwedge R$ существуют. Так как при $p \in P$, $q \in R$ выполнено неравенство $p < q$, то $\bigvee P \leqslant q$ при $q \in R$, откуда $\bigvee P \leqslant \bigwedge R$.

Далее, каково бы ни было положительное рациональное число r, найдутся такие элементы $p \in P$, $q \in R$, что $q - p < r$; так как, кроме того, $p \leqslant \bigvee P$, $q \geqslant \bigwedge R$, то $\bigwedge R - \bigvee P < r$. Таким образом, разность $\bigwedge R - \bigvee P (\in \overline{K})$ меньше любого положительного элемента из Q.

В частности, $\bigwedge R - \bigvee P < \frac{1}{n}$ для любого натурального n, откуда $n(\bigwedge R - \bigvee P) < 1$. Поэтому $\bigwedge R - \bigvee P = 0$ (см. предложение 5 из § 1). Элемент $\bigwedge R = \bigvee P$ положителен (так как $\bigvee P \geqslant p$ при $p \in P$). Условимся отождествлять этот элемент с действительным числом α (если α рационально, то отождествление согласуется со сказанным ранее). В результате множество всех действительных чисел отождествляется с некоторым подмножеством D полуполя E. Законы сложения и умножения для множества D согласуются со сложением и умножением действительных чисел; то же относится и к неравенствам. Это множество будем называть осью полуполя E.

В полуполе R^{Δ} ось состоит из констант.

Предложение 1. Пусть $M \subset D$. Если $b = \bigvee M$ существует, то $b \in D$.

Доказательство. Допустим, что для любого $d \in D$ найдется $m \in M$, такое, что $d \leqslant m$. Тогда $d \leqslant b$ для любого $d \in D$, что противоречит предложению 5 из § 2. Следовательно, существует $d \in D$, такое, что $m \leqslant d$ для любого $m \in M$.

Пусть d_0 — наименьший элемент D, ограничивающий сверху M. Для любого натурального n существует $m_n \in M$, такое, что $0 \leqslant d_0 - m_n < \frac{1}{n}$, причем без ограничения общности можно считать, что m_n — возрастающая последовательность. Тогда $m_n \xrightarrow{(o)} d_0$ и $d_0 = \bigvee_{n=1}^{\infty} m_n$. Заметим, что $b \geqslant m_n$ для любого n и, следовательно, $b \geqslant \bigvee_{n=1}^{\infty} m_n = d_0$. Поэтому $d_0 = \bigvee M$. ■ Полуполе, совпадающее со своей осью, изоморфно полю действительных чисел. Всякое полуполе можно рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел. Под умножением на число понимается умножение на соответствующий элемент оси полуполя.

Библиография: [9, 10, 52].

§ 4. Носители элементов

В § 3 мы связали с каждым полуполем некоторую вложенную в него полную булеву алгебру. Важно иметь возможность построить все элементы полуполя, отправляясь от этой алгебры. Первым шагом является введение для каждого элемента a полуполя определенного идемпотента $s(a)$ — носителя элемента a. В полуполе R^{Δ} носителем элемента f является множество $\{q : f(q) \neq 0\}$, точнее, индикатор этого множества. Через носители легко определить лебеговы множества $\{\lambda_1 \leqslant f \leqslant \lambda_2\}$ для любых чисел $\lambda_1 < \lambda_2$, что и позволяет приближать произвольную функцию линейными комбинациями индикаторов или идемпотентов. Абстрактное понятие носителя позволит провести эту конструкцию в любом полуполе. Эта программа будет реализована в § 6.

Определение. Идемпотент e называется носителем элемента a, если $ae = a$ и $be = 0$ для любого элемента b, дизъюнктного с a. Будет доказано, что этими условиями идемпотент e определяется однозначно. Будем обозначать его через $s(a)$. Метод построения $s(a)$ лучше всего объяснить на примере полуполя R^{Δ}. Если $a \in R^{\Delta}$, то множество $\{a \neq 0\}$ является объединением множеств $\left\{|a| \geqslant \frac{1}{n}\right\} = \{|na| \geqslant 1\}$. С другой стороны, индикатор множества $\{|na| \geqslant 1\}$ равен $\lim\limits_{m \to \infty} |na^m| \wedge 1$. Пользуясь символами $\wedge$ и $\vee$, можно написать

$$s(a) = \bigvee_{n=1} \bigwedge_{m \geqslant 0} |na|^m \wedge 1.$$

Наша цель — доказать, что эта формула определяет носитель a для случая произвольного полуполя.

Предложение 1. Если $a \geqslant 0$, то элемент $e = 1 \wedge a \wedge a^2 \wedge \ldots$ является идемпотентом, удовлетворяющим соотношениям $a \geqslant e$, $(1 - e) a \leqslant 1 - e$. Если при этом не выполнено соотношение $a \geqslant 1$, то $e \neq 1$, а если не выполнено соотношение $a \leqslant 1$, то $e \neq 0$.

Доказательство. Так как $e \leqslant 1$, то $e^2 \leqslant e$. Если $e^2 \neq e$, то из неравенства $e^2 \leqslant e$ следует, что $(e + h)^2 \leqslant e$, где $h = \left(\frac{e - e^2}{4}\right) \wedge 1$. Действительно, $(e + h)^2 - e^2 = 2eh + h^2 \leqslant e - e^2$, т. е. $(e + h)^2 \leqslant e$.

В частности, $(e+h)^2 \leqslant 1$; $(e+h)^2 \leqslant a^2$, $(e+h)^2 \leqslant a^4$, ... Из этих соотношений вытекает, что $e+h \leqslant 1$, $e+h \leqslant a$, $e+h \leqslant a^2, \ldots$, т. е. $e+h \leqslant 1 \wedge a \wedge a^2 \cdots = e$, но это противоречит выбору элемента h. Таким образом, предположение $e^2 \neq e$ противоречиво и потому $e^2 = e$, т. е. e есть идемпотент. Если $e=1$, то $1 = e = 1 \wedge a \wedge a^2 \wedge \cdots \leqslant a$. Таким образом, если соотношение $a \geqslant 1$ не выполнено, то $e \neq 1$. Далее, если не выполнено соотношение $a \leqslant 1$, то $(a-1)_+ \neq 0$. Так как $1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} \in \overline{K}$, то

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})_+ = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1},$$

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})_- = 0.$$

При любом $m \geqslant 1$ в силу предложения 5 § 2 имеем

$$(a^m - 1)_+ = \left((a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})\right)_+ =$$

$$= (a-1)_+ (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}) \geqslant (a-1)_+ 1 = (a-1)_+ .$$

Так как оба элемента a^m и 1 принадлежат множеству $\overline{K}$, то $(a^m - 1)_+ \leqslant a^m$. Таким образом, при любом $m \geqslant 1$ имеем

$$a^m \geqslant (a^m - 1)_+ \geqslant (a-1)_+ \geqslant 1 \wedge (a-1)_+ .$$

Следовательно, $1 \wedge (a-1)_+ \leqslant 1 \wedge a \wedge a^2 \ldots$. В силу условия на a элемент $1 \wedge (a-1)_+ \in \overline{K}$ отличен от нуля (предложение 9 § 2) и потому $e \neq 0$.

Соотношение $a \geqslant e$ следует непосредственно из равенства $e = 1 \wedge a \wedge a^2 \wedge \cdots$. Докажем соотношение $(1-e)a \leqslant 1-e$ Положим $c = (1-e)a$, $d = 1 \wedge c \wedge c^2 \wedge \cdots$. Так как $c \geqslant 0$, то в силу уже доказанного элемент d является идемпотентом. При этом $d \leqslant c$ по определению, т. е. $d \leqslant (1-e)a$. Кроме того, $e \leqslant a$, откуда $e \leqslant ae$. Следовательно, $e + d \leqslant ae + (1-e)a = a$. Далее $ed \leqslant ec = e(1-e)a = 0$, откуда вытекает, что e и d — дизъюнктные идемпотенты и потому $e+d$ — идемпотент. Значит, $(e+d)^n = (e+d)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Возводя теперь соотношение $(e+d) \leqslant a$ в степень n, получаем $e + d \leqslant a^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, $e + d \leqslant 1$ (так как $e+d$ — идемпотент). Поэтому $e + d \leqslant 1 \wedge a \wedge a^2 \wedge \cdots = e$, откуда $d \leqslant 0$ и потому $d=0$. Однако если бы не было выполнено соотношение $c \leqslant 1$, то в силу уже доказанного мы имели бы $d \neq 0$. Следовательно, $c \leqslant 1$, т. е. $(1-e)a \leqslant 1$, откуда, умножая на $(1-e)$, получаем $(1-e)a \leqslant 1-e$. ■

Предложение 2. Для любого элемента $a \geqslant 0$, $a \neq 0$ существуют такое натуральное число n и такой идемпотент $e \neq 0$, что $\frac{1}{n} e \leqslant a$.

Доказательство. Пусть n — такое натуральное число, что соотношение $na \leqslant 1$ не выполнено. Тогда в силу предложения 1 элемент $e = 1 \wedge (na) \wedge (na)^2 \wedge \cdots$ является отличным от нуля идемпотентом, причем $e \leqslant na$. ■

Предложение 3. Если элементы $a, b \in \overline{K}$ таковы, что $a \cdot b \neq 0$, то существуют такое натуральное число n и такой идемпотент $e \neq 0$, что $\frac{1}{n} e \leqslant a$, $\frac{1}{n} e \leqslant b$.

Доказательство. Так как $a \cdot b \neq 0$, то $a \wedge b \neq 0$. Тогда существуют такое натуральное число n и такой идемпотент $e \neq 0$, что $\frac{1}{n} e \leqslant a \wedge b$. Из этого следует, что $\frac{1}{n} e \leqslant a$, $\frac{1}{n} e \leqslant b$. ■

Теорема 1. Для любого $a \in E$ существует однозначно определенный носитель $s(a)$.

Доказательство. Для каждого натурального n положим

$$e_a^n = 1 \wedge |na| \wedge |na|^2 \wedge \cdots \text{ и } s(a) = \bigvee_{n=1}^{\infty} e_a^n .$$

Допустим, что соотношение $as(a) = a$ не выполнено, т. е. $a(1 - s(a)) \neq 0$. Тогда $|a|(1 - s(a)) \neq 0$ и в силу предложения 5 § 1 существует такое n, что $n|a|(1 - s(a)) \leqslant 1$ не выполнено и, следовательно, в силу предложения 1 имеем

$$0 \neq e' = 1 \wedge |na|(1 - s(a)) \wedge [\,|na|(1 - s(a))]^2 \wedge \cdots \leqslant$$
$$\leqslant 1 \wedge |na| \wedge |na|^2 \wedge \cdots = e_a^n \leqslant s(a),$$

но тогда $e' s(a) = e'$, т. е. $e'(1 - s(a)) = 0$ и, кроме того, $e' \leqslant n|a|(1 - s(a)$ или $\frac{e'}{n} \leqslant |a|(1 - s(a))$. Умножив обе части последнего неравенства на ne', получим соотношение $e' \leqslant 0$. Это противоречие показывает, что $as(a) = a$. Пусть теперь b — элемент, дизъюнктный с a, т. е. $ab = 0$. Тогда $|a||b| = 0$. Допустим, что $bs(a) \neq 0$. Тогда $|b|s(a) \neq 0$ и в силу предложения 3 существуют такой идемпотент $e' \neq 0$ и такое натуральное число n', что $\frac{1}{n'} e' \leqslant |b|$ и $\frac{1}{n'} e' \leqslant s(a)$. Если бы для всех элементов e_a^n, $n = 1, 2, \ldots$, мы имели $e_a^n \leqslant 1 - e'$, то было бы выполнено соотношение $s(a) \leqslant 1 - e'$, откуда $e's(a) \leqslant e'(1 - e') = 0$, т. е. $e's(a) = 0$, но это противоречило бы соотношению $\frac{1}{n'} e' \leqslant s(a)$ (так как, умножив его на $n'e'$, мы получили бы $e' \leqslant 0$). Мы видим, что найдется элемент $e_a^{n_0}$, для которого соотношение $e_a^{n_0} \leqslant 1 - e'$ не выполнено, так что $e_a^{n_0} \neq e_a^{n_0} \wedge (1 - e')$. Следовательно, $e_a^{n_0} \cdot e' \neq 0$. Кроме того, $\frac{1}{n_0} e_a^{n_0} \leqslant |a|$. Перемножая теперь соотношения $\frac{1}{n'} e' \leqslant |b|$, $\frac{1}{n_0} e_a^{n_0} \leqslant |a|$, получаем $e_a^{n_0} e' \leqslant n_0' |a||b| = 0$, т. е. $e_a^{n_0} e' \leqslant 0$, но это противоречит тому, что $e_a^{n_0} e' \neq 0$. Таким образом, $b s(a) = 0$. Пусть теперь $s(a)$ и $s'(a)$ — два элемента, обладающие указанными свойствами носителя элемента a. Тогда

$$a(s(a) - s(a) s'(a)) = as(a) - (as(a)) s'(a) =$$
$$= a - as'(a) = a - a = 0,$$

т. е. a и $s(a) - s(a) s'(a)$ дизъюнктны. Следовательно, $s(a)s(a) - s(a) s'(a)) = 0$. т. е. $s(a) = s(a) s'(a)$ и потому $s(a) \leqslant s'(a)$. Аналогично устанавливается обратное неравенство $s'(a) \leqslant s(a)$. Таким образом, $s(a) = s'(a)$. ■

Предложение 4. Носители обладают следующими свойствами:

$$s(a \cdot b) = s(a) s(b);$$
$$s(a) = s(a_+) + s(a_-);$$
$$s(a_+) a = a_+;$$
$$s(a_-) a = -a_-.$$

Кроме того, если $a > 0$, то $s(a) = 1$. Наконец, если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $s(a) \geqslant s(b)$.

Доказательство. В самом деле,

$$s(a) s(b) a \cdot b = s(a) a \cdot s(b) b = ab.$$

Если c — произвольный элемент, дизъюнктный с ab, то $cab = 0$, т. е. $(ca)b = 0$ и потому $cas(b) = 0$. Иначе говоря, $(cs(b))a = 0$, откуда $cs(b) s(a) = 0$. Таким образом, элемент $s(a) s(b)$ обладает теми же свойствами, что и носитель элемента ab. Поэтому в силу единственности

$$s(a) s(b) = s(ab).$$

Далее

$$(s(a_+) + s(a_-)) a = (s(a_+)) a_+ - s(a_+) a_- + s(a_-) a_+ - s(a_-) a_- =$$
$$= s(a_+) a_+ - s(a_-) a_- = a_+ - a_- = a.$$

Если b — элемент, дизъюнктный с a, т. е. $ab = 0$, то $|a||b| = 0$ и потому $a_+ |b| = 0$, $a_- |b| = 0$. Следовательно, $s(a_+)|b| = 0$, $s(a_-)|b| = 0$, откуда $(s(a_+) + s(a_-))|b| = 0$, или $(s(a_+) + s(a_-)) b = 0$. Таким образом, $s(a_+) + s(a_-)$ обладает теми же свойствами, что и элемент $s(a)$, и в силу единственности $s(a_+) + s(a_-) = s(a)$. Соотношения $s(a_+) a = a_+$, $s(a_-) a = -a_-$ вытекают непосредственно из равенств $s(a) = s(a_+) + s(a_-)$, $s(a_+) s(a_-) = 0$.

Если $a > 0$, то имеем $s(a) s(a^{-1}) = s(aa^{-1}) = s(1) = 1$ и потому $s(a) = 1$. Наконец, если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $(1 - s(a)) b \leqslant$

$\leqslant (1-s(a))\,a = a - a = 0$, т. е. $(1-s(a))\,b = 0$, или $b - s(a)\,b = 0$. Иначе говоря, $(s(b)-s(a))\,b = 0$, откуда $(s(b)-s(a))\,s(b) = 0$, т. е. $s(b) = s(a)\,s(b)$, или $s(b) \leqslant s(a)$. ■

Предложение 5. Если a и b — элементы полуполя E и b не сравним с a, то существует такой отличный от нуля идемпотент e, что $be \geqslant ae$, $be \neq ae$.

Доказательство. Так как $b-a$ не сравним с 0 (соотношение $b \leqslant a$ не выполнено), то $(b-a)_+ \neq 0$. Обозначим через e носитель элемента $(b-a)_+$. Тогда $e \neq 0$ и в силу предложения 4 имеем $e(b-a) = (b-a)_+ \neq 0$, т. е. $be \geqslant ae$, $be \neq ae$. ■

Предложение 6. Пусть $M \subset \bar{K}$ и $a \geqslant 0$. Если существует $\vee M = b$, то $\vee aM = ab$. Если существует $\wedge M = c$, то $\wedge aM = ac$.

Доказательство. Пусть $\vee M = b$. Тогда для любого $m \in M$ имеем $m \leqslant b$ и потому $am \leqslant ab$. Следовательно, $\vee (aM) \leqslant ab$. Допустим, что $\vee (aM) \neq ab$. В силу предложения 2 существуют такое натуральное число n и такой идемпотент $e \neq 0$, что $\frac{1}{n} e \leqslant ab - \vee (aM)$ или $\vee (aM) \leqslant ab - \frac{1}{n} e$. Поэтому для любого $m \in M$ выполнено неравенство $am \leqslant a(\vee M) - \frac{1}{n} e$, или $a((\vee M) - m) \geqslant \frac{1}{n} e$. Так как $e \neq 0$, то в силу предложения 4 из § 1 существует такое натуральное n', что $n'e$ не меньше na. Из этого вытекает, что существует отличный от нуля идемпотент e^*, для которого $n'ee^* \geqslant e^*na$, $n'ee^* \neq e^*na$, т. е. $ee^* \geqslant \frac{n}{n'} e^*a$. Теперь имеем

$$e^*e((\vee M) - m) \geqslant \frac{e^*na}{n'}((\vee M) - m) \geqslant \frac{e^*e}{n'}.$$

Из построения следует, что элементы e, e^* и числа n и n' не зависят от выбора элемента $m \in M$. Таким образом,

$$((\vee M) - m) \geqslant e^*e((\vee M) - m) \geqslant \frac{e^*e}{n'}$$

для любого $m \in M$, откуда $m \leqslant (\vee M) - \frac{1}{n'} e^*e$ и, следовательно, $\vee M \leqslant (\vee M) - \frac{1}{n'} e^*e$, что противоречиво $\left(\text{так как } \frac{1}{n'} e'e \neq 0\right)$. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. ■

Предложение 7. Если $x = \sup\limits_{\alpha \in J} x_\alpha$, где $x_\alpha \geqslant 0$, то $s(x) = \bigvee\limits_{\alpha \in J} s(x_\alpha)$.

Доказательство:

$$s(x) = \bigvee_n (1 \wedge nx) = \bigvee_n \left(1 \wedge \sup_\alpha nx_\alpha\right) =$$

$$= \sup_n \sup_\alpha \left(1 \wedge n x_\alpha\right) = \sup_\alpha \left(\sup_n \left(1 \wedge n x_\alpha\right)\right) = \sup_\alpha s\left(x_\alpha\right). \blacksquare$$

Библиография: [9, 10, 52].

§ 5. Спектральная теорема

Пусть E — полуполе и ∇ — его булева алгебра.

Определение 1. Пусть элементы $x_\alpha \in E$ $(\alpha \in J)$ попарно дизъюнктны и в E существуют $\sup\limits_{\alpha \in J} x_\alpha^+$ и $\sup\limits_{\alpha \in J} x_\alpha^-$. Тогда соединением множества $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$ называется элемент, обозначаемый $\underset{\alpha \in J}{S}\, x_\alpha$ и определяемый формулой

$$\underset{\alpha \in J}{S}\, x_\alpha = \sup_{\alpha \in J} x_\alpha^+ - \sup_{\alpha \in J} x_\alpha^- .$$

В частности, если $x_\alpha \in \overline{K}$ для любого $\alpha \in J$, то $\underset{\alpha \in J}{S}\, x_\alpha = \bigvee\limits_{\alpha \in J} x_\alpha$. Кроме того, если J — конечное множество, то

$$\underset{n \in J}{S}\, x_n = \sum_{n \in J} x_n .$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, где $x_n \in E$, называется (o)-сходящимся, если существует (o)-предел последовательности частичных сумм ряда, $(o) = \lim\limits_{p \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{p} x_n$, называемый суммой ряда.

Очевидно, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-сходится, то $x_n \xrightarrow{(o)} 0$, и если $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ при всех n, то из (o)-сходимости ряда $\sum\limits_n y_n$ следует (o)-сходимость ряда $\sum\limits_n x_n$.

Предложение 1. Пусть все члены ряда Σx_n попарно дизъюнктны и в совокупности ограничены. Тогда

$$\underset{n \in N}{S}\, x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n .$$

Доказательство. Имеем $\underset{n \in N}{S}\, x_n = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n^- =$

$$= (o) - \lim_{p \to \infty} \bigvee_{n=1}^{p} x_n^+ - (o) - \lim_{p \to \infty} \bigvee_{n=1}^{p} x_n^- = (o) - \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{p} x_n^+ - \sum_{n=1}^{p} x_n^-\right) =$$

$$= (o) - \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{p} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n . \ \blacksquare$$

Определение 3. Для каждого $x \in E$ и каждого вещественного числа λ положим

$$e_\lambda^x = s\left[(\lambda 1 - x)_+\right] .$$

При фиксированном x система элементов $\left\{e_\lambda^x : -\infty < \lambda < +\infty\right\}$ называется спектральным семейством элемента x. Из определения 3 следует, что

$$e_\lambda^x (\lambda 1 - x) = s\left[(\lambda 1 - x)_+\right] (\lambda 1 - x) = (\lambda 1 - x)_+ \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$e_\lambda^x (\lambda 1 - x) = \lambda e_\lambda^x - e_\lambda^x x.$$

Следовательно,

$$\lambda e_\lambda^x \geqslant e_\lambda^x x. \qquad (1)$$

Аналогично получаем, что

$$\left(1 - e_\lambda^x\right)(\lambda 1 - x) = -(\lambda 1 - x)_- \leqslant 0$$

и потому

$$\left(1 - e_\lambda^x\right) x \geqslant \lambda \left(1 - e_\lambda^x\right) . \qquad (2)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Для каждого $x \in E$ спектральное семейство обладает следующими свойствами:

а) $e_\mu^x \geqslant e_\lambda^x$ при $\mu \geqslant \lambda$;

б) $\bigvee_\lambda e_\lambda^x = 1$;

в) $\bigwedge_\lambda e_\lambda^x = 0$;

г) $\bigvee_{\mu < \lambda} e_\mu^x = e_\lambda^x$ при каждом λ;

д) если $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2$, то $\left(e_{\mu_1}^x - e_{\mu_2}^x\right)\left(e_{\lambda_1}^x - e_{\lambda_2}^x\right) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

а) если $\mu \geqslant \lambda$, то $\mu 1 - x \geqslant \lambda 1 - x$, а тогда $(\mu 1 - x)_+ \geqslant (\lambda 1 - x)_+$ и, согласно предложению 4 из § 5, получим, что $e_\mu^x \geqslant e_\lambda^x$;

б) положим $e = \bigvee_\lambda e_\lambda^x$, тогда $1 - e \leqslant 1 - e_\lambda^x$ при всех λ; пусть $n \in N$, тогда, используя (2), получаем

$$n(1-e)\leqslant n\left(1-e_n^x\right)\leqslant\left(1-e_n^x\right)x\leqslant|x|.$$

По принципу Архимеда (см. предложение 5 из § 1), $1-e=0$;

в) этот пункт доказывается аналогично, если учесть, что при отрицательных λ справедливо неравенство $|\lambda|e_\lambda^x\leqslant-e_\lambda^x\cdot x$, получаемое из (1);

г) имеем $\lambda 1-x=\sup\limits_{\mu<\lambda}(\mu 1-x)$, отсюда $(\lambda 1-x)_+=\sup\limits_{\mu<\lambda}(\mu 1-x)_+$, тогда из предложения 7 § 4 получаем, что $e_\lambda^x=\sup\limits_{\mu<\lambda}e_\mu^x$;

д) из монотонности спектрального семейства следует, что

$$e_{\mu_1}^x-e_{\mu_2}^x\leqslant 1-e_{\lambda_1}^x,\ \text{а}\ e_{\lambda_1}^x-e_{\lambda_2}^x\leqslant e_{\lambda_1}^x;$$

итак,

$$\left(e_{\mu_1}^x-e_{\mu_2}^x\right)\left(e_{\lambda_1}^x-e_{\lambda_2}^x\right)=0. \ ■$$

Предложение 3. При любых $\mu\geqslant\lambda$

$$\lambda\left(e_\mu^x-e_\lambda^x\right)\leqslant\left(e_\mu^x-e_\lambda^x\right)x\leqslant\left(e_\mu^x-e_\lambda^x\right)\mu.$$

Доказательство. Умножая обе части неравенства (2) на e_μ^x, получаем

$$e_\mu^x\left(1-e_\lambda^x\right)x\geqslant\lambda\left(1-e_\lambda^x\right)e_\mu^x,$$

т. е.

$$\left(e_\mu^x-e_\lambda^x\right)x\geqslant\lambda\left(e_\mu^x-e_\lambda^x\right).$$

Аналогично умножая обе части неравенства $e_\mu^x x\leqslant\mu e_\mu^x$ на $\left(1-e_\lambda^x\right)$, получаем правую часть доказываемого неравенства. ■

Теорема 1 (спектральная теорема Г. Фрейденталя). Каждый элемент $x\in E$ представим в виде

$$x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda^x,$$

где под интегралом понимается (o)-предел интегральной суммы

$$\sigma=\sum_{-\infty}^{\infty}l_n\left(e_{\lambda_n}^x-e_{\lambda_{n-1}}^x\right),$$

составленной для произвольного разбиения оси $(-\infty,\ +\infty)$ с помощью точек

$$-\infty\leftarrow\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\to\infty,$$

причем $\lambda_{n-1}\leqslant l_n\leqslant\lambda_n$ при всех n, а (o)-предел берется при условии, что $\delta=\sup\limits_n(\lambda_n-\lambda_{n-1})\to 0$.

Доказательство. Имеем $\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)\left(e^x_{\lambda_m} - e^x_{\lambda_{m-1}}\right) = 0$, $n \neq m$. Кроме того, все разности $e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}$ в совокупности ограничены единицей. Тогда имеет смысл их соединение и с помощью предложения 1 получаем

$$\underset{n}{S}\left\{e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right\} = \sup\left\{e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right\} = (o) - \lim_{p\to\infty} \sup_{-p\leqslant n\leqslant p}\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) =$$

$$= (o) - \lim_{p\to\infty}\sum_{n=-p}^{p}\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) = (o) - \lim_{p\to\infty}\left(e^x_{\lambda_p} - e^x_{\lambda_{-p-1}}\right) = 1.$$

Отсюда, согласно предложению 1, получаем

$$x = \underset{n}{S}\left\{\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x\right\}. \tag{3}$$

Выбрав произвольные l_n, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_{n-1} \leqslant l_n \leqslant \lambda_n$, рассмотрим попарно дизъюнктные элементы

$$u_n = l_n\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Из неравенств (1) и (2) видно, что

$$\left|u_n - \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x\right| \leqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1})\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) \leqslant \delta\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right),$$

откуда с помощью (2) получаем

$$-|x| - \delta\cdot 1 \leqslant \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x - \delta\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) \leqslant u_n \leqslant$$

$$\leqslant \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x + \delta\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) \leqslant |x| + \delta\cdot 1.$$

Таким образом, элементы u_n в совокупности ограничены и имеет смысл их соединение. При этом, как мы видели в предложении 1, $Su = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n$. Тем самым мы доказали, что любая интегральная сумма σ имеет смысл. Аналогично и формулу (3) можно представить в виде $x = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x$. Наконец, имеем

$$|\sigma - x| = \left|\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{l_n\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) - \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x\right\}\right| =$$

$$= \left|\sum_{-\infty}^{\infty}\left[u_n - \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x\right]\right| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty}\left|u_n - \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right)x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty}\delta\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) = \delta\underset{n}{S}\left\{e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right\} = \delta\cdot 1. \blacksquare$$

Библиография: [52, 65].

§ 6. Универсальные полуполя

Пусть $\overline{R}$ — двухточечная компактификация вещественной прямой R, т. е. $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Определение 1. Функцию $f: X \to \overline{R}$, заданную в топологическом пространстве X, будем называть полунепрерывной сверху (снизу), если для любого $a \in \overline{R}$ множество $f^{-1}([a, \infty])$ (соответственно $f^{-1}([-\infty, b])$) замкнуто в X.

Предложение 1. Если функция $f: X \to \overline{R}$ одновременно полунепрерывна сверху и полунепрерывна снизу, то она непрерывна.

Доказательство. Так как $(a, \infty] = \overline{R} \setminus [-\infty; a]$ и $[-\infty, b) = \overline{R} \setminus [b, \infty]$, то множества $f^{-1}((a, \infty])$ и $f^{-1}([-\infty, b))$ открыты в X. Следовательно, множество $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}([-\infty, b) \cap (a, \infty])$ также открыто в X, но любое открытое в $\overline{R}$ множество G является объединением множеств вида $[\infty, a)$, (a, b), $(b, \infty]$. Следовательно, $f^{-1}(G)$ открыто и потому f — непрерывное отображение. ■

Обозначим через $C(X, \overline{R})$ множество всех непрерывных функций на X со значениями в $\overline{R}$.

Предложение 2. Пусть $M \subset C(X, \overline{R})$.

Положим $\varphi(x) = \sup\limits_{f \in M} f(x)$ и $\psi(x) = \inf\limits_{f \in M} f(x)$. Тогда φ полунепрерывна снизу, а ψ — сверху.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{R}$. Если $x \in \varphi^{-1}([-\infty, a])$, т. е. $\varphi(x) \leqslant a$, то $\sup\limits_{f \in M} f(x) \leqslant a$ и потому $f(x) \leqslant a$ для всех $f \in M$; следовательно, $x \in \bigcap\limits_{f \in M} f^{-1}[-\infty, a]$. Наоборот, если $x \in \bigcap\limits_{f \in M} f^{-1}[-\infty, a]$, т. е. $f(x) \leqslant a$ для любой функции $f \in M$, то $\sup\limits_{f \in M} f(x) \leqslant a$ и потому $x \in \varphi^{-1}([-\infty, a])$. Итак, $\varphi^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap\limits_{f \in M} f^{-1}([-\infty, a])$. Отсюда следует полунепрерывность снизу функции $\varphi(t)$. Двойственным образом доказывается, что функция $\psi(t)$ полунепрерывна сверху. ■

Предложение 3. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Для любой точки $x \in X$ обозначим через $\mathcal{U}(x)$ совокупность всех окрестностей точки x. Тогда для любой функции $f: X \to \overline{R}$ функция

$$f_{\max}(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}(x)} \sup f(U)$$

полунепрерывна сверху, функция

$$f_{\min}(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}(x)} \inf f(U)$$

полунепрерывна снизу. При этом

$$f_{\min}(x) \leqslant f(x) \leqslant f_{\max}(x), \quad x \in X.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \bar{\in} f_{\max}^{-1}([a, \infty])$, где $a \in \overline{R}$; т. е $f_{\max}(x_0) \bar{\in} [a, \infty]$. Тогда, по определению функции $f_{\max}$, существует такая окрестность U_0 точки x_0, что $\sup f(U_0) < a$, но тогда для любой точки $x \in U_0$ имеем

$$f_{\max}(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}(x)} \sup f(U) \leqslant \sup f(U_0) < a,$$

т. е. $x \bar{\in} f_{\max}^{-1}([a, \infty])$. Следовательно, множество $X \setminus f_{\max}^{-1}([a, \infty])$ вместе с каждой точкой x_0 содержит и некоторую ее окрестность, т. е. это множество открыто, а множество $f_{\max}^{-1}([a, \infty])$ замкнуто. Таким образом, функция $f_{\max}$ полунепрерывна сверху. Аналогично устанавливается, что функция $f_{\min}$ полунепрерывна снизу. Последнее утверждение предложения очевидно.

Предложение 4. Если функция $\varphi : X \to \overline{R}$ непрерывна, то $\varphi_{\max} = \varphi_{\min} = \varphi$.

Доказательство. В силу предложения 3 имеем $\varphi_{\min} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{\max}$. Поэтому достаточно доказать обратные неравенства $\varphi_{\min} \geqslant \varphi \geqslant \varphi_{\max}$. Достаточно доказать неравенство $\varphi \geqslant \varphi_{\max}$ (неравенство $\varphi_{\min} \geqslant \varphi$ устанавливается аналогично). Если $\varphi(x_0) = +\infty$, то неравенство $\varphi(x_0) \geqslant \varphi_{\max}(x_0)$ очевидно. Пусть $\varphi(x_0) < \infty$. Выберем произвольное число $b > \varphi(x_0)$. Тогда $U_b = \varphi^{-1}([-\infty; b))$ — открытое множество в X (так как φ — непрерывная функция), причем $x_0 \in U_b$, т. е. U_b есть окрестность точки x_0.

Следовательно, $\varphi_{\max}(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \sup \varphi(U) \leqslant \sup \varphi(U_b) \leqslant b$, так как $\varphi(U_b) \subset [-\infty, b]$. Поскольку неравенство $\varphi_{\max}(x_0) \leqslant b$ справедливо для любого $b > \varphi(x_0)$, получаем $\varphi_{\max}(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$. ■

Предложение 5. Для любой непрерывной функции $\varphi : X \to \overline{R}$, удовлетворяющей условию $\varphi \geqslant f$ (т. е. $\varphi(x) \geqslant f(x)$ для любого $x \in X$), $\varphi \geqslant f_{\max}$. Аналогично для любой непрерывной функции φ, удовлетворяющей условию $\varphi \leqslant f$, $\varphi \leqslant f_{\min}$.

Доказательство. В самом деле, из неравенства $\varphi \geqslant f$ вытекает, очевидно, $\varphi_{\max} \geqslant f_{\max}$ и потому в силу предложения 4 $\varphi \geqslant f_{\max}$. Аналогично доказывается и второе утверждение.

Пусть ∇ — полная булева алгебра и $X(\nabla)$ — ее стоуновский компакт.

П р е д л о ж е н и е 6. Если функция $f: X(\nabla) \to \overline{R}$ полунепрерывна снизу (сверху), то функция $f_{\max}$ (соответственно $f_{\min}$) непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 3, достаточно доказать, что функция $f_{\max}$ полунепрерывна снизу. Покажем, что множество $A = f_{\max}^{-1}([-\infty, a])$ замкнуто. При этом достаточно рассмотреть случай $a < \infty$. Выберем произвольно $b > a$ и пусть x_0 — произвольная точка, принадлежащая замыканию множества A. Тогда для любой окрестности $U \in \mathcal{U}(x_0)$ пересечение $U \cap A$ непусто; пусть x_U — какая-либо точка множества $U \cap A$. Так как $x_U \in A$, то $f_{\max}(x_U) \leqslant a < b$ и потому существует такая окрестность $V_U \subset U$ точки x_U, что $\sup f(V_U) < b$. Положим теперь

$$V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} V_U.$$

Множество V открыто в $X(\nabla)$, причем $V \subset f^{-1}([-\infty; b])$. Так как функция f полунепрерывна снизу, то множество $f^{-1}([-\infty, b])$ замкнуто и потому $\overline{V} \subset f^{-1}([-\infty; b])$. Далее $\overline{V}$ является открыто-замкнутым. Заметим, наконец, что каждая окрестность U точки x_0 пересекается с множеством $\overline{V}$ (так как $x_U \in V_U \subset V \subset \overline{V}$) и потому в силу замкнутости множества $\overline{V}$ имеем $x_0 \in \overline{V}$. Следовательно, открытое множество $\overline{V}$ является окрестностью точки x_0 и потому

$$f_{\max}(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \sup f(U) \leqslant \sup f(\overline{V}),$$

но $\sup f(\overline{V}) \leqslant b$, так как $\overline{V} \subset f^{-1}([-\infty, b])$. Таким образом, $f_{\max}(x_0) \leqslant b$. Ввиду произвольности числа $b > a$ отсюда следует, что $f_{\max}(x_0) \leqslant a$, т. е. $x_0 \in f_{\max}^{-1}([-\infty, a]) = A$. Тем самым замкнутость множества A доказана. ■

П р е д л о ж е н и е 7. Пусть G — открытое всюду плотное множество пространства $X(\nabla)$ и $f: G \to \overline{R}$ — непрерывное отображение. Тогда существует и притом единственное непрерывное отображение $\overline{f}: X(\nabla) \to \overline{R}$, совпадающее с f на множестве G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, определим отображение $\varphi: X(\nabla) \to \overline{R}$, положив

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in G, \\ +\infty & \text{при } x \in X(\nabla) \setminus G. \end{cases}$$

Далее положим $\overline{f} = \varphi_{\min}$. Функция φ полунепрерывна сверху, потому что $\varphi^{-1}([-\infty, \infty]) = X(\nabla)$, и если $a < \infty$, то множество $\varphi^{-1}[a, \infty] \subset X(\nabla)$ имеет вид

$$\varphi^{-1}([a, \infty]) = X(\nabla) \setminus \varphi^{-1}([-\infty, a)) = X(\nabla) \setminus f^{-1}([-\infty, a)).$$

Так как отображение f непрерывно, то множество $f^{-1}([-\infty, a))$ открыто в G, а значит, и в $X(\nabla)$ (ибо G открыто). Следовательно, множество $\varphi^{-1}([a, \infty])$ замкнуто в $X(\nabla)$, т. е. функция φ полунепрерывна сверху. В силу предложения 6 отсюда следует, что функция $\overline{f} = \varphi_{\min}$ непрерывна. Покажем, что функция $\overline{f}$ совпадает на G с f.

Рассмотрим функцию $f_{\min}$. Так как G — открытое множество пространства $X(\nabla)$, то $f_{\min} = \varphi_{\min}$ на G, но в силу непрерывности функции $f: G \longrightarrow R$ имеем $f = f_{\min}$ (на G) и потому $\overline{f} = \varphi_{\min} = f_{\min} = f$ на G. Итак, функция $\overline{f} = \varphi_{\min}$ — искомая. Единственность ее вытекает из того, что G — всюду плотное в $X(\nabla)$ множество. ■

Определение 2. Непрерывную функцию $f: X(\nabla) \longrightarrow \overline{R}$ будем называть допустимой, если множества $f^{-1}(\infty)$ и $f^{-1}(-\infty)$ являются нигде не плотными подмножествами пространства $X(\nabla)$. Множество всех допустимых функций на пространстве $X(\nabla)$ обозначим через S_∇ или $C_\infty(X(\nabla))$.

Теорема 1. В множестве S_∇ можно (и притом единственным способом) определить операции сложения и умножения, превращающие S_∇ в коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей и обладающие тем свойством, что

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x), \quad f(x)\,g(x) = (fg)(x). \tag{1}$$

во всех тех точках $x \in X(\nabla)$, где обе функции $f, g: X(\nabla) \to \overline{R}$ принимают конечные значения.

Доказательство. Пусть $f, g: X(\nabla) \longrightarrow \overline{R}$ две произвольные допустимые функции. Обозначим через G множество $f^{-1}((-\infty, \infty)) \cap g^{-1}((-\infty, \infty))$, т. е. множество всех тех точек, в которых обе функции f, g принимают конечные значения. Множество G открыто. Кроме того, оно всюду плотно в $X(\nabla)$, так как

$$X(\nabla) \setminus G = f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(-\infty).$$

Определим отображения $\varphi: G \to \overline{R}$, $\psi: G \to \overline{R}$, положив $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, $\psi(x) = f(x)\,g(x)$ при $x \in G$. Отображения $\varphi, \psi: G \to \overline{R}$, очевидно, непрерывны (так как $f(G) \subset R$, $g(G) \subset R$, а на R операции сложения и умножения определены и непрерывны). Согласно предложению 7, существуют однозначно определенные непрерывные функции $\overline{\varphi}: X(\nabla) \to \overline{R}$, $\overline{\psi}: X(\nabla) \to \overline{R}$, совпадающие на G соответственно с φ и ψ. Положим $f + g = \overline{\varphi}$, $f \cdot g = \overline{\psi}$. Тем самым в S_∇ введены операции сложения и умножения, обладающие свойствами (1). Покажем, что эти операции превращают S_∇ в кольцо. Пусть $f, g, h \in S_\nabla$. Обозначим через $H \subset X(\nabla)$ множество всех тех точек, где все три функции

f, g, h принимают конечные значения. В силу (1) для любого $x \in H$ имеем

$$(f+(g+h))(x)=((f+g)+h)(x), \tag{2}$$

но так как H — открытое всюду плотное множество в $X(\nabla)$, то допустимые функции $f+(g+h)$ и $(f+g)+h$, принимающие на H равные значения (см. (2)), совпадают между собой (в силу предложения 7), т. е.

$$f+(g+h)=(f+g)+h.$$

Аналогично доказываются соотношения $f(g+h)=fg+fh$ и т. д. Таким образом, S_∇ есть кольцо. Нулем этого кольца является функция, тождественно равная нулю на $X(\nabla)$, единицей — функция, тождественно равная единице на $X(\nabla)$. Для любой допустимой функции $f \in S_\nabla$ противоположный элемент $(-f)$ определяется равенством

$$(-f)(x)=-(f(x)).$$

Заметим также, что в кольце S_∇ определено умножение элементов на действительные числа, а именно: для любого $f \in S_\nabla$ и любого действительного числа λ функция $\lambda f \in S_\nabla$ определяется равенством $(\lambda f)(x)=\lambda(f(x))$ для всех $x \in f^{-1}((-\infty, \infty))$. ■

П р е д л о ж е н и е 8. Относительно обычных неравенств $f \geqslant \varphi$, если $f(x) \geqslant \varphi(x)$ для всех $x \in X(\nabla)$, множество S_∇ является частично упорядоченным. В этом множестве для любого ограниченного сверху множества M существует элемент $\bigvee M$, а для любого ограниченного снизу множества N — $\bigwedge N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение очевидно. Докажем существование элемента $\bigvee M$ для ограниченного сверху множества M. Пусть $\varphi \in S_\nabla$ — такая функция, что $\varphi \geqslant f$ для любой функции $f \in M$. Положим для любой точки $x \in X(\nabla)$

$$g(x)=\sup_{f \in M} f(x).$$

Тогда функция $g: X(\nabla) \to \overline{R}$, согласно предложению 2, полунепрерывна снизу, причем $g \leqslant \varphi$. Положим теперь $h=g_{\max}$. Согласно предложению 6, функция $g_{\max}$ непрерывна, причем из предложения 3 вытекает, что $h=g_{\max} \leqslant \varphi$, а согласно предложению 5, $f=f_{\max} \leqslant g_{\max}=h$ для любой функции $f \in M$. Остается показать, что $h \in S_\nabla$. Так как функция h непрерывна, то следует лишь установить, что множества $h^{-1}(-\infty)$ и $h^{-1}(\infty)$ нигде не плотны в $X(\nabla)$. Пусть f — произвольный элемент множества M. Тогда $g(x) \geqslant f(x)$ для любого $x \in X(\nabla)$ и потому

$$h(x)=g_{\max}(x) \geqslant g(x) \geqslant f(x).$$

Следовательно, $h^{-1}(-\infty)\subset f^{-1}(-\infty)$ и потому $h^{-1}(-\infty)$ нигде не плотно. Далее, как мы видели, $h\leqslant\varphi$, т. е. $h(x)\leqslant\varphi(x)$ для любого $x\in X(\nabla)$. Следовательно, $h^{-1}(\infty)\subset\varphi^{-1}(\infty)$ и потому множество $h^{-1}(\infty)$ нигде не плотно в $X(\nabla)$. ■

Предложение 9. Элемент $f\in S_\nabla$ будем называть положительным, если $f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in X(\nabla)$ и множество $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в S_∇. Множество всех положительных элементов обозначим через K_∇. Множество K_∇ обладает следующими свойствами:

$$K_\nabla+K_\nabla\subset K_\nabla,\quad K_\nabla\cdot K_\nabla\subset K_\nabla,\quad S_\nabla=K_\nabla-K_\nabla.$$

Кроме того, для любого элемента $f\in K_\nabla$ существует обратный элемент, т. е. такой элемент $f^{-1}\in K_\nabla$, что $f\cdot f^{-1}=1$.

Доказательство. Первые два включения очевидны. Далее для любого элемента $g\in S_\nabla$ положим

$$g_+(x)=\begin{cases} g(x) & \text{при}\quad g(x)\geqslant 0,\\ 0 & \text{при}\quad g(x)<0,\end{cases}$$

$$g_-(x)=\begin{cases} -g(x) & \text{при}\quad g(x)\leqslant 0,\\ 0 & \text{при}\quad g(x)>0.\end{cases}$$

Очевидно, что функции g_+ и g_- непрерывны и принимают значения $\pm\infty$ на нигде не плотных множествах

$$g_+^{-1}(-\infty)=g_-^{-1}(-\infty)=\varnothing,\quad g_+^{-1}(\infty)=g^{-1}(\infty),$$

$$g_-^{-1}(\infty)=g^{-1}(-\infty).$$

Следовательно, $g_+,\ g_-\in S_\nabla$, Мы имеем, очевидно,

$$g=g_+-g_-=(g_++1)-(g_-+1),$$

причем функции g_++1 и g_-+1 принимают только положительные значения, т. е. принадлежат множеству K_∇.

Пусть теперь $f\in K_\nabla$. Обозначим через G множество всех тех точек $x\in X(\nabla)$, в которых $0<f(x)<\infty$. Множество $G=f^{-1}((0,\infty))$ открыто и всюду плотно в $X(\nabla)$, потому что $G=X(\nabla)\setminus(f^{-1}(0)\cup f^{-1}(\infty))$.

Обозначим теперь через $h:G\longrightarrow R$ отображение, определяемое равенством

$$h(x)=(f(x))^{-1},\quad x\in G.$$

Отображение h непрерывно и потому существует такой элемент $\overline{h}:X(\nabla)\longrightarrow\overline{R}$ из множества S_∇, который совпадает с h на G. Функция $\overline{h}$ принимает только неотрицательные значения (так как

$h > 0$ на всюду плотном множестве G), причем значения 0 и ∞ функция $\bar{h}$ может принимать только на $X(\nabla) \setminus G$, т. е. на нигде не плотных множествах. Следовательно, $\bar{h} \in K_{\nabla}$. Наконец, так как $h(x) f(x) = 1$ для любой точки $x \in G$, то $\bar{h} \cdot f = 1$. ■

Определение 3. Пусть E — некоторое полуполе. Оно называется универсальным, если для любого семейства дизъюнктных элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ в E существует элемент $x \in E$, такой, что $xs(x_\alpha) = x_\alpha$ для всех $\alpha \in J$.

Из теоремы 1, предложений 7—9 следует теорема.

Теорема 2. *Множество S_{∇} является универсальным полуполем.*

Таким образом, для каждой полной булевой алгебры ∇ существует универсальное полуполе, булева алгебра идемпотентов которого изоморфна ∇.

Определение 4. Пусть F — подкольцо в полуполе E и относительно индуцированного порядка из E кольцо F превращается в полуполе. Если из соотношений $|x| \leqslant |y|$, $y \in F$ вытекает $x \in F$, то F называется заполненным подполуполем в E.

Теорема 3. (теорема о классификации полуполей). *Пусть E — произвольное полуполе и ∇ — булева алгебра идемпотентов в E. Тогда существует такой изоморфизм φ полуполя E в S_{∇}, что $\varphi(E)$ есть заполненное подполуполе в S_{∇}.*

Теорема 3 для более общих алгебр будет доказана в гл. III (§ 8, теорема 1). Доказательство теоремы 3 для полуполей см. в [9].

Из теоремы 3 непосредственно вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Если E — полуполе, $x, y \in E$, $0 \leqslant x \leqslant y$, то существует такой элемент $z \in E$, что $x = yz$.

Элемент x из полуполя E называется ограниченным, если существует такое число $\lambda > 0$, что $-\lambda \mathbf{1} \leqslant x \leqslant \lambda \mathbf{1}$. Множество B ограниченных элементов в полуполе E образует подкольцо в E и относительно индуцированного частичного порядка является заполненным подполуполем в E (в качестве множества K для B берутся те положительные обратимые элементы из E, для которых обратный элемент также принадлежит B).

Следствие 2. Если булевы алгебры идемпотентов ∇_1 и ∇_2 полуполей E_1 и E_2 изоморфны, то изоморфны и полуполя B_1 и B_2 ограниченных элементов в E_1 и E_2 соответственно.

Библиография: [9, 10, 52].

Глава III

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

§ 1. Необходимые сведения из теории йордановых алгебр

В данной главе будут рассматриваться йордановы алгебры над полем действительных чисел.

Пусть $\mathscr{A}$ — векторное пространство над полем действительных чисел R и в $\mathscr{A}$ введена операция умножения xy, $x, y \in \mathscr{A}$, которая, вообще говоря, неассоциативна. Тогда $\mathscr{A}$ называется **йордановой алгеброй**, если

1° $xy = yx$;
2° $(x + y) z = xz + yz$;
3° $\alpha(xy) = (\alpha x) y$;
4° $(x^2 y) x = x^2 (yx)$

для любых $x, y, z \in \mathscr{A}$, $\alpha \in R$.

Пусть E — ассоциативная (не обязательно коммутативная) алгебра над R. Определим на E новую операцию $\circ$, связанную со старым умножением формулой

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

При этом получается новая алгебра, которая обозначается через $E^{(+)}$. Нетрудно видеть, что она йорданова. Любое векторное подпространство $E^{(+)}$, замкнутое относительно операции $\circ$, является, очевидно, йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называются **специальными**. Неспециальные йордановы алгебры называются **исключительными**.

Пример 1. Пусть H — гильбертово пространство над R со скалярным произведением (ξ, η), $\xi, \eta \in H$. Рассмотрим множество $\mathscr{A}$ пар (α, ξ), $\alpha \in R$, $\xi \in H$ с покоординатными векторными операциями. Умножение в $\mathscr{A}$ зададим следующим правилом:

$$(\alpha, \xi)(\beta, \eta) = (\alpha\beta + (\xi, \eta), \beta\xi + \alpha\eta).$$

Очевидно, что $\mathscr{A}$ — коммутативная алгебра с единицей $\mathbf{1} = (1, 0)$, где 0 — нулевой вектор H. Если $a = (\alpha, \xi)$, то

$$a^2 = (\alpha^2 + (\xi, \xi),\ 2\alpha\xi) = (\alpha^2 + (\xi, \xi))1 + 2\alpha a - 2\alpha^2 1 =$$
$$= ((\xi, \xi) - \alpha^2)1 + 2\alpha a.$$

Из этого равенства и того, что в любой коммутативной алгебре выполнены соотношения $(ab)a = a(ba)$ и $(1b)a = 1(ba)$, вытекает, что $(a^2b)a = a^2(ba)$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A}$ — йорданова алгебра. Такая йорданова алгебра называется абстрактным спин-фактором [77, 127]. Можно показать, что абстрактный спин-фактор является специальной йордановой алгеброй (см. [60], с. 74, упр. 1).

Пример 2. Пусть C — алгебра Кэли (квазикватернионов, октав), C_n — алгебра $n \times n$-матриц с элементами из C, * — инволюция на C_n, которая заключается в транспонировании матрицы и применении операции сопряжения к каждому ее элементу. Множество $H(C_n) = \{x \in C_n : x^* = x\}$ эрмитовых матриц замкнуто в C_n относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Оказывается, $H(C_n)$ с операцией $\circ$ является йордановой алгеброй только при $n \leqslant 3$, причем $H(C_n)$ — специальная йорданова алгебра при $n < 3$, а алгебра $H(C_3)$ исключительная (см. [60], с. 68 – 74). Исключительную алгебру $H(C_3)$ обозначают через M_3^8.

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная йорданова алгебра. Для элемента $a \in \mathscr{A}$ определим отображение алгебры $\mathscr{A}$ в себя $R_a : x \to ax = xa$. Очевидно, что R_a — линейный оператор на $\mathscr{A}$. Этот оператор называется оператором умножения на элемент a. Подалгебра алгебры всех линейных операторов на $\mathscr{A}$, порожденная всевозможными операторами R_a, обозначается через $R(\mathscr{A})$ и называется алгеброй умножений алгебры $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{B}$ — подалгебра йордановой алгебры $\mathscr{A}$, то подалгебру, порожденную в $R(\mathscr{A})$ операторами R_b, где $b \in \mathscr{B}$, будем обозначать $R^{\mathscr{A}}(\mathscr{B})$.

В произвольной алгебре E (не обязательно коммутативной или ассоциативной) введем следующие обозначения:

$\{x, y, z\} = x(yz) - (xy)z$ — ассоциатор элементов $x, y, z \in E$;

$[x, y] = xy - yx$ — коммутатор элементов $x, y \in E$.

Основное йорданово тождество 4° в силу коммутативности можно переписать в виде $(yx)x^2 = (yx^2)x$, поэтому оно эквивалентно соотношению $[R_x, R_{x^2}] = 0$. Произведя полную линеаризацию тождества 4°, можно получить ряд полезных тождеств, верных в любых йордановых алгебрах. Отметим два из них, которые будут использованы в дальнейшем: для любых $y, z, t \in \mathscr{A}$

$$[R_{yz}, R_t] + [R_{ty}, R_z] + [R_{zt}, R_y] = 0, \tag{1}$$

$$R_y R_z R_t + R_t R_z R_y + R_{(yt)z} = R_y R_{zt} + R_z R_{yt} + R_t R_{yz} \tag{2}$$

(см. [60], с. 86).

Имеет место следующий результат (см. [60], с. 86, предложение 2).

Теорема 1. Если подалгебра $\mathcal{B}$ йордановой алгебры $\mathcal{A}$ порождается множеством $\mathcal{B}_0$, то алгебра $R^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ порождается множеством операторов $\{R_a, R_{ab}, a, b \in \mathcal{B}_0\}$.

Подалгебра $\mathcal{B}$ йордановой алгебры $\mathcal{A}$ называется сильно ассоциативной, если для любых элементов $b, b' \in \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\{b, a, b'\} = 0$. В силу очевидного тождества $\{b, a, b'\} = [R_b, R_{b'}]\, a$ условие сильной ассоциативности подалгебры $\mathcal{B}$ в алгебре $\mathcal{A}$ эквивалентно коммутативности алгебры $R^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Из теоремы 1 и основного йорданова тождества $[R_a, R_{a^2}] = 0$ вытекает следующий результат.

Следствие. Всякая однопорожденная подалгебра йордановой алгебры является сильно ассоциативной.

Введем в йордановой алгебре $\mathcal{A}$ тройное йорданово произведение

$$\{xyz\} = (xy)z + (zy)x - (xz)y.$$

Если йорданова алгебра $\mathcal{A}$ специальна и вложена в алгебру $E^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры E, то нетрудно проверить, что

$$\{abc\} = \frac{1}{2}(abc + cba),$$

где через xy обозначено ассоциативное произведение элементов x и y. В частности, тройное йорданово произведение $\{aba\}$ в $E^{(+)}$ равно ассоциативному произведению aba.

Для любых элементов a, b йордановой алгебры $\mathcal{A}$ определим отображение $U_{a,b}: x \to \{axb\}$ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ и положим $U_a = U_{a,a}$. Очевидно, $U_{a,b}, U_a \in R(\mathcal{A})$, так как

$$U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab}, \tag{3}$$

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}. \tag{4}$$

Теорема 2. (А. И. Ширшов). Любая йорданова алгебра от двух порождающих специальна.

Этот результат имеет ряд очень полезных следствий. В частности, он позволяет доказывать различные тождества в йордановых алгебрах.

Следствие (Ширшов—Макдональд). Если неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ степени $\leqslant 1$ по x_3 является тождеством в любой специальной йордановой алгебре, то он является тождеством для всех йордановых алгебр.

Доказательства этих результатов см. в [60] (гл. 3, § 3).

Приведем несколько полезных тождеств, верных в любых йордановых алгебрах:

$$(U_x y)^2 = U_x U_y x^2, \tag{5}$$

$$U_{U_y x} = U_y U_x U_y, \tag{6}$$

$$U_{ab} = U_a U_b \tag{7}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$ и для любых a, b, лежащих в сильно ассоциативной подалгебре $\mathcal{A}$. Тождество (6) называется тождеством Макдональда. Тождества (5) и (6) очевидным образом вытекают из следствия теоремы Ширшова. Тождество (7) доказано в [57] (с. 38, тождество (66)).

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольная йорданова алгебра с единицей $\mathbf{1}$. Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется обратимым, если существует такой элемент $y \in \mathcal{A}$, что

$$xy = \mathbf{1}, \ x^2 y = x.$$

В этом случае элемент y называется обратным элементом к элементу x.

Приведем без доказательства несколько утверждений о свойствах обратимых элементов. Доказательства можно найти в [60], (гл. 14, § 2).

Предложение 1. Для элементов $x, y \in \mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

а) x обратим с обратным y;

б) y обратим с обратным x;

в) $U_x y = x$, $U_x y^2 = \mathbf{1}$.

Предложение 2. Для $x \in \mathcal{A}$ следующие услория эквивалентны:

а) x обратим;

б) $\mathbf{1} \in U_x(\mathcal{A})$;

в) U_x — обратимый оператор.

Из предложений 1 и 2, в частности, вытекает единственность обратного элемента, так как если $U_x y = x$ и $U_x y' = x$, то $y = y'$ в силу обратимости оператора U_x.

Предложение 3. Элементы $x, z \in \mathcal{A}$ обратимы тогда и только тогда, когда обратим элемент $U_x z$, причем $(U_x z)^{-1} = U_{x^{-1}} z^{-1}$.

Предложение 4. Для любого обратимого элемента x йордановой алгебры $\mathcal{A}$ подалгебра, порожденная элементами x и x^{-1}, является сильно ассоциативной.

Здесь через x^{-1} обозначен тот единственный элемент, который является обратным к x. Из предложения 4 и тождества (6), в частности, вытекает, что

$$U_x^{-1} = U_{x^{-1}}. \tag{8}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — йорданова алгебра с единицей 1, $e \in \mathcal{A}$ — идемпотент, т. е. $e^2 = e$. Тогда, очевидно, $e + (1 - e) = 1$, $e(1 - e) = 0$. Поэтому нетрудно видеть, что

$$U_e + 2U_{e,\,1-e} + U_{1-e} = U_{e+(1-e)} = I$$

— тождественный оператор на $\mathcal{A}$. Следовательно, для любого элемента $x \in \mathcal{A}$

$$x = U_e x + 2U_{e,\,1-e} x + U_{1-e} x. \tag{9}$$

Введем обозначения: $x_1 = U_e x$, $x_{1/2} = 2U_{e,\,1-e} x$, $x_0 = U_{1-e} x$. Определим подпространства

$$J_1(e) = U_e(\mathcal{A}),\ J_{1/2}(e) = U_{e,\,1-e}(\mathcal{A}),\ J_0(e) = U_{1-e}(\mathcal{A}).$$

В силу тождества (9)

$$\mathcal{A} = J_1(e) + J_{1/2}(e) + J_0(e).$$

Теперь заметим, что $U_e = R_e(2R_e - I)$, $U_{e,\,e-1} = R_e(R_e - I)$ и $U_{1-e} = (R_e - I)(2R_e - I)$. Из тождества (2) при $y = z = t = e$ получаем $2R_e^3 + R_e = 3R_e^3$, т. е. $R_e(R_e - I)(2R_e - I) = 0$. Поэтому

$$R_e U_e = U_e,\ R_e U_{e,\,1-e} = \frac{1}{2} U_{e,\,1-e},\ R_e U_{1-e} = 0,$$

т. е. $R_e x_i = i x_i$, $i = 0,\ 1/2,\ 1$. Легко видеть, что сумма подпространств $J_i(e)$ прямая:

$$\mathcal{A} = J_1(e) \oplus J_{1/2}(e) \oplus J_0(e).$$

Это разложение в сумму подпространств называется пирсовским разложением, а подпространства $J_i(e)$ — пирсовскими компонентами $\mathcal{A}$ по идемпотенту e.

Теорема 3 (Алберт). Пусть $\mathcal{A}$ — йорданова алгебра с единицей, e — идемпотент из $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму пирсовских компонент

$$\mathcal{A} = J_1(e) \oplus J_{1/2}(e) \oplus J_0(e),$$

где $J_i(e) = \{x \in \mathcal{A} : ex = ix\}$, $i = 0,\ 1/2,\ 1$, причем $J_1(e) = U_e(\mathcal{A})$, $J_{1/2}(e) = U_{e,\,1-e}(\mathcal{A})$, $J_0(e) = U_{1-e}(\mathcal{A})$. Таблица умножения для пирсовских компонент такова:

$$\left.\begin{aligned} J_1^2(e)\subseteq J_1(e),\ J_1(e)J_0(e)=\{0\},\\ J_0^2(e)\subseteq J_0(e),\ J_{1/2}^2(e)\subseteq J_0(e)+J_1(e),\\ J_0(e)J_{1/2}(e)\subseteq J_{1/2}(e),\ J_1(e)J_{1/2}(e)\subset J_{1/2}(e). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Доказательство см. в [60] (с. 393, теорема 4).

Рассмотрим гомоморфизмы йордановых алгебр.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — йордановы алгебры. Линейное отображение $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ называется йордановым гомоморфизмом, если $\Phi(ab)=\Phi(a)\Phi(b)$ для любых $a, b\in\mathcal{A}$. Так как в йордановой алгебре $ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-a^2-b^2]$, то последнее условие эквивалентно более простому: $\Phi(a^2)=[\Phi(a)]^2$ для всех $a\in\mathcal{A}$. Гомоморфизм Φ называется изоморфизмом, если его ядро $\ker\Phi=\{0\}$ и $\Phi(\mathcal{A})=\mathcal{B}$. Изоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$ называется автоморфизмом $\mathcal{A}$. Приведем один важный пример автоморфизма. Пусть $\mathcal{A}$ — йорданова алгебра с единицей. Элемент $s\in\mathcal{A}$ называется симметрией, если $s^2=1$. Легко видеть, что для идемпотента e элемент $(2e-1)$ есть симметрия; и, наоборот, если s — симметрия, то $\frac{s+1}{2}$ — идемпотент.

Рассмотрим оператор U_s, где s — симметрия. Очевидно, U_s — линейный оператор. Имеем $U_s a^2=U_sU_a s^2$, так как $s^2=1$. В силу тождества (5) последнее соотношение можно переписать в виде $U_s a^2=(U_s a)^2$, т. е. U_s — гомоморфизм. Теперь, если в тождестве Макдональда (6) положим $x=1$, $y=s$, то получим $U_1=U_sU_1U_s$, т. е. $U_sU_s=I$ — тождественный оператор. Следовательно, U_s является обратимым с обратным, равным самому себе. В частности, U_s — автоморфизм. Он называется внутренним автоморфизмом $\mathcal{A}$.

Для подробного ознакомления с теорией йордановых алгебр см. монографии [45, 57, 60].

Рассмотрим теперь понятие совместности в йордановых алгебрах. Пусть $\mathcal{A}$ — йорданова алгебра. Элементы $a, b\in\mathcal{A}$ называются операторно-коммутирующими [57], если коммутируют операторы R_a и R_b, т. е. $[R_a, R_b]=0$. Это означает, что $a(bc)=b(ac)$ для любого $c\in\mathcal{A}$, что эквивалентно в силу коммутативности $\mathcal{A}$ соотношению $a(cb)=(ac)b$. Таким образом, в терминах операторной коммутируемости понятие сильно ассоциативной подалгебры означает операторную коммутируемость любых двух элементов этой подалгебры.

Определение. Семейство M элементов йордановой алгебры

$\mathcal{A}$ назовем совместным, если подалгебра $J(M)$, порожден-
ная этим семейством, сильно ассоциативна. Если два элемента
a, $b \in \mathcal{A}$ совместны, то это будем записывать как $a \leftrightarrow b$.

Из теоремы 1 и ее следствия вытекают следующие утверждения.

Предложение 5: а) семейство элементов $M \subset \mathcal{A}$ совмест-
но тогда и только тогда, когда элементы из M попарно сов-
местны;

б) элементы a, $b \in \mathcal{A}$ совместны тогда и только тогда, когда
операторно коммутируют элементы a, b, a^2, b^2, ab;

в) любой элемент совместен с собой.

Следствие. Пусть $\mathcal{A}_0$ — максимальная сильно ассоциативная
подалгебра йордановой алгебры $\mathcal{A}$. Если элемент $a \in \mathcal{A}$ совмес-
тен с каждым элементом из $\mathcal{A}_0$, то $a \in \mathcal{A}_0$.

Доказательство. По условию множество $\mathcal{A}_0 \cup \{a\}$ попар-
но совместно. В силу утверждения а) предложения 5 это мно-
жество совместно, т. е. содержится в некоторой сильно ассоциа-
тивной подалгебре $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}_0$ — максимальная подал-
гебра, то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0$, т. е. $a \in \mathcal{A}_0$. ■

Очевидно, что в произвольной йордановой алгебре совмест-
ность двух элементов влечет их операторную коммутируемость.
Как показывает следующий пример, обратное, вообще говоря, не-
верно, т. е. свойство совместности существенно сильнее.

Пример 3. Пусть X — пространство всех бесконечно диф-
ференцируемых действительных функций на $[0, 1]$, E — алгебра
всех линейных операторов на X с обычной операцией произведе-
ния операторов (суперпозицией). Так как E ассоциативна, то
$E^{(+)} = (E, \circ)$, где $P \circ Q = \frac{1}{2}(PQ + QP)$, P, $Q \in E$, является спе-
циальной йордановой алгеброй.

Рассмотрим два оператора:

$$Pf = tf(t), \quad f \in X, \; t \in [0, 1],$$

$$Qf = \frac{df(t)}{dt}, \quad f \in X, \; t \in [0, 1].$$

Тогда легко видеть, что $[Q, P] = I$ — тождественный оператор.
В силу тождества $a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = \frac{1}{4}[b, [a, c]]$, верного в лю-
бой специальной алгебре, имеем

$$Q \circ (S \circ P) - (Q \circ S) \circ P = \frac{1}{4}[S, [Q, P]] = 0$$

для любого $S \in E$, т. е. Q и P операторно коммутируют. Однако
Q и P^2 операторно не коммутируют. В самом деле,

$$Q \circ (S \circ P^2) - (Q \circ S) \circ P^2 = \frac{1}{4}[S, [Q, P^2]],$$

причем $[Q, P^2] = (QP - PQ)P + P(QP - PQ) = IP + PI = 2P$, т. е. $\{Q, S, P^2\} = \frac{1}{4}[S, 2P] = \frac{1}{2}[S, P]$ и при $S = Q$ имеем $\{Q, Q, P^2\} = \frac{1}{2}[Q, P] = \frac{1}{2}I \neq 0$.

Итак, Q и P^2 операторно не коммутируют, поэтому в силу утверждения б) предложения 5 Q и P не совместны.

Таким образом, из операторной коммутируемости совместность не вытекает. Однако, как будет показано ниже, если один из элементов является идемпотентом, то эти понятия совпадают.

Предложение 6. Пусть $\mathscr{A}$ — йорданова алгебра с единицей, $e \in \mathscr{A}$ — идемпотент. Тогда:

а) если $x \in J_0(e)$, т. е. $ex = 0$, то $e \leftrightarrow x$;

б) если $x \in J_1(e)$, т. е. $ex = x$, то $e \leftrightarrow x$;

в) если $x \in J_0(e)$, $y \in J_1(e)$, то $x \leftrightarrow y$;

г) если $x \in J_0(e)$, $y \in J_1(e)$, то $x \pm y \leftrightarrow e$.

Доказательство. а) Сначала покажем, что если $x \in J_0(e)$, то x и e операторно коммутируют, т. е. $e(cx) = (ec)x$ для всех $c \in \mathscr{A}$. Пусть $c = c_1 + c_{1/2} + c_0$ — пирсовское разложение c по e. Из теоремы 3 вытекает, что $cx = c_{1/2}x + c_0x$, так как $c_1x = 0$, причем $c_{1/2}x \in J_{1/2}(e)$, $c_0x \in J_0(e)$. Следовательно, $e(cx) = \frac{1}{2}c_{1/2}x$. Далее $ec = \frac{1}{2}c_{1/2} + c_1$, значит, $(ec)x = \frac{1}{2}c_{1/2}x = e(cx)$, т. е. e и x операторно коммутируют.

Из включения $x^2 \in J_0^2(e) \subseteq J_0(e)$ следует, что e и x^2 также операторно коммутируют. Так как $e^2 = e$ и $ex = 0$, то операторно коммутируют между собой все элементы x, x^2, e, e^2, ex. В силу п. б) предложения 5 отсюда вытекает, что $e \leftrightarrow x$.

б) Пусть $x \in J_1(e)$, т. е. $ex = x$. Тогда $(1 - e)x = 0$, т. е. $x \in J_0(1 - e)$. В силу а) $x \leftrightarrow 1 - e$. Так как элемент 1 совместен с любым элементом, то система $\{x, (1 - e), 1\}$ попарно совместна и, следовательно, совместна, т. е. порождает сильно ассоциативную подалгебру. Однако этой подалгебре принадлежит и элемент $e = 1 - (1 - e)$. Поэтому $e \leftrightarrow x$.

в) Если $x \in J_0(e)$, $y \in J_1(e)$, то $ex = 0$, $ey = y$. В тождестве (1) положим $y = e$, $z = x$, $t = y$ и получим

$$[R_0, R_y] + [R_y, R_x] + [R_0, R_e] = 0,$$

т. е. $[R_x, R_y] = 0$. Это означает, что x и y операторно коммутируют. Так как $x^2 \in J_0(e)$, $y^2 \in J_1(e)$, то операторно коммутируют между собой все элементы x, y, x^2, y^2, но $xy = 0$ (теорема 3), следовательно, $x \leftrightarrow y$.

г) Пусть $x \in J_0(e)$, $y \in J_1(e)$, тогда в силу а), б), в) элементы x, y, e попарно совместны и потому принадлежат одной сильной ассоциативной подалгебре, но этой подалгебре принадлежат и элементы $x \pm y$, т. е. $x \pm y \leftrightarrow e$. ■

Следствие 1. Пусть e, $x \in \mathscr{A}$, e — идемпотент. Следующие условия эквивалентны:

1) $x \leftrightarrow e$;
2) x и e операторно коммутируют;
3) $e(ex) = ex$;
4) $x_{1/2} = 2U_{e,\,1-e}\,x = 0$.

Доказательство. Импликация 1) $\to$ 2) очевидна. Если x и e операторно коммутируют, то $e(cx) = (ec)x$ для всех $c \in \mathscr{A}$. В частности, при $c = e$ получим 3).

Если $e(ex) = ex$, то $x_{1/2} = 2U_{e,\,1-e}\,x = 4\big(ex - e(ex)\big) = 0$. Если $x_{1/2} = 0$, то $x = x_0 + x_1$. Так как $x_i \in J_i(e)$, $i = 0, 1$, то в силу п. г) предложения 6 $e \leftrightarrow x_1 + x_0 = x$. ■

Следствие 2. Если идемпотент e совместен со всеми элементами множества M, то e совместен со всей подалгеброй $J(M)$, порожденной этим множеством.

Доказательство. Достаточно показать, что если $e \leftrightarrow x$, $e \leftrightarrow y$, то $e \leftrightarrow x + y$ и $e \leftrightarrow xy$. В силу следствия 1 имеем $e(ex) = ex$, $e(ey) = ey$ и, значит,

$$e\big(e(x \pm y)\big) = e(ex) \pm e(ey) = ex \pm ey = e(x \pm y),$$

т. е. $e \leftrightarrow x \pm y$. Далее, очевидно, $e \leftrightarrow x^2$, $e \leftrightarrow y^2$ и $e \leftrightarrow (x+y)^2$. Следовательно, $e \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 - x^2 - y^2\right] = xy$. ■

Центром $Z(\mathscr{A})$ йордановой алгебры $\mathscr{A}$ называется совокупность элементов, совместных со всеми элементами из $\mathscr{A}$. Очевидно, что $Z(\mathscr{A})$ совпадает с пересечением всех максимальных сильно ассоциативных подалгебр $\mathscr{A}$. Элементы из $Z(\mathscr{A})$ называются центральными. В силу следствия 1 из предложения 6 идемпотент $e \in \mathscr{A}$ является центральным тогда и только тогда, когда он операторно коммутирует со всеми элементами из $\mathscr{A}$. Йорданову алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda 1$, $\lambda \in R$, называют фактором.

Библиография: [2, 3, 45, 56, 57, 60, 63, 86, 155, 156].

§ 2. Йордановы банаховы алгебры

В настоящем параграфе приводятся некоторые результаты из работ [4, 163]. Наиболее важные из них для дальнейшего изложения даны с доказательствами.

Определение 1 [4]. Йорданова банахова алгебра $\mathscr{A}$ или *JB*-алгебра — это йорданова алгебра с единицей над полем действительных чисел, на которой введена норма, такая, что $\mathscr{A}$ — банахово пространство, удовлетворяющее следующим условиям:

(*i*) $\|ab\| < \|a\|\|b\|$;

(*ii*) $\|a^2\| = \|a\|^2$;

(iii) $\|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Упорядоченным нормированным пространством с единицей (order-unit space) назовем частично упорядоченное нормированное векторное пространство с порядковой единицей $\mathbf{1}$ (фиксированной), порядок на котором архимедов (т. е. из $na \leqslant \mathbf{1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ вытекает, что $a \leqslant 0$) и норма удовлетворяет условию

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0: -\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}\} \tag{1}$$

(напомним, что порядковой единицей в упорядоченном векторном пространстве A называется такой элемент $\mathbf{1}$, что для любого $a \in A$ существует число $\lambda \geqslant 0$, для которого $-\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}$).

Теорема 1. Если A — JB-алгебра, то множество A^2 всех квадратов элементов A является правильным выпуклым конусом, превращающим A в полное (в смысле нормы) упорядоченное нормированное пространство с единицей (относительно исходной нормы), в котором порядковой единицей является мультипликативная единица, при этом если

$$-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1},\ a \in A, \text{ то } 0 \leqslant a^2 \leqslant \mathbf{1}. \tag{2}$$

Наоборот, если A — полное упорядоченное нормированное пространство с единицей с введенным на нем йордановым умножением, для которого мультипликативной единицей является исходная порядковая единица, и выполнено условие (2), то A является JB-алгеброй относительно нормы (1).

Доказательство. 1. Пусть A — JB-алгебра. Подалгебра, порожденная элементом $a \in A$ и единицей, сильно ассоциативна (см. предложение 4 из § 1), поэтому ее замыкание по норме является коммутативной банаховой алгеброй. Эту банахову алгебру обозначим через $C(a)$. Из теории банаховых алгебр (см., например [59, 85]) известно, что если $\|b\| \leqslant 1$, то

$$\mathbf{1} + b = d^2 \text{ для некоторого } d \in C(b). \tag{3}$$

Покажем, что для $a \in A$ следующие четыре условия эквивалентны:

а) $\|\alpha\mathbf{1} - a\| \leqslant \alpha$ для всех $\alpha \geqslant \|a\|$;

б) $\|\alpha\mathbf{1} - a\| \leqslant \alpha$ для некоторого $\alpha \geqslant \|a\|$;

в) $a = c^2$ для некоторого $c \in C(a)$;

г) $a \in A^2$.

Импликации а) → б) и в) → г) очевидны. Пусть $\|\alpha\mathbf{1} - a\| \leqslant \alpha$ для данного $\alpha \geqslant \|a\|$. Применим свойство (3) к элементу $b = \alpha^{-1}a - \mathbf{1}$ и получим $\mathbf{1} + b = d^2$ для некоторого $d \in C(b) = C(a)$. Положив $c = \sqrt{\alpha}d \in C(a)$, получим $a = \alpha(\mathbf{1} + b) = \alpha d^2 = c^2$. Докажем импликацию г) → а).

Пусть $a = c^2$, $c \in A$, $\alpha \geqslant \|a\|$ и $b = -\alpha^{-1} a$. В силу (3) $\mathbf{1} + b = d^2$ для $d \in C(a)$. Положим $f = \sqrt{\alpha} d$, тогда $\alpha\mathbf{1} - a = \alpha(\mathbf{1} + b) = \alpha d^2 = f^2$. Следовательно, $\alpha\mathbf{1} = c^2 + f^2$. Используя свойства (*ii*) и (*iii*) *JB*-алгебры, получаем

$$\|\alpha\mathbf{1} - a\| = \|f^2\| \leqslant \|c^2 + f^2\| = \alpha\|\mathbf{1}\| = \alpha.$$

Чтобы показать, что A^2 — выпуклый конус, достаточно проверить, что $A^2 + A^2 \subset A^2$. Для этого рассмотрим $a, b \in A^2$ и положим $\alpha = \|a\|$, $\beta = \|b\|$. В силу а) имеем

$$\|(\alpha + \beta)\mathbf{1} - (a + b)\| \leqslant \|\alpha\mathbf{1} - a\| + \|\beta\mathbf{1} - b\| \leqslant \alpha + \beta,$$

и так как $\alpha + \beta \geqslant \|a + b\|$, то, применяя б), получаем, что $a + b \in A^2$.

Очевидно, что A^2 — собственный конус, т. е. $A^2 \cap (-A^2) = \{0\}$. В самом деле, если $a^2 = -b^2$, то в силу (*iii*) $a^2 = 0$, т. е. $a = 0$.

Таким образом, в A можно ввести частичный порядок, положив $a \leqslant b$, если $b - a \in A^2$.

В силу (3), если $\|a\| \leqslant 1$, то $\mathbf{1} \pm a \geqslant 0$, т. е. из $\|a\| \leqslant 1$ вытекает

$$-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}. \tag{4}$$

Это означает, что $\mathbf{1}$ является порядковой единицей в A.

Чтобы доказать архимедовость, отметим сначала, что конус A^2 замкнут, поэтому в силу эквивалентности свойств а) — г)

$$A^2 = \{a \in A : \|a\| \geqslant \|\|a\|\mathbf{1} - a\|\}.$$

Если $na \leqslant \mathbf{1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то $d_n = n^{-1}\mathbf{1} - a \in A^2$ и $\|d_n - (-a)\| = \|n^{-1}\mathbf{1}\| = n^{-1} \to 0$, т. е. $-a$ принадлежит замыканию A^2, а в силу замкнутости A^2 $-a \in A^2$, т. е. $a \leqslant 0$.

Пусть теперь $-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}$, т. е. $\mathbf{1} \pm a \geqslant 0$. Тогда существуют элементы $c, d \in C(a)$, такие, что $\mathbf{1} - a = c^2$, $\mathbf{1} + a = d^2$. В силу ассоциативности алгебры $C(a)$ имеем

$$\mathbf{1} - a^2 = (\mathbf{1} - a)(\mathbf{1} + a) = c^2 d^2 = (cd)^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + (cd)^2 = \mathbf{1} \tag{5}$$

и $\mathbf{1} - a^2 \geqslant 0$. Так как, по определению порядка, $a^2 \geqslant 0$, то $0 \leqslant a^2 \leqslant \mathbf{1}$, т. е. получено (2).

Далее в силу (5) и свойств (*ii*), (*iii*) *JB*-алгебры имеем

$$\|a\|^2 = \|a^2\| \leqslant \|a^2 + (cd)^2\| = \|\mathbf{1}\| = 1.$$

Следовательно, если

$$-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}, \text{ то } \|a\| \leqslant 1. \tag{6}$$

Из (4) и (6) вытекает, что порядковая норма на A совпадает с исходной нормой на *JB*-алгебре A.

2. Пусть A — полное упорядоченное нормированное пространство с единицей и йорданова алгебра, в которой мультипликативной единицей является порядковая единица, и выполнено условие (2).

Рассмотрим два элемента $a, b \in A$, такие, что $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$. Тогда $\left\| \frac{1}{2}(a+b) \right\| \leq 1$, $\left\| \frac{1}{2}(a-b) \right\| \leq 1$. Следовательно, $-\mathbf{1} \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq \mathbf{1}$, $-\mathbf{1} \leq \frac{1}{2}(a-b) \leq \mathbf{1}$. В силу (2)

$$0 \leq \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \leq \mathbf{1}, \quad 0 \leq \left[\frac{1}{2}(a-b)\right]^2 \leq \mathbf{1},$$

т. е.

$$-\mathbf{1} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leq \mathbf{1}$$

и

$$\|ab\| = \left\| \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right\| \leq 1.$$

Итак, если $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$, то $\|ab\| \leq 1$. Отсюда очевидным образом вытекает свойство (i) JB-алгебры.

Пусть теперь $\|a^2\| \leq 1$, тогда $a^2 \leq \mathbf{1}$ и так как квадрат любого элемента положителен, то в силу (2)

$$a = \frac{1}{2}\left[a^2 + \mathbf{1} - (a - \mathbf{1})^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[a^2 + \mathbf{1}\right] \leq \mathbf{1},$$

$$a = \frac{1}{2}\left[(a + \mathbf{1})^2 - a^2 - \mathbf{1}\right] \geqslant \frac{1}{2}\left[-a^2 - \mathbf{1}\right] \geqslant -\mathbf{1}.$$

Следовательно, $-\mathbf{1} \leq a \leq \mathbf{1}$, т. е. $\|a\| \leq 1$ и $\|a\|^2 \leq 1$. Отсюда и из (i) вытекает (ii).

Наконец, в силу (1) и (2) для любого $a \in A$ имеем

$$\|a^2\| = \inf\{\lambda > 0 \colon 0 \leq a^2 \leq \lambda\mathbf{1}\} \leq$$
$$\leq \inf\{\lambda > 0 \colon 0 \leq a^2 + b^2 \leq \lambda\mathbf{1}\} = \|a^2 + b^2\|. \blacksquare$$

Следствие. Всякая JB-алгебра формально вещественна, т. е. из $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ вытекает, что $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1. Пусть A — замкнутая по норме йорданова алгебра самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, где в качестве умножения берется симметризованное умножение $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Такие йордановы алгебры называются JC-алгебрами ([159—162]). В частности, эрмитова часть с симметризованным умножением произвольной C^*-алгебры является JC-алгеброй. Нетрудно проверить, что всякая JC-алгебра является примером специальной JB-алгебры.

Пример 2. Исключительную йорданову алгебру M_3^8 также можно наделить нормой, относительно которой она является JB-алгеброй (см. [155]).

Теорема 2. Если A_0 — замкнутая ассоциативная подалгебра JB-алгебры A, содержащая единицу $\mathbf{1}$, в частности, если $A_0 = C(a)$, то A_0 изометрически, порядково и алгебраически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве X.

Доказательство. Заметим, что если $a, b \in A_0$ — положительные элементы, то в силу эквивалентности условий в) и г), (см. доказательство теоремы 1) существуют элементы $c \in C(a) \subset A_0$, $d \in C(b) \subset A_0$, такие, что $a = c^2$, $b = d^2$. Так как A_0 ассоциативно, то $ab = (cd)^2 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0 \Longrightarrow ab \geqslant 0$. Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы Стоуна [76] о функциональном представлении частично упорядоченных алгебр. ■

Изучим некоторые свойства JB-алгебр. Как обычно, для элемента a из JB-алгебры A спектром a назовем множество $\sigma(a)$ всех тех $\lambda \in R$, для которых элемент $a - \lambda\mathbf{1}$ необратим. Из предложения 4 § 1 и теоремы 2 легко следует, что $\sigma(a)$ совпадает со спектром a относительно банаховой алгебры $C(a)$ (так как обратный элемент к a можно по норме аппроксимировать многочленами от a) и поэтому спектр элемента из JB-алгебры обладает свойствами спектра в вещественных банаховых алгебрах, изоморфных $C(X)$. В частности, $\sigma(a)$ — непустое компактное подмножество R, такое, что

1) $\|a\| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\}$;

2) $a \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sigma(a) \subset R^+ = [0, \infty)$;

3) элемент $a \geqslant 0$ обратим тогда и только тогда, когда существует $\lambda > 0$, такое, что $a \geqslant \lambda\mathbf{1}$.

Более того, в изоморфизме $C(X) \cong C(a)$ компакт X можно отождествить со спектром элемента a. Тогда изоморфным образом тождественной функции $(\xi \longrightarrow \xi)$ на $\sigma(a)$ будет сам элемент a, а образом любого многочлена π — многочлен $\pi(a)$. В случае произвольной функции $\varphi \in C(\sigma(a))$ изоморфный образ для φ обозначим через $\varphi(a)$. Ясно, что таким образом корректно определено функциональное исчисление на A (для непрерывных функций).

Одним из наиболее полезных инструментов при изучении йордановых алгебр является оператор U_a (см. § 1). Покажем, что этот оператор положительный. Через A_i обозначим множество обратимых элементов из A, через $A^+ = A^2$ — множество положительных элементов. Из свойства 3) спектра следует, что $A_i^+ = A_i \cap A^+$ — выпуклое подмножество в A.

Теорема 3. Для любого элемента a из JB-алгебры A оператор U_a положителен, т. е. $U_a(A^+) \subset A^+$.

Доказательство проведем в четыре этапа.

1. Если $a \in A_i$, то $U_a(A_i^+) \subset A^+$. Допустим противное, т. е. для некоторого $a \in A_i$ существует $b \in U_a(A_i^+)$, такое, что $b \bar{\in} A^+$. Тогда существует $\lambda_0 \in \sigma(b)$, такое, что $\lambda_0 < 0$.

Поэтому число 0 можно представить в виде выпуклой комбинации λ_0 и 1: $0 = t\lambda_0 + (1-t)$, где $t = \frac{1}{1-\lambda_0}$. Применяя линейную функцию $\varphi(\lambda) = t\lambda + (1-t)$ к обеим частям включения $\lambda_0 \in \sigma(b)$, получаем

$$0 = \varphi(\lambda_0) \in \sigma(\varphi(b)) = \sigma(tb + (1-t)\mathbf{1}).$$

Следовательно, элемент $tb + (1-t)\mathbf{1}$ необратим.

Покажем, что $\mathbf{1} \in U_a(A_i^+)$. Если $c = a^{-1}$, то $c \in C(a)$ и так как $C(a)$ ассоциативна, то

$$\mathbf{1} = (ac)(ac) = a^2c^2 = U_a\, c^2 \in U_a(A_i^+).$$

Множество $U_a(A_i^+)$ выпукло, поэтому

$$tb + (1-t)\mathbf{1} \in U_a(A_i^+) \subset U_a(A_i).$$

Если a — обратимый элемент, то в силу предложения 3 из § 1 $U_a(A_i) \subset A_i$, т. е. $tb + (1-t)\mathbf{1}$ — обратимый элемент, что не так.

2. Если $a \in A_i$, то $U_a(A^+) \subset A^+$. В силу непрерывности умножения в JB-алгебре (аксиома (i)) оператор U_a непрерывен. Так как A_i^+ плотно в A^+ (свойство 3) спектра) то из п. 1 вытекает п. 2.

3. Для любого $a \in A$ справедливо $U_a(A_i^+) \subset A^+$.

Если $c \in A_i^+$, то c имеет квадратичный корень $b \in C(c) \cong C(X)$, т. е. $c = b^2$ и $b \in A_i$. В силу тождества (5) из § 1

$$U_b U_a b^2 = (U_b a)^2 \geqslant 0.$$

Если $d = b^{-1} \in A_i$, то так как U_b^{-1} существует (предложение 2 из § 1), равно U_d и положительно в силу предыдущего пункта, то, применяя к последнему неравенству оператор U_d, получаем $U_a b^2 \geqslant 0$, т. е. $U_a c \geqslant 0$.

4. Утверждение теоремы 3 в общем случае вытекает из п. 3, непрерывности U_a и плотности A_i^+ в A^+. ■

JB-Алгебра, являющаяся фактором, называется JB-фактором. JB-Фактор, содержащий минимальный ненулевой идемпотент (атом), называется JB-фактором типа 1. Если в JB-факторе каждый набор из ненулевых попарно ортогональных идемпотентов содержит не более n элементов и есть набор, содержащий равно n элементов, то такой фактор называется JB-фактором типа I_n. Можно показать (см. [4], § 7), что всякий JB-фактор типа I_2 есть спин-фактор (см. § 1) и изометрически изоморфен JC-алгебре, т. е. специален. Более того, следующий результат показывает, что, кроме M_3^8, исключительных JB-факторов не существует.

Теорема 4. *Любой JB-фактор, кроме M_3^8, изоморфен JC-алгебре.*

Доказательство см. в [4] (теорема 8. 6).

Интересен также следующий результат, дающий полное описание всех JB-факторов типа I_n $(3 \leqslant n < \infty)$ (см. [4], предложение 8. 3).

Теорема 5. Любой JB-фактор типа I_n $(3 \leqslant n < \infty)$ конечномерен и все JB-факторы такого типа исчерпываются следующими примерами:

1) алгебра эрмитовых $n \times n$-матриц над полем действительных чисел;

2) алгебра эрмитовых $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел;

3) алгебра эрмитовых $n \times n$-матриц над телом кватернионов;

4) исключительная алгебра M_3^8 эрмитовых 3×3-матриц над числами Кэли.

Определение 2 [163]. JB-Алгебра A называется JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует банахово пространство N, такое, что A изометрически изоморфно пространству N^*, топологически сопряженному к N.

Для того чтобы сформулировать один из основных результатов работы [163], дающий другое эквивалентное определение JBW-алгебры, нам понадобятся несколько понятий.

Положительный линейный функционал ρ на JB-алгебре A называется с о с т о я н и е м, если $\rho(1) = 1$. Функционал φ на A называется н о р м а л ь н ы м, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$, монотонно убывающей к нулю (в смысле порядка, определенного в теореме 1), $\varphi(x_\alpha)$ 0. Говорят, что JB-алгебра A обладает р а з д е л я ю щ и м с е м е й с т в о м н о р м а л ь н ы х с о с т о я н и й, если для любого $a \in A$, $a \neq 0$ существует нормальное состояние ρ на A, такое, что $\rho(a^2) > 0$. JB-Алгебра A называтся м о н о т о н о н н о п о л н о й, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ из A в A существует точная верхняя грань $x = \sup x_\alpha$.

Теорема 6. Пусть A — JB-алгебра. Тогда A обладает предсопряженным пространством (т. е. является JBW-алгеброй) тогда и только тогда, когда она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний. Если одно из этих эквивалентных условий выполнено, то предсопряженное к A пространство единственно и может быть отождествлено с пространством N всех нормальных линейных функционалов на A (в естественной двойственности между A и $N \subset A^*$).

Доказательство см. в [163] (теорема 2.3).

Рассмотрим примеры JBW-алгебр.

Пример 3. Любая JW-алгебра, т. е. йорданова алгебра самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, замкнутая в слабой операторной топологии ([127, 160, 161, 168]), является примером специальной JBW-алгебры. JBW-Алгеброй является, в частности, эрмитова часть алгебры фон Неймана ([58, 98]).

Пример 4. Любая конечномерная JB-алгебра и, в частности, M_3^8 есть JBW-алгебра.

Из теоремы 6 вытекает следствие.

Следствие. Пусть A — JC-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) A монотонно полна и обладает разделяющим семейством нормальных состояний;

2) A обладает предсопряженным пространством;

3) A имеет точное представление как слабо замкнутая йорданова алгебра самосопряженных операторов (JW-алгебра).

В [4] (§ 3) показано, что для любой JB-алгебры A существует „монотонная полная обертывающая" JB-алгебра (точнее JBW-алгебра) $\tilde{A}$. В [163] доказано, что обертывающую JBM-алгебру $\tilde{A}$ для JB-алгебры A можно отождествить со вторым сопряженным пространством A^{**}, в котором введено произведение Аренса [13].

Следующий результат показывает, что JW-алгебрами и алгеброй M_3^8, по существу, исчерпываются все примеры JBW-алгебр. Напомним, что компактное хаусдорфово пространство называется гиперстоуновским, если алгебра $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на X обладает предсопряженным пространством.

Теорема 7. Любая JBW-алгебра A допускает единственное разложение $A = eA + (1-e)A$ с центральным идемпотентом $e \in Z(A)$, такое, что алгебра eA специальна (и, следовательно, изоморфна JW-алгебре), а алгебра $(1-e)A$ изоморфна алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$ всех непрерывных отображений X в M_3^8, где X — некоторый гиперстоуновский компакт. Наоборот, для любого гиперстоуновского компакта X алгебра $C\left(X, M_3^8\right)$ является JBM-алгеброй.

Доказательство см. в [163] (теорема 3.9).

Для произвольных JB-алгебр утверждение теоремы 7 места не имеет. Ослабленный вариант аналога теоремы Гельфанда — Наймарка для JB-алгебр см. в [4] (теорема 9.5).

Пусть A — JBW-алгебра, N — предсопряженное пространство к A, K — множество всех нормальных состояний на A. Наряду с нормированной топологией на А можно рассматривать и другие топологии.

$*$-Слабой топологией на A называется топология $\sigma(A, N) = \sigma(N^*, N)$ поточечной сходимости на элементах из N.

Если ρ — состояние на A, то, используя неравенство Шварца, легко показать, что отображение $a \to \sqrt{\rho(a^2)}$, $a \in A$, является преднормой на A. Локально выпуклая топология на A, порожденная семейством преднорм $\{\sqrt{\rho(a^2)}, \rho \in K\}$, называется сильной топологией на A.

Теорема 8 (**[4], лемма 4. 1**). Пусть A — JBW-алгебра. Для монотонных сетей в A понятия порядковой, сильной и $*$-слабой сходимостей совпадают. Умножение в A $*$-слабо непрерывно по каждой переменной раздельно и сильно непрерывно по совокупности переменных, изменяющихся на ограниченных по норме подмножествах из A.

Замечание. Подробно JB-алгебры изучены в работе [4], JBW-алгебры — в [163], а JW-алгебры — в [127, 160, 161].

Библиография: [2—7, 27, 32, 39, 43, 44, 47, 94, 96, 124, 127, 159—172].

§ 3. OJ-Алгебры

Пусть A — йорданова алгебра.

Определение 1. Частичный порядок «$\geqslant$» на A назовем согласованным с агебраическими операциями, если выполняются следующие условия:

1) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для любого $z \in A$;

2) если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого неотрицательного числа λ;

3) если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leftrightarrow y$, то $xy \geqslant 0$;

4) $x^2 \geqslant 0$ для любого $x \in A$.

Определение 2. Йорданову алгебру A с единицей назовем OJ-алгеброй, если на A определен частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями, и выполнены следующие условия:

(I) если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов из A, то существует элемент $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α;

(II) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 алгебры A является решеткой относительно индуцированного частичного порядка.

Пример 1. Любое полуполе является примером ассоциативной OJ-алгебры.

Пример 2. Любая JBW-алгебра и, в частности, JW-алгебра, является OJ-алгеброй относительно частичного порядка, определенного в теореме 1 из § 2.

Действительно, свойства 1), 2), 4) OJ-алгебры вытекают непосредственно из теоремы 1 § 1.

Если A_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW-алгебры A, то в силу непрерывности умножения относительно нормированной топологии A_0 является замкнутой ассоциативной подалгеброй в A. Поэтому A_0 изометрически, порядково и алгебраически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на некотором хаусдорфовом компакте X (теорема 2 из § 2). Так как пространство $C(X)$ является решеткой, то выполнена аксиома (II) OJ-алгебры. Если x, $y \in A$, $x \leftrightarrow y$, то x и y принадлежат некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре (т. е. некоторому $C(X)$). Поэтому, если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leftrightarrow y$, то $xy \geqslant 0$, т. е. выполнено условие 3) из определения OJ-алгебры. Осталось доказать лишь свойство (I) OJ-алгебры. Пусть $\{x_\alpha\}$ — монотонно возрастающая ограниченная сверху сеть элементов A. В силу монотонной полноты JBW-алгебры (теорема 4 из § 2) в A существует $x = \sup x_\alpha$, причем x_α сходится к x сильно, по теореме 6 из § 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant x_\alpha \leqslant x$, т. е. $\|x_\alpha\| \leqslant \|x\|$ для всех α. Из сильной непрерывности умножения по совокупности аргументов на ограниченных по норме подмножествах A вытекает, что если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α, то $x \leftrightarrow y$, т. е. A — OJ-алгебра.

Замечание. При рассмотрении примера 2, по существу, показано, что в произвольной JB-алгебре выполнены все аксиомы OJ-алгебры, кроме, быть может, аксиомы (I).

Теорема 1. Пусть A — OJ-алгебра, A_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра A. Тогда A_0 с индуцированными алгебраическими операциями и частичным порядком является полуполем.

Доказательство. В силу аксиом 1), 2), (II) подалгебра A_0 является векторной решеткой. Покажем, что A_0 условно полна. Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов из A_0. В силу условия (I) в A существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α. Так как A_0 сильно ассоциативна и $x_\alpha \in A_0$, то $x \leftrightarrow z$ для всех $z \in A_0$. Из максимальности A_0 и из следствия предложения 5 § 1 вытекает, что $x \in A_0$, т. е. x является точной верхней гранью сети $\{x_\alpha\}$ в A_0, следовательно, A_0 условно полна. Далее, так как единица 1 совместна со всеми элементами из A, то $\mathbf{1} \in A_0$. Покажем, что $\mathbf{1}$ является фрейденталевской единицей в A_0, т. е. $\mathbf{1} \wedge x \neq 0$ для любого $x > 0$, $x \in A_0$. Пусть $x \in A_0$, $x \geqslant 0$ и $x \wedge \mathbf{1} = 0$. Рассмотрим оператор P проектирования на компоненту векторной решетки A_0, порожденную элементом x. Тогда $P(x) = x$, $P(\mathbf{1}) = 0$.

В силу свойства 4) OJ-алгебры $(x - n\mathbf{1})^2 \geqslant 0$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $x^2 - 2nx + n^2\mathbf{1} \geqslant 0$. Так как оператор P положителен, то, применяя его к последнему неравенству, получаем $P(x^2) - 2nx \geqslant 0$, т. е. $P(x^2) \geqslant 2nx$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. В силу архимедовости порядка в условно полной решетке отсюда вытекает, что $x \leqslant 0$, т. е. $x = 0$. В силу аксиомы 3) частичный порядок в A_0 согласован с умножением. Таким образом, A_0 — полуполе. ■

Следствие 1. На OJ-алгебре A существует единственный частичный порядок, превращающий A в OJ-алгебру, а именно: конус A^+ положительных элементов состоит из всевозможных квадратов элементов из A, т. е. $A^+ = \{y^2 : y \in A\}$.

Доказательство. В силу аксиомы 4) из определения OJ-алгебры $\{y^2 : y \in A\} \subset A^+$. Наоборот, пусть $x \in A^+$, т. е. $x \geqslant 0$. В силу предложения 5 п. в) из § 1 и леммы Цорна существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0, содержащая элемент x. Так как A_0 является полуполем, то в нем из всякого положительного элемента можно извлечь положительный квадратный корень, в частности, существует $y \in A_0$, такое, что $x = y^2$. ■

Замечание. По ходу доказательства следствия 1 мы показали, что всякий элемент OJ-алгебры принадлежит некоторому полуполю (вообще говоря, неоднозначно определенному). Этот факт будет нами часто использоваться.

Следствие 2. Если A — OJ-алгебра, $x \in A$ и $x^n = 0$ для некоторого $n = 2, 3, \ldots$, то $x = 0$.

Доказательство следует из предыдущего замечания и аналогичного свойства для полуполей.

Следствие 3. Для того чтобы идемпотенты e и f в OJ-алгебре A были совместны, необходимо и достаточно, чтобы существовали три попарно ортогональных идемпотента e_1, f_1, $g \in A$, такие, что $e = e_1 + g$, $f = f_1 + g$ (см. гл. I, § 1).

Доказательство. Напомним, что идемпотенты p, q называются ортогональными ($p \perp q$), если $pq = 0$. Пусть e и f совместны, т. е. лежат в некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре $A_0 \subset A$, являющейся в силу теоремы 1 полуполем. Так как e и f — идемпотенты, то они принадлежат булевой алгебре идемпотентов A_0. Тогда ясно, что $g = e \wedge f = ef$, $f_1 = f(\mathbf{1} - g)$, $e_1 = e(\mathbf{1} - g)$ являются искомыми идемпотентами.

Наоборот, пусть $e = e_1 + g$, $f = f_1 + g$, где e_1, f_1, g — попарно ортогональные идемпотенты. В силу п. а) предложения 6 из § 1 идемпотенты e_1, f_1, g попарно совместны, т. е.

семейство $\{e_1, f_1, g\}$ совместно. Следовательно, эти идемпотенты порождают сильно ассоциативную подалгебру в A, которая, очевидно, содержит и элементы $e=e_1+g$, $f=f_1+g$, т. е. $e \leftrightarrow f$. ■

Прежде чем рассматривать дальнейшие свойства OJ-алгебр, приведем одно вспомогательное утверждение.

Предложение 1. Пусть e — идемпотент OJ-алгебры A. Тогда:

а) оператор U_e положителен, т. е. $U_e(A^+) \subset A^+$;

б) если $x \in A^+$ и $U_e x = 0$, то $ex = 0$.

Доказательство. а) Пусть $x \geqslant 0$. В силу следствия 1 из теоремы 1 $x = y^2$ для некоторого $y \in A$. Если $y = y_0 + y_{1/2} + y_1$ — пирсовское разложение по идемпотенту e, то $y^2 = y_0^2 + y_{1/2}^2 + y_1^2 + 2y_{1/2}(y_0 + y_1)$. По теореме Алберта (§ 1) $U_e x = U_e y^2 = y_1^2 + U_e y_{1/2}^2$. Так как $y_{1/2}^2 \in J_0(e) + J_1(e)$, то в силу п. 2) предложения 6 из § 1 $y_{1/2}^2 \leftrightarrow e$. Отсюда, из положительности e и $y_{1/2}^2$ и из аксиомы 3) OJ-алгебры вытекает, что $U_e y_{1/2}^2 = e y_{1/2}^2 \geqslant 0$. Следовательно, $U_e x = y_1^2 + U_e y_{1/2}^2 = y_1^2 + e y_{1/2}^2 \geqslant 0$.

б) Пусть $x = y^2$, $U_e x = 0$. Тогда в обозначениях предыдущего пункта $y_1^2 + e y_{1/2}^2 = 0$, т. е. $y_1^2 = e y_{1/2}^2 = 0$. Из основного йорданова тождества имеем

$$\frac{1}{2} y_{1/2}^3 = \frac{1}{2} y_{1/2} y_{1/2}^2 = (y_{1/2} e) y_{1/2}^2 = y_{1/2}(e y_{1/2}^2) = 0,$$

т. е. $y_{1/2}^3 = 0$. В силу следствия 2 к теореме 1 $y_{1/2} = 0$ и $y_1 = 0$. Поэтому $y = y_0 \in J_0(e)$ и $x = y^2 = y_0^2 \in J_0(e)$. Это означает, что $ex = 0$. ■

Следствие. В любой OJ-алгебре выполнен принцип Архимеда, т. е. если $nx \leqslant y$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то $x \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть A_0 — некоторое полуполе, содержащее x. Если неравенство $x \leqslant 0$ не выполняется, то в A_0 существует идемпотент e, такой, что $ex \geqslant 0$, $ex \neq 0$ (и, очевидно, $e \leftrightarrow x$). Так как оператор U_e положителен, то, применяя его к неравенству $nx \leqslant y$, получаем $n(ex) = U_e(nx) \leqslant U_e y$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как $ex \geqslant 0$, то последовательность $\{n(ex)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и ограничена сверху элементом $U_e y$. В силу аксиомы (I) OJ-алгебры существует $z = \sup\limits_n \{n(ex)\}$. Тогда $z + ex = \sup\limits_n (n+1)(ex) = z$, т. е. $ex = 0$, что противоречит выбору e. ■

Пусть ∇ — совокупность всех идемпотентов OJ-алгебры A.

Очевидно, $0, 1 \in \nabla$. Так как $e = e^2 \geqslant 0$ и $1 - e = (1-e)^2 \geqslant 0$, то $0 \leqslant e \leqslant 1$ для всех $e \in \nabla$.

Предложение 2. Для $e, f \in \nabla$ следующие условия эквивалентны: а) $e \leqslant f$; б) $ef = e$. В частности, сравнимые идемпотенты из OJ-алгебры совместны.

Доказательство. Применяя положительный оператор U_e к неравенству $e \leqslant f \leqslant 1$, получаем $e = U_e e \leqslant U_e f \leqslant U_e 1 = e$, т. е. $U_e f = e = U_e e$, или $U_e(f - e) = 0$. Так как $f - e \geqslant 0$, то в силу п. б) предложения 1 $e(f-e) = 0$, т. е. $ef = e$. Наоборот, если $ef = e$, то $(f-e)^2 = f^2 - 2fe + e^2 = f - 2e + e = f - e$, т. е. $f - e = (f-e)^2 \geqslant 0$.

Если $e \leqslant f$, то $ef = e$ и $e \in J_1(f)$. Следовательно, $e \leftrightarrow f$ (п. б) предложения 6 из § 1). ∎

Элемент a из OJ-алгебры A называется ограниченным, если существует такое положительное число λ, что $-\lambda 1 \leqslant a \leqslant \lambda 1$. Все элементы JBW-алгебры A являются ограниченными, так как по теореме 1 из § 2 справедливы неравенства $-\|a\| 1 \leqslant a \leqslant \|a\| 1$ для всех $a \in A$. Универсальные неконечномерные полуполя, в частности, алгебра $S[0, 1]$ всех измеримых функций на отрезке $[0, 1]$, являются примерами ассоциативных OJ-алгебр, содержащих неограниченные элементы. Примеры неассоциативных OJ-алгебр (даже факторов), содержащих неограниченные элементы, будут приведены позже.

Следующая теорема используется при доказательстве спектральной теоремы для OJ-алгебр и построения для них функционального исчисления.

Теорема 2. Пусть A — OJ-алгебра, A_1, A_2 — ее максимальные сильно ассоциативные подалгебры. Тогда их пересечение $A_0 = A_1 \cap A_2$ является правильным подполуполем как в A_1, так и в A_2.

Доказательство. Сначала покажем, что A_0 является подрешеткой в A_1 и A_2. Ясно, что A_0 — подалгебра в A_1 и A_2, содержащая единицу. В силу тождеств $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$, $x \vee y = ((x - y) \vee 0) + y$, верных в любых векторных решетках, достаточно показать, что $x \vee 0 \in A_0$ для любого $x \in A_0$.

Пусть $x \in A_0$, $x \geqslant 0$. В каждом из полуполей A_1 и A_2 существует единственный положительный квадратный корень $\sqrt{x}$. Покажем, что он один и тот же для обоих полуполей, т. е. $\sqrt{x} \in A_0 = A_1 \cap A_2$. Рассмотрим элемент $x + 1 \in A_0$. Он обратим в A_1 и в A_2, так как они полуполя. В силу единственности обратного элемента в йордановой алгебре A (см. § 1) $(x+1)^{-1} \in A_0$, причем $(x+1)^{-1} \geqslant 0$.

Положим $x_0 = 0$,

$$x_n = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x + x_{n-1}^2\right], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $(x+1)^{-1} \in A_0$ и A_0 — подалгебра A, то вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит A_0. Далее, очевидно, что

$$x_1 = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x\right] \geqslant 0 = x_0$$

в силу сильной ассоциативности A_0 и положительности x. Отсюда, используя индукцию и равенства

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[x_n^2 - x_{n-1}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

получаем, что $x_{n+1} \geqslant x_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Покажем, что она ограничена сверху. Имеем $x_0 = 0 \leqslant x+1$. Если $x_n \leqslant x+1$, то

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x + x_n^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x + (x+1)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(x+1)^{-1} \cdot 2(x+1)^2 = x+1.$$

Следовательно, $x_n \leqslant x+1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. По аксиоме (I) OJ-алгебры в A существует элемент $z = \sup\limits_n x_n \leqslant x+1$, причем $z \leftrightarrow y$, если $y \leftrightarrow x_n$ для всех n. Значит, z совместен со всеми элементами из A_1 и A_2. В силу максимальности A_1 и A_2 получаем, что $z \in A_1 \cap A_2 = A_0$. Переходя в равенстве

$$x_n = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x + x_{n-1}^2\right]$$

к точной верхней грани, имеем

$$z = \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\left[(x+1)^2 - x + z^2\right],$$

или

$$2z(x+1) = (x+1)^2 - x + z^2,$$

т. е. $x = (x+1)^2 - 2z(x+1) + z^2 = (x+1-z)^2$. Следовательно, элемент $x+1-z \geqslant 0$ является квадратным корнем из x и потому $\sqrt{x} = x+1-z \in A_0$.

Пусть $x \in A_0$ — произвольный элемент. Тогда $x^2 \in A_0$ и в силу доказанного выше $|x| = \sqrt{x^2} \in A_0$. Следовательно, $x \vee 0 = \frac{1}{2}(|x| + x) \in A_0$, т. е. A_0 является подрешеткой как в A_1, так и в A_2.

Покажем, что A_0 — правильное подполуполе в этих полуполях. Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая и ограниченная сверху в A_1 (соответственно в A_2) сеть элементов из A_0. Тогда она ограничена в OJ-алгебре A и поэтому существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α. Следовательно, x совместен со всеми элементами из A_1 и A_2 и в силу максимальности этих подалгебр $x \in A_1 \cap A_2 = A_0$, т. е. $\sup x_\alpha \in A_0$. Значит, A_0 — правильное подполуполе в A_1 (соответственно в A_2). ■

Библиография: [22, 23, 26, 30, 116].

§ 4. Спектральная теорема для OJ-алгебр

Пусть A — OJ-алгебра, ∇ — множество всех идемпотентов A. Семейство $\{e_\lambda\}$ из ∇ (λ — действительное число) называется спектральным, если выполняются следующие условия:

1) $e_\lambda \leqslant e_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$;

2) $\inf\limits_\lambda e_\lambda = 0$, $\sup\limits_\lambda e_\lambda = 1$;

3) $e_\lambda = \sup\limits_{\mu < \lambda} e_\mu$ для всех λ.

Из условия 1) вытекает, что любые два идемпотента из спектрального семейства сравнимы и, следовательно, совместны (предложение 2 из § 3). Поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A_1 \subset A$, содержащая данное спектральное семейство. Так как A_1 является полуполем, то $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство в полуполе A_1. Предположим, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ сходится в A_1 (гл. II, § 5), т. е. в A_1 существует элемент x, для которого $\{e_\lambda\}$ является спектральным семейством. В этом случае будем говорить, что x является интегралом от семейства $\{e_\lambda\}$ и записывать его как $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$.

Проверим корректность такого определения. Пусть A_2 — другая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в A, содержащая семейство $\{e_\lambda\}$, и $A_0 = A_1 \cap A_2$. Тогда в силу теоремы 2 из § 3 A_0 является правильным подполуполем в A_1 и A_2. Так как A_0 содержит спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, то в силу правильности оно содержит и интеграл от него, являющийся (o)-пределом линейных комбинаций элементов этого семейства. Следовательно, интегралы от семейства $\{e_\lambda\}$, вычисленные в A_1 и A_2, совпадают с интегралом, вычисленным в A_0, т. е. равны между собой. Поэтому определение интеграла от спектрального семейства не зависит от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей это семейство.

Пусть x — произвольный элемент из OJ-алгебры A и A_1 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра, содержащая x. В полуполе A_1 существует спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Тогда, очевидно, $\{e_\lambda\}$ является спектральным семейством в A, а x — интегралом от этого семейства в указанном выше смысле. Так как $e_\lambda = e_{(\lambda 1 - x)_+}$, т. е. e_λ является носителем положительной части элемента $\lambda 1 - x$ в полуполе A_1, который не меняется при переходе к правильному подполуполю A_1, то, как и выше, отсюда следует корректность определения спектрального семейства от элемента OJ-алгебры, т. е. независимость $\{e_\lambda\}$ от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей элемент x.

Из свойств спектрального разложения в полуполе вытекает следующая теорема.

Теорема 1 (спектральная теорема). *Для каждого элемента x из OJ-алгебры A существует только одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ в A, такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$, причем $\{e_\lambda\}$ содержится в любой максимальной сильно ассоциативной подалгебре, содержащей элемент x (т. е. $y \leftrightarrow x$ тогда и только тогда, когда $y \leftrightarrow e_\lambda$ для всех λ). Элемент x положителен тогда и только тогда, когда $e_\lambda = 0$ при $\lambda < 0$; элемент x ограничен тогда и только тогда, когда существуют такие действительные числа α и β, что $e_\lambda = 0$ при $\lambda < \alpha$ и $e_\lambda = \mathbf{1}$ при $\lambda > \beta$.*

Спектральная теорема имеет ряд важных следствий, которые мы рассмотрим в этом параграфе.

Пусть $x \in A$, A_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра, содержащая элемент x. Так как A_0 — полуполе, то определены элементы $x^+ = x \vee 0$ — *положительная часть* x, $x^- = (-x) \vee 0$ — *отрицательная часть* x, $|x| = x^+ + x^-$ — *модуль* элемента x. Из теоремы 2 § 3 вытекает, что эти понятия не зависят от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей элемент x, более того, легко видеть, что если $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для x, то

$$x^+ = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda, \quad x^- = -\int\limits_{-\infty}^{0} \lambda de_\lambda, \quad |x| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| de_\lambda.$$

Пользуясь спектральной теоремой, можно дать другие эквивалентные определения для совместности элементов OJ-алгебры.

Пусть a, b — элементы OJ-алгебры A, $\{e_\lambda\}$ и $\{f_\mu\}$ — соответственно их спектральные семейства.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны: 1) $a \leftrightarrow b$; 2) e_λ и f_μ попарно операторно коммутируют; 3) a операторно коммутирует со всеми f_μ; 3′) b операторно коммутирует со всеми e_λ; 4) $f_\mu(f_\mu a) = f_\mu a$ для всех μ; 4′) $e_\lambda(e_\lambda b) = e_\lambda b$ для всех λ.

Доказательство. В силу симметрии достаточно доказать импликации $1) \to 2) \to 3) \to 4) \to 1)$. Если $a \leftrightarrow b$, то существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A_0 \subset A$, содержащая a и b. В силу спектральной теоремы все $\{e_\lambda\}$ и $\{f_\mu\}$ принадлежат A_0 и, значит, совместны, в частности. операторно коммутируют. Если все $\{e_\lambda\}$ и $\{f_\mu\}$ операторно коммутируют, то в силу следствия 1 к предложению 6 из § 1 они все совместны и поэтому принадлежат одной максимальной сильно ассоциативной подалгебре, в которой по спектральной теореме лежат и элементы a, b. Следовательно, $a \leftrightarrow f_\mu$ для всех μ. В частности, a операторно коммутирует со всеми f_μ. Импликации $3) \to 4)$ и $4) \to 1)$ вытекают из следствия 1 к предложению 6 § 1 и спектральной теоремы. ■

Следствие 1. Если элемент a совместен со всеми элементами множества M в OJ-алгебре A, то a совместен со всей подалгеброй $J(M)$, порожденной этим множеством.

Доказательство. Пусть $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Так как $a \leftrightarrow x$ для всех $x \in M$, то $e_\lambda \leftrightarrow x$. По следствию 2 к предложению 6 из § 1 $e_\lambda \leftrightarrow y$ для всех $y \in J(M)$. В силу теоремы 2 $a \leftrightarrow y$ для всех $y \in J(M)$. ■

Следствие 2. В OJ-алгебре любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра является максимальной ассоциативной подалгеброй.

Доказательство. Пусть A_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра A. В силу ассоциативности A_0 существует максимальная ассоциативная подалгебра A_1 в A, содержащая A_0. Пусть $x \in A_1$, $a \in A_0$ и $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Так как $e_\lambda \in A_0 \subset A$ и $x \in A_1$, то $(e_\lambda c)x = e_\lambda(cx)$ для всех $c \in A_1$. В частности, при $c = e_\lambda$ имеем $e_\lambda x = e_\lambda(e_\lambda x)$. В силу теоремы 2 $e_\lambda \leftrightarrow x$ для всех λ, т. е. $a \leftrightarrow x$. Из максимальности A_0 и следствия к предложению 5 § 1 вытекает $x \in A_0$, т. е. $A_0 = A_1$. ■

Подалгебру A_1 OJ-алгебры A назовем OJ-*подалгеброй*, если сама A_1 является OJ-алгеброй относительно некоторого частичного порядка. Покажем, что в данном случае этот частичный порядок обязательно индуцирован из A. Если $x \in A_1$ положителен в A_1, т. е. $x = y^2$ для некоторого $y \in A_1 \subset A$, то, очевидно, $x \geqslant 0$ в A. Наоборот, пусть $x \in A_1$ и $x \geqslant 0$ в A. Так как A_1 — OJ-алгебра, то x имеет разложение $x = x^+ - x^-$ в A_1, причем $x^+ \geqslant 0$, $x^- \geqslant 0$ в A_1 и, следовательно, в A. Поэтому это будет разложением на положительную и отрицательную части и в A. Так как $x \geqslant 0$ в A, то $x^- = 0$, т. е. $x = x^+ \geqslant 0$ в A_1.

Предложение 1. Для OJ-подалгебр OJ-алгебры понятия ассоциативности и сильной ассоциативности совпадают.

Доказательство. Ясно, что если подалгебра A_0 сильно ассоциативна, то она ассоциативна. Наоборот, пусть A_0 — ассоциативная OJ-подалгебра в A и $a, b \in A_0$, $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ (спектральное разложение для a взято в A_0). В силу ассоциативности A_0 имеем $e_\lambda (cb) = (e_\lambda c) b$ для всех $c \in A_0$. В частности, $e_\lambda (e_\lambda b) = e_\lambda b$. По теореме 2 $a \leftrightarrow b$, т. е. любые два элемента A_0 совместны и поэтому операторно коммутируют в A. Следовательно, A_0 сильно ассоциативна. ■

Следствие. Всякая ассоциативная OJ-подалгебра OJ-алгебры является полуполем.

Предложение 2. Для любого элемента a из OJ-алгебры A существует наименьший идемпотент, обладающий свойством $ea = a$. Этот идемпотент называется носителем a и обозначается $s(a)$.

Доказательство. Пусть A_1 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра в A, содержащая a. Так как A_1 — полуполе, то в A_1 существует носитель $s(a)$ элемента a, который не зависит от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей a. Более того,

$$s(a) = \sup_n f_n,$$

где $f_n = e_{-\frac{1}{n}} + e^\perp_{\frac{1}{n}}$. Здесь $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента a, $e^\perp = 1 - e$. Если e — любой идемпотент, обладающий свойством $ea = a$, то в силу предложения 6 из § 1 $e \leftrightarrow a$, поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0, содержащая e и a. Так как $s(a)$ является носителем элемента a и в полуполе A_0, то $e \geqslant s(a)$. ■

Приведем некоторые свойства носителя.

Теорема 3. Пусть a — элемент из OJ-алгебры A, $s(a)$ — носитель a. Тогда:

1) $s(a) \leftrightarrow x$, если $a \leftrightarrow x$;

2) $s(a) = s(a^2) = s(|a|) = s(\lambda a)$, где $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$;

3) $s(a) = s(a^+) + s(a^-)$, $a^+ = as(a^+)$, $a^- = -as(a^-)$;

4) если e — идемпотент, то $ea=0$ тогда и только тогда, когда $es(a)=0$;

5) если $s(a)s(b)=0$, то $ab=0$;

6) если $a\geqslant 0$, то $s(a)=\sup\{e\in\nabla : \varepsilon e\leqslant a$ для некоторого $\varepsilon>0\}$.

Доказательство п. 1) вытекает из доказательства предложения 2. Пункты 2) и 3) следуют из свойств носителя в полуполе. Пусть $ea=0$, тогда в силу предложения 6 из § 1 $e\leftrightarrow a$, т. е. a и e принадлежат одной максимальной сильно ассоциативной подалгебре. Из свойств носителя в полуполе вытекает, что $es(a)=0$. Наоборот, если $es(a)=0$, то $e\in J_0(s(a))$, но $as(a)=a$, т. е. $a\in J_1(s(a))$. В силу теоремы Алберта (см. § 1) $ea=0$.

Если $s(a)s(b)=0$, то в силу п. 4) $s(a)b=0$, т. е. $b\in J_0(s(a))$. Так как $a\in J_1(s(a))$, то $ab=0$.

Докажем п. 6). Пусть $\varepsilon e\leqslant a$, т. е. $e\leqslant\varepsilon^{-1}a$. Положим $g=1-s(a)\in\nabla$. В силу положительности оператора U_g (предложение 1 из § 3) имеем $U_g e\leqslant\varepsilon^{-1}U_g a$. Далее $gs(a)=(1-s(a))s(a)=0$ и в силу п. 4) $ga=0$, т. е. $U_g a=2g(ga)-ga=0$. Следовательно, $0\leqslant U_g e\leqslant\varepsilon^{-1}U_g a=0$, т. е. $U_g e=0$. В силу предложения 1 из § 3 $ge=0$ и потому $e=es(a)$. Это означает, что $e\leqslant s(a)$ (предложение 2 из § 3). Таким образом, $e\leqslant s(a)$ для любого $e\in\Gamma=\{e\in\nabla : \varepsilon e\leqslant a$ для некоторого $\varepsilon>0\}$.

Пусть теперь $h\in\nabla$ — такой идемпотент, что $h\geqslant e$ для любого $e\in\Gamma$. Если $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента a, то $s(a)=\sup e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$, но $\frac{1}{n}e^{\perp}_{\frac{1}{n}}\leqslant a$, т. е. $h\geqslant e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$ для всех $n=1, 2, \ldots$. Следовательно, $h\geqslant\sup\limits_n e^{\perp}_{\frac{1}{n}}=s(a)$. Это и означает, что $s(a)=\sup\Gamma$. ■

Пусть $Z(A)$ — центр OJ-алгебры A (см. § 1).

Предложение. 3. Следующие условия эквивалентны:

1) $a\in Z(A)$;

2) a операторно коммутирует со всеми идемпотентами A;

3) $U_s a=a$ для любой симметрии $s\in A$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из теоремы 2. Покажем справедливость импликаций 1)$\to$3) и 3)$\to$2). Если $a\in Z(A)$, то элемент a совместен и, следовательно, операторно коммутирует со всеми элементами A. В частности, для любой симметрии

$$U_s a=2s(sa)-a=2s^2a-a=a.$$

Наоборот, пусть $U_s a=a$ для любой симметрии s, $g\in\nabla$ — произвольный идемпотент. Тогда $2g-1$ — симметрия и $U_{2g-1}a=a$, т. е. $2(2g-1)[(2g-1)a]-a=a$. Это означает, что $g(ga)=$

$= ga$. В силу следствия 1 предложения 6 из § 1 элемент a операторно коммутирует с g. ■

Замечание. Теорема 2 показывает, что понятие совместности, введенное нами в произвольных йордановых алгебрах, совпадает с понятием совместности, введенным в работе [4] (§ 4) для JB-алгебр.

Аналог предложения 3 для JBW-алгебр доказан в работе [4] (лемма 5.3) (см. также [162], предложение 2).

Библиография: [4, 23, 116, 162].

§ 5. OJ-Алгебры ограниченных элементов

Пусть A — произвольная OJ-алгебра, B — совокупность ограниченных элементов A. Если $a, b \in B$, т. е существуют числа $\lambda > 0$, $\mu > 0$, такие, что $-\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}$, $-\mu\mathbf{1} \leqslant b \leqslant \mu\mathbf{1}$, то $-(\lambda + \mu)\mathbf{1} \leqslant a + b \leqslant (\lambda + \mu)\mathbf{1}$, и если $\alpha \in R$, то $-|\alpha|\lambda\mathbf{1} \leqslant \alpha a \leqslant |\alpha|\lambda\mathbf{1}$. Следовательно, B — векторное подпространство A. Далее, так как $\lambda\mathbf{1} - a \geqslant 0$, $\lambda\mathbf{1} + a \geqslant 0$ и $(\lambda\mathbf{1} - a) \leftrightarrow (\lambda\mathbf{1} + a)$, то $\lambda^2\mathbf{1} - a^2 = (\lambda\mathbf{1} - a)(\lambda\mathbf{1} + a) \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant a^2 \leqslant \lambda^2\mathbf{1}$. Значит, если $a \in B$, то $a^2 \in B$. Таким образом, B — йорданова подалгебра A.

Теорема 1. Алгебра B ограниченных элементов OJ-алгебры A является JB-алгеброй относительно нормы

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}\}. \tag{1}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 из § 2 достаточно показать, что B является полным упорядоченным нормированным пространством с единицей относительно нормы (1), причем мультипликативная единица $\mathbf{1}$ является порядковой единицей и выполнено следующее условие:

$$\text{из } -\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1} \text{ следует } 0 \leqslant a^2 \leqslant \mathbf{1}. \tag{2}$$

Покажем, что (1) действительно определяет норму на B. Так как $-(\|x\| + \varepsilon)\mathbf{1} \leqslant x \leqslant (\|x\| + \varepsilon)\mathbf{1}$ для любого $\varepsilon > 0$, то в силу архимедовости порядка в A

$$-\|x\|\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \|x\|\mathbf{1} \tag{3}$$

для любого $x \in B$. Отсюда следует, что $\|x\| = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$. Далее, так как

$$-\|x\|\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \|x\|\mathbf{1}, \quad -\|y\|\mathbf{1} \leqslant y \leqslant \|y\|\mathbf{1},$$

то

$$-(\|x\| + \|y\|)\mathbf{1} \leqslant x + y \leqslant (\|x\| + \|y\|)\mathbf{1}.$$

Отсюда

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \text{ для всех } x, y \in B.$$

Аналогично $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\lambda \in R$, $x \in B$.

Итак, (1) определяет норму на B и по определению из $\|a\| \leqslant 1$ вытекает, что $-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}$, т. е. $\mathbf{1}$ является порядковой единицей. Условие (2) также выполнено, так как оно верно во всякой максимальной сильно ассоциативной подалгебре A, являющейся полуполем. OJ-Алгебра A архимедова и порядок на B индуцирован из A, поэтому порядок на B также архимедов, т. е. B является упорядоченным нормированным пространством с единицей в смысле определения из § 2.

Осталось лишь доказать полноту B относительно нормы (1). Для этого достаточно показать, что если $\{x_n\} \subset B$ — такая последовательность, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по норме в B.

Представим каждый элемент $x_n \in B \subset A$ в виде $x_n = u_n - v_n$, где $u_n = x_n^+$, $v_n = x_n^-$ (см. § 3). Очевидно, нужно лишь доказать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Рассмотрим, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Так как $0 \leqslant \|x_n\| 1$, $x_n \leqslant \|x_n\| 1$, то $u_n = x_n \vee 0 \leqslant \|x_n\| 1$ (где супремум берется по любой максимальной сильно ассоциативной подалгебре A, содержащей x_n). Следовательно, $\|u_n\| \leqslant \|x_n\|$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ сходится. Положим $U_k = u_1 + \dots + u_k$. Так как все u_n положительны, то последовательность $\{U_k\}$ возрастает. Если $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$, то для любого $k = 1, 2, \dots$

$$0 \leqslant U_k = u_1 + \dots + u_k \leqslant (\|u_1\| + \dots + \|u_k\|) 1 \leqslant \lambda 1,$$

т. е. последовательность $\{U_k\}$ ограничена сверху. В силу аксиомы (1) в OJ-алгебре A существует $U = \sup U_k$, причем $0 \leqslant U \leqslant \lambda 1$, т. е. $U \in B$.

Далее для любого натурального $m > k$

$$U_m = U_k + \sum_{n=k+1}^{m} u_n \leqslant U_k + \left(\sum_{n=k+1}^{m} \|u_n\| \right) 1 \leqslant U_k + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \right) 1.$$

В силу произвольности m

$$U \leqslant U_k + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \right) 1,$$

т. е.

$$0 \leqslant U - U_k \leqslant \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \right) 1.$$

По определению нормы в A

$$\|U-U_k\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \to 0 \quad \text{при } k\to\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по норме к U. Аналогично доказывается сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = V \in B$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = U - V \in B$. Итак, B полно. По теореме 1 из § 2 B является JB-алгеброй относительно нормы (1). ■

Если A — произвольный OJ-фактор типа $I_n (3 \leqslant n < \infty)$, то, очевидно, все его элементы ограничены, т. е. по теореме 1 A является JB-фактором. Отсюда и из теоремы 5 § 2 вытекает следствие.

Следствие. Любой OJ-фактор типа $I_n (3 \leqslant n < \infty)$ конечномерен и принадлежит одному из следующих классов:

1) алгебра эрмитовых $n\times n$-матриц над полем действительных чисел;

2) алгебра эрмитовых $n\times n$-матриц над полем комплексных чисел;

3) алгебра эрмитовых $n\times n$-матриц над телом кватернионов;

4) исключительная алгебра M_3^8.

Замечание. Используя результаты работы [4], для OJ-факторов можно доказать теоремы о связи с матричными алгебрами [26], что проделано в § 8 работы [4] для JB-факторов. В частности, можно показать, что любой OJ-фактор A, кроме спин-фактора и M_3^8, является эрмитовой частью с симметризованным умножением некоторой вещественной ассоциативной $*$-алгебры R, такой, что:

1) для любого $x \in R$ существует $a \in A$, для которого $x^*x = a^2$;

2) $x^*x = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) если a, $b \in A$, то $a \leftrightarrow b$ в A тогда и только тогда, когда $ab = ba$ в R.

В частности, всякий OJ-фактор, кроме M_3^8, специален.

Поскольку доказательства этих результатов довольно громоздки и являются модификацией методов [4] и сами эти результаты далее не используются, то на доказательствах мы не будем останавливаться.

Определение. OJ-Алгебру, у которой все элементы ограничены, назовем OJB-алгеброй.

Следующая теорема раскрывает связь между классами JB-, OJB- и JBW-алгебр.

Теорема 2. 1) Любая OJB-алгебра является JB-алгеброй; для того чтобы JB-алгебра была OJB-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аксиоме (1) OJ-алгебры.

2) Любая JBW-алгебра является OJB-алгеброй; для того чтобы OJB-алгебра была JBW-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она обладала разделяющим семейством нормальных состояний.

Доказательство. 1) Первая часть утверждения доказана в теореме 1. Вторая часть вытекает из замечания к примеру 2 § 3 и из того, что в JB-алгебре A все элементы ограничены, так как $-\|a\|\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \|a\|\mathbf{1}$ для всех $a \in A$.

2) Первая часть утверждения показана в примере 2 § 3. В силу аксиомы (1) любая OJB-алгебра является монотонно полной JB-алгеброй. Поэтому вторая часть утверждения есть следствие теоремы 6 § 2. ■

В § 2 было доказано, что оператор U_a положителен на JB-алгебрах. Теперь, пользуясь тем, что совокупность ограниченных элементов произвольной OJ-алгебры является JB-алгеброй, выведем ряд полезных свойств оператора U_a на OJ-алгебрах.

Теорема 3. Для любого элемента a из OJ-алгебры A оператор U_a положителен, т. е. $U_a(A^+) \subset A^+$.

Доказательство. Пусть B — JB-алгебра ограниченных элементов A. В силу теоремы 3 § 2 $U_a(B^+) \subset B^+$ для любого $a \in B$. Докажем теорему в несколько этапов.

1. Элемент $a \in A$ имеет ограниченный обратный, т. е. существует $a^{-1} \in B$. Тогда $U_{a^{-1}}(B^+) \subset B^+$. Для любого $x \in A^+$ элемент $x + \varepsilon\mathbf{1}$ (где $\varepsilon > 0$) обратим, причем элемент $(x + \varepsilon\mathbf{1})^{-1}$ положителен и ограничен, так как $0 \leqslant (x + \varepsilon\mathbf{1})^{-1} \leqslant \varepsilon^{-1}\mathbf{1}$. Следовательно, $U_{a^{-1}}(x + \varepsilon\mathbf{1})^{-1} \geqslant 0$. В силу предложения 3 из § 1 $[U_a(x + \varepsilon\mathbf{1})]^{-1} = U_{a^{-1}}(x + \varepsilon\mathbf{1})^{-1} \geqslant 0$. Поэтому $U_a(x + \varepsilon\mathbf{1}) \geqslant 0$, т. е. $U_a x + \varepsilon a^2 \geqslant 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Из архимедовости порядка в OJ-алгебре вытекает, что $U_a x \geqslant 0$. В самом деле, полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеем $\frac{1}{n} a^2 \geqslant -U_a x$, т. е. $a^2 \geqslant n(-U_a x)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. В силу архимедовости A: $-U_a x \leqslant 0$, т. е. $U_a x \geqslant 0$.

2. Если a — произвольный элемент A, то $U_a(B^+) \subset A^+$. Пусть $b \in B^+$; тогда элемент $c = \sqrt{b + \varepsilon\mathbf{1}}$, $\varepsilon > 0$, обратим и ограничен, т. е. элемент c^{-1} имеет ограниченный обратный. В силу тождества (5) из § 1 имеем

$$U_c U_a c^2 = (U_c a)^2 \geqslant 0, \text{ т. е. } U_c U_a (b + \varepsilon\mathbf{1}) \geqslant 0.$$

Применяя к последнему неравенству оператор $U_c^{-1} = U_{c^{-1}}$, который положителен в силу п. 1, получаем $U_a(b + \varepsilon\mathbf{1}) \geqslant 0$, т. е.

$U_a b + \varepsilon a^2 \geqslant 0$. Опять пользуясь произвольностью ε и архимедовостью порядка в A, имеем $U_a b \geqslant 0$.

3. Пусть $a \in A$ — обратимый элемент. Тогда $U_a(A^+) \subseteq A^+$. Для любого $x \in A^+$ элемент $(x + \varepsilon 1)^{-1}$ является ограниченным и положительным, т. е. $(x + \varepsilon 1)^{-1} \in B$. В силу п. 2 $U_{a^{-1}}(x + \varepsilon 1)^{-1} \in A^+$, т. е. $[U_a(x + \varepsilon 1)]^{-1} \geqslant 0$. Следовательно, $U_a(x + \varepsilon 1) \geqslant 0$. Отсюда, как и в п. 2, $U_a x \geqslant 0$.

4. Общий случай. Пусть $a \in A$ произвольно, $x \in A^+$, $c = \sqrt{x + \varepsilon 1}$. В силу тождества $U_c U_a c^2 = (U_c a)^2$ имеем $U_c U_a (x + \varepsilon 1) \geqslant 0$. Так как элемент c^{-1} обратим в A, то, пользуясь доказанной в п. 3 положительностью оператора $U_c^{-1} = U_{c^{-1}}$, получим $U_a(x + \varepsilon 1) \geqslant 0$ для всех $\varepsilon > 0$, т. е. $U_a x \geqslant 0$. ■

Используя положительность U_a, докажем ряд полезных неравенств.

Предложение 1. Если a, b — элементы OJ-алгебры A и $b \geqslant 0$, то $2ab \leqslant U_a b + b$.

Доказательство. Так как $b \geqslant 0$, то в силу положительности оператора U_{a-1} имеем $U_{a-1} b \geqslant 0$, т. е.

$$2(a-1)((a-1)b) - (a-1)^2 b \geqslant 0.$$

Раскрывая скобки, получаем $-a^2 b + 2a(ab) - 2ab + b \geqslant 0$, т. е. $U_a b + b - 2ab \geqslant 0$ или $2ab \leqslant U_a b + b$. ■

Предложение 2. Если p и q — ортогональные идемпотенты из A, то для любого $a \in A^+$ справедливо неравенство

$$U_{p+q} a \leqslant 2(U_p a + U_q a).$$

Доказательство. Так как $a \geqslant 0$, то $U_{p-q} a \geqslant 0$, т. е.

$$2(p-q)[(p-q)a] - (p-q)^2 a \geqslant 0.$$

Учитывая, что $pq = 0$, получаем

$$2p(pa) + 2q(qa) - 2p(qa) - 2q(pa) - pa - qa \geqslant 0,$$

т. е.

$$U_p a + U_q a \geqslant 2p(qa) + 2q(pa).$$

Отсюда

$$U_{p+q} a = 2(p+q)[(p+q)a] - (p+q)^2 a = 2p(pa) +$$
$$+ 2q(qa) + 2p(qa) + 2q(pa) - pa - qa = U_p a + U_q a + 2p(qa) +$$
$$+ 2q(pa) \leqslant U_p a + U_q a + U_p a + U_q a = 2(U_p a + U_q a). \ ■$$

Следствие. Для любого идемпотента $e \in A$ и $a \in A^+$ справедливо неравенство

$$a \leqslant 2(U_e a + U_{1-e} a).$$

Предложение 3. Пусть a, b — элементы OJ-алгебры A. Следующие условия эквивалентны:

1) $U_a b^2 \leqslant 1$;

2) $U_b a^2 \leqslant 1$.

Доказательство. В силу симметрии достаточно доказать, что из 1) вытекает 2). Пусть $U_a b^2 \leqslant 1$. В силу аксиомы 4) из определения OJ-алгебры имеем $(1 - U_b a^2)^2 \geqslant 0$, т. е. $1 - 2U_b a^2 + (U_b a^2)^2 \geqslant 0$.

Используя тождество (5) из § 1, перепишем $(U_b a^2)^2$ в виде $U_b U_{a^2} b^2$. Так как $a \leftrightarrow a$, то в силу тождества (7) из § 1 $U_{a^2} = U_a U_a$. Следовательно,

$$1 - 2U_b a^2 + U_b U_a U_a b^2 \geqslant 0.$$

Так как по условию $1 \geqslant U_a b^2$, то в силу положительности операторов U_a и U_b имеем $U_b U_a 1 \geqslant U_b U_a U_a b^2$, т. е. $U_b a^2 \geqslant U_b U_a U_a b^2$. Следовательно,

$$1 - 2U_b a^2 + U_b a^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$1 - U_b a^2 \geqslant 0. \blacksquare$$

Теорема 4. *Для любого элемента a OJ-алгебры A оператор U_a нормален, т. е. если сеть $\{x_\alpha\} \subset A$ возрастает и $x = \sup x_\alpha$, то $U_a x = \sup U_a x_a$.*

Доказательство. Пусть сначала элемент a обратим. Так как сеть $\{x_\alpha\}$ возрастает и $x_\alpha \leqslant x$ для всех α, то в силу теоремы 3 сеть $\{U_a x_\alpha\}$ возрастает и $U_a x_\alpha \leqslant U_a x$ для всех α. Если $z \in A$ — такой элемент, что $U_a x_\alpha \leqslant z$ для всех α, то в силу положительности оператора $U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$ отсюда вытекает, что $x_\alpha \leqslant U_a^{-1} z$ для всех α и, значит, $\sup x_\alpha = x \leqslant U_a^{-1} z$, т. е. $U_a x \leqslant z$. Это означает, что $U_a x = \sup U_a x_\alpha$.

Пусть теперь a — произвольный положительный элемент. Не ограничивая общности, можно считать, что все x_α положительны (иначе можно рассмотреть сеть $y_\alpha = x_\alpha - x_{\alpha_0}$, $\alpha \geqslant \alpha_0$). Для любого $\varepsilon > 0$ элемент $b = a + \varepsilon 1$ обратим и, значит,

$$\sup U_b x_\alpha = U_b x.$$

Так как $x_\alpha \leqslant x$ для всех α, то $U_a x_\alpha \leqslant U_a x$. Далее $U_b x_\alpha = U_{a+\varepsilon 1} x_\alpha = 2(a + \varepsilon 1)[(a + \varepsilon 1) x_\alpha] - (a + \varepsilon 1)^2 x_\alpha = U_a x_\alpha + 2\varepsilon a x_\alpha + \varepsilon^2 x_\alpha$.

Согласно предложению 1, справедливо неравенство

$$U_b x_\alpha \leqslant U_a x_\alpha + \varepsilon (U_a x_\alpha + x_\alpha) + \varepsilon^2 x_\alpha \leqslant \sup U_a x_\alpha + \varepsilon (U_a x + x) + \varepsilon^2 x,$$

так как $U_a x_\alpha \leqslant U_a x$, $x_\alpha \leqslant x$ для всех α. Следовательно,

$$U_b x = \sup U_b x_\alpha \leqslant \sup U_a x_\alpha + \varepsilon (U_a x + x) + \varepsilon^2 x,$$

но $U_b x = U_{a+\varepsilon 1} x = U_a x + 2\varepsilon a x + \varepsilon^2 x$. Отсюда

$$U_a x + 2\varepsilon a x + \varepsilon^2 x \leqslant \sup U_a x_\alpha + \varepsilon (U_a x + x) + \varepsilon^2 x,$$

т. е. $U_a x \leqslant \sup U_a x_\alpha + \varepsilon (U_a x + x - 2ax)$.

Положив $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, последнее неравенство перепишем в виде

$$n (U_a x - \sup U_a x_\alpha) \leqslant U_a x + x - 2ax.$$

В силу архимедовости порядка в A имеем

$$U_a x \leqslant \sup U_a x_\alpha,$$

т. е. $U_a x = \sup U_a x_\alpha$.

Докажем теперь теорему в общем случае. Пусть $a \in A$ произвольно, A_0 — максимальная ассоциативная подалгебра в A, содержащая a. Так как A_0 — полуполе, то в A_0 существует такая симметрия s, что $a = |a| s$ (очевидно, $s = 2s(a^+) - 1$). Все элементы a, $|a|$, s лежат в одной сильно ассоциативной подалгебре, поэтому справедливо тождество $U_a = U_{|a|s} = U_{|a|} U_s$ (тождество (7) из § 1). Так как $|a| \geqslant 0$ и s обратим ($s^{-1} = s$), то, как доказано выше, операторы $U_{|a|}$ и U_s нормальны. Поэтому нормален и оператор $U_a = U_{|a|} U_s$. ■

Из доказанной теоремы вытекает следующий важный результат.

Теорема 5. Пусть a, b — элементы OJ-алгебры A. Следующие условия эквивалентны:

а) $a \leftrightarrow b$;

б) операторы R_a, R_b, R_{a^2}, R_{b^2}, R_{ab} коммутируют на JB-алгебре B ограниченных элементов A;

в) операторы R_a, R_b, R_{a^2}, R_{b^2}, R_{ab} коммутируют на множестве ∇ всех идемпотентов A.

Доказательство. Так как совместность элементов a и b эквивалентна коммутируемости операторов R_a, R_b, R_{a^2}, R_{b^2}, R_{ab} на A (см. § 1), то из соотношений $\nabla \subseteq B \subseteq A$ вытекает справедливость импликаций а) → б) → в).

Покажем, что из в) вытекает а). Так как

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}, \quad U_b = 2R_b^2 - R_{b^2},$$

то операторы U_a и U_b коммутируют на множестве ∇ всех идемпотентов из A. В силу линейности этих операторов они коммутируют на простых элементах из A, т. е. на линейных комбинациях идемпотентов. Любой положительный элемент из A (как элемент некоторого полуполя) можно представить в виде супремума возрастающей сети простых элементов. Поэтому U_a и U_b коммутируют на положительных элементах из A, а так как любой элемент из A есть разность положительных, то $U_a U_b = U_a U_b$ на всей OJ-алгебре A.

Аналогично, исходя из элементов $a+1$, b, a, $b+1$, $a+1$, $b+1$, доказывается коммутируемость операторов U_{a+1} с U_b, U_a с U_{b+1} и U_{a+1} с U_{b+1}. Тогда из тождества $R_x = \frac{1}{2}(U_{x+1} - U_x - I)$, где I — тождественный оператор на A, вытекает, что на A коммутируют R_a и R_b.

Из теоремы 1 § 1 вытекает, что операторно коммутируют на ∇ любые произведения элементов a и b, в частности, R_{a^2}, R_b, R_{a^4}, R_{b^2}, R_{a^2b}. Отсюда, как и выше, вытекает коммутируемость R_{a^2} и R_b на A. Аналогично, на A коммутируют все операторы R_a, R_{a^2}, R_b, R_{b^2}, R_{ab}, т. е. $a \leftrightarrow b$. ■

Теорема 6. *Множество B ограниченных элементов OJ-алгебры A является OJ-подалгеброй A и OJВ-алгеброй.*

Доказательство. В теореме 1 показано, что B — йорданова подалгебра в A и относительно индуцированного частичного порядка удовлетворяет аксиомам 1), 2), 4) из определения OJ-алгебры.

Если $a, b \in B$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a \leftrightarrow b$ в B, то в силу теоремы 5 $a \leftrightarrow b$ в A и по аксиоме 3) OJ-алгебры $ab \geqslant 0$, т. е. в B также выполнено 3).

Покажем справедливость аксиомы (I). Пусть $\{x_\alpha\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная сверху элементом $z \in B$ сеть элементов B. В силу аксиомы (I) в A существует $x = \sup x_\alpha$ и если $y \leftrightarrow x_\alpha$ в A для всех α, то $y \leftrightarrow x$. Так как $x_\alpha \leqslant x \leqslant z \in B$, то $x \in B$. Если $y' \in B$ и $y' \leftrightarrow x_\alpha$ в B для всех α, то по теореме 5 $y' \leftrightarrow x_\alpha$ в A для всех α и поэтому $y' \leftrightarrow x$ в B, т. е. для B выполняется условие (1) из определения OJ-алгебры.

Проверим аксиому (II). Пусть B_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра в B. По теореме 5 она является сильно ассоциативной и в A, поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 в A, такая, что $B_0 = A_0 \cap B$. Так как A_0 — решетка и $a \vee b \in B$ для любых $a, b \in B_0$ (из $-\lambda 1 \leqslant a \leqslant \lambda 1$, $-\mu 1 \leqslant b \leqslant \mu 1$ вытекает $-(\lambda+\mu)1 \leqslant a \vee b \leqslant (\lambda+\mu)1$) то B_0 является подрешеткой A_0, т. е. в B выполнено условие (II). Таким образом, B является OJ-алгеброй, т. е. OJ-подалгеброй в A. Так как все элементы в B по определению ограничены, то B — OJВ-алгебра. ■

Предложение 4. Пусть a, b — положительные элементы из OJ-алгебры A. Следующие условия эквивалентны:

а) $U_a b = 0$; б) $U_b a = 0$.

Из каждого условия вытекает, что $ab = 0$.

Доказательство. В силу симметрии достаточно показать, что из а) следует б), из условий а) и б) — равенство $ab = 0$.

Пусть $U_a b = 0$. Существует монотонно возрастающая последовательность $\{b_n\}$ ограниченных элементов из A, такая, что $\sup b_n = b$, а именно: $b_n = \int\limits_0^n \lambda de_\lambda$, где $\{e_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство элемента b. Очевидно, $\sup\limits_n b_n^2 = b^2$. В силу неравенства $0 \leqslant b_n \leqslant \| b_n \| \mathbf{1}$ имеем $0 \leqslant b_n^2 \leqslant \| b_n \| b_n \leqslant \| b_n \| b$. Применяя к полученному неравенству положительный оператор U_a, получаем

$$0 \leqslant U_a b_n^2 \leqslant \| b_n \| U_a b = 0,$$

т. е. $U_a b_n^2 = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как $b_n \uparrow b$ и оператор U_a нормален, то

$$U_a b^2 = 0.$$

Следовательно, $(U_b a)^2 = U_b U_a b^2 = 0$, т. е. $U_b a = 0$.

Аналогично, если $U_b a = 0$, то $U_b a^2 = 0$ и $U_a b = 0$.

Наконец, если $U_a b = 0$, то, как показано выше, $U_b a = U_b a^2 = 0$ и $U_a b^2 = 0$. Отсюда и из тождества

$$(ab)^2 = \frac{1}{4} \left[2aU_b a + U_a b^2 + U_b a^2 \right]$$

получаем $ab = 0$. ■

Библиография: [4, 26, 27, 116, 163].

§ 6. Логика идемпотентов OJ-алгебр

Данный параграф посвящен изучению множества идемпотентов OJ-алгебр и построению теории сравнения идемпотентов.

Пусть A — OJ-алгебра, ∇ — множество всех идемпотентов в A.

Теорема 1. Множество ∇ относительно индуцированного частичного порядка и с ортодополнением, определенным по формуле $e^\perp = \mathbf{1} - e$, является полной логикой.

Доказательство. Нулевой элемент 0, очевидно, является наименьшим, а $\mathbf{1}$ — наибольшим элементом в ∇.

Если $e \leqslant f$, то $\mathbf{1} - e \geqslant \mathbf{1} - f$, т. е. $f^\perp \leqslant e^\perp$. Очевидно, что $(e^\perp)^\perp = e$ для всех $e \in \nabla$. Пусть $h, e \in \nabla$; $h \leqslant e^\perp = \mathbf{1} - e$ и $h \leqslant e$. В силу предложения 2 из § 3 $he = h$, $h(\mathbf{1} - e) = h$, т. е. $h - eh = h$.

Следовательно, $h=0$. Это означает, что $e \wedge e^{\perp}=0$. Если $g \in \nabla$, $e \leqslant g$ и $1-e \leqslant g$, то $eg=e$ и $(1-e)g=(1-e)$, т. е. $g-eg=1-e$. Следовательно, $g=1$ и потому $e \vee e^{\perp}=1$.

Покажем, что элементы $e, f \in \nabla$ ортогональны (т. е. $e \leqslant f^{\perp}$) тогда и только тогда, когда $ef=0$. В самом деле, если $e \leqslant f^{\perp}$, то $e(1-f)=e$, т. е. $ef=0$. Наоборот, если $ef=0$, то $e(1-f)=e-0=e$, т. е. $e \leqslant 1-f=f^{\perp}$.

Пусть $e, f \in \nabla$ и $e \leqslant f$. Так как $(f-e)^2=f-2ef+e=f-e$, то $(f-e) \in \nabla$, причем $e(f-e)=ef-e=e-e=0$, т. е. e и $f-e$ ортогональны.

Покажем, что $e \vee (f-e)=f$. Имеем $e \leqslant f$ и $f-e \leqslant f$. Если $h \in \nabla$ и $h \geqslant e$, $h \geqslant f-e$, то в силу предложения 2 из § 3 $he=e$, $h(f-e)=f-e$, т. е. $hf=f$. Опять применяя предложение 2 из § 3, получаем $h \geqslant f$, т. е. $f=e \vee (f-e)$.

Покажем теперь, что ∇ является решеткой. Пусть $e, f \in \nabla$, $x=e+f$ и $g=s(x)$ — носитель элемента x (см. § 4). Так как $e \leqslant x$, $f \leqslant x$, то в силу п. 6 из теоремы 3 § 4 $e \leqslant g$ и $f < g$. Если $h \in \nabla$ и $e \leqslant h$, $f \leqslant h$, т. е. $eh=e$, $fh=f$, то $hx=h(e+f)=he+hf=e+f=x$. По определению носителя элемента, $g=s(x) \leqslant h$, т. е. $g=e \vee f$. Нетрудно видеть, что $e \wedge f=1-[(1-e) \vee (1-f)]$, т. е. ∇ — решетка. Таким образом, ∇ — логика.

Покажем что ∇ — полная логика. Пусть $\{e_\alpha\}$ — возрастающая сеть идемпотентов. Так как $e_\alpha \leqslant 1$ для всех α, то по аксиоме (I) из определения OJ-алгебры существует $e=\sup e_\alpha$. Поэтому достаточно доказать, что $e \in \nabla$, т. е. $e^2=e$. Зафиксируем произвольный индекс α_0 и пусть $g=e_{\alpha_0}$. По теореме 3 из § 5 $\sup U_g e_\alpha = U_g e$. Так как $ge_\alpha=g$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, то $U_g e=\sup U_g e_\alpha = \sup\limits_{\alpha \geqslant \alpha_0} U_g e_\alpha = g$, т. е. $U_g e=g$ и потому $U_g(1-e)=0$. Так как $1-e \geqslant 0$, то в силу предложения 4 из § 5 $U_{1-e} g=0$, т. е. $2(1-e)((1-e)g)-(1-e)^2 g=0$ или

$$2(g-2eg+e(eg))-(g-2eg+e^2 g)=0,$$

т. е. $g-2eg+U_e g=0$.

Далее в силу того же предложения 4 из § 5 $(1-e)g=0$, т. е. $g=eg$. Следовательно, $g-2g+U_e g=0$ и $U_e g=g$. Итак, для любого α_0 имеем $U_e e_{\alpha_0}=e_{\alpha_0}$. Поэтому, используя нормальность оператора U_e, получаем

$$e^3=U_e \sup e_\alpha = \sup U_e e_\alpha = \sup e_\alpha = e,$$

т. е. $e^3=e$. Так как $e \geqslant 0$, то $e^2=e$. ■

Следствие. Множество $Z(\nabla)$ всех центральных идемпотентов OJ-алгебры A образует правильную булеву подалгебру в логике ∇.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 § 3 следует, что центр $\dot{Z}(A)$ является подполуполем во всех максимальных сильно ассоциативных подалгебрах из A. Поэтому $Z(\nabla)$, будучи множеством идемпотентов в $Z(A)$, является булевой подалгеброй в ∇. Если $\{e_\alpha\}$ — возрастающая сеть идемпотентов из $Z(\nabla)$, то по аксиоме (I) существует $e=\sup e_\alpha$, причем $e\in\nabla$ и $e\leftrightarrow x$, если $e_\alpha\leftrightarrow x$ для всех α. Так как все e_α принадлежат центру, то $e\leftrightarrow x$ для любого $x\in A$, т. е. $e\in Z(\nabla)$. ■

Пусть $e\in\nabla$ — произвольный идемпотент, $Z(e)$ — множество центральных идемпотентов, мажорирующих e, т. е. $Z(e)=\{q\in Z(\nabla):q\geqslant e\}$. Так как $Z(\nabla)$ — правильная булева подалгебра в ∇, то в $Z(\nabla)$ существует $z(e)=\inf Z(e)$, т. е. наименьший центральный идемпотент, мажорирующий e. Идемпотент $z(e)$ называется **центральным носителем** идемпотента e.

Пусть s — симметрия в OJ-алгебре. Как уже отмечалось в § 1, оператор U_s является автоморфизмом. В частности, U_s отображает идемпотенты в идемпотенты, т. е. U_s: $\nabla\longrightarrow\nabla$.

Так как U_s — автоморфизм, то понятие эквивалентности, вводимое ниже, действительно является отношением эквивалентности.

Определение [4]. Идемпотенты p, $q\in\nabla$ называются **эквивалентными** $(p\sim q)$, если существует конечный набор симметрий $s_1,\dots,s_n$, таких, что $U_{s_n}\dots U_{s_1}p=q$.

Если существует одна симметрия $s\in A$, такая, что $U_sp=q$, то говорят, что p и q **эквивалентны через симметрию** и записывают это $p\overset{s}{\sim}q$. Очевидно, эквивалентность через симметрию не является отношением эквивалентности, так как это отношение вообще говоря, не транзитивно. Запись $e\precsim f$ означает, что существует идемпотент $f_1\leqslant f$, такой, что $e\sim f_1$. Если для e, $f\in\nabla$ существуют $e_1\neq0$, $f_1\neq0$, такие, что $e_1\sim f_1$, $e_1\leqslant e$, $f_1\leqslant f$, то идемпотенты e и f назовем **связанными**.

Предложение 1. Пусть e — идемпотент OJ-алгебры A, $z(e)$ — его центральный носитель. Тогда

$$z(e)=\sup\{p\in\nabla:p\precsim e\}.$$

Доказательство. Так как ∇ — полная решетка, то существует элемент $f=\sup\{p\in\nabla:p\precsim e\}$. Если s — симметрия, то $U_sf=\sup\{U_sp:p\precsim e\}$. Так как $U_sp\sim p$, то $U_sp\precsim e$ для любого $p\precsim e$. Следовательно, $\{U_sp:p\precsim e\}\subseteq\{p:p\precsim e\}$ и поэтому $U_sf\leqslant f$. Применяя к полученному неравенству положительный оператор U_s, получаем $f\leqslant U_sf$, так как $U_s^2=I$. Следовательно, $U_sf=f$ для любой симметрии $s\in A$. В силу предложения 3 из §4 $f\in Z(\nabla)$. Очевидно, что $e\leqslant f$ и потому $z(e)\leqslant f$.

Так как $p\precsim z(e)$ для любого $p\precsim e$, существуют симметрии $s_1,s_2,\dots,s_n\in A$, такие, что $U_{s_n}\dots U_{s_1}p\leqslant z(e)$. Применяя к этому неравенству положительный оператор $U_{s_n}\dots U_{s_1}$ и учитывая, что $z(e) \in Z(\bigtriangledown)$, а также предложение 3 из § 4, получаем $p \leqslant z(e)$. Таким образом, $p \leqslant z(e)$ для любого $p \underset{\sim}{\leq} e$. Следовательно, $f = \sup\{p : p \underset{\sim}{\leq} e\} \leqslant z(e)$, т. е. $f = z(e)$. ■

Предложение 2 (ср. [4]) Для любых $p, q \in \bigtriangledown$ существует такая симметрия $s \in A$, что $U_s(U_p q) = U_q p$.

Доказательство. Положим $a = p + q - 1$, тогда $a^2 = 2pq - p - q + 1 = U_p q - U_{1-p} q - p + 1 = q_1 - q_0 - p + 1$, где q_1 и q_0 — пирсовские компоненты q по идемпотенту p. В силу предложения 6 из § 1 $q_1 \leftrightarrow p$, $q_0 \leftrightarrow p$ и потому $a^2 \leftrightarrow p$. Аналогично доказывается, что $a^2 \leftrightarrow q$. Следовательно, $|a| \leftrightarrow p$ и $|a| \leftrightarrow q$, так как $|a| = \sqrt{a^2}$. Поэтому

$$U_{|a|} p = p\,|a|^2 = pa^2 = p(2pq - p - q + 1) = 2p(pq) - p - pq + p = U_p q.$$

Пусть s — такая симметрия, что $a = s|a|$ и $s \leftrightarrow a$. В силу тождества (7) из § 1 $U_a = U_s U_{|a|}$. Таким образом,

$$U_s(U_p q) = U_s U_{|a|} p = U_a p = 2(p + q - 1)[(p + q - 1)p] - (p + q - 1)^2 p = 2(p + q - 1)(p + pq - p) - (2pq - p - q + 1)p = 2p(pq) + 2q(pq) - 2pq - 2p(pq) + p + qp - p = 2q(qp) - qp = U_q p. \ ■$$

Предложение 3. Для любых неортогональных идемпотентов p и q существуют ненулевые идемпотенты $e \leqslant p$ и $f \leqslant q$ и симметрия s, такие, что $U_s e = f$ $\left(\text{т. е. } e \overset{s}{\sim} f\right)$. В частности, p и q связаны.

Доказательство. Так как $q \leqslant 1$, то $U_p q \leqslant U_p 1 = p$ и потому $s(U_p q) \leqslant p$. Аналогично носитель $s(U_q p)$ элемента $U_q p$ не превосходит q. Так как $pq \neq 0$, то в силу предложения 3 из § 5 ни один из элементов $U_p q$ и $U_q p$ не равен нулю. Из предложения 2 вытекает существование симметрии s, такой, что $U_s(U_p q) = U_q p$. Так как U_s — автоморфизм, то $U_s\big(s(U_p q)\big) = s(U_q p)$. Идемпотенты $e = s(U_p q)$ и $f = s(U_p)$ — искомые. ■

Предложение 4. Если $e, f \in \bigtriangledown$ и $f \leqslant z(e)$, то e и f связаны.

Доказательство. Если $fp = 0$ для всех $p \underset{\sim}{\leq} e$, то $fz(e) = 0$ (так как $z(e) = \sup\{p \in \bigtriangledown : p \underset{\sim}{\leq} e\}$), что противоречит неравенству $f \leqslant z(e)$. Следовательно, существует такое $p_0 \underset{\sim}{\leq} e$, что $fp_0 \neq 0$. В силу предыдущего предложения f и p_0 связаны. ■

Следствие. В OJ-факторе любые ненулевые идемпотенты связаны.

В самом деле, если $e, f \in \bigtriangledown$ и $e, f \neq 0$, то $z(e) = 1$. Следовательно, $f \leqslant z(e)$.

Теорема 2. Для любых идемпотентов e и f из OJ-алгебры A справедливы соотношения

$$s(U_{1-f}e) = e \vee f - f; \tag{1}$$

$$s(U_e(1-f)) = e - e \wedge f; \tag{2}$$

где $s(x)$ — носитель элемента x.

Доказательство. Пусть $x = U_{1-f}e$, $g = s(x)$, $h = f + g$. Тогда $x \in J_0(f)$ и $x \geqslant 0$. Пусть $\{e_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство элемента x. По теореме 3 из § 4, $s(x) = \sup e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$. Так как $nx \geqslant e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$, то $0 \leqslant U_f e^{\perp}_{\frac{1}{n}} \leqslant n U_f x = 0$, т. е. $U_f e^{\perp}_{\frac{1}{n}} = 0$. В силу нормальности оператора U_f имеем $U_f s(x) = U_f \sup e^{\perp}_{\frac{1}{n}} = \sup U_f e^{\perp}_{\frac{1}{n}} = 0$. В силу предложения 3 из § 5 $fs(x) = 0$, т. е. $f \leqslant g^{\perp}$. Следовательно, $h = f + g = f \vee g$ — идемпотент. Покажем, что $h = f \vee e$. Заметим, что $g \leftrightarrow f$ (предложение 6 из § 1) и поэтому $(1-g) \leftrightarrow (1-f)$. Так как $g = s(x)$, то $U_{1-g}x = (1-g)x = 0$. В силу тождества (7) из § 1

$$U_{1-g}U_{1-f} = U_{(1-g)(1-f)} = U_{1-(f+g)} = U_{1-h}.$$

Значит, $0 = U_{1-g}x = U_{1-g}U_{1-f}e = U_{1-h}e$. В силу предложения 3 из § 5 $(1-h)e = 0$, т. е. $e = eh$ и потому $e \leqslant h$. Неравенство $f \leqslant g$ очевидно. Пусть $p \in \nabla$ и $f \leqslant p$, $e \leqslant p$. Тогда $(1-p)e = 0$, $(1-p)f = 0$. В частности, $1 - p \leftrightarrow 1 - e$, $1 - p \leftrightarrow 1 - f$. Следовательно,

$$(1-p)x = (1-p)U_{1-f}e = U_{1-f}(1-p)e) = 0,$$

т. е. $x \in J_0(1-p)$. Как и выше, отсюда вытекает, что $g(1-p) = 0$, т. е. $g \leqslant p$, но $f \leqslant p$, поэтому $h = g \vee f \leqslant p$. Это означает, что $h = e \vee f$, т. е. $f + g = e \vee f$. Следовательно, $g = e \vee f - f$, т. е.

$$s(x) = s(U_{1-f}e) = e \vee f - f,$$

что и доказывает (1).

Если в полученном равенстве положим $e = 1 - f$, то получим

$$s(U_e(1-f)) = [(1-f) \vee (1-e)] - (1-e) =$$

$$= 1 - f \wedge e - 1 + e = e - f \vee e,$$

т. е. соотношение (2). ■

Следствие. Для любых идемпотентов e и f идемпотенты $f \vee e - f$ и $e - f \wedge e$ эквивалентны через симметрию.

Доказательство. В силу предложения 2 существует симметрия s, такая, что $U_s(U_{1-f}e) = U_e(1-f)$. Так как U_s — автоморфизм, то $U_s(s(U_{1-f}e)) = s(U_s(U_{1-f}e)) = s(U_e(1-f))$, т. е.

$$U_s(e \vee f - f) = e - e \wedge f. \blacksquare$$

Библиография: [4, 5, 30, 127].

§ 7. Подалгебры, идеалы и гомоморфизмы OJ-алгебр

Пусть A — OJ-алгебра. Йордановы подалгебры в A будем называть подалгебрами. Векторное подпространство J из OJ-алгебры A называется **идеалом** (**квадратичным идеалом**), если для любых $x \in A$, $y \in J$ имеем $xy \in J$ (соответственно $U_y x \in J$).

Очевидно, всякий идеал является квадратичным идеалом. Обратное, вообще говоря, не верно. Если $x \in A$ — произвольный элемент, то множество $U_x A$ является квадратичным идеалом. В самом деле, пусть $a \in U_x A$, т. е. $a = U_x a_1$ для некоторого $a_1 \in A$, и пусть $b \in A$ произвольно. Тогда в силу тождества Макдональда (тождество (6) из § 1) имеем

$$U_a b = U_{U_x a_1} b = U_x U_{a_1} U_x b \in U_x A.$$

Предложение 1. Любой квадратичный идеал в OJ-алгебре A является подалгеброй.

Доказательство. Пусть J — квадратичный идеал в A. $a, b \in J$. Нетрудно заметить, что для любого $x \in A$

$$U_{a,b} x = \{axb\} = \frac{1}{2}\left(U_{a+b} x - U_a x - U_b x\right).$$

Следовательно, $U_{a,b} x \in J$. В частности $U_{a,b} 1 = ab \in J$, т. е. J — подалгебра в A. $\blacksquare$

Пусть A — OJ-алгебра. Подалгебра A_1 алгебры A называется $\perp$-**правильной** если вместе с каждым семейством попарно ортогональных идемпотентов A_1 содержит их точную верхнюю грань.

Подалгебра A_1 называется **правильной**, если вместе с каждой возрастающей ограниченной сверху в A сетью элементов A_1 содержит их точную верхнюю грань.

Подалгебра A_1 называется **заполненной**, если из соотношений $0 \leqslant x \leqslant y \in A_1$ вытекает, что $x \in A_1$.

Оказывается, заполненные правильные подалгебры и идеалы OJ-алгебр допускают полное описание.

Теорема 1. Пусть e — идемпотент OJ-алгебры A. Тогда пирсовская компонента $J_1(e)$ является правильной заполненной подалгеброй в A. Наоборот, любая правильная заполненная подалгебра в A имеет вид $J_1(e)$ для некоторого однозначно определенного идемпотента $e \in A$ и, в частности, является квадратичным идеалом.

Доказательство. Пусть $A_1 = J_1(e)$, $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов из A_1, $x = \sup x_\alpha \in A$. Покажем, что $x \in A_1$. Так как $x_\alpha \in J_1(e)$, то $U_e x_\alpha = x_\alpha$ для всех α. В силу нормальности оператора U_e

$$x = \sup x_\alpha = \sup U_e x_\alpha = U_e \sup x_\alpha = U_e x,$$

т. е. $x = U_e x \in J_1(e) = A_1$. Следовательно, A_1 — правильная подалгебра в A. Пусть $0 \leqslant x \leqslant y \in A_1$. Так как $y \in J_1(e)$, то $U_{1-e} y = 0$ и, следовательно, $0 \leqslant U_{1-e} x \leqslant U_{1-e} y = 0$, т. е. $U_{1-e} x = 0$. Так как $x \geqslant 0$, то в силу предложения 1 из § 3 отсюда вытекает, что $(1-e)x = 0$, т. е. $x = ex$. Это означает, что $x \in J_1(e) = A_1$, т. е. A_1 — заполненная подалгебра.

Наоборот, пусть A_1 — некоторая правильная заполненная подалгебра в A. Покажем, что A_1 обладает единицей, т. е. существует идемпотент $e \in A_1$, такой, что $ex = x$ для всех $x \in A_1$.

Рассмотрим всевозможные семейства попарно ортогональных идемпотентов в A_1. По лемме Цорна существует максимальное семейство $\{e_\alpha\}$. Так как A_1 — правильная подалгебра, то идемпотент $e_0 = \sup e_\alpha$ принадлежит A_1 и является, очевидно, максимальным идемпотентом в A_1.

Пусть $x \in A_1$, $x \geqslant 0$. Если $\{g_\lambda\}$ — спектральное семейство x, $s(x)$ — его носитель, то по свойству носителя $s(x) = \sup g^{\perp}_{\frac{1}{n}}$.

Так как $0 \leqslant \frac{1}{n} g^{\perp}_{\frac{1}{n}} \leqslant x \in A_1$, то в силу заполненности A_1 $g^{\perp}_{\frac{1}{n}} \in A_1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как A_1 — правильная подалгебра в A, то $s(x) = \sup g^{\perp}_{\frac{1}{n}} \in A_1$, т. е. A_1 вместе с каждым элементом x содержит и его носитель $s(x) = s(x^2)$.

Пользуясь этим, покажем, что построенный нами максимальный идемпотент e_0 является наибольшим. Пусть f — другой максимальный идемпотент. Положим $x = e_0 + f \in A_1$. Тогда, по теореме 1 из § 6, $e_0 \vee f = s(x) \in A_1$ и $s(x) \geqslant e_0, f$. В силу максимальности e_0 и f $e_0 = f = s(x)$.

Итак, e_0 — наибольший идемпотент в A_1. Покажем, что e_0 является единицей в A_1. Пусть $x \in A_1$, тогда, $s(x) \in A_1$ и $s(x) \leqslant e_0$, т. е. $s(x) e_0 = s(x)$. Следовательно, $s(x)(1-e_0) = 0$, т. е. $1 - e_0 \in J_0(s(x))$. Так как $x s(x) = x$, то по теореме Алберта (теорема 4 из § 1), $(1-e_0)x = 0$ или $x = e_0 x$, т. е. e_0 является единицей в A. Поэтому можно считать, что $e_0 = 1$, и достаточно показать, что $A_1 = A$. Если $x \in A$ — ограниченный положительный элемент, то $0 \leqslant x \leqslant \lambda 1$ $(\lambda > 0)$. Так как $\lambda 1 \in A_1$ и A_1 заполнена, то $x \in A_1$. Если же $x \geqslant 0$ — произвольный элемент, то существует возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограниченных элементов, такая, что $x=\sup x_n$. Так как A_1 — правильная подалгебра и все x_n принадлежат A_1, то $x \in A_1$. Если $x \in A$ произволен, то из равенства $x=\frac{1}{2}[(x+1)^2-x^2-1]$ вытекает, что $x \in A_1$. Следовательно, $A_1=A$, т. е. $A_1=J_1(e)$. Покажем единственность e_0. Если $A_1=J_1(e_0)=J_1(f)$, то $f \in J_1(e_0)$, $e_0 \in J_1(f)$, т. е. $e_0 f=f$ и $f e_0=e_0$, или $e_0=f$. ■

Теорема 2. Пусть A — OJ-алгебра, e — центральный идемпотент A. Тогда $J_1(e)=eA$ является правильным идеалом в A. Наоборот, если J — $\perp$-правильный идеал, то существует единственный центральный идемпотент e, такой, что $J=eA$. В частности, для идеалов понятия „правильность" и „$\perp$-правильность" совпадают.

Доказательство. В силу теоремы 1 $eA=J_1(e)$ является правильной подалгеброй. Если $x \in eA$, $y \in A$, то $x=ex$ и так как $e \leftrightarrow y$, то $xy=(ex)y=e(xy) \in eA$, т. е. eA — идеал.

Наоборот, пусть J — $\perp$-правильный идеал в OJ-алгебре A. Покажем сначала, что вместе с каждым $x \in J$ идеал J содержит и его носитель $s(x)$. Так как $s(x)=s(x^2)$, то можно считать, что $x \geqslant 0$. Тогда $s(x)=\sup e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$, где $x=\int\limits_0^\infty \lambda de_\lambda$. Так как все $e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$ и x лежат в одной сильно ассоциативной подалгебре $A_0 \subset A$, т. е. в полуполе, то из $x \geqslant \frac{1}{n} e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$ вытекает существование элемента $c_n \in A_0$, такого, что $e^{\perp}_{\frac{1}{n}}=c_n x$, т. е. $e^{\perp}_{\frac{1}{n}} \in A \cdot J=J$. В силу $\perp$-правильности J отсюда вытекает, что $s(x)=\sup e^{\perp}_{\frac{1}{n}} \in J$.

Используя это, как и в теореме 1, можно показать существование в J наибольшего идемпотента e, для которого $ex=x$ при любом $x \in J$. Следовательно, $J \subset eA$. Так как $e \in J$ и J — идеал, то $eA \subset J$, т. е. $J=eA$. Покажем, что $e \in Z(A)$, т. е. $e \leftrightarrow y$ для всех $y \in A$. Для любого $x \in J$, как мы уже показали, $ex=x$. Если $y \in A$ произволен, то $ey \in eA=J$. Поэтому $e(ey)=ey$. В силу следствия 1 к предложению 6 из § 1 $e \leftrightarrow y$, т. е. $e \in Z(A)$. Следовательно, $J=eA=J_1(e)$. Единственность доказывается как и в теореме 1. ■

Следствие. OJ-Алгебра A является фактором тогда и только тогда, когда в A нет собственных $\perp$-правильных идеалов.

Пусть A_1, A_2 — OJ-алгебры, $\Phi: A_1 \to A_2$ — йорданов гомоморфизм, т. е. линейное отображение, такое, что $\Phi(a^2)=\Phi(a)^2$. Тогда, очевидно, $\Phi(ab)=\Phi(a)\Phi(b)$ для любых $a, b \in A_1$.

Гомоморфизм Φ называется нормальным, если из того, что $\{x_\alpha\}$ — возрастающая сеть элементов в A_1, такая, что $x=\sup x_\alpha$, вытекает, что $\Phi(x)=\sup \Phi(x_\alpha)$.

Очевидно, любой гомоморфизм положителен, так как если $x \in A_1$, $x \geqslant 0$, то существует $y \in A_1$, такое, что $x = y^2$. Тогда $\Phi(x) = \Phi(y^2) = \Phi(y)^2 \geqslant 0$ в A^2. Если Φ — изоморфизм A_1 на A_2, то в силу обратимости и положительности Φ он является нормальным. В частности, для любой симметрии $s \in A$ оператор U_s является нормальным гомоморфизмом.

Если $e \in A$, то оператор $U_e: A \to A$ нормален, и если e — центральный идемпотент, то U_e — гомоморфизм. В самом деле, $U_e x^2 = ex^2 = (ex)(ex) = (U_e x)^2$, так как $e \leftrightarrow x$.

Теорема 3. Пусть $\Phi: A_1 \to A_2$ — нормальный гомоморфизм OJ-алгебр. Тогда $\Phi(A_1)$ является OJ-подалгеброй в A_2, причем точные верхние грани для возрастающих, ограниченных сверху в $\Phi(A_1)$ сетей такие же, как и в A_2; кроме того, существует центральный идемпотент $e_0 \in A_1$ и изоморфизм $\Psi: e_0 A_1$ на $\Phi(A_1)$, такие, что $\Phi(x) = \Psi(e_0 x)$ для всех $x \in A_1$.

Доказательство. Очевидно, $\Phi(A_1)$ является подалгеброй в A_2 с единицей $\Phi(1)$. Так как Φ нормально, то $\Phi(A_1)$ — правильная подалгебра.

Ядро J гомоморфизма Φ, очевидно, является идеалом, $\perp$-правильным в силу нормальности Φ. По теореме 2, существует центральный идемпотент $e \in A_1$, такой, что $J = eA_1 = J_1(e)$. Пусть Ψ — сужение Φ на $J_0(e) = (1-e)A_1$. Тогда, очевидно, Ψ есть изоморфизм $J_0(e)$ на $\Phi(A_1)$ и для любого $x \in A_1$

$$\Phi(x) = \Phi(xe + x(1-e)) = \Phi(ex) + \Phi(x(1-e)) = \Phi(x(1-e)).$$

Тогда $e_0 = 1 - e$ является искомым центральным идемпотентом. Осталось показать, что $\Phi(A_1)$ — OJ-подалгебра A_2, т. е. сама является OJ-алгеброй. Так как $\Phi(A_1)$ изоморфна $eA_1 = J_1(e)$, то достаточно показать, что eA_1 является OJ-подалгеброй A_1 в индуцированном частичном порядке.

Аксиомы 1), 2), 4) и (I) OJ-алгебры выполнены в eA_1 очевидным образом. Чтобы проверить 3) и (II), достаточно показать, что операторная коммутируемость элементов (а значит, и совместность элементов и сильная ассоциативность подалгебр в eA_1 относительно eA_1 и A_1 совпадают. Пусть $x, y \in eA_1 = J_1(e)$ и $R_x R_y = R_y R_x$ на $J_1(e)$, т. е. $(xz)y = x(zy)$ для всех $z \in J_1(e)$. Если $z \in A_1$ произволен, то $z = z_1 + z_0$ — пирсовское разложение z по e, так как $z_{1/2} = 0$ (e — центральный идемпотент). Поэтому $(xz)y = (xz_1)y = x(z_1 y) = x(zy)$, так как $xz_0 = z_0 y = 0$. Следовательно, $R_x R_y = R_y R_x$ на A_1.

Если теперь $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $x \leftrightarrow y$ в $J_1(e)$, то $x \leftrightarrow y$ в A_1 и поэтому $xy \geqslant 0$, т. е. выполнена аксиома 3) из определения OJ-алгебры для $J_1(e)$. Если B_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра в $J_1(e)$, то она сильно ассоциативна в A_1 и поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 в A_1, такая, что $B_0 = A_0 \cap J_1(e) = eA_0$. Так как $e \in Z(A)$, то $e \in A_0$ и, следовательно, $B_0 = eA_0$ является подполуполем в A_0 и, в частности, решеткой, т. е. $J_1(e)$ удовлетворяет аксиоме (II) из определения OJ-алгебры. ■

По ходу доказательства теоремы 3 мы получили следующее предложение.

Предложение 2. Если e — центральный идемпотент в OJ-алгебре A, то идеал $eA = J_1(e)$ является OJ-подалгеброй в A.

Следующий результат подчеркивает тесную связь между алгебраическими и порядковыми свойствами отображений OJ-алгебр.

Теорема 4. Пусть A_1, A_2 — OJ-алгебры, $\Phi: A_1 \to A_2$ — линейный и порядковый изоморфизм A_1 на A_2, переводящий единицу A_1 в единицу A_2. Тогда Φ — йорданов изоморфизм A_1 на A_2.

Для доказательства нам понадобится следующее предложение.

Предложение 3. Пусть A — OJ-алгебра. Рассмотрим выпуклое множество $B_1 = \{a \in A : 0 \leqslant a \leqslant 1\}$. Тогда e является экстремальной точкой множества B_1 в том и только в том случае, когда e — идемпотент в A.

Доказательство. Пусть сначала e — идемпотент в A и допустим, что e представлено в виде $\lambda a + (1-\lambda) b$, где a и b — ненулевые элементы из B_1 и λ — действительное число, $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$0 = U_{1-e}\, e = \lambda U_{1-e} a + (1-\lambda)\, U_{1-e} b.$$

Так как $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то в силу положительности оператора U_{1-e} из последнего соотношения вытекает, что $U_{1-e} a = 0$ и $U_{1-e} b = 0$. Из п. б) предложения 1 § 3 получаем, что $(1-e)a = 0$, $(1-e)b = 0$, т. е. $a = ea$, $b = eb$. Следовательно, $U_e a = a$, $U_e b = b$.

Далее $0 \leqslant a \leqslant 1$, поэтому $0 \leqslant U_e a \leqslant U_e 1 = e$, т. е. $a \leqslant e$. Аналогично $b \leqslant e$. Если либо $a \neq e$, либо $b \neq e$, то $\lambda a + (1-\lambda) b < e$, что невозможно. Следовательно, $a = b = e$, т. е. e — экстремальная точка B_1.

Наоборот, пусть e — экстремальная точка B_1, A_0 — некоторая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в A, содержащая e, и X — стоуновский компакт булевой алгебры идемпотентов A_0. Тогда, отождествляя A_0 с подалгеброй из $C_\infty(X)$, можно считать, что e является экстремальной точкой множества $\{f \in C(X) : 0 \leqslant f \leqslant 1\}$, где $C(X)$ — множество всех конечных непрерывных функций на X. Предположим, что e — не идемпотент. Тогда существует точка $x_0 \in X$, такая, что $0 < e(x_0) < 1$, т. е. можно найти такое число $\varepsilon > 0$ и функцию $h \in C(X)$, что

$$0 \leqslant e - \varepsilon h < e + \varepsilon h \leqslant 1.$$

Это означает, что $e = \frac{1}{2}[(e + \varepsilon h) + (e - \varepsilon h)]$, что противоречит экстремальности e. Следовательно, e — идемпотент. ■

Доказательство теоремы 4. Пусть Φ — линейный и порядковый изоморфизм A_1 на A_2, $\Phi(1) = 1$ и

$$B_1^i = \{a \in A_i \colon \theta \leqslant a \leqslant 1\}, \; i = 1, 2.$$

Тогда $\Phi(B_1^1) \subset B_1^2$ и так как Φ — линейный и порядковый изоморфизм, экстремальные точки B_1^1 отображаются в экстремальные точки B_1^2. Следовательно, Φ отображает идемпотент A_1 в идемпотенты A_2. Если e и f — ортогональные идемпотенты A_1, то $e + f$ — также идемпотент и поэтому $\Phi(e + f) = \Phi(e) + \Phi(f)$ является идемпотентом. Это означает, что идемпотенты $\Phi(e)$ и $\Phi(f)$ ортогональны. Следовательно, Φ переводит ортогональные идемпотенты в ортогональные.

Пусть $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ — произвольный простой элемент, где $\lambda_i \in R$, e_i — ортогональные идемпотенты. Тогда

$$\Phi(a)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(e_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Phi(e_i) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i\right) = \Phi(a^2).$$

Пусть $x \in A_1$ — произвольный элемент, $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\}$ — сеть интегральных сумм, определяющих элемент x. Это означает, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, $e_i = f_{\lambda_{i+1}} - f_{\lambda_i}$, где $\{f_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента x. Тогда, очевидно, сеть $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i\right\}$ порядково сходится к x^2.

Так как Φ — порядковый изоморфизм, то $\Phi(f_\lambda)$ является спектральным семейством для $\Phi(x)$ и в силу линейности Φ элемент $\Phi(x)$ является (o)-пределом для интегральных сумм $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(e_i)\right\}$, а $\Phi(x^2)$ — (o)-пределом для сумм $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Phi(e_i)\right\}$. В то же время для $\Phi(x)^2$ интегральными суммами являются

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(e_i)\right)^2\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Phi(e_i)\right\}.$$

Следовательно, $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Phi(e_i)\right\}$ являются интегральными суммами для $\Phi(x^2)$ и $\Phi(x)^2$. Значит, $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$, т. е. Φ — йорданов изоморфизм.

Библиография: [25, 94, 164].

§ 8. Универсальные OJ-алгебры

Определение. OJ-Алгебра A называется универсальной, если любая ее максимальная сильно ассоциативная подалгебра является универсальным полуполем. Это эквивалентно следующему условию: для любого спектрального семейства $\{e_\lambda\}$ в A существует интеграл $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$.

Как известно, любое полуполе может быть изоморфно вложено в универсальное, имеющее ту же подалгебру ограниченных элементов. Однако в неассоциативном случае это, вообще говоря, неверно, т. е. существуют OJ-алгебры, которые не универсальны и не допускают вложения ни в какую универсальную OJ-алгебру с той же ограниченной частью. Такие примеры будут рассмотрены в гл. IV.

При некоторых дополнительных предположениях OJ-алгебру можно вложить в универсальную. Этот результат мы получим как следствие более общего факта.

Теорема 1. Пусть A, $\bar{A}$ — OJ-алгебры, B, $\bar{B}$ — OJ**B**-алгебры ограниченных элементов A и $\bar{A}$ соответственно, $\Phi : B \to \bar{B}$ — изоморфизм B на $\bar{B}$. Предположим, что выполнено следующее условие:

(*) для любого $a \in A$ со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$ $\left(\text{т. е. } a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda\right)$ в алгебре $\bar{A}$ существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\Phi(e_\lambda)$.

Тогда Φ можно продолжить до изоморфизма $\bar{\Phi}$ из A на заполненную OJ-подалгебру алгебры $\bar{A}$. Если при этом A универсальна, то и $\bar{A}$ универсальна и $\bar{\Phi}(A) = \bar{A}$.

Замечание. Так как $\Phi : B \to \bar{B}$ — изоморфизм, то он переводит идемпотент, в идемпотент, спектральное семейство из B в спектральное семейство из $\bar{B}$. Поэтому условие (*) корректно. Оно выполнено, в частности, если $\bar{A}$ — универсальная OJ-алгебра.

Прежде чем доказывать теорему 1, приведем одну лемму.

Лемма 1. Пусть a, b — положительные элементы из OJ-алгебры A, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для a. Если $\{e_\lambda b e_\lambda\} \leqslant a$ для всех $\lambda \geqslant 0$, то $b \leqslant a$ (напомним, что $\{yxy\} = U_y x$ (см. § 1)).

Доказательство. Пусть $a_\varepsilon = (a + \varepsilon 1)^{-\frac{1}{2}}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Очевидно, $a_\varepsilon \leftrightarrow a$ и, следовательно, $a_\varepsilon \leftrightarrow e_\lambda$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Применив к неравенству $\{e_\lambda b e_\lambda\} \leqslant a$ положительный оператор U_{a_ε}, получим

$$\left\{a_\varepsilon \{e_\lambda b e_\lambda\} a_\varepsilon\right\} \leqslant \{a_\varepsilon a a_\varepsilon\} = a_\varepsilon^2 a = (a + \varepsilon 1)^{-1} a \leqslant 1.$$

Так как $a_\varepsilon \leftrightarrow e_\lambda$, то

$$\left\{ e_\lambda \left\{ a_\varepsilon b a_\varepsilon \right\} e_\lambda \right\} = \left\{ a_\varepsilon \left\{ e_\lambda b e_\lambda \right\} a_\varepsilon \right\} \leqslant 1.$$

Пусть $c = \{ a_\varepsilon b a_\varepsilon \}$. Тогда $\{ e_\lambda c e_\lambda \} \leqslant 1$. Так как $b \geqslant 0$, то $c \geqslant 0$. Следовательно, $\{ e_\lambda (\sqrt{c})^2 e_\lambda \} \leqslant 1$. В силу предложения 3 из § 5 отсюда вытекает $\{\sqrt{c} e_\lambda^2 \sqrt{c}\} = \{\sqrt{c} e_\lambda \sqrt{c}\} \leqslant 1$, т. е. $U_{\sqrt{c}}\, e_\lambda \leqslant 1$. Так как $\{ e_\lambda \}$ возрастают и $\sup e_\lambda = 1$, то в силу нормальности оператора $U_{\sqrt{c}}$ в неравенстве $U_{\sqrt{c}}\, e_\lambda \leqslant 1$ можно перейти к точной верхней грани по λ. Тогда $U_{\sqrt{c}} 1 \leqslant 1$, т. е. $c \leqslant 1$, или $\{ a_\varepsilon b a_\varepsilon \} \leqslant 1$. К полученному неравенству применим оператор $U_{a_\varepsilon}^{-1} = U_{a_\varepsilon^{-1}}$ и получим

$$b \leqslant \left\{ a_\varepsilon^{-1} 1 a_\varepsilon^{-1} \right\} = a_\varepsilon^{-2} = a + \varepsilon 1.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и архимедовости частичного порядка в OJ-алгебре отсюда вытекает, что $b \leqslant a$. ■

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Phi : B \to \overline{B}$ — данный изоморфизм, $\Psi : \overline{B} \to B$ — обратный ему. Если $x \in B$, то $\Phi(x)$ будем обозначать через $\overline{x}$. Запись $\overline{y} \in \overline{B}$ означает, что $\Phi^{-1}(\overline{y}) = \Psi(\overline{y}) = y$. Пусть $x \in A$ — произвольный элемент, $\{ e_\lambda \}$ — его спектральное семейство. Так как Φ — изоморфизм, то $\{\overline{e}_\lambda\}$ является спектральным семейством в $\Phi(B) \subset \overline{A}$. По условию ($*$) в $\overline{A}$ существует элемент $\overline{x}$, такой, что $\overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\overline{e}_\lambda$. Положим $\overline{\Phi}(x) = \overline{x}$, определив тем самым отображение $\overline{\Phi} : A \to \overline{A}$. Если $x \in B$, $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d e_\lambda$, то ясно, что $\overline{\Phi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\Phi(e_\lambda) = \Phi(x)$, т. е. $\overline{\Phi}|_B = \Phi$.

Покажем, что для любого $x \in A^+$ справедливо соотношение

$$\overline{\Phi}(x) = \sup \{ \Phi(y) : y \in B,\ 0 \leqslant y \leqslant x \}. \tag{1}$$

Пусть $y \in B$, $0 \leqslant y \leqslant x$. Рассмотрим спектральное семейство $\{ e_\lambda \}$ элемента x. В силу положительности оператора U_{e_λ} имеем

$$0 \leqslant \{ e_\lambda y e_\lambda \} \leqslant \{ e_\lambda x e_\lambda \} = e_\lambda x \leqslant \lambda 1.$$

Следовательно, $\{ e_\lambda y e_\lambda \} \in B$ и $\Phi(\{ e_\lambda y e_\lambda \}) \leqslant \Phi(\{ e_\lambda x e_\lambda \})$. Так как

$\{e_\lambda x e_\lambda\} = e_\lambda x = \int\limits_0^\lambda \mu de_\mu$, то $\Phi(\{e_\lambda x e_\lambda\}) = \int\limits_0^\lambda \mu d\overline{e}_\mu = \overline{e}_\lambda \int\limits_0^\infty \mu d\overline{e}_\mu = \overline{e}_\lambda \overline{\Phi}(x) \leqslant \leqslant \overline{\Phi}(x) = \overline{x}$. Поэтому $\{\overline{e}_\lambda \overline{y}\, \overline{e}_\lambda\} = \Phi(\{e_\lambda y e_\lambda\}) \leqslant \Phi(\{e_\lambda x e_\lambda\}) \leqslant \overline{x}$ для любого λ. Так как $\{\overline{e}_\lambda\}$ — спектральное семейство для элемента $\overline{x}$, то, по лемме 1, $\Phi(y) = \overline{y} \leqslant \overline{x} = \overline{\Phi}(x)$. Итак, для любого $y \in B$ такого, что $0 \leqslant y \leqslant x$ имеем $\overline{\Phi}(x) \geqslant \Phi(y)$.

Пусть $z \in \overline{A}$ — такой элемент, что для любого $y \in B^+$, такого, что $y \leqslant x$, справедливо неравенство $\Phi(y) \leqslant z$. Рассмотрим последовательность $\{z_n\} \in \overline{A}$, определенную равенством $z_n = \int\limits_0^n \lambda d\overline{e}_\lambda$. Очевидно, $z_n \uparrow \overline{x}$ и $z_n = \Phi(x_n)$, где $x_n = \int\limits_0^n \lambda de_\lambda$. Так как $0 \leqslant x_n \leqslant x$, $x_n \in B$, то $z_n = \overline{x}_n \leqslant z$ по условию. Следовательно, $\overline{\Phi}(x) = \overline{x} = \sup z_n \leqslant z$. Таким образом, соотношение (1) доказано. Более того, из его доказательства видно, что

$$\overline{\Phi}(x) = \sup_n \Phi(x_n), \quad \text{где } x_n = \int\limits_0^n \lambda de_\lambda. \tag{2}$$

Пусть теперь $a, b \in A^+$, $a = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$, $b = \int\limits_0^{+\infty} \mu dg_\mu$, $a_n = \int\limits_0^n \lambda de_\lambda$, $b_n = \int\limits_0^n \mu dg_\mu$. Тогда $0 \leqslant a_n + b_n \leqslant a + b$ и $a_n + b_n \in B$. Следовательно, в силу (1) $\overline{\Phi}(a+b) \geqslant \Phi(a_n + b_n) = \Phi(a_n) + \Phi(b_n)$. Поэтому

$$\overline{\Phi}(a+b) \geqslant \sup_n \{\Phi(a_n) + \Phi(b_n)\} = \overline{\Phi}(a) + \overline{\Phi}(b),$$

т. е. для любых $a, b \in A^+$ справедливо неравенство

$$\overline{\Phi}(a+b) \geqslant \overline{\Phi}(a) + \overline{\Phi}(b). \tag{3}$$

По построению $\overline{\Phi}$ видно, что если $a \geqslant 0$, то $\overline{\Phi}(a) \geqslant 0$. Покажем, что $\overline{\Phi}$ — монотонное отображение, т. е. если $0 \leqslant y \leqslant x$, то $\overline{\Phi}(y) \leqslant \overline{\Phi}(x)$. Пусть $z = x - y \geqslant 0$. Тогда $\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}(z+y) \geqslant \overline{\Phi}(z) + \overline{\Phi}(y) \geqslant \overline{\Phi}(y)$, так как $\overline{\Phi}(z) \geqslant 0$.

Докажем, что $\overline{\Phi}(A)$ — заполненная подалгебра $\overline{A}$. Сначала покажем заполненность $\overline{\Phi}(A)$. Пусть $0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{x} \in \overline{\Phi}(A)$ и $\{\overline{e}_\lambda\}$, $\{\overline{f}_\mu\}$ — спектральные семейства $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно. Так как $\overline{x} \in \overline{\Phi}(A)$, то существует

$$x = \int_{0}^{+\infty} \lambda de_\lambda \text{ в } A.$$

Чтобы показать, что $\overline{y} \in \overline{\Phi}(A)$, следует доказать, что существует элемент $y = \int_{0}^{+\infty} \mu df_\mu$ в A.

Имеем $\overline{y}_n = \int_{0}^{n} \mu d\overline{f}_\mu \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{x}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, поэтому

$$\left\{ \overline{e}_m \overline{y}_n \overline{e}_m \right\} \trianglelefteq \left\{ \overline{e}_m \overline{x}\, \overline{e}_m \right\} = \overline{x}_m \text{ для всех } m,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\overline{y}_n$ и $\overline{x}_n$ — ограниченные элементы и Ψ — изоморфизм, то

$$\left\{ e_m \Psi\left(\overline{y}_n\right) e_m \right\} = \Psi\left(\left\{ \overline{e}_m \overline{y}_n \overline{e}_m \right\}\right) \leqslant \Psi\left(\overline{x}_m\right) =$$

$$= \int_{0}^{m} \lambda de_\lambda = e_m x = \left\{ e_m x e_m \right\} \leqslant x.$$

Семейство $\{e_\lambda\}$ является спектральным для x, поэтому в силу леммы 1 $\Psi\left(\overline{y}_n\right) \leqslant x$, т. е. $\int_{0}^{n} \mu df_\mu \leqslant x$. Последовательность $\left\{ y_n = \int_{0}^{n} \mu df_\mu \right\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, существует $y = \sup y_n = \int_{0}^{\infty} \mu df_\mu$. Таким образом, $y \in \overline{\Phi}(A)$, т. е. $\overline{\Phi}(A)$ заполнена.

Очевидно, что если $\overline{x} \in \overline{\Phi}(A)$, то $\alpha x \in \overline{\Phi}(A)$ для любого $\alpha \in R$. Если $\overline{x}$, $\overline{y} \in \overline{\Phi}(A)$, $\overline{x} \geqslant \theta$, $\overline{y} \geqslant \theta$ и $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, то $\overline{z} = \overline{\Phi}(x) + \overline{\Phi}(y) \leqslant \overline{\Phi}(x+y)$ в силу (3) и поэтому $\overline{z} \in \overline{\Phi}(A)$. Далее, если $\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\overline{e}_\lambda \in \overline{\Phi}(A)$, то $\overline{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 de_\lambda \in \overline{\Phi}(A)$.

Пусть x, $y \in \overline{\Phi}(A)$ произвольны. Тогда $(\overline{x} + \overline{y})^2 \leqslant 2\overline{x}^2 + 2\overline{y}^2 \in \overline{\Phi}(A)$. Следовательно, $|\overline{x} + \overline{y}| = \sqrt{(\overline{x} + \overline{y})^2} \in \overline{\Phi}(A)$. Отсюда $\overline{x} + \overline{y} \in \overline{\Phi}(A)$ и потому $\overline{\Phi}(A)$ — йорданова подалгебра в $\overline{A}$.

Рассмотрим обратное отображение $\overline{\Psi} = \overline{\Phi}^{-1}$ из $\overline{\Phi}(A)$ в $\overline{A}$. Очевидно, $\overline{\Psi}$ является продолжением изоморфизма $\Psi : \overline{B} \to B$. Как и для $\overline{\Phi}$ можно показать, что $\overline{\Psi}$ обладает следующими свойствами:

$$\overline{\Psi}(\overline{x}) = \sup\{\Psi(\overline{y}) : \overline{y} \in \overline{B}, 0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{x}\},$$

$$\overline{\Psi}(\overline{x}+\overline{y}) \geqslant \overline{\Psi}(\overline{x}) + \overline{\Psi}(\overline{y}),\ \overline{x},\ \overline{y} \in \overline{\Phi}(A^+).$$

Следовательно, пользуясь монотонностью $\overline{\Phi}$, получаем

$$\overline{\Phi}(x+y) = \overline{\Phi}[\overline{\Psi}(\overline{x}) + \overline{\Psi}(\overline{y})] \leqslant \overline{\Phi}[\overline{\Psi}(\overline{x}+\overline{y})] =$$

$$= \overline{x} + \overline{y} = \overline{\Phi}(x) + \overline{\Phi}(y).$$

Сравнивая полученное неравенство с неравенством (3), имеем

$$\overline{\Phi}(x+y) = \overline{\Phi}(x) + \overline{\Phi}(y) \tag{4}$$

для всех $x,\ y \in A^+$.

Покажем теперь, что если $a = x - y$, $x,\ y \in A^+$, то $\overline{\Phi}(a) = \overline{\Phi}(x) - \overline{\Phi}(y)$.

Пусть

$$a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda,\quad a^+ = \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda de_\lambda,\quad a^- = -\int\limits_{-\infty}^{0} \lambda de_\lambda.$$

Тогда

$$\overline{\Phi}(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\overline{e}_\lambda \quad \text{и} \quad a^+ - a^- = x - y,$$

т. е. $a^+ + y = x + a^-$, где $x,\ y,\ a^+,\ a^- \in A^+$. В силу (4)

$$\overline{\Phi}(a^+) + \overline{\Phi}(y) = \overline{\Phi}(x) + \overline{\Phi}(a^-),$$

т. е.

$$\overline{\Phi}(a^+) - \overline{\Phi}(a^-) = \overline{\Phi}(x) - \overline{\Phi}(y),$$

но

$$\overline{\Phi}(a) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda d\overline{e}_\lambda - \int\limits_{-\infty}^{0} \lambda d\overline{e}_\lambda = \overline{\Phi}(a^+) - \overline{\Phi}(a^-).$$

Следовательно,

$$\overline{\Phi}(a) = \overline{\Phi}(x) - \overline{\Phi}(y).$$

Для любых $a,\ b \in A$ имеем

$$\overline{\Phi}(a+b) = \overline{\Phi}(a^+ - a^- + b^+ - b^-) = \overline{\Phi}(a^+ + b^+) - \overline{\Phi}(a^- + b^-) =$$

$$= \overline{\Phi}(a^+) + \overline{\Phi}(b^+) - \overline{\Phi}(a^-) - \overline{\Phi}(b^-) = \overline{\Phi}(a^+ - a^-) +$$

$$+ \overline{\Phi}(b^+ - b^-) = \overline{\Phi}(a) + \overline{\Phi}(b).$$

Если $a \in A$, $\alpha \in R$, то элемент αa имеет своим спектральным семейством $\{f_\lambda\} = \{e_{\alpha\lambda}\}$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\{f_\lambda\} = \{1 - e_{\alpha\lambda}\}$ при $\alpha < 0$. Отсюда, по определению,

$$\overline{\Phi}(\alpha a)=\int \lambda d\overline{f}_\lambda=\alpha\overline{\Phi}(a).$$

Итак, $\overline{\Phi}$ линейно. Если $a\in A$, $a=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$, $\overline{\Phi}(a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\overline{e}_\lambda$, то, очевидно,

$$a^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 de_\lambda,\quad \overline{\Phi}(a)^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d\overline{e}_\lambda=\overline{\Phi}(a^2).$$

Следовательно, $\overline{\Phi}$ — йорданов гомоморфизм. Если $\overline{\Phi}(a)=0$, то $\overline{\Phi}(a^2)=\overline{\Phi}(a)^2=0$. Отсюда, по построению, $a^2=0$, т. е. $a=0$. Значит, $\overline{\Phi}$ — изоморфизм A на $\overline{\Phi}(A)$. В частности, $\overline{\Phi}(A)$ является OJ-алгеброй, а значит, и OJ-подалгеброй в $\overline{A}$. Таким образом, Φ продолжается до изоморфизма A на заполненную OJ-подалгебру в $\overline{A}$.

Если A — универсальная OJ-алгебра, то для любого спектрального семейства $\{e_\lambda\}$ в A существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$ и в силу условия (*) $\overline{A}$ также универсальна. Для любого $\overline{a}\in\overline{A}$, $\overline{a}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\overline{e}_\lambda$ имеем $\overline{a}=\overline{\Phi}(a)$, где $a=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda\in A$ существует в силу универсальности A. Поэтому $\overline{\Phi}(A)=\overline{A}$. ■

Следствие. Пусть A — OJ-алгебра, B — JB-алгебра ограниченных элементов в A. Если существует универсальная OJ-алгебра $\overline{A}$, подалгебра ограниченных элементов которой изоморфна B, то A изоморфно вкладывается в $\overline{A}$ как заполненная OJ-подалгебра.

Наиболее важные примеры специальных универсальных OJ-алгебр будут рассмотрены в гл. IV. Здесь рассмотрим пример исключительной универсальной OJ-алгебры, в которую вкладываются OJ-алгебры, подалгебры ограниченных элементов которых изоморфны $C\left(X, M_3^8\right)$. В силу теоремы Шульца (см. § 2) JB-алгебры вида $C\left(X, M_3^8\right)$ являются JBW-алгебрами.

Пусть X — гиперстоуновский компакт, $M=M_3^8\cup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация конечномерной JB-алгебры M_3^8. Через $S=S\left(X, M_3^8\right)$ обозначим совокупность всех непрерывных отображений f компакта X в компакт M, таких, что $f^{-1}(\infty)$ нигде не плотно в X. Такие отображения назовем допустимыми. В множестве S введем сложение элементов следующим образом. Пусть f, $g\in S$, $Y=X\setminus\left(f^{-1}(\infty)\cup g^{-1}(\infty)\right)$. Тогда Y всюду плотно в X. На Y отображение $f+g$ определим поточечно:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in Y.$$

Так как X экстремально несвязно, то оно является расширением Стоуна — Чеха любого своего всюду плотного подмножества. Поэтому $f+g$ можно однозначно продолжить до отображения $X\to M$, т. е. построить элемент $f+g\in S$. Аналогично определяются операции умножения на действительное число и возведения в квадрат. Так как M_3^8 — йорданова алгебра, то из определения операций в S видно, что S относительно этих операций является йордановой алгеброй.

Введем в S частичный порядок поточечно, т. е. $f\leqslant g$ означает, что $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in X\setminus\left[f^{-1}(\infty)\cup g^{-1}(\infty)\right]$.

Теорема 2. Йорданова алгебра $S=S\left(X,\ M_3^8\right)$ с введенным частичным порядком является универсальной OJ-алгеброй. Всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра S изоморфна полуполю S_∇^3, а центр OJ-алгебры S изоморфен универсальному полуполю S_∇, где ∇ — булева алгебра открыто-замкнутых подмножеств в X.

Доказательство. Так как M_3^8 является OJ-алгеброй, то аксиомы 1) — 4) OJ-алгебры проверяются стандартным образом покоординатно, так как $f,\ g\in S$ совместны тогда и только тогда, когда $f(t)\leftrightarrow g(t)$ для всех $t\in X\setminus\left[f^{-1}(\infty)\cup g^{-1}(\infty)\right]$. Любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра M_3^8 изоморфна R^3, поэтому любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра S изоморфна алгебре всех допустимых непрерывных отображений из X в $R^3\cup\{\infty\}$, т. е. $S\left(X,\ R^3\right)\cong S_\nabla^3$ и, в частности, является универсальным полуполем. Следовательно, в S выполнена аксиома (II) OJ-алгебры. Так как центр M_3^8 изоморфен R, то центр S изоморфен алгебре всех допустимых функций из X в $R\cup\{\infty\}$, т. е. полуполю S_∇.

Осталось доказать лишь аксиому (I) из определения OJ-алгебры. Сначала заметим, что элемент $f\in S$ ограничен, т. е. $-\lambda\mathbf{1}(t)\leqslant f\leqslant\lambda\mathbf{1}(t)$ (где $\mathbf{1}(t)=1$ для всех $t\in X$) тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\infty)=\varnothing$. Поэтому подалгебра ограниченных элементов из S изоморфна JBW-алгебре $C\left(X,\ M_3^8\right)$.

Пусть $\{x_\alpha=x_\alpha(t)\}\subset S$ — монотонно возрастающая ограниченная сверху сеть. Не ограничивая общности, можно считать, что $0\leqslant x_\alpha\leqslant z\in S$. Так как отображение $\|\,\|: M_3^8\to R$ непрерывно, то функция

$$u=\|z\|=\|z(t)\|\mathbf{1}: X\to R\cup\{\infty\}$$

является допустимой (считаем, что $\|\infty\| = \infty$), причем u принадлежит центру S и, очевидно, $z \leqslant u$. Рассмотрим сеть $\left\{x_\alpha (1+u)^{-1}\right\}$, где $1 = 1(t)$. Очевидно,

$$0 \leqslant x_\alpha (1+u)^{-1} \leqslant z (1+u)^{-1} \leqslant u (1+u)^{-1} \leqslant 1.$$

Следовательно, все элементы $x_\alpha (1+u)^{-1}$ ограничены и $\left\{x_\alpha (1+u)^{-1}\right\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов JBW-алгебры $C\left(X, M_3^8\right)$. Так как любая JBW-алгебра является OJ-алгеброй (см. § 5), то существует $y = \sup x_\alpha (1+u)^{-1}$, причем $y \leftrightarrow a$, если $x_\alpha (1+u)^{-1} \leftrightarrow a$ для всех α. Положим $x = (1+u) y \in S$. Тогда $x \geqslant (1+u)\left(x_\alpha (1+u)^{-1}\right) = x_\alpha$ для всех α, и если $x_0 \geqslant x_\alpha$ для всех α, то $x_0 (1+u)^{-1} \geqslant x_\alpha (1+u)^{-1}$ и, значит, $x_0 (1+u)^{-1} \geqslant y$, т. е. $x_0 \geqslant (1+u) y = x$. Следовательно, $x = \sup x_\alpha$. Если $a \leftrightarrow x_\alpha$ для всех α, то, так как u — центральный элемент, $a (1+u)^{-1} \leftrightarrow x_\alpha (1+u)^{-1}$ и поэтому $a (1+u)^{-1} \leftrightarrow y$, т. е. $a \leftrightarrow (1+u) y = x$. Итак, S — OJ-алгебра. Универсальность S вытекает из того, что любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра S изоморфна универсальному полуполю S_∇^3. ■

Следствие. OJB-Алгебра ограниченных элементов универсальной OJ-алгебры $S = S\left(X, M_3^8\right)$ изоморфна JBW-алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$. Если A — произвольная OJ-алгебра, ограниченная часть которой изоморфна JBW-алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$, то A изоморфна заполненной OJ-подалгебре в S.

Библиография: [9, 23, 29, 30].

§ 9. Нормальные состояния на OJB-алгебрах

Пусть A — JB-алгебра. Напомним, что линейный функционал f на A называется положительным, если $f(a^2) \geqslant 0$ для любого $a \in A$.

Из неравенства

$$-\|x\| 1 \leqslant x \leqslant \|x\| 1$$

вытекает, что $\|f\| = f(1)$ для любого ненулевого положительного функционала f. Если $a, b \in A$, то для любого $\lambda \in R$ имеем

$$f[(a - \lambda b)^2] \geqslant 0, \text{ т. е. } f(a^2) - 2\lambda f(ab) + \lambda^2 f(b^2) \geqslant 0.$$

В силу произвольности λ отсюда получаем неравенство

$$f(ab)^2 \leqslant f(a^2) f(b^2), \tag{1}$$

которое называется неравенством Шварца.

Определение. Положительный функционал f на JB-алгебре A называется вполне аддитивным на идемпотентах, если для любого ортогонального семейства идемпотентов $\{q_\alpha\}$ справедливо равенство

$$f\left(\sup_\alpha q_\alpha\right) = \sum_\alpha f(q_\alpha).$$

Замечание. В предыдущем определении равенство $\sum_\alpha f(q_\alpha) = f\left(\sup_\alpha q_\alpha\right)$ понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор индексов Γ_0, такой, что для любого конечного набора индексов $\Gamma \supset \Gamma_0$ имеем

$$\left| f\left(\sup_\alpha q_\alpha\right) - \sum_{\alpha\in\Gamma} f(q_\alpha)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 1. Пусть A — JBW-алгебра. Для того чтобы положительный линейный функционал f был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы он был вполне аддитивен на идемпотентах.

Доказательство. Пусть f — нормальный функционал, $\{q_\alpha\}$ — ортогональное семейство идемпотентов $q = \sup q_\alpha$, Γ — направленное по включению множество конечных наборов индексов α. Если $\gamma \in \Gamma$, то положим $e_\gamma = \sup_{\alpha\in\gamma} q_\alpha = \sum_{\alpha\in\gamma} q_\alpha$. Тогда, очевидно, $\{e_\gamma\}$ — возрастающая сеть и $q = \sup e_\gamma$. В силу нормальности f имеем $f(q) = \lim_\gamma f(e_\gamma)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma_0 \in \Gamma$, такое, что $|f(q) - f(e_\gamma)| < \varepsilon$ для всех $\gamma \geqslant \gamma_0$, т. е.

$$\left| f(q) - \sum_{\alpha\in\gamma} f(q_\alpha)\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что f вполне аддитивен на идемпотентах.

Наоборот, пусть f вполне аддитивен на идемпотентах.

а) Существует минорантное семейство идемпотентов $\Gamma = \{p\} \subset A$, такое, что f нормален на пирсовской компоненте $J_1(p) = U_p(A)$ для каждого $p \in \Gamma$.

Пусть q — произвольный идемпотент из A. Так как A — JBW-алгебра и, значит, обладает разделяющим семейством нормальных состояний (§ 2, теорема 6), то существует нормальный положительный функционал φ на A, такой, что

$$f(q) < \varphi(q). \tag{2}$$

Покажем, что существует идемпотент $p_1 \leqslant q$, такой, что

$$f(p) \leqslant \varphi(p) \tag{3}$$

для всех $p \leqslant p_1$.

Допустим, что свойство (3) не выполнено, т. е. для любого идемпотента $p \leqslant q$ существует идемпотент $r \leqslant p$, такой, что

$$f(r) \geqslant \varphi(r). \qquad (4)$$

Рассмотрим множество всех ортогональных семейств идемпотентов $\{r_\alpha\} \subset A$, таких, что $f(r_\alpha) \geqslant \varphi(r_\alpha)$, $r_\alpha \leqslant q$. Очевидно, это множество упорядочено по включению и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Значит, существует максимальное семейство ортогональных идемпотентов $\{r'_\alpha\}$, такое, что $f(r'_\alpha) \geqslant \varphi(r'_\alpha)$, $r'_\alpha \leqslant q$ для всех α. Покажем, что $\sup\limits_\alpha r'_\alpha = q$. Если это не так, то в силу (4) существует ненулевой идемпотент $r_0 \leqslant q - \sup\limits_\alpha r'_\alpha$, для которого $f(r_0) \geqslant \varphi(r_0)$, что противоречит максимальности $\{r'_\alpha\}$. Таким образом, $\sup r'_\alpha = q$. Так как f вполне аддитивен на идемпотентах, то $f(q) = \sum\limits_\alpha f(r'_\alpha) \geqslant \sum\limits_\alpha \varphi(r'_\alpha) = \varphi(q)$, что противоречит условию (2). Следовательно, выполняется свойство (3). Тогда $f(a) \leqslant \varphi(a)$ для любого неотрицательного элемента вида $a = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, e_i — идемпотент, $e_i \leqslant p_1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если $x \in J_1(p_1)$, то $p_1 x = x$, т. е. $s(x) \leqslant p_1$. Так как любой элемент из $J_1(p_1)$ можно аппроксимировать по норме ступенчатыми элементами из $J_1(p_1)$ и функционалы f и φ непрерывны по норме, то

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \text{ для всех положительных } x \in J_1(p_1).$$

Так как φ — нормальный функционал, то из последнего неравенства следует, что f нормален на $J_1(p_1)$. Используя лемму Цорна, отсюда получаем утверждение а).

б) Теперь покажем, что f нормален на всей алгебре A. Пусть $x_\alpha \downarrow 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|x_\alpha\| \leqslant 1$ для всех α. Пусть p, $q \in A$ — такие ортогональные идемпотенты, что функционал f нормален на $J_1(p)$ и $J_1(q)$. Так как $x_\alpha \downarrow 0$, то в силу теоремы 3 из § 5 $U_p x_\alpha \downarrow 0$, $U_q x_\alpha \downarrow 0$. Из нормальности f на $J_1(p)$ и $J_1(q)$ следует

$$f(U_p x_\alpha) \to 0 \text{ и } f(U_q x_\alpha) \to 0.$$

В силу предложения 2 из § 5

$$U_{p+q} x_\alpha \leqslant 2(U_p x_\alpha + U_q x_\alpha),$$

поэтому

$$f(U_{p+q} x_\alpha) \leqslant 2f(U_p x_\alpha) + 2f(U_q x_\alpha) \to 0,$$

т. е. f является нормальным на $J_1(p+q) = U_{p+q}(A)$.

Пусть теперь $\{p_\alpha\}$ — ортогональное семейство идемпотентов из A, таких, что f нормален на $J_1(p_\alpha)$ для всех α и $\sup p_\alpha = 1$. Такое семейство существует в силу а). Пусть также $\{q_\beta\}$ — возрастающая сеть супремумов конечных наборов p_α. Тогда $q_\beta \uparrow 1$ и в силу предыдущего f нормален на $J_1(q_\beta)$, так как $q_\beta = \sup\limits_{\alpha\in\beta} p_\alpha = \sum\limits_{\alpha\in\beta} p_\alpha$, где β — конечный набор индексов α.

Функционал f вполне аддитивен на идемпотентах, поэтому

$$f(1-q_\beta)\to 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, а индекс β выбран так, что

$$f(1-q_\beta)\leqslant \varepsilon^2(9\|f\|)^{-1}.$$

Так как $f(U_{q_\beta}x_\alpha)\to 0$ по α, то второе слагаемое в равенстве

$$f(x_\alpha)=f(x_\alpha - U_{q_\beta}x_\alpha)+f(U_{q_\beta}x_\alpha)$$

стремится к нулю. Необходимо оценить первое слагаемое. Для любого $x\in A$ и любого идемпотента $e\in A$ имеем

$$x-U_e x = 2U_{e,1-e}x + U_{1-e}x = 2(1-e)(ex)+2e[(1-e)x]+$$
$$+2(1-e)[(1-e)x]-(1-e)x=(1-e)(2ex+x)=$$
$$=(1-e)[(2e+1)x].$$

Следовательно,

$$x_\alpha - U_{q_\beta}x_\alpha = (1-q_\beta)[(2q_\beta+1)x_\alpha].$$

В силу неравенства Шварца (1)

$$f(x_\alpha - U_{q_\beta}x_\alpha)^2 \leqslant f(1-q_\beta)f([(2q_\beta+1)x_\alpha]^2)\leqslant$$
$$\leqslant f(1-q_\beta)\|f\|\|2q_\beta+1\|^2\|x_\alpha\|^2\leqslant \varepsilon^2(9\|f\|)^{-1}\|f\|3^2\cdot 1=\varepsilon^2.$$

Итак,

$$f(x_\alpha - U_{q_\beta}x_\alpha)^2\leqslant\varepsilon^2,$$

т. е.

$$|f(x_\alpha - U_{q_\beta}x_\alpha)|<\varepsilon.$$

Следовательно, $f(x_\alpha)\to 0$, т. е. f нормален. ■

Из доказанной теоремы вытекает следующий важный результат, являющийся обобщением известной теоремы Витали—Хана—Сакса из теории меры.

Теорема 2. Пусть A — JBW-алгебра, $\{\varphi_n\}$ — последовательность нормальных положительных функционалов, поточечно сходящаяся к φ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(a)=\varphi(a)$$

для любого $a \in A$. Тогда φ также является нормальным положительным функционалом.

Доказательство. Очевидно, φ — положительный линейный функционал. Поэтому в силу теоремы 1 достаточно показать, что φ вполне аддитивен на идемпотентах. Пусть $\{e_\alpha\}$ — произвольное ортогональное семейство идемпотентов. Так как оно совместно, то существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A_0 \subseteq A$, содержащая это семейство. В силу классической теоремы Витали — Хана—Сакса $\varphi|_{A_0}$ нормален. Следовательно, $\varphi(\sup e_\alpha) = \sum \varphi(e_\alpha)$, т. е. φ вполне аддитивен на идемпотентах. ■

Теорема 3. Пусть A — произвольная OJB-алгебра. Существует единственный центральный идемпотент $e \in A$, такой, что $A = A_1 + A_0$, где $A_1 = eA = J_1(e)$ — JBW-алгебра, т. е. обладает разделяющим семейством нормальных состояний, а на $A_0 = (1-e)A = J_0(e)$ нет ни одного нормального состояния.

Доказательство. Пусть φ — произвольное нормальное состояние на A. Покажем, что в A есть наибольший идемпотент q, такой, что $\varphi(q)=0$. Рассмотрим упорядоченное по включению множество ортогональных семейств идемпотентов, на которых φ обращается в нуль. Легко видеть, что это множество удовлетворяет условиям леммы Цорна. Поэтому существует максимальное ортогональное семейство идемпотентов $\{q_\alpha\}$, таких, что $\varphi(q_\alpha)=0$ для всех α. Положим $q = \sup q_\alpha$. В силу нормальности φ имеем $\varphi(q) = 0$ Из построения ясно, что q — максимальный идемпотент со свойством $\varphi(q) = 0$. Покажем, что q — наибольший идемпотент с этим свойством. Если p — другой максимальный идемпотент, такой, что $\varphi(p) = 0$, то рассмотрим идемпотент $r = p \vee q = s(p+q)$ (§ 6, теорема 1). По теореме 3 из § 4, $r = \sup e_{\frac{1}{n}}^{\perp}$, где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента $p+q$. При этом $e_{\frac{1}{n}}^{\perp} \leqslant n(p+q)$. Следовательно,

$$\varphi\left(e_{\frac{1}{n}}^{\perp}\right) \leqslant n\varphi(p+q) = n\varphi(p) + n\varphi(q) = 0.$$

В силу нормальности φ отсюда вытекает, что $\varphi(r) = 0$. Так как p и q — максимальные идемпотенты, на которых аннулируется φ, то $p = q = r$. Таким образом, q — наибольший идемпотент со свойством $\varphi(q) = 0$. Положим $s_\varphi = 1 - q$ и назовем s_φ — носителем функционала φ. Очевидно, что $\varphi(e) > 0$ для любого ненулевого идемпотента $e \leqslant s_\varphi$. Далее в силу неравенства Шварца

$$\varphi(xq)^2 \leqslant \varphi(x^2)\varphi(q) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(xq) = 0$$

для любого $x \in A$. Следовательно, для всех $x \in A$

$$\varphi(x)-\varphi(s_\varphi x)=\varphi((1-s_\varphi)x)=\varphi(qx)=0,$$

т. е. $\varphi(s_\varphi x)=\varphi(x)$.

Пусть $z_\varphi=z(s_\varphi)$ — центральный носитель идемпотента s_φ (см. § 6). Назовем z_φ центральным носителем состояния φ. Так как $\varphi(1)=1$, то $s_\varphi\neq 0$ и $z_\varphi\neq 0$. Покажем, что на $U_{z_\varphi}(A)=z_\varphi A$ существует разделяющее семейство нормальных состояний. Пусть $x\in z_\varphi A$, $x\geqslant 0$, $x\neq 0$. Существует ненулевой идемпотент $e_0\in z_\varphi A$, такой, что $x\geqslant \varepsilon e_0$ для некоторого положительного числа ε. Так как $e_0\in z_\varphi A$, то $e_0\leqslant z_\varphi=z(s_\varphi)$. В силу предложения 4 из § 6 идемпотенты e_0 и s_φ связаны, т. е. существуют ненулевые идемпотенты $e_1\leqslant e_0$ и $f_1\leqslant s_\varphi$ и симметрии $s_1, s_2, \ldots, s_k$, такие, что

$$f_1=U_{s_1}\cdots U_{s_k}e_1.$$

Положим $\psi(a)=\varphi(U_{s_1}\cdots U_{s_k}a)$, $a\in A$, определив тем самым нормальное состояние ψ на A, так как φ — нормальное состояние и U_s — автоморфизм для любой симметрии $s\in A$. При этом $\psi(x)\geqslant\varepsilon\psi(e_0)\geqslant\varepsilon\psi(e_1)=\varepsilon\varphi(U_{s_1}\cdots U_{s_k}e_1)=\varepsilon\varphi(f_1)>0$, так как $f_1\leqslant s_\varphi$ и $f_1\neq 0$.

Таким образом, для любого ненулевого положительного x из $z_\varphi A$ существует нормальное состояние ψ, такое, что $\psi(x)>0$, т. е. $z_\varphi A$ обладает разделяющим семейством нормальных состояний.

Пусть $e=\sup z_\varphi$, где точная верхняя грань берется по всем нормальным состояниям φ на OJB-алгебре A. Покажем, что e является искомым идемпотентом.

В силу следствия к теореме 1 из § 6 e — центральный идемпотент. На $J_0(e)=(1-e)A$ нет ни одного нормального состояния. В самом деле, пусть ψ — нормальное состояние на $J_0(e)$. Тогда функционал $\varphi(a)=\psi((1-e)a)=\psi(U_{1-e}a)$ является, очевидно нормальным состоянием на A. Так как $\varphi(e)=\psi((1-e)e)=$ $=\psi(0)=0$, то $e\leqslant 1-s_\varphi$, т. е. $s_\varphi\leqslant 1-e$ по определению s_φ. Следовательно, $z_\varphi\leqslant 1-e$, но по построению e, очевидно, $z_\varphi\leqslant e$, т. е. $z_\varphi\leqslant e\wedge(1-e)=0$. Противоречие показывает, что на $(1-e)A$ нет ни одного нормального состояния.

Покажем, что OJB-алгебра $eA=J_1(e)$ обладает разделяющим семейством нормальных состояний. Пусть $x\in eA$, $x\geqslant 0$, $x\neq 0$. Так как $ex=x$ и $e=\sup z_\varphi$, то существует нормальное состояние φ на A, такое, что $z_\varphi x\neq 0$ и, очевидно, $z_\varphi x\geqslant 0$. Как показано выше, на $z_\varphi A$ существует нормальное состояние ψ, такое, что $\psi(z_\varphi x)>0$. Для произвольного $y\in eA$ положим $\nu(y)=$

$=\psi\left(z_\varphi y\right)$. Тогда ν — нормальное состояние на eA и $\nu(x)=$ $=\psi\left(z_\varphi x\right)>0$.

Осталось проверить единственность e. Пусть e_1 другой центральный идемпотент, для которого $J_1(e_1)=e_1A$ обладает разделяющим семейством нормальных состояний, а на $J_0(e_1)=(1-e)A$ нет ни одного нормального состояния. Так как на eA есть разделяющее семейство нормальных состояний, то $eA\cap(1-e_1)A=\{0\}$, т. е. $e(1-e_1)=0$. Поэтому $e=ee_1$, т. е. $e\leqslant e_1$. В силу симметрии $e_1\leqslant e$ и потому $e=e_1$. ■

Следствие 1. OJB-фактор либо является JBW-алгеброй, либо на нем нет ни одного нормального состояния.

Следствие 2. Пусть A — произвольная OJ-алгебра. Существуют три однозначно определенных взаимно ортогональных центральных идемпотента e_1, e_2, e_3, таких, что $e_1+e_2+e_3=1$ и выполняются следующие условия:

1) e_1A является OJ-алгеброй, у которой совокупность ограниченных элементов изоморфна JW-алгебре, т. е. слабо замкнутой йордановой алгебре самосопряженных ограниченных элементов в гильбертовом пространстве;

2) e_2A является OJ-алгеброй, изоморфной подалгебре универсальной OJ-алгебры $S\left(X, M_3^8\right)$;

3) e_3A является OJ-алгеброй, на OJB-алгебре ограниченных элементов которой нет ни одного нормального состояния.

Доказательство. По теореме 3, OJB-алгебра B ограниченных элементов A раскладывается по центральному идемпотенту e на две части: $B=eB+(1-e)B$, причем eB — JBW-алгебра, а на $(1-e)B$ нет ни одного нормального состояния. Положим $e_3=1-e$. По теореме Шульца (теорема 7, §2), eB раскладывается на две части: $eB=e_1B+e_2B$ $(e=e_1+e_2)$, где e_2B изоморфна JW-алгебре, а e_2B — алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$. В силу следствия к теореме 2 § 8 e_2A вкладывается в $S\left(X, M_3^8\right)$.

Библиография: [4, 5, 28, 98, 163].

Глава IV

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. AW*-Алгебры и алгебры фон Неймана

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего сведения из теории алгебр фон Неймана и AW^*-алгебр. Подробно об этих алгебрах можно прочитать в работах [40, 58, 67, 68, 98, 126].

Пусть E — ассоциативная $*$-алгебра над полем комплексных чисел и S — непустое подмножество в E. Множество

$$R(S) = \{x \in E: sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$$

называется правым аннулятором для S в E. Алгебра E называется бэровской $*$-алгеброй, если для каждого непустого подмножества $S \subset E$ существует проектор (самосопряженный идемпотент) $g \in E$, такой, что $R(S) = gE$ (в этом случае g называют правым аннулирующим проектором для S в E). Любая бэровская $*$-алгебра имеет кольцевую единицу $\mathbf{1}$ (единицей будет проектор g, для которого $R(\{0\}) = gE$). AW^*-Алгеброй [40, 67] называется C^*-алгебра, которая одновременно является бэровской $*$-алгеброй. AW^*-Алгебры были введены в работе [67]. Приводимые ниже понятия и свойства из теории AW^*-алгебр взяты из [67, 68].

Пусть B — AW^*-алгебра и ∇ — множество всех проекторов в B. Положим $e \leqslant f$, если $ef = e$, $e, f \in \nabla$. Введенное отношение есть отношение частичного порядка на ∇. Нетрудно заметить, что этот порядок совпадает с частичным порядком, индуцируемым из эрмитовой части B_h AW^*-алгебры B (в B_h, как и в любой другой C^*-алгебре, определен естественный частичный порядок: $x \leqslant y$, если $y - x = a^*a$ для некоторого $a \in B$). Для каждого $e \in \nabla$ положим $e^{\perp} = \mathbf{1} - e$.

Теорема 1 [67]. Относительно введенного частичного порядка и ортодополнения $e \to e^{\perp}$ множества ∇ — полная логика.

Ясно, что условие $ef = fe$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $e \leftrightarrow f$. Поэтому булева алгебра $Z(\nabla)$ всех центральных элементов из ∇ совпадает с множеством всех проекторов из центра Z AW^*-алгебры B (под центром алгебры B

понимается множество всех элементов, коммутирующих с каждым элементом из B).

Элемент u из AW^*-алгебры B называется частичной изометрией с начальным проектором e и конечным проектором f, если

$$u^*u = e, \quad uu^* = f.$$

Проекторы e и f из B называются эквивалентными (запись $e \sim f$), если существует частичная изометрия u с начальным проектором e и конечным проектором f. Всюду в этой главе эквивалентность проекторов понимается в указанном выше смысле. Запись $e \precsim f$ означает, что $e \sim f_1 \leqslant f$.

Теорема 2 [67]. Для любых проекторов e и f из AW^*-алгебры B существует такой центральный проектор z, что $ze \precsim zf$ и $z^\perp f \precsim z^\perp e$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что в AW^*-алгебрах с тривиальным центром (т. е. в AW^*-факторах) для любых проекторов e и f либо $e \precsim f$, либо $f \precsim e$. Как и в § 6 гл. III, через $z(e)$ обозначим центральный носитель проектора e, т. е. $z(e) = \inf\{z \in Z(\bigtriangledown) : ze = e\}$ (см. также [101]). Если $e \sim f$, $u^*u = e$, $uu^* = f$, то $f = ueu^*$, $e = u^*fu$ и потому $z(e) = z(f)$.

Теорема 3 [67]. Для любых проекторов e и f из AW^*-алгебры

$$(e \vee f - f) \sim (e - e \wedge f);$$

в частности, если $e \wedge f = 0$, то $e \precsim f^\perp$.

Теорема 4 [67]. Пусть $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ — проекторы из AW^*-алгебры, для которых $e_n \sim f_n$, $e_n e_k = 0$, $f_n f_k = 0$, $n \neq k$, $n, k = 1, 2, \ldots$. Тогда $(\sup e_n) \sim (\sup f_n)$.

$*$-Подалгебра A в AW^*-алгебре B называется AW^*-подалгеброй, если A сама является AW^*-алгеброй и для каждого непустого подмножества $S \subset A$ правые аннулирующие проекторы для S в A и B совпадают. Очевидно, что логика всех проекторов в AW^*-подалгебре A есть правильная подлогика в логике всех проекторов из B $\left(\text{так как } \sup\limits_{i \in I} e_i = 1 - g, \text{ где } g \text{ — правый аннулирующий проектор для множества } S = \{e_i\}_{i \in I}, e_i \in \bigtriangledown\right)$.

Теорема 5 [68]. Пусть $\{e_n\}$ — последовательность ненулевых попарно ортогональных и попарно эквивалентных проекторов из AW^*-алгебры B. $\sup e_n = 1$ и u_n — частичная изометрия, для которой $u_n^* u_n = e_1$, $u_n u_n^* = e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $A = \left\{x \in B : e_n x e_k = \lambda_{nk} u_n u_k^*, \lambda_{nk} \text{ — комплексные числа}, n, k = 1, 2, \ldots\right\}$. Тогда A — AW^*-подалгебра в B и A — $*$-изоморфна $*$-алгебре $B(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве H.

Проектор e из AW^*-алгебры B называется конечным, если из соотношений $e \leqslant f$, $e \sim f$ вытекает $e=f$. Из теоремы 4 следует, что если e — конечный проектор и $g \leqslant e$, $g \in \nabla$, то g — также конечный проектор.

Теорема 6 [67]. *Множество всех конечных проекторов из AW^*-алгебры образует дедекиндову подрешетку в логике всех проекторов.*

AW^*-Алгебра B называется конечной, если ее единица $\mathbf{1}$ — конечный проектор. Логика всех проекторов в конечной AW^*-алгебре является дедекиндовой (теорема 6).

Если B — не конечная AW^*-алгебра, то в B существует такая последовательность ненулевых попарно ортогональных проекторов $\{e_n\}$, что $e_n \sim e_k$, $n=1, 2, \ldots$ (см. [67]). Пусть e — произвольный проектор из AW^*-алгебры B и M — множество тех центральных проекторов z из B, для которых ze — конечный проектор. Положим $z_0 = \bigvee M$.

Нетрудно заметить, что z_0 — точная верхняя грань некоторого семейства попарно ортогональных элементов из M. Поэтому в силу теоремы 4 проектор $z_0 e$ также является конечным. Отсюда, в частности, следует, что любая AW^*-алгебра B однозначно представима в виде прямого произведения $B=B_1 \times B_2$, где B_1 — конечная AW^*-алгебра, а B_2 — такая AW^*-алгебра, у которой каждый ненулевой центральный проектор не конечен.

Пусть H — некоторое гильбертово пространство и $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных операторов, действующих в H. Если $F \subset B(H)$, то через F' обозначается коммутант множества F в $B(H)$, т. е.

$$F' = \{T \in B(H) : TS = ST \text{ для всех } S \in F\}.$$

Очевидно, что бикоммутант $F'' = (F')'$ множества F всегда содержит F.

$*$-Подалгебра B в $B(H)$ называется алгеброй фон Неймана, если $B=B''$. Для того чтобы указать, что $B \subset B(H)$, говорят, что B действует в H.

Теорема 7 [58]. *Пусть B — $*$-подалгебра в $B(H)$ и единица принадлежит B. Следующие условия эквивалентны:*

1) *B — алгебра фон Неймана;*
2) *B замкнуто в слабой операторной топологии;*
3) *B замкнуто в сильной операторной топологии.*

Если B — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, $T_\alpha \in B_h$, $T \in B_h(H)$ и $T_\alpha \uparrow T$ в $B_h(H)$, то $(T_\alpha \xi, \xi) \uparrow (T\xi, \xi)$ для всех $\xi \in H$. Поэтому в силу теоремы 7 $T \in B$, т. е. B — монотонно полная алгебра.

Класс алгебр фон Неймана можно описать, не реализуя их как алгебры операторов, действующие в гильбертовых пространствах.

C^*-Алгебра B называется W^*-алгеброй, если B имеет предсопряженное банахово пространство.

Теорема 8 [126]. Для C^*-алгебры B следующие условия эквивалентны:

1) B—W^*-алгебра;

2) B *-изоморфно алгебре фон Неймана, действующей в некотором гильбертовом пространстве.

Укажем теперь связь между AW^*- и W^*-алгебрами. Напомним, что линейный функционал f на C^*-алгебре B называется положительным, если $f(x^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in B$. Вполне аддитивность и нормальность функционалов на AW^*-алгебре определяются так же, как и в § 2 и 9 гл. III.

Теорема 9 [91]. Пусть B — C^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) B—W^*-алгебра;

2) B—AW^*-алгебра и на B существует разделяющее семейство вполне аддитивных линейных функционалов.

Таким образом, каждая алгебра фон Неймана является AW^*-алгеброй и для нее можно использовать все понятия и свойства, которые были приведены выше для AW^*-алгебр. Алгебра фон Неймана B называется полуконечной, если для любого ненулевого проектора $e \in B$ существует ненулевой конечный проектор $g \leqslant e$. Алгебра фон Неймана, у которой нет ни одного ненулевого конечного проектора, называется чисто бесконечной.

Теорема 10 [126]. В любой алгебре фон Неймана B существует такой центральный проектор z, что zB — полуконечная, а $(1-z)B$ — чисто бесконечная (если $z \neq 1$) алгебры фон Неймана.

Положительный линейный функционал φ на алгебре фон Неймана B называется конечным следом, если

$$\varphi(U^*TU) = \varphi(T)$$

для любого унитарного оператора $U \in B$. Любой конечный след φ на B обладает следующим свойством:

$$\varphi(TS) = \varphi(ST), \ T, \ S \in B.$$

Поэтому если e, g — проекторы из B, $e \lesssim g$, то $\varphi(e) \leqslant \varphi(g)$. Следовательно, в силу теоремы 3 сужение φ на логику $\bigtriangledown$ проекторов из B является оценкой на $\bigtriangledown$, причем если φ — точный след (т. е. из $\varphi(T^*T) = 0$ вытекает $T = 0$), то эта оценка строго положительна на $\bigtriangledown$.

Теорема 11 [126]. Алгебра фон Неймана B является конечной в том и только в том случае, когда на B существует разделяющее семейство конечных нормальных следов.

Из этой теоремы и следствия 1 к теореме 4 § 7 гл. I вытекает, что логика проекторов в конечной алгебре фон Неймана есть равномерная дедекиндова логика.

Укажем теперь строение коммутативных W^*-алгебр.

Пусть (Ω, μ) — измеримое пространство с конечной мерой и $L_\infty(\Omega, \mu)$ — C^*-алгебра всех существенно ограниченных μ-измеримых комплексных функций на Ω. По теореме Радона — Никодима $L_\infty(\Omega, \mu)$ является сопряженным пространством к банахову пространству $L_1(\Omega, \mu)$ всех μ-интегрируемых функций на Ω. Поэтому $L_\infty(\Omega, \mu)$ есть коммутативная W^*-алгебра.

Пространство с мерой (Ω, μ) называется локализуемым, если (Ω, μ) представимо в виде прямой суммы пространств с конечной мерой. Для таких пространств C^*-алгебра $L_\infty(\Omega, \mu)$ также является W^*-алгеброй. Верно и обратное.

Теорема 12 [98]. Пусть B — коммутативная W^*-алгебра. Тогда B $*$-изоморфно W^*-алгебре $L_\infty(\Omega, \mu)$ для некоторого локализуемого пространства с мерой (Ω, μ).

Отметим, что в качестве Ω в теореме 12 берется спектр алгебры B (т. е. стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре всех проекторов в B).

В заключение параграфа приведем теорему о существовании размерностной функции на логике проекторов алгебры фон Неймана. Пусть B — произвольная алгебра фон Неймана и Z — центр в B. Очевидно, что Z есть коммутативная W^*-алгебра и поэтому существует $*$-изоморфизм φ из Z на W^*-алгебру $L_\infty(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) — локализуемое пространство с мерой из теоремы 12. Размерностной функцией (см. [120]) на логике ∇ всех проекторов из B называется отображение D из ∇ в множестве всех неотрицательных измеримых функций на (Ω, μ), обладающее следующими свойствами:

1) $D(e)$ конечно почти всюду тогда и только тогда, когда проектор e конечен;

2) если $ef = 0$, $e, f \in \nabla$, то $D(e+f) = D(e) + D(f)$;

3) если $e_\alpha \uparrow e$, e_α, $e \in \nabla$, то $D(e)$ является точной верхней гранью функций $D(e_\alpha)$ в частично упорядоченном множестве всех неотрицательных измеримых функций (функции, равные почти всюду, отождествляются);

4) если u — частичная изометрия из B, то $D(u^*u) = D(uu^*)$;

5) если $e \in \nabla$, $z \in Z(\nabla)$, то $D(ze) = \varphi(z) D(e)$.

Теорема 13 [120]. Логика проекторов любой алгебры фон Неймана имеет размерностную функцию.

Библиография: [40, 58, 67, 68, 91, 98, 101, 120, 126].

§ 2. O*-Алгебры и их связь с OJ-алгебрами

Пусть E — ассоциативная, вообще говоря, некоммутативная $*$-алгебра над полем комплексных чисел C, E_h — вещественное линейное пространство эрмитовых элементов из алгебры E, т. е. $E_h = \{x \in E : x^* = x\}$.

Определение 1. Частичный порядок $\geqslant$ на E_h называется согласованным с алгебраическими операциями, если выполнены следующие условия:

1) если $x \geqslant y$, то $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in E_h$;

2) если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого неотрицательного числа λ;

3) если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $xy = yx$, то $xy \geqslant 0$;

4) $x^* x \geqslant 0$ для любого $x \in E$.

Определение 2. Инволютивная алгебра E с единицей $\mathbf{1}$ называется O^*-алгеброй, если на E_h определен частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями, причем:

(I) если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть эрмитовых элементов, то существует элемент $x = \sup x_\alpha$, и если $x_\alpha y = y x_\alpha$ для всех α, то $xy = yx$;

(II) если $\tilde{E}$ — максимальная коммутативная *-подалгебра в E, $\tilde{E}_h = \{x \in \tilde{E} : x^* = x\}$, то $\tilde{E}_h$ является решеткой относительно индуцированного частичного порядка.

Примеры. 1. Пусть E_0 — полуполе. Рассмотрим совокупность $E = E_0 + iE_0 = \{a + ib : a, b \in E_0\}$ и в E введем обычные покоординатные линейные операции, умножение, определенное как $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$, и инволюцию $(a + ib)^* = a - ib$. Легко видеть, что $E = E_0 + iE_0$ является коммутативной O^*-алгеброй, $E_0 + iE_0$ называется комплексным полуполем или, точнее, комплексификацией полуполя E_0.

2. Всякая алгебра фон Неймана является примером O^*-алгебры.

Так же, как и теоремы 1, 2 из § 3 гл. III доказывается следующий результат.

Теорема 1. Пусть E — O^*-алгебра, $\tilde{E}$ — максимальная коммутативная *-подалгебра в E. Тогда $\tilde{E}_h$ является полуполем, т. е. $\tilde{E}$ — комплексное полуполе. Если $\tilde{E}$, $\hat{E}$ — две максимальные коммутативные *-подалгебры E, то $\tilde{E}_h \cap \hat{E}_h$ является правильным подполуполем в $\tilde{E}_h$ и в $\hat{E}_h$.

Из этой теоремы, как и в случае OJ-алгебр, вытекает, что порядок на O^*-алгебре определен однозначно, а именно: конус E^+ положительных элементов состоит из элементов вида $x = y^2$, где $y \in E_h$.

В частности, отображение $x \to axa^*$, $a \in E$ положительно, т. е. если $x \geqslant 0$, то $axa^* \geqslant 0$. В самом деле, если $x \geqslant 0$, то $x = y^2$, где $y \in E_h$. Тогда $axa^* = ay^2 a^* = (ay)(ay)^* \geqslant 0$.

Заметим, что центр O^*-алгебры также является комплексным полуполем (доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 1 из § 3 гл. III).

Предложение 1. Пусть E — O^*-алгебра, $x \in E$. Если $x^*x = 0$, то $x = 0$.

Доказательство. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ в силу аксиомы 4) O^*-алгебры имеем $(1 \pm nx)^*(1 \pm nx) \geqslant 0$. Так как $x^*x = 0$, то отсюда вытекает, что $-1 \leqslant n(x + x^*) \leqslant +1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Элемент $x + x^*$, очевидно, является эрмитовым и поэтому принадлежит эрмитовой части некоторой максимальной коммутативной $*$-подалгебры, являющейся полуполем в силу теоремы 1.

В силу архимедовости порядка в полуполе из последнего неравенства вытекает, что $x + x^* = 0$. Аналогично, используя неравенство $(1 \pm inx)^*(1 \pm inx) \geqslant 0$, получаем $-1 \leqslant ni(x - x^*) \leqslant 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Так как $i(x - x^*)$ также является эрмитовым элементом, то $i(x - x^*) = 0$, т. е. $x - x^* = 0$. Следовательно, $x = x^* = 0$. ■

Элемент e O^*-алгебры E называется проектором, если $e^* = e$, $e^2 = e$. Через ∇ обозначим множество всех проекторов из O^*-алгебры E.

Предложение 2. Пусть $e, f \in \nabla$. Тогда: а) $0 \leqslant e \leqslant 1$; б) если $e \leqslant f$, то $ef = fe = e$ и $f - e \in \nabla$; в) если $ef = e$, то $e \leqslant f$.

Доказательство. а) Так как $e = e^2 = e^*$, то по аксиоме (4) $e \geqslant 0$. Кроме того, $1 - e \in \nabla$; следовательно, $1 - e \geqslant 0$, т. е. $e \leqslant 1$.

б) Пусть $e \leqslant f$, т. е. $f - e \geqslant 0$. Тогда существует элемент $y \in E_h$, такой, что $f - e = y^2$. Следовательно, $e(f - e)e = ey^2e = (ey)(ey)^* \geqslant 0$. Отсюда $efe \geqslant e$. С другой стороны, $1 - f \geqslant 0$, т. е. $1 - f = x^2$, где $x \in E_h$. Следовательно, $e(1 - f)e = ex^2e = (ex)(ex)^* \geqslant 0$, т. е. $e \geqslant efe$. Итак, $e = efe$, или $e(f - e)e = 0$, т. е. $ey^2e = (ey)(ey)^* = 0$. В силу предложения 1 $ey = 0$, откуда $ey^2 = 0$, т. е. $e(f - e) = 0$, но это означает, что $ef = e$. Следовательно, $fe = (ef)^* = e^* = e$, т. е. $ef = fe = e$. Если $g = f - e$, то $g^2 = f - fe - ef + e = f - e = g$ и $g^* = g$, т. е. $g \in \nabla$.

в) Если $ef = e$, то $(fe) = (ef)^* = e^* = e$, т. е. $fe = e$. Следовательно, $fef = (fe)(ef) = e^2 = e$. Так как $e \leqslant 1$, то как и выше, отсюда вытекает, что $fef \leqslant f1f = f$, т. е. $e \leqslant f$. ■

Как и для OJ-алгебр, введем определение спектрального семейства для O^*-алгебр.

Определение 3. Спектральным семейством в O^*-алгебре E называется семейство проекторов $\{e_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающее следующими свойствами:

(*i*) если $\lambda \leqslant \mu$, то $e_\lambda \leqslant e_\mu$;

(*ii*) $\inf e_\lambda = 0$, $\sup e_\lambda = 1$;

(*iii*) $e_\mu = \sup\limits_{\lambda<\mu} e_\lambda$ для любого $\mu \in R$, где R — поле действительных чисел.

Пусть $\{e_\lambda\}$ — произвольное спектральное семейство. Для любых μ, $\mu' \in R$ проекторы e_μ и $e_{\mu'}$ сравнимы в силу (*i*), следовательно, e_μ и $e_{\mu'}$ коммутируют (п. б) предложения 2), т. е. все проекторы спектрального семейства коммутируют между собой. Поэтому в E существует максимальная коммутативная $*$-подалгебра $\widetilde{E}$, содержащая семейство $\{e_\lambda\}$. Так как $\widetilde{E}_h$ — полуполе и $\{e_\lambda\} \subset \widetilde{E}_h$, то $\{e_\lambda\}$ является спектральным семейством в полуполе $\widetilde{E}_h$. Если в $\widetilde{E}_h$ существует элемент x, для которого $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство, то будем говорить, что x является интегралом от этого семейства и записывать его как $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$. Корректность этого определения проверяется так же, как в случае OJ-алгебр (см. гл. III, § 4, теорема 1). Аналогично, учитывая что любой эрмитов элемент x принадлежит некоторой максимальной коммутативной $*$-подалгебре, можно для x построить его спектральное разложение. Как и теорема 1 из § 3 гл. III, доказывается следующая теорема.

Теорема 2 (спектральная теорема). Для каждого эрмитова элемента x из O^*-алгебры существует в точности одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$. Эрмитовы элементы коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют их спектральные семейства.

Теперь рассмотрим связь между O^*- и OJ-алгебрами и покажем, что эрмитова часть E_h произвольной O^*-алгебры E является OJ-алгеброй относительно симметризованного умножения

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Если a, b, $c \in E$, то через $[a, b]$ будем обозначать коммутатор $ab - ba$, через $\{a, b, c\}$ — ассоциатор $a\circ(b\circ c) - (a\circ b)\circ c$. Нетрудно проверить, что для любых a, b, $c \in E$ справедливо тождество

$$\{a, c, b\} = \frac{1}{4}[c, [a, b]]. \tag{1}$$

Теорема 3. Пусть a, b — эрмитовы элементы O^*-алгебры E. Следующие условия эквивалентны:

α) $\{a, c, b\} = 0$ для любого $c \in E_h$;

β) $\{a, a, b\} = 0$;

β′) $\{a, b, b\} = 0$;

γ) $[a, b] = 0$.

Доказательство. В силу тождества (1) импликация γ) → α) очевидна. Очевидны также импликации α) → β) и α) → β′). В силу симметрии достаточно доказать лишь импликацию β) → γ).

Итак, пусть $\{a, a, b\} = 0$, т. е. $\left[a, [a, b]\right] = 0$ (см. (1)). Нужно показать, что $[a, b] = 0$.

1) Пусть сначала a — проектор, т. е. $a^2 = a$. Положим $d = [a, b]$. Имеем $\left[a, [a, b]\right] = a(ab - ba) - (ab - ba)a = 0$, т. е. $ab - 2aba + ba = 0$. Однако $ab = d + ba$. Следовательно,

$$d + ba - 2(d + ba)a + ba = 0,$$

или

$$d + ba - 2da - 2ba + ba = 0,$$

т. е.

$$d - 2da = 0. \tag{2}$$

Умножая полученное равенство справа на a, получаем $da = 0$. Отсюда и из (2) вытекает, что $d = 0$, т. е.

$$[a, b] = 0.$$

2) Общий случай. Пусть, как и в первом случае, $d = [a, b]$. Тогда так как $d^* = -d$, то $(id)^* = id$, т. е. id — эрмитов элемент. По условию, $[a, d] = 0$ и, значит, $[a, id] = 0$. Следовательно, эрмитов элемент id коммутирует с эрмитовым элементом a. Если $\{e_\lambda\}$ — спектральное разложение a, то, по теореме 2, id коммутирует со всеми e_λ, т. е. $\left[e_\lambda, id\right] = i\left[e_\lambda, d\right] = 0$ для всех λ. Поэтому для любого $\lambda \in R$ имеем

$$\left[e_\lambda, [a, b]\right] = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим тождество Якоби

$$[[a, b], c] + \left[[b, c], a\right] + \left[[c, a], b\right] = 0,$$

верное в любой ассоциативной алгебре. Положив в нем $c = e_\lambda$, получим

$$\left[[a, b], e_\lambda\right] + \left[\,[b, e_\lambda], a\right] + \left[\left[e_\lambda, a\right], b\right] = 0.$$

В левой части последнего равенства первое слагаемое равно нулю в силу (3), а третье равно нулю, так как $\left[e_\lambda, a\right] = 0$ по свойству спектрального разложения. Следовательно, $\left[\left[b, e_\lambda\right], a\right] = 0$ для любого $\lambda \in R$. Это означает, что $d_\lambda = \left[b, e_\lambda\right]$ коммутирует с a, причем $d_\lambda^* = -d_\lambda$. т. е. $id_\lambda \in E_h$.

Рассуждая, как и выше, отсюда получаем, что d_λ коммутирует со всеми спектральными проекторами элемента a и, в частности, с e_λ, т. е.

$$\left[e_\lambda, \left[b, e_\lambda\right]\right] = \left[e_\lambda, \left[e_\lambda, b\right]\right] = 0, \tag{4}$$

но e_λ — проектор, а для проекторов из (4) вытекает $\left[e_\lambda, b\right] = 0$ (случай 1). Следовательно, элемент b коммутирует со всеми спектральными проекторами a (теорема 2) и потому $[a, b] = 0$ (теорема 2). ■

Следствие 1. Не существует представления Гейзенберга канонических перестановочных соотношений эрмитовыми элементами O^*-алгебры, т. е. не существует двух таких эрмитовых элементов $a, b \in E_h$, что

$$ab - ba = i\mathbf{1},$$

Доказательство. Допустим, что $ab - ba = i\mathbf{1}$. Тогда для любого $c \in E_h$, очевидно, имеем

$$\{a, c, b\} = \frac{1}{4}[c, [a, b]] = \frac{i}{4}[c, \mathbf{1}] = 0.$$

В силу теоремы 3 отсюда вытекает, что $[a, b] = 0$. ■

Рассмотрим йорданову алгебру $A = (E_h, \circ)$, образованную эрмитовыми элементами O^*-алгебры относительно симметризованного умножения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Следствие 2. Пусть $a, b \in E_h$. Следующие условия эквивалентны:

а) элементы a и b операторно коммутируют в йордановой алгебре $A = (E_h, \circ)$;

б) элементы a и b совместны в йордановой алгебре A;

в) $[a, b] = 0$ в O^*-алгебре E.

Доказательство. Если $ab = ba$, то все элементы a, b, a^2, b^2, ab попарно коммутируют между собой. В силу тождества (1) отсюда вытекает, что в йордановой алгебре A операторно коммутируют элементы a, b, a^2, b^2, ab. В силу предложения 5 из § 1 гл. III элементы a и b совместны в A, т. е. в) → б).

Импликация б) → а) очевидна. Покажем, что а) → в). Если a и b операторно коммутируют в A, т. е. $\{a, c, b\} = 0$ для всех $c \in A$, то, по теореме 3, $[a, b] = 0$. ■

Следующая теорема устанавливает связь между O^*- и OJ-алгебрами.

Теорема 4. 1. Эрмитова часть любой O^*-алгебры с симметризованным умножением является OJ-алгеброй.

2. Пусть OJ-алгебра A является эрмитовой частью с симметризованным умножением некоторой комплексной $*$-алгебры E, причем выполнено условие (*): для любого $x \in E$ существует $a \in A$, такое, что $x^* x = a^2$. Тогда E — O^*-алгебра.

Доказательство. 1) Пусть E — O^*-алгебра, $A=(E_h, \circ)$ — йорданова алгебра эрмитовых элементов из E. В силу следствия 2 к теореме 3 совместность элементов из $A=(E_h, \circ)$ означает их коммутируемость в E. Поэтому выполнение аксиом 1)—4), (I), (II) из определения OJ-алгебры для A вытекает из соответствующих аксиом O^*-алгебры и того, что любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в $A=E_h$ является эрмитовой частью некоторой максимальной коммутативной $*$-подалгебры в E.

2) Пусть E — некоторая комплексная $*$-алгебра, $A=(E_h, \circ)$ — йорданова алгебра (с симметризированным умножением) эрмитовых элементов E и, кроме того, A — OJ-алгебра, причем выполнено условие ($*$).

Покажем сначала, что элементы a и b совместны в A тогда и только тогда, когда они коммутируют в E (заметим, что поскольку не известно, что E — O^*-алгебра, мы не можем воспользоваться следствием 2 к теореме 3).

Пусть $ab=ba$ в E. Тогда попарно коммутируют все элементы a, b, a^2, b^2, ab и в силу тождества (1) они операторно коммутируют в A, т. е. $a \leftrightarrow b$ в A.

Наоборот, пусть $a \leftrightarrow b$ в $A=(E_h, \circ)$, т. е. операторно коммутируют между собой все элементы a, b, a^2, b^2, ab. В частности,

$$[c, [a, b]] = 4\{a, c, b\} = 4[R_a, R_b]c = 0, \tag{5}$$

$$[c, [a^2, b]] = 4\{a^2, c, b\} = 4[R_{a^2}, R_b]c = 0 \tag{6}$$

для любых $c \in E_h$.

Из (5) вытекает, что элемент $[a, b]$ в E коммутирует с любым эрмитовым элементом в E. Поэтому

$$[a^2, b] = a^2b - ba^2 = a^2b - aba + aba - ba^2 =$$
$$= a(ab - ba) + (ab - ba)a = a[a, b] + [a, b]a = 2a[a, b].$$

Следовательно, равенство (6) можно переписать в виде

$$[c, [a^2, b]] = [c, 2a[a, b]] = 2ca[a, b] -$$
$$- 2a[a, b]c = 2ca[a, b] - 2ac[a, b] = 2[c, a][a, b] = 0$$

для любого $c \in E_h$. В частности, при $c=a$ имеем $2[a, b]^2=0$. Пусть $d=i[a, b]$. Тогда $d^*=d$, т. е. $d \in E_h$, причем $d^2 = -[a, b]^2 = 0$. Итак, d является элементом OJ-алгебры E_h, причем $d^2=0$. В силу следствия 2 к теореме 1 § 3 гл. III отсюда вытекает, что $d=0$, т. е. $[a, b]=0$. Таким образом, $a \leftrightarrow b$ в A в том и только в том случае, когда $[a, b]=0$ в E. Поэтому аксиомы 1), 2), 3), (I), (II) из определения O^*-алгебры вытекают из соответствующих аксиом OJ-алгебры. Аксиома 4) O^*-алгебры вытекает из условия ($*$) и аксиомы 4) OJ-алгебры. ■

Следствие 1. Пусть x — эрмитов элемент O^*-алгебры E. Тогда элемент x можно единственным образом представить в виде $x = x_+ - x_-$, где $x_+, x_- \geqslant 0$, $x_+ x_- = 0$.

Следствие 2. Множество ∇ всех проекторов O^*-алгебры E с индуцированным из E_h частичным порядком и ортодополнением $e^\perp = 1 - e$ является полной логикой. Множество центральных проекторов образует в ∇ полную булеву подалгебру.

Если в O^*-алгебре E логика всех проекторов имеет счетный тип, то такие O^*-алгебры в дальнейшем будем называть O^*-алгебрами счетного типа.

Предложение 3. Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть эрмитовых элементов из O^*-алгебры E, $x = \sup\limits_\alpha x_\alpha$. Тогда для любого $a \in E$

$$\sup\{a^* x_\alpha a\} = a^* x a.$$

Доказательство. 1) Пусть элемент a обратим. Так как $x_\alpha \leqslant x$, то $a^* x_\alpha a \leqslant a^* x a$. Поэтому существует $y = \sup a^* x_\alpha a$ и $y \leqslant a^* x a$. С другой стороны, $a^* x_\alpha a \leqslant y$ для всех α, т. е. $x_\alpha \leqslant \left(a^{-1}\right)^* y a^{-1}$. Поэтому $x \leqslant \left(a^{-1}\right)^* y a^{-1}$, т. е. $a^* x a \leqslant y$. Следовательно, $y = a^* x a$.

Далее, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant x_\alpha \leqslant x$ для всех α (иначе можно рассмотреть сеть $y_\alpha = x_\alpha - x_{\alpha_0}$, где α_0 — фиксированный индекс).

2) Пусть a — эрмитов элемент E. Тогда отображение $y \to aya$ на E_h совпадает с оператором U_a на OJ-алгебре $(E_h, \circ)$, так как

$$U_a y = 2a \circ (a \circ y) - a^2 \circ y = aya.$$

Поэтому в силу теоремы 3 из § 5 гл. III имеем

$$\sup\{a x_\alpha a\} = \sup U_a x_\alpha = U_a x = axa.$$

3) Общий случай. Пусть $a \in E$ произвольно, $b = aa^*$. Тогда, очевидно, $b \in E_h$ и в силу п. 2 $\sup\{b x_\alpha b\} = bxb$. Так как $x_\alpha \leqslant x$ для всех α, то $\sup\{a^* x_\alpha a\} \leqslant a^* x a$. Пусть $z = \sup\{a^* x_\alpha a\}$. Ясно, что $z \leqslant a^* x a$. Обозначим $a^* x a - z$ через h, тогда $h \geqslant 0$ и $a^* x_\alpha a + h \leqslant a^* x a$ для всех α. Следовательно, $b x_\alpha b + aha^* \leqslant bxb$ для всех α, т. е. $bxb + aha^* = \sup b x_\alpha b + aha^* \leqslant bxb$. Значит, $aha^* \leqslant 0$, но $aha^* \geqslant 0$, так что $aha^* = 0$.

Пусть u — положительный элемент из E_h, для которого $h = u^2$. Тогда $aha^* = (au)(au)^* = 0$ и в силу предложения 1 $au = 0$. Далее $h = a^* x a - z \leqslant a^* x a$. Следовательно, $0 \leqslant uhu \leqslant ua^* xau = 0$, но $uhu = uu^2 u = u^4 = h^2$, поэтому $h^2 = 0$ и так как $h \geqslant 0$, то $h = 0$. Следовательно,

$$a^* x a = \sup\{a^* x_\alpha a\}. \blacksquare$$

В заключение рассмотрим понятие носителя элемента O^*-алгебры.

Если элемент $x \in E$ эрмитов, то, рассматривая его как элемент OJ-алгебры $A = (E_h, \circ)$, можно говорить о его носителе $s(x)$. Так как $x \leftrightarrow s(x)$ в A, то $xs(x) = s(x)x$, поэтому $x \circ s(x) = \frac{1}{2}(xs(x) + s(x)x) = xs(x)$. Следовательно, $s(x)x = xs(x) = x$ и $s(x)$ является наименьшим проектором с этим свойством.

Перечислим некоторые свойства носителя эрмитового элемента, которые вытекают из свойств носителя в OJ-алгебре:

1) $s(x)$ коммутирует с x и с любым элементом, коммутирующим с x;

2) $s(x) = s(x_+) + s(x_-)$, $x_+ = s(x_+)x$, $x_- = s(x_-)x$; $s(|x|) = s(x^2) = s(\lambda x) = s(x)$, если $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$;

3) если $x \geqslant 0$, то $s(x) = \sup\{e \in \nabla : \varepsilon e \leqslant x$ для некоторого $\varepsilon > 0\}$.

Понятие носителя можно определить для любого элемента из O^*-алгебры.

Предложение 4. Пусть a — произвольный элемент O^*-алгебры E. Среди проекторов e, таких, что $ea = a$, есть наименьший. Этот проектор называется носителем a и обозначается $s(a)$. Носитель обладает следующими свойствами:

(*i*) $s(a) = s(aa^*)$;

(*ii*) если $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, то $s(\lambda a) = s(a)$;

(*iii*) если e — проектор, то $s(ea) \leqslant e$;

(*iv*) для $a, b \in E$ условия $ab = 0$ и $s(a^*)s(b) = 0$ эквивалентны.

Доказательство. Если для некоторого проектора e справедливо равенство $ea = a$, то $eaa^* = aa^*$. Следовательно, $e \geqslant s(aa^*)$.

С другой стороны, $[s(aa^*)^\perp a][s(aa^*)^\perp a]^* = s(aa^*)^\perp (aa^*) \times s(aa^*)^\perp = 0$, поэтому $s(aa^*)^\perp a = 0$ (предложение 1), т. е. $a = s(aa^*)a$. Таким образом, $s(aa^*)$ — наименьший среди проекторов e, для которых $ea = a$, т. е. $s(a) = s(aa^*)$.

Если $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, то $s(\lambda a) = s((\lambda a)(\lambda a)^*) = s(|\lambda|^2 aa^*) = s(aa^*) = s(a)$.

Здесь мы воспользовались свойством 2) носителя для эрмитовых элементов и тем, что $|\lambda|^2 \in R$.

В силу (*i*) $s(ea) = s((ea)(ea)^*) = s(eaa^*e)$, но $e(eaa^*e) = eaa^*e$ и так как $s(eaa^*e)$ является наименьшим проектором с этим свойством, то $s(eaa^*e) \leqslant e$, т. е. $s(ea) \leqslant e$.

Осталось проверить (*iv*).

Если $a, b \in E$ и $ab = 0$, то $b^*a^*ab = 0$. Пусть $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента a^*a. Тогда, как показано в теореме 3 из § 4 гл. III, $s(a^*a) = \sup e^\perp_{\frac{1}{n}}$. Далее, так как $e^\perp_{\frac{1}{n}} \leqslant na^*a$, то $b^* e_{\frac{1}{n}} b \leqslant nb^*a^*ab = 0$, т. е. $b^* e_{\frac{1}{n}} b = 0$ для любого n.

В силу предложения 3 имеем

$$b^* s(a^*a)\, b = \sup b^* e_{\frac{1}{n}} b = 0.$$

Так как $s(a^*) = s(a^*a)$, то $b^*s(a^*)\, b = 0$, т. е. $(s(a^*)\, b)^* \times \times (s(a^*)\, b) = 0$. Следовательно, $s(a^*)\, b = 0$. Отсюда, рассуждая как и выше, легко получаем $s(a^*)\, s(b) = 0$. Наоборот, если $s(a^*)\, s(b) = 0$, то $ab = as(a^*)\, s(b)\, b = 0$. ■

Носитель $s(a)$ элемента $a \in E$ называют также левым носителем для a и обозначают $l(a)$. Аналогично можно определить правый носитель $r(a)$ для $a \in E$ как наименьший среди всех проекторов e из O^*-алгебры E, для которых $ae = a$. Очевидно, что $r(a) = = l(a^*) = s(a^*)$ и если $a \in E_h$, то $s(a) = l(a) = r(a)$.

Позднее (см. § 4) будет показано, что множество всех ограниченных элементов из O^*-алгебры E является AW^*-алгеброй. Поэтому на множестве проекторов из E можно рассматривать отношение эквивалентности $e \sim f$, введенное в § 1.

Предложение 5. Для любого элемента a из O^*-алгебры E

$$r(a) \sim l(a).$$

Доказательство. Пусть $y = a^*a$ и $\widetilde{E}$ — максимальная коммутативная *-подалгебра в E, содержащая y. Обозначим через $\widetilde{\nabla}$ булеву алгебру всех проекторов в $\widetilde{E}$. В силу теоремы о классификации полуполей (см. гл. II) можно считать, что $\widetilde{E}_h$ есть заполненная подалгебра в универсальном полуполе $C_\infty(X(\widetilde{\nabla}))$, где $X(\widetilde{\nabla})$ — стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре $\widetilde{\nabla}$. Пусть U_n — открыто-замкнутое множество в $X(\widetilde{\nabla})$, для которого

$$\left\{t \in X(\widetilde{\nabla}) : y(t) \geqslant \frac{1}{n}\right\} \subset U_n \subset \left\{t \in X(\widetilde{\nabla}) : y(t) \geqslant \frac{1}{n+1}\right\}$$

и e_n — характеристическая функция для U_n. Очевидно, что $e_n \leqslant e_{n+1}$ и $g = \sup e_n$ является носителем элемента y в $\widetilde{E}$. Следовательно, $r(a) = s(a^*a) = s(y) = \sup e_n$ (см. доказательство предложения 2 из § 4 гл. III). Обозначим через x_n такой положительный элемент из $\widetilde{E}_h$, для которого $yx_n^2 = e_n$ и положим $w_n = ax_n$. Тогда $x_{n+1}e_n = x_n$ и

$$w_n^* w_n = x_n a^* a x_n = y x_n^2 = e_n,$$

причем $r(w_n) = e_n$, поэтому

$$(w_n w_n^*)(w_n w_n^*) = w_n e_n w_n^* = w_n w_n^*,$$

т. е. $f_n = w_n w_n^*$ — проектор и $f_n \sim e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $f_n = a x_n^2 a^*$, то $(1 - l(a)) f_n = 0$ и $f_n \leqslant l(x)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, $f_n \leqslant f_{n+1}$. Далее

$$w_n^* w_{n+1} = x_n a^* a x_{n+1} = y x_n x_{n+1} = y x_n^2 = x_n a^* a x_n = e_n,$$

$$w_n w_{n+1}^* = a x_n x_{n+1} a^* = a x_n^2 a^* = (a x_n)(a x_n)^* = w_n w_n^* = f_n,$$

но

$$(w_{n+1} - w_n)^* (w_{n+1} - w_n) = w_{n+1}^* w_{n+1} - w_n^* w_{n+1} - w_{n+1}^* w_n + w_n^* w_n = e_{n+1} - e_n - e_n + e_n = e_{n+1} - e_n,$$

$$(w_{n+1} - w_n)(w_{n+1} - w_n)^* = w_{n+1} w_{n+1}^* - w_{n+1} w_n^* - w_n w_{n+1}^* + w_n w_n^* = f_{n+1} - f_n - f_n + f_n = f_{n+1} - f_n.$$

Следовательно, $(e_{n+1} - e_n) \sim (f_{n+1} - f_n)$. Так как проекторы $\{(e_{n+1} - e_n)\}$ и $\{(f_{n+1} - f_n)\}$ попарно ортогональны, то (см. § 1)

$$r(a) = \sup e_n = \sup (e_{n+1} - e_n) \sim \sup (f_{n+1} - f_n) \leqslant l(a),$$

т. е. $r(a) \precsim l(a)$. Аналогично $l(a) \precsim r(a)$, так что

$$r(a) \sim l(a). \blacksquare$$

Следствие: $l(a) \sim l(a^*)$ для каждого элемента a из O^*-алгебры E.

Библиография: [22, 67, 110, 113, 116].

§ 3. Подалгебры и идеалы O*-алгебр

Пусть E — O^*-алгебра, F — $*$-подалгебра E. Если алгебра F сама является O^*-алгеброй, то будем говорить, что F — O^*-подалгебра E. Как и для OJ-алгебр (см. § 4 гл. III), нетрудно видеть, что в этом случае F является O^*-алгеброй относительно частичного порядка, индуцированного из E.

Так как эрмитова часть произвольной O^*-алгебры является OJ-алгеброй, то определены понятия $\perp$-правильной, правильной, заполненной подалгебр O^*-алгебры.

В силу аксиомы (I) из определения O^*-алгебры и теоремы 1 из § 2 каждая максимальная коммутативная $*$-подалгебра из

O^*-алгебры E и центр в E являются правильными O^*-подалгебрами в E.

Теорема 1. Пусть F — заполненная $*$-подалгебра O^*-алгебры E. Если F обладает единицей или правильная, то она является O^*-подалгеброй в E.

Доказательство. Пусть E_h (соответственно F_h) — пространство эрмитовых элементов в E (соответственно в F). Частичный порядок на F_h, индуцированный из E_h, согласован с алгебраическими операциями в смысле определения 1 из § 1. Проверим справедливость аксиомы (I). Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая сеть эрмитовых элементов, такая, что $0 \leqslant x_\alpha \leqslant z$ для всех α, где $z \in F_h$. Так как F — заполненная $*$-подалгебра и $x = \sup x_\alpha \leqslant z$, то $x \in F_h$, т. е. x является точной верхней гранью в F_h для сети $\{x_\alpha\}$ и очевидно, что $xy = yx$, если $x_\alpha y = yx_\alpha$ для всех α.

Теперь докажем справедливость аксиомы (II). Пусть $\hat{F}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в F. Тогда существует максимальная коммутативная $*$-подалгебра $\hat{E}$ в E, такая, что $\hat{F} = \hat{E} \cap F$.

Пусть F обладает единицей e_0. В этом случае $e_0 \in \hat{F}$ и $\hat{F}$ — заполненная $*$-подалгебра комплексного полуполя $\hat{E}$. Тогда алгебра $\hat{F}$ сама является комплексным полуполем относительно частичного порядка, индуцированного на $\hat{F}_h$ из $\hat{E}_h$. Следовательно, $\hat{F}_h$ — решетка.

Пусть F — правильная $*$-подалгебра в E. Достаточно показать, что в этом случае F обладает единицей. Ясно, что F_h является правильной заполненной йордановой подалгеброй OJ-алгебры E_h относительно симметризированного произведения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Как доказано в теореме 1 из § 7 гл. III, в F_h существует идемпотент e, такой, что $e \circ x = x$ для любого $x \in F_h$. В силу предложения 6 из § 1 гл. III $e \leftrightarrow x$, т. е. $ex = xe$ (см. следствие 2 к теореме 3 из § 2). Следовательно, для любого $x \in F_h$ имеем $ex = xe = x \circ e = x$. Значит, $ex = x$ для всех $x \in F$, т. е. F обладает единицей. ■

Так как в специальных йордановых алгебрах $U_a x = axa$ для любых x, a, то из теоремы 1 § 7 гл. III вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если e — проектор O^*-алгебры E, то eEe представляет собой правильную заполненную O^*-подалгебру в E. Наоборот, если F — правильная заполненная O^*-подалгебра E, то существует единственный проектор $e \in E$, такой, что $F = eEe$.

Аналогично теореме 2 из § 7 гл. III с очевидными изменениями доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть E — O^*-алгебра. Если e — проектор из E, то Ee (соответственно eE) является правильным левым (соответственно правым) идеалом. Если J — $\perp$-правильный левый (правый) идеал, то существует единственный проектор $e \in E$, такой, что $J = Ee$ ($J = eE$). При этом J является двусторонним тогда и только тогда, когда e — центральный проектор. В частности, для идеалов O^*-алгебр понятия правильности и $\perp$-правильности совпадают.

Следствие. Если O^*-алгебра имеет тривиальный центр, то в ней нет собственных двусторонних $\perp$-правильных идеалов.

Определение. Эрмитов элемент из O^*-алгебры E называется ограниченным, если существует такое число $\lambda > 0$, что $-\lambda 1 \leqslant x \leqslant \lambda 1$, т. е x ограничен как элемент OJ-алгебры E_h. Произвольный элемент $a = x + iy \in E$ называется ограниченным, если ограничены эрмитовы элементы x и y.

Предложение 1. Пусть E — O^*-алгебра. Тогда

1) если a, $b \in E$ — ограниченные элементы, λ — комплексное число, то элементы λa, $a+b$, ab, a^* также являются ограниченными;

2) элемент $a \in E$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен элемент a^*a;

3) если $a \in E$, $a^*a \leqslant 1$, то $aa^* \leqslant 1$.

Доказательство. 1) Ограниченность элементов λa, $a + b$, a^* очевидна. Проверим ограниченность элемента ab. Можно считать, что a, b — эрмитовы элементы, т. е. $-\alpha 1 \leqslant a \leqslant \alpha 1$, $-\beta 1 \leqslant b \leqslant \beta 1$. Тогда $\alpha 1 + a \geqslant 0$ и $\alpha 1 - a \geqslant 0$. По аксиоме 3) из определения O^*-алгебры $(\alpha 1 + a)(\alpha 1 - a) = \alpha^2 1 - a^2 \geqslant 0$, т. е. $a^2 \leqslant \alpha^2 1$. Аналогично $b^2 \leqslant \beta^2 1$, но $(a \pm b)^2 \geqslant 0$, т. е. $-(a^2 + b^2) \leqslant ab + ba \leqslant (a^2 + b^2)$. Следовательно,

$$-(\alpha^2 + \beta^2) 1 \leqslant ab + ba \leqslant (\alpha^2 + \beta^2) 1.$$

Аналогично проверяются неравенства

$$-(\alpha^2 + \beta^2) 1 \leqslant i(ab - ba) \leqslant (\alpha^2 + \beta^2) 1.$$

Следовательно, элементы $(ab+ba)$, $i(ab-ba)$ ограничены, а значит, ограничен и элемент

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2i}(i(ab - ba)).$$

2) Пусть a — ограниченный элемент. В силу п. 1) элемент a^*a ограничен. Наоборот, пусть a^*a — ограниченный элемент. Так как $(a \pm 1)^*(a \pm 1) \geqslant 0$, то $-a^*a - 1 \leqslant a + a^* \leqslant a^*a + 1$. По условию, существует число $\lambda \geqslant 0$, такое, что $-\lambda 1 \leqslant a^*a \leqslant \lambda 1$. Тогда $-(\lambda + 1) 1 \leqslant a + a^* \leqslant (\lambda + 1) 1$. Заменяя a на ia, получаем $-(\lambda + 1) 1 \leqslant i(a - a^*) \leqslant (\lambda + 1) 1$. Тогда очевидно, что элемент $a = \frac{1}{2}(a + a^*) + \frac{1}{2i}(i(a - a^*))$ также ограничен.

3) Так как $(aa^*-1)^2 \geqslant 0$, то

$$a(a^*a)a^* - 2aa^* + 1 = (aa^*)^2 - 2aa^* + 1 \geqslant 0.$$

Из неравенства $a^*a \leqslant 1$ вытекает $a(a^*a)a^* \leqslant aa^*$. Следовательно, $aa^* - 2aa^* + 1 \geqslant 0$, т. е. $aa^* \leqslant 1$. ■

Следствие. Совокупность A ограниченных элементов произвольной O^*-алгебры E является заполненной O^*-подалгеброй, содержащей единицу.

Доказательство. В силу предложения 1 A является $*$-подалгеброй и $1 \in A$. Заполненность A также очевидна, так как если $0 \leqslant x \leqslant y \in A_h$, то $x \in A_h$, где A_h — эрмитова часть A. По теореме 1, A является O^*-подалгеброй. ■

Предложение 2. Любой унитарный элемент в O^*-алгебре является ограниченным, любой ограниченный элемент можно представить в виде линейной комбинации четырех унитарных.

Доказательство. Если u — унитарный элемент, т. е. $u^*u = uu^* = 1$, то в силу предложения 1 он ограничен. Если x — произвольный ограниченный эрмитов элемент, т. е. $-\lambda 1 \leqslant \leqslant x \leqslant \lambda 1$, $\lambda > 0$, то, очевидно, $x^2 \leqslant \lambda^2 1$, т. е. $\lambda^{-2}x^2 \leqslant 1$. Поэтому определены элементы $u_{1,2} = \lambda^{-1}x \pm i\sqrt{1-\lambda^{-2}x^2}$, которые, как нетрудно видеть, являются унитарными. При этом $x = \lambda(u_1 + u_2)$, т. е. любой ограниченный эрмитов элемент есть линейная комбинация двух унитарных, а значит, произвольный ограниченный элемент—комбинация четырех унитарных элементов. ■

Предложение 3. Пусть E — O^*-алгебра, A — O^*-подалгебра ограниченных элементов в E, e, f — проекторы, $z(e)$, $z(f)$ — их центральные носители соответственно. Следующие условия эквивалентны:

(i) $z(e)z(f) = 0$;

(ii) $eEf = \{0\}$;

(iii) $eAf = \{0\}$.

Доказательство. Импликации (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) очевидны. Докажем, что (iii) влечет (i). Пусть $eAf = \{0\}$. Множество $J = \{x \in A : eAx = \{0\}\}$ является двусторонним идеалом в A. В самом деле, если $x \in J$, т. е. $eAx = \{0\}$, то для любых $y, z \in A$ имеем $eA(yxz) = e(Ay)xz \subset (eAx)z = \{0\}$, т. е. $yxz \in J$. Очевидно, что $f \in J$. Если $\{g_\alpha\}$ — возрастающая сеть проекторов в J, $g = \sup g_\alpha$, то для произвольного $y \in A$ имеем $eygy^*e = \sup eyg_\alpha y^*e$ в силу предложения 3 из § 1. Значит, $eygy^*e = 0$, т. е. $(eyg)(eyg)^* = 0$. В силу предложения 1 из § 1 $eyg = 0$, т. е. $g \in J$. Таким образом, J — $\perp$-правильный идеал в A. По теореме 2, $J = Az$, где z — центральный проектор. Так как $f \in J$, то $f \leqslant z$. Следовательно, $z(f) \leqslant z$, т. е. $z(f) \in J$. Тогда $eAz(f) = \{0\}$. Точно так же можно доказать, что $z(e)Az(f) = \{0\}$. В частности, $z(e)z(f) = 0$. ■

Следствие 1. Пусть e, f — проекторы в O^*-алгебре E, $z(e)z(f)=0$. Тогда существуют ненулевые проекторы $e_1 \leqslant e$ и $f_1 \leqslant f$, такие, что $e_1 = s(a)$, $f_1 = s(a^*)$ для некоторого ограниченного элемента $a \in E$, в частности, $e_1 \sim f_1$.

Доказательство. В силу предложения 3 существует ограниченный элемент $x \in A$, такой, что $exf \neq 0$. Пусть $a = exf$, $e_1 = s(a)$, $f_1 = s(a^*)$. Очевидно, $e_1 \neq 0$, $f_1 \neq 0$. Так как $ea = eexf = exf = a$, то $e_1 = s(a) \leqslant e$. Так как $fa^* = ffx^*e = fx^*e = a^*$, то $f_1 = s(a^*) \leqslant f$. Из предложения 5 § 2 вытекает, что $e_1 \sim f_1$. ■

Следствие 2. Если O^*-алгебра E имеет тривиальный центр, то каковы бы ни были ненулевые проекторы $e, f \in E$, существуют такие ненулевые проекторы $e_1 \leqslant e$, $f_1 \leqslant f$, что $e_1 \sim f_1$.

Предложение 4. Пусть E — O^*-алгебра, Z — ее центр, e — ненулевой проектор из E. Тогда центр O^*-алгебры eEe совпадает с $eZe = eZ$.

Доказательство. Пусть $F = eEe$, $\hat{Z}$ — центр F. Очевидно, что $eZ \subset \hat{Z}$.

Для того чтобы доказать обратное включение $eZ \supset \hat{Z}$, достаточно установить, что каждый проектор из $\hat{Z}$ лежит в eZ.

Пусть $\hat{z} \in \hat{Z}$ — ненулевой проектор, z — его центральныйноситель в E. Рассмотрим элемент $h = ez - \hat{z} = e\left(z - \hat{z}\right)$. Так как $z - \hat{z} \geqslant 0$, $e \geqslant 0$ и $e\left(z - \hat{z}\right) = \left(z - \hat{z}\right)e$, то по аксиоме 3) O^*-алгебры $e\left(z - \hat{z}\right) \geqslant 0$, т. е. $h \geqslant 0$.

Допустим, что $h \neq 0$. Тогда $zh = h \neq 0$, поэтому $z \cdot z(h) \neq 0$, где $z(h)$ — центральный носитель h в E. По следствию 1 к предложению 3, существует ненулевой элемент $a \in E$, такой, что $s(a) \leqslant h$, $s(a^*) \leqslant \hat{z}$. Имеем $a = s(a)\,a = ha$, $a^* = s(a^*)\,a^* = \hat{z}a^*$, т. е. $a = a\hat{z}$. Следовательно, $a = ha = ha\hat{z} = eha\hat{z}e = eae$, так как $eh = h$, $\hat{z}e = \hat{z}$.

Итак, $a = eae \in F$. Но $\hat{z}$ — центральный проектор в F. Следовательно, $a = ha\hat{z} = h\hat{z}a = 0$, так как $h\hat{z} = ez\hat{z} - \hat{z} = e\hat{z} - \hat{z} = 0$.

Полученное противоречие показывает, что $h = 0$, т. е. $\hat{z} = ez \in eZ$. ■

Предложение 5. Пусть E — O^*-алгебра, A — O^*-подалгебра ограниченных элементов в E, $e \in E$ — проектор, $И$ — множество всех унитарных элементов из A. Тогда $z(e) = \sup\{u^*eu,\ u \in И\} = \sup\{s(a^*ea),\ a \in A\} = \sup\{s(a^*ea),\ a \in E\}$, где $z(e)$ — центральный носитель проектора e.

Доказательство. Пусть ∇ — логика проекторов в E. Рассмотрим в ∇ следующие множества: $\varepsilon_1 = \{u^*eu;\ u \in И\}$, $\varepsilon_2 = \{s(a^*ea);\ a \in A\}$, $\varepsilon_3 = \{s(a^*ea);\ a \in E\}$. Тогда $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \subset \varepsilon_3$. В силу следствия 2 к теореме 4 из § 2 существуют проекторы $z_1 = \sup \varepsilon_1$, $z_2 = \sup \varepsilon_2$, $z_3 = \sup \varepsilon_3$.

Имеем $a^*ea = a^*z(e)ea = z(e)(a^*ea)$ для любого $a \in E$. Следовательно, $s(a^*ea) \leqslant z(e)$, т. е. $z_3 \leqslant z(e)$. Кроме того, из $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \subset \varepsilon_3$ вытекает

$$z_1 \leqslant z_2 \leqslant z_3 \leqslant z(e).$$

Если $v \subset И$, то $v^*z_1v = \sup\{v^*u^*euv,\ u \in И\} = \sup\{u^*eu,\ u \in И\} = z_1$, т. е. $z_1v = vz_1$ для любого v. Следовательно, z_1 коммутирует с любым унитарным элементом из E. В силу предложения 2 z_1 коммутирует с любым элементом из A, т. е. z_1 — центральный проектор в A. Кроме того, $z_1 \geqslant e$, следовательно, $z_1 \geqslant z(e)$, т. е $z_1 = z_2 = z_3 = z(e)$. ■

Предложение 6. Пусть J_0 — двусторонний идеал в O^*-алгебре E, J — наименьший $\perp$-правильный двусторонний идеал, содержащий J_0. Тогда:

(i) $J = zE$, где $z = \sup(J_0 \cap \nabla)$;

(ii) если $x \in J$, $x \geqslant 0$, то существует возрастающая сеть положительных эрмитовых элементов $\{x_\alpha\}$ в J_0, такая, что $x = \sup x_\alpha$.

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $\{e_\alpha\}$ — произвольная сеть проекторов, $e = \sup e_\alpha$. Если x — такой элемент, что $e_\alpha x = 0$ для всех α, то $ex = 0$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — направленное множество конечных наборов индексов $\{\alpha\}$. Положим $g_\gamma = \sup\{e_\alpha;\ \alpha \in \gamma\}$. Тогда $\{q_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ — возрастающая сеть проекторов и $e = \sup g_\gamma$. Так как $q_\gamma = \sup\{e_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} = s\left(\sum_{\alpha \in \gamma} e_\alpha\right)$, то $g_\gamma x = 0$ для всех γ, т. е. $(g_\gamma x)^*(g_\gamma x) = 0$. Поэтому $x^*ex = \sup x^*g_\gamma x = 0$, т. е. $(ex)^*(ex) = 0$ или $ex = 0$. ■

Доказательство предложения 6. Пусть $И$ — множество всех унитарных элементов из E. Если $u \in И$, то $u^*zu = \sup\{u^*(J_0 \cap \nabla)u\} = \sup(J_0 \cap \nabla) = z$. Следовательно, z — центральный проектор.

Пусть $a \in J_0$, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента $x = aa^*$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует элемент c_n, такой, что $e^{\perp}_{\frac{1}{n}} = c_n x$. Следовательно, $e^{\perp}_{\frac{1}{n}} \in J_0 \cap \nabla$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $s(x) = \sup_n \left\{e^{\perp}_{\frac{1}{n}}\right\}$, то отсюда следует, что $s(x) \leqslant z$. В силу предложения 4 из § 2 $s(a)=s(aa^*)=s(x)\leqslant z$. Поэтому $a=za$, т. е. $J_0\subset zE$. Следовательно, $J\subset zE$.

В силу теоремы 2 идеал J имеет вид $J=z_1E$, где z_1 — центральный проектор. Тогда $z_1\leqslant z$. С другой стороны, для любого $e\in J_0\cap\nabla$ $e\leqslant z_1$ и потому $z\leqslant z_1$. Таким образом, $J=zE$.

Рассмотрим всевозможные семейства попарно ортогональных элементов из $J_0\cap\nabla$. По лемме Цорна, существует максимальное семейство $\{e_\alpha\}$. Пусть $g=z-\sup e_\alpha$.

Допустим, что $eg\neq 0$ для некоторого $e\in J_0\cap\nabla$. Тогда существует эрмитов элемент $c\in E$, такой, что элемент $f=c(geg)$ является ненулевым проектором. Так как $e\in J_0$, то $f\in J_0$. Кроме того, $fg^\perp=0$, т. е. $f\leqslant g=z-\sup e_\alpha$. Это означает, что проектор f ортогонален всем e_α, что противоречит максимальности семейства $\{e_\alpha\}$. Следовательно, $ge=0$ для всех $e\in J_0\cap\nabla$. В силу предыдущей леммы $gz=g\sup(J_0\cap\nabla)=0$. Это означает, что $g=0$, т. е. $z=\sup e_\alpha$.

Выберем произвольный положительный элемент $x\in J$. Для каждого конечного набора индексов $\gamma=\{\alpha\}$ положим $g_\gamma=$ $=\sup\{e_\alpha:\alpha\in\gamma\}=\sum\limits_{\alpha\in\gamma}e_\alpha$. Тогда сеть $\{g_\gamma\}$ возрастает и $\sup g_\gamma=z$. Имеем

$$x=\sqrt{x}\,z\sqrt{x}=\sup_\gamma\sqrt{x}\,g_\gamma\sqrt{x},$$

причем

$$x_\gamma=\sqrt{x}\,g_\gamma\sqrt{x}\in J_0. \blacksquare$$

Следствие. Пусть E — O^*-алгебра с тривиальным центром, J_0 — ненулевой двусторонний идеал в E. Тогда для каждого положительного элемента $x\in E$ существует возрастающая сеть положительных элементов $\{x_\alpha\}$ из J_0, такая, что $x=\sup\{x_\alpha\}$.

Рассмотрим гомоморфизмы O^*-алгебр. Пусть E, F — O^*-алгебры, Φ — $*$-гомоморфизм E в F. Нетрудно проверить, что Φ сохраняет порядок и если Φ — взаимно однозначный гомоморфизм, то обратный гомоморфизм Φ^{-1}, определенный на $*$-подалгебре $\Phi(E)\subset F$, также сохраняет порядок.

Как и для OJ-алгебр (см. § 7 гл. III), определяется понятие нормального $*$-гомоморфизма O^*-алгебр. Любой $*$-изоморфизм O^*-алгебр является примером нормального $*$-гомоморфизма. Если z — центральный проектор в O^*-алгебре E, $F=zE$, то отображение $x\longrightarrow zx$ представляет собой нормальный $*$-гомоморфизм E в F.

Как и для OJ-алгебр, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть Φ — нормальный $*$-гомоморфизм O^*-алгебры E в O^*-алгебру F. Тогда:

1) $\Phi(E)$ — O^*-подалгебра в F, причем точные верхние грани

для возрастающих ограниченных сверху в $\Phi(E_h)$ сетей такие же, как и в F_h;

2) существуют центральный проектор $z \in E$ и $*$-изоморфизм ψ из O^*-алгебры zE на O^*-алгебру $\Phi(E)$, такие, что $\Phi(x) = \psi(zx)$ для любого $x \in E$.

В заключение рассмотрим прямые произведения O^*-алгебр. Пусть $\{E_\alpha\}$ — семейство O^*-алгебр, $E = \Pi E_\alpha$. $*$-Алгебра E обладает единицей и покоординатный частичный порядок на множестве E_h эрмитовых элементов алгебры E согласован с алгебраическими операциями. Аксиома (I) O^*-алгебры для E проверяется покоординатно. Проверим аксиому (II). Пусть $\hat{E}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в E. Каждую алгебру E_α будем рассматривать как $*$-подалгебру в E. Пусть z_α — единица алгебры E_α. Тогда $\{z_\alpha\}$ — семейство попарно ортогональных центральных проекторов в E и $\sup\{z_\alpha\} = 1$. Следовательно, $\{z_\alpha\} \subset \hat{E}$ и $\hat{E} = \Pi z_\alpha \hat{E}$. Так как алгебры E_α попарно коммутируют в E, то $z_\alpha \hat{E}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в E_α. Следовательно, множество эрмитовых элементов алгебры $\hat{E}$ образует решетку, т. е. E — O^*-алгебра.

Наоборот, пусть E — произвольная O^*-алгебра, $\{z_\alpha\}$ — семейство попарно ортогональных центральных проекторов в E, $\sup\{z_\alpha\} = 1$. Положим $E_\alpha = z_\alpha E$, $F = \Pi E_\alpha$. Тогда E $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в O^*-алгебре F. В самом деле, отображение Φ из O^*-алгебры E в F, ставящее в соответствие элементу $x \in E$ элемент $\{z_\alpha x\} \in F$, является $*$-гомоморфизмом E в F. Это отображение имеет обратное $\Phi^{-1}(\{z_\alpha x\}) = \sup z_\alpha x$ для $x \geqslant 0$. Множество положительных элементов O^*-алгебры $\Phi(E)$ состоит из тех $\{x_\alpha\} \in F$, $x_\alpha \geqslant 0$, для которых в E существует $x = \sup\{x_\alpha\}$. Следовательно, $\Phi(E)$ — заполненная O^*-подалгебра в F.

Библиография: [67, 110].

§ 4. OC*-Алгебры

Пусть A — C^*-алгебра с единицей, K — множество положительных эрмитовых элементов A, т. е. элементов вида $x = y^*y$, $y \in A$ (см. [12]). Известно, что множество K обладает следующими свойствами:

1) $K + K \subset K$;

2) если $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda K \subset K$;

3) $K \cap (-K) = \{0\}$,

т. е. K является собственным конусом. Если $x, y \in K$, $xy = yx$, то существуют элементы $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{y}\sqrt{x}$. Следовательно, $xy = (\sqrt{x}\sqrt{y})^* (\sqrt{x}\sqrt{y}) \geqslant 0$, т. е. $xy \in K$. Поэтому конус K определяет на A частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями в смысле определения 1 из § 2. Далее, любая максимальная коммутативная $*$-подалгебра $\hat{A}$ в A замкнута по норме и, по теореме Гельфанда — Наймарка, изоморфна алгебре всех непрерывных комплексных функций на компакте. Следовательно, вещественное линейное пространство $\hat{A}_h$ эрмитовых элементов $\hat{A}$ образует решетку, т. е. A удовлетворяет аксиоме (II) из определения O^*-алгебры. Поэтому любая C^*-алгебра, порядок на эрмитовой части которой удовлетворяет аксиоме (I) из определения 1, является O^*-алгеброй.

Определение. O^*-Алгебру назовем OC^*-алгеброй, если все ее элементы ограничены.

Из следствия к предложению 1 § 3 вытекает, что совокупность ограниченных элементов произвольной O^*-алгебры является OC^*-алгеброй.

Как показано выше, произвольная C^*-алгебра A с порядком, удовлетворяющим аксиоме (I) O^*-алгебры, является O^*-алгеброй. Кроме того, все элементы A ограничены, так как для любого $x \in A$

$$-\|x\|^2\mathbf{1} \leqslant x^*x \leqslant \|x\|^2\mathbf{1},$$

т. е. элемент x^*x (а значит, и элемент x) ограничен (см. п. 2 предложения 1 из § 3). Следовательно, любая C^*-алгебра со свойством (I) является OC^*-алгеброй. Следующая теорема показывает, что этим исчерпываются все OC^*-алгебры.

Теорема 1. В произвольной OC^*-алгебре A можно определить норму, относительно которой A является C^*-алгеброй.

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо построить норму $\|\cdot\|$ на A, обладающую следующими свойствами:

1) $\|\mathbf{1}\| = 1$;
2) $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$;
3) $\|x^*\| = \|x\|$;
4) $\|x^*x\| = \|x\|^2$;
5) $(A, \|\cdot\|)$ — банахово пространство.

Рассмотрим OJB-алгебру (относительно симметризованного умножения) A_h эрмитовых элементов OC^*-алгебры A. По теореме 1 из § 5 гл. III, A_h является банаховым пространством относительно нормы

$$\|a\|_1 = \inf\{\lambda \geqslant 0 : -\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}\}.$$

При этом $(A_h, \|\cdot\|_1)$ является JB-алгеброй и конус K положительных элементов A_h замкнут (см. теорему 1 из § 2 гл. III).

Пусть $x \in A$, $x \neq 0$ — произвольный элемент, $y = -x^*x$. Тогда $y \in K$. По теореме Хана — Банаха, на A_h существует непрерывный функционал φ, принимающий неотрицательные значения на K, для которого $\varphi(y) < 0$. Доопределим φ на A, полагая $\varphi(a+ib) = \varphi(a) + i\varphi(b)$, где $a, b \in A_h$. Тогда φ — линейный функционал на A, такой, что $\varphi(a^*a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$ и $\varphi(x^*x) = -\varphi(y) > 0$. Так как φ положителен, то для него верно неравенство Коши — Буняковского

$$|\varphi(a^*b)|^2 \leqslant \varphi(a^*a)\,\varphi(b^*b),$$

где $a, b \in A$. В частности,

$$0 < \varphi(x^*x)^2 \leqslant \varphi(1)\,\varphi(x^*xx^*x).$$

Следовательно, $\varphi(1) > 0$ и, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(1) = 1$, т. е. φ является состоянием на $*$-алгебре A.

Теперь построим представление алгебры A линейными операторами в гильбертовом пространстве по состоянию φ (конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала). Сначала построим гильбертово пространство. Рассмотрим на A билинейную форму

$$(x, y) = \varphi(y^*x).$$

Так как φ — положительный функционал, то $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ и, следовательно,

$$(y, x) = \overline{(x, y)},$$

т. е. форма эрмитова.

Пусть $J = \{x \in A : (x, x) = \varphi(x^*x) = 0\}$. Покажем, что J — линейное подпространство в A. Если $y \in J$, $x \in A$, то по неравенству Коши — Буняковского

$$|\varphi(xy)|^2 \leqslant \varphi(xx^*)\,\varphi(y^*y) = 0,$$

т. е. $\varphi(xy) = 0$.

Поэтому для любых $y_1, y_2 \in J$ имеем

$$\varphi\left((y_1+y_2)^*(y_1+y_2)\right) = \varphi\left(y_1^* y_1\right) + \varphi\left(y_1^* y_2\right) + \varphi\left(y_2^* y_1\right) + \\ + \varphi\left(y_2^* y_2\right) = 0,$$

т. е. $y_1 + y_2 \in J$.

Если $y \in J$, λ — комплексное число, то, очевидно, $\lambda y \in J$. Следовательно, J — линейное подпространство A. Кроме того, если $x \in A$, $y \in J$, то

$$\varphi((xy)^*(xy)) = \varphi(y^*x^*xy) = \varphi((y^*x^*x)\,y).$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского для $z = y^*x^*x$, получаем

$$|\varphi(zy)| \leqslant \varphi(zz^*)\,\varphi(y^*y) = 0,$$

т. е. $\varphi((xy)^*(xy)) = 0$, или $xy \in J$. Следовательно, J — левый идеал в A. Через D_φ обозначим фактор-пространство A/J, т. е. классы вычетов по J. Если ξ, η — элементы этого пространства, x, y — их представители, то полагаем

$$(\xi, \eta) = (x, y) = \varphi(y^*x).$$

Это выражение не зависит от выбора представителей x, y. В самом деле, если x' — другой представитель ξ, то $x' - x \in J$ и, как показано выше,

$$(x', y) - (x, y) = (x' - x, y) = \varphi(y^*(x' - x)) = 0.$$

Нетрудно видеть, что (ξ, η) обладает всеми свойствами скалярного произведения, т. е.

1) $(\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)}$;

2) $(\lambda\xi + \mu\eta, \zeta) = \lambda(\xi, \zeta) + \mu(\eta, \zeta)$;

3) $(\xi, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$.

Первые два свойства вытекают из соответствующих свойств (x, y) на A.

Очевидно, что $(\xi, \xi) = \varphi(x^*x) \geqslant 0$, так как φ — состояние (здесь x — представитель ξ). Если $(\xi, \xi) = 0$, то $\varphi(x^*x) = 0$, т. е. $x \in J$, поэтому $\xi = 0$.

Итак D_φ — предгильбертово пространство. Пополнение D_φ по данному скалярному произведению $\left(\text{т. е. по норме } \|\xi\|_\varphi = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{\varphi(x^*x)},\ x \in \xi\right)$ обозначим через H_φ.

Теперь построим представление A в гильбертовом пространстве H_φ. Пусть $\xi = \{x\}$ — какой-либо класс с представителем x. Обозначим через η класс $\{x_0x\}$ с представителем x_0x. Так как J — левый идеал, то η не зависит от выбора представителя x класса ξ. Положим

$$\Pi_\varphi[x_0](\xi) = \{x_0x\}$$

и получим линейный оператор $\Pi_\varphi[x_0]$ в пространстве D_φ, которое плотно в H_φ.

Докажем, что оператор $\Pi_\varphi[x]$ ограничен на D_φ для любого $x \in A$. Если $x, y \in A$, то

$$\|\Pi_\varphi[x]\{y\}\|_2^2 = \|\{xy\}\|_2^2 = \varphi(y^*x^*xy).$$

Так как $-\|x^*x\|\,\mathbf{1} \leqslant x^*x \leqslant \|x^*x\|\,\mathbf{1}$ (см. §§ 2, 5 гл. III), то $y^*x^*xy \leqslant \|x^*x\|_1 y^*y$. Следовательно, $|\varphi(y^*x^*xy)| \leqslant \|x^*x\|_1\varphi(y^*y) = \|x^*x\|_1 \|\{y\}\|_2^2$, т. е. $\|\Pi_\varphi[x]\{y\}\|_2 \leqslant \|\{y\}\|_2\sqrt{\|x^*x\|_1}$.

Таким образом, оператор $\Pi_\varphi[x]$ ограничен и поэтому его можно единственным образом продолжить до ограниченного оператора на всем H_φ. Отображение $x \to \Pi_\varphi[x]$ есть представление алгебры A. В самом деле,

$$\Pi_\varphi[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2](\xi) = \{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) x\} = \lambda_1 \{x_1 x\} + \lambda_2 \{x_2 x\} = \\ = \lambda_1 \Pi_\varphi[x_1](\xi) + \lambda_2 \Pi_\varphi[x_2](\xi),$$

т. е.

$$\Pi_\varphi[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \lambda_1 \Pi_\varphi[x_1] + \lambda_2 \Pi_\varphi[x_2].$$

Далее

$$\Pi_\varphi[x_1 x_2](\xi) = \{x_1 x_2 x\} = \Pi_\varphi[x_1](\{x_2 x\}) = \Pi_\varphi[x_1](\Pi_\varphi[x_2](\xi)),$$

т. е.

$$\Pi_\varphi[x_1 x_2] = \Pi_\varphi[x_1]\,\Pi_\varphi[x_2].$$

Осталось показать, что $\Pi_\varphi\left[x_0^*\right] = \Pi_\varphi[x_0]^*$, т. е.

$$(\Pi_\varphi[x_0](\xi),\ \eta) = \left(\xi,\ \Pi_\varphi\left[x_0^*\right]\eta\right).$$

Пусть $x \in \xi$, $y \in \eta$. Тогда

$$(\Pi_\varphi[x_0]\,\xi,\ \eta) = (x_0 x,\ y) = \varphi(y^* x_0 x),$$

$$\left(\xi,\ \Pi_\varphi\left[x_0^*\right]\eta\right) = \left(x,\ x_0^* y\right) = \varphi\left(\left(x_0^* y\right)^* x\right) = \varphi\left(y^* x_0 x\right),$$

т. е.

$$(\Pi_\varphi[x_0]\,\xi,\ \eta) = \left(\xi,\ \Pi_\varphi\left[x_0^*\right]\eta\right).$$

Следовательно, Π_φ является $*$-гомоморфизмом алгебры A в алгебру $B(H_\varphi)$ всех ограниченных линейных операторов в H_φ.

Рассмотрим семейство $\mathscr{F}$ всех состояний на алгебре A. Пусть $\Pi = \bigoplus\limits_{\varphi \in \mathscr{F}} \Pi_\varphi$ — прямая сумма всех представлений, построенных по состояниям. Тогда представление Π точное, т. е. его ядро $\ker \Pi = \{0\}$. В самом деле, если $x \in A$, $x \neq 0$, то существует $\varphi \in \mathscr{F}$, такое, что $\varphi(x^* x) > 0$. Следовательно, $\|\Pi_\varphi(x)[1]\|_2^2 = \varphi(x^* x) > 0$. Тогда $\Pi_\varphi(x) \neq 0$ и тем более $\Pi(x) = 0$.

Представление Π позволяет определить на A норму следующим образом: $\|x\| = \|\Pi(x)\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в $H = \bigoplus\limits_{\varphi \in \mathscr{F}} H_\varphi$. Покажем, что $\|\cdot\|$ является C^*-нормой на алгебре A. Поскольку норма в $B(H)$ является C^*-нормой и Π — $*$-гомоморфизм A в $B(H)$, то норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет условиям 1)—4) C^*-нормы. Поэтому осталось доказать, что $(A,\ \|\cdot\|)$ полно. Для этого достаточно показать, что $(A_h,\ \|\cdot\|)$ полно. В силу полноты A_h в норме $\|\cdot\|_1$ достаточно показать, что $\|x\|_1 = \|x\|$ для любого $x \in A_h$.

Пусть $\hat{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра, содержащая x. Тогда $\left(\hat{A}_h, \|\cdot\|_1\right)$ является ассоциативной JB-алгеброй, т. е. $\left(\hat{A}_h, \|\cdot\|_1\right)$ изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на компакте X (см. теорему 2 из § 2 гл. III) и для $x(t) \in C(X)$

$$\|x\|_1 = \|x(t)\|_1 = \max_{t \in X} |x(t)| = \inf\{\lambda \geqslant 0 : -\lambda \mathbf{1} \leqslant x \leqslant \lambda \mathbf{1}\}.$$

Следовательно, на $\left(\hat{A}_h, \|\cdot\|_1\right) = C(X)$ норма $\|\cdot\|_1$ совпадает с C^*-нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in X} |x(t)|$. Поскольку точное представление Π C^*-алгебры сохраняет C^*-норму, то $\|\Pi(x)\| = \|x\|_1$, т. е. $\|x\| = \|x\|_1$ для всех $x \in A_h$. ■

Следствие. Множество B всех ограниченных элементов из O^*-алгебры является AW^*-алгеброй, т. е. OC^*-алгебра всегда есть AW^*-алгебра.

Доказательство. Если $S \subset B$ и $R(S)$ — правый аннулятор множества S в B, то в силу предложения 3 из § 2 $R(S)$ — $\perp$-правильный правый идеал в B. Поэтому существует такой проектор $e \in B$, что $R(S) = eB$ (см. теорему 3 из § 3). Следовательно, B есть бэровская $*$-алгебра, являющаяся одновременно C^*-алгеброй (теорема 1), т. е. B — AW^*-алгебра. ■

Библиография: [40, 110].

§ 5. Дискретные O*-алгебры

Пусть E — O^*-алгебра, ∇ — логика всех проекторов в E.

Определение. Если ∇ — дискретная (непрерывная) логика, то E называется дискретной (непрерывной) O^*-алгеброй.

Примеры. 1. Если Δ — некоторое множество и $E = \mathbf{C}^\Delta$ — прямое произведение Δ экземпляров полей комплексных чисел $\mathbf{C}$, то E является коммутативной дискретной O^*-алгеброй. Эрмитовой частью E является полуполе R^Δ. Проекторы — это функции, принимающие значения 0 или 1. Каждому $q \in \Delta$ соответствует атом e_q, где

$$e_q(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq q, \\ 1 & \text{при } p = q. \end{cases}$$

Очевидно, что всякий проектор мажорирует некоторый атом.

Наоборот, пусть E — коммутативная дискретная O^*-алгебра. Тогда E_h — дискретное полуполе. Поэтому E_h изоморфна заполненному подполуполю полуполя R^Δ, где Δ — множество атомов в E. Следовательно, E изоморфно заполненной O^*-подалгебре в $\mathbf{C}^\Delta$.

2. Пусть E — O^*-алгебра всех комплексных измеримых функций на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега (эквивалентные функции отождествляются). Тогда E, очевидно, является коммутативной непрерывной O^*-алгеброй.

3. Пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Ясно, что $B(H)$ — некоммутативная дискретная O^*-алгебра, причем центр $B(H)$ тривиален, т. е. состоит из операторов вида $\{\lambda \mathbf{1}\}$, где $\lambda \in C$, $\mathbf{1}$ — тождественный оператор.

Следующая теорема показывает, что примером 3 исчерпываются все дискретные O^*-алгебры с тривиальным центром.

Теорема 1. Пусть E — O^*-алгебра с тривиальным центром. Если алгебра E содержит хотя бы один атом, то E изоморфна алгебре $B(H)$, где H — некоторое гильбертово пространство. В частности, алгебра E дискретна и все элементы E ограничены (т. е. E — OC^*-алгебра).

Доказательство. Сначала установим, что E является дискретной O^*-алгеброй. Пусть h — произвольный ненулевой проектор из E. По условию в E существует атом e_0. Поскольку центр в E тривиален, то по следствию 2 к предложению 3 из § 3 существуют такие ненулевые проекторы e, g, что $e \leqslant h$, $g \leqslant e_0$ и $e \sim g$. Поскольку проектор e_0 является атомом, то $g = e_0$.

Пусть v — частичная изометрия (см. § 1), для которой $v^* v = e_0$ и $vv^* = e$.

Докажем, что проектор e является атомом. Предположим противное, т. е. что $e = e_1 + e_2$, где $e_1, e_2 \in \nabla$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, $e_1 \perp e_2$. Положим $v_1 = e_1 v$. Тогда $v_1 v_1^* = e_1 v v^* e_1 = e_1 e e_1 = e_1$. Следовательно, элемент v_1 является частичной изометрией и поэтому $g_1 = v_1^* v_1$ является проектором. Так как $v^* v = e_0$, то $v^* e = v^* v v^* = e_0 v^*$. Поэтому $g_1 = v_1^* v_1 = (e_1 v)^* (e_1 v) = v^* e_1 e_1 v = v^* e_1 v =$
$$= v^* e e_1 e v = e_0 v^* e_1 (e_0 v^*)^* = e_0 v^* e_1 v e_0 = e_0 (e_1 v)^* (e_1 v) e_0 =$$
$= e_0 v_1^* v_1 e_0 = e_0 g_1 e_0$, т. е. $g_1 \leqslant e_0$ и так как $v_1 \neq 0$, то $g_1 \neq 0$. Аналогично, если $v_2 = e_2 v$, $g_2 = v_2^* v_2$, то g_2 — ненулевой проектор и $g_2 \leqslant e_0$. Кроме того,
$$g_1 g_2 = v_1^* v_1 v_2^* v_2 = v^* e_1 e_1 v v^* e_2 e_2 v = v^* e_1 v v^* e_2 v = v^* e_1 e e_2 v =$$
$$= v^* e_1 e_2 v = 0,$$
так как $e_1 e_2 = 0$, $e_1 \leqslant e$, $e_2 \leqslant e$.

Итак, $g_1 \perp g_2$. Это противоречит тому, что e_0 — атом. Следовательно, e — атом.

Таким образом, алгебра E дискретна. Кроме того, мы установили, что если h ненулевой проектор в E, то существуют частично изометрический элемент v и атом e, такие, что $e \leqslant h$,

$e = vv^*$, $v^*v = e_0$, где e_0 — фиксированный атом. Отсюда, в частности, вытекает, что существуют семейство атомов $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и семейство частично изометрических элементов $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$, обладающие следующими свойствами:

1) $e_\alpha \perp e_{\alpha'}$, если $\alpha \neq \alpha'$ и $e_0 \perp e_\alpha$ для всех $\alpha \in A$;

2) $e_0 \vee (\sup e_\alpha) = 1$;

3) $v_\alpha v_\alpha^* = e_\alpha$, $v_\alpha^* v_\alpha = e_0$ для всех $\alpha \in A$.

Пусть A — OC^*-алгебра всех ограниченных элементов алгебры E. Так как проектор e_0 — атом, то O^*-алгебра e_0Ae_0 содержит всего два проектора — 0 и e_0. Следовательно, $e_0Ae_0 = \{\lambda e_0, \lambda \in C\}$. Поэтому для любого $x \in A$ существует единственное комплексное число $\varphi(x)$, такое, что $e_0xe_0 = \varphi(x)e_0$. Кроме того, очевидно, что $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для всех $\lambda \in C$, $\varphi(1) = \varphi(e_0) = 1$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, если $x \geqslant 0$, т. е. φ — состояние на C^*-алгебре A.

Покажем, что φ является чистым состоянием. Предположим, что $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, где $0 < \lambda < 1$, φ_1, φ_2 — состояния на A. Так как $\varphi_1(e_0^\perp) \geqslant 0$, $\varphi_2(e_0^\perp) \geqslant 0$, $\varphi(e_0^\perp) = 0$, то $\varphi_1(e_0^\perp) = \varphi_2(e_0^\perp) = 0$. Если $y \in A$, то в силу неравенства Коши-Буняковского $|\varphi_1(e_0^\perp y)|^2 \leqslant \varphi_1(e_0^\perp)\varphi_1(y^*y) = 0$, т. е. $\varphi_1(e_0^\perp y) = 0$. Аналогично $\varphi_1(ye_0^\perp) = 0$. Точно так же $\varphi_2(e_0^\perp y) = \varphi_2(ye_0^\perp) = 0$. Тогда для любого $x \in A$ из тождества

$$x = e_0xe_0 + e_0xe_0^\perp + e_0^\perp xe_0 + e_0^\perp xe_0^\perp$$

вытекает, что $\varphi_1(x) = \varphi_1(e_0xe_0)$, $\varphi_2(x) = \varphi_2(e_0xe_0)$. По определению, $e_0xe_0 = \varphi(x)e_0$, значит, $\varphi_1(x) = \varphi(x)\varphi_1(e_0)$, $\varphi_2(x) = \varphi(x)\varphi_2(e_0)$. Однако $1 = \varphi_1(1) = \varphi(1)\varphi_1(e_0) = \varphi_1(e_0)$, $1 = \varphi_2(1) = \varphi(1)\varphi_2(e_0) = \varphi_2(e_0)$, т. е. $\varphi_1(e_0) = \varphi_2(e_0) = 1$. Поэтому $\varphi_1(x) = \varphi(x) = \varphi_2(x)$, т. е. φ — чистое состояние.

Пусть Π — представление C^*-алгебры A на гильбертовом пространстве H, построенное по конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала по состоянию φ (см. § 4). Покажем, что Π является точным, т. е. $\ker \Pi = \{0\}$. Предположим, что существует такой элемент $a \in A$, что $a \neq 0$ и $\Pi[a] = 0$ и пусть $b = a^*a$. Тогда $b \geqslant 0$, $b \neq 0$, $\Pi[b] = \Pi[a^*]\Pi[a] = 0$. Поэтому существует элемент $c \in A$, такой, что $cb = h$ — ненулевой проектор.

Как показано выше, существуют частичная изометрия $v \in A$ и атом e, такие, что $e \leqslant h$, $e = vv^*$, $v^*v = e_0$. Тогда, с одной стороны,

$$\Pi[e] = \Pi[eh] = \Pi[e]\Pi[c]\Pi[b] = 0,$$

а с другой,

$$\|\Pi[e]\{v\}\|_2^2 = \|\{ev\}\|_2^2 = \varphi((ev)^*(ev)) =$$

$$= \varphi(v^* e v) = \varphi(v^* v v^* v) = \varphi(e_0^2) = \varphi(e_0) = 1,$$

где $\{v\}$ — класс эквивалентности, содержащий элемент v, $\|\cdot\|_2$ — норма в H (см. § 4). Полученное противоречие показывает, что $\ker \Pi = \{0\}$.

Теперь установим, что $\Pi[A] = B(H)$, т. е. Π является $*$-изоморфизмом алгебры A на алгебру всех ограниченных линейных операторов на H.

Положим $q_0 = \Pi[e_0]$, $q_\alpha = \Pi[e_\alpha]$, где $\{e_\alpha\}$ — семейство атомов, построенное выше. Тогда q_0, $\{q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — система попарно ортогональных проекторов в H. Для каждого конечного множества индексов $S \subset I = A \cup \{0\}$ положим

$$g_s = \sup_{i \in S} e_i, \ p_s = \bigoplus_{i \in S} q_i = \Pi[g_s].$$

Тогда для любого $a \in A$ имеем

$$\|\{a\}\|_2^2 = \varphi(a^* a), \ \sum_{i \in I} \|q_i(\{a\})\|_2^2 = \lim_s \varphi(a^* g_s^* g_s a) =$$

$$= \lim_s \varphi(a^* g_s a) = \lim_s \|p_s(\{a\})\|_2^2.$$

Так как $\sup_s g_s = 1$, то

$$\sup_s \{\varphi(a^* g_s a) e_0\} = \sup_s \{e_0 a^* g_s a e_0\} =$$

$$= e_0 a^* a e_0 = \varphi(a^* a) e_0.$$

Поэтому

$$\sup_s \{\varphi(a^* g_s a)\} = \varphi(a^* a).$$

Следовательно, $\|\{a\}\|_2^2 = \sum_{i \in I} \|q_i(\{a\})\|_2^2$ для любого $a \in A$. Так как H является пополнением A/J по норме $\|\cdot\|_2$ (см. § 4), т. е. множество векторов вида $\{a\}$, $a \in A$ плотно в H, то

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{i \in I} \|q_i(\xi)\|_2^2$$

для любого $\xi \in H$. Следовательно, $\bigoplus_{i \in I} q_i = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — тождественный оператор в H.

Пусть $B = \Pi[A]$. Так как A — C^*-алгебра (и, значит, полна по C^*-норме), то B — замкнутая по C^*-норме $*$-подалгебра в $B(H)$. Поскольку состояние φ чистое, то представление Π неприводимо (см. [59], с. 49). Следовательно, B — сильно плотная $*$-подалгебра в $B(H)$ (см. [59], с. 41). Тогда для каждого $i \in I$ $q_i B q_i$ — сильно плотная $*$-подалгебра $B(q_i(H))$.

Имеем $q_i B q_i = \Pi[e_i] \Pi[A] \Pi[e_i] = \Pi[e_i A e_i] = \{\lambda \Pi[e_i], \lambda \in C\} = \{\lambda q_i, \lambda \in C\}$, поскольку каждый проектор e_i является атомом в

O^*-алгебре A. Следовательно, каждое подпространство $q_i(H)$ является одномерным.

Выберем в каждом подпространстве $q_i(H)$ по единичному вектору ξ_i, $i \in I$. Тогда система векторов $\{\xi_i\}_{i \in I}$ образует ортонормированный базис в H. Для любого конечного набора индексов $i_1, \ldots, i_n \in I$ через $H_{i_1, \ldots, i_n}$ обозначим конечномерное подпространство H, порожденное векторами $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$, через $B_{i_1, \ldots, i_n}$ — алгебру линейных операторов в $H_{i_1, \ldots, i_n}$, являющихся сужениями таких операторов из B, которые оставляют подпространство $H_{i_1, \ldots, i_n}$ инвариантным.

Пусть $w_i = \Pi[v_i]$, $w_{ij} = w_i w_j^*$, где $i, j \in \mathbf{A}$. Тогда w_{ij} — частичная изометрия с начальной областью $q_i(H)$ и конечной $q_j(H)$. Поэтому $B_{i_1, \ldots, i_n}$ есть алгебра операторов в конечномерном пространстве, содержащая частично изометрические операторы, переставляющие между собой любые два вектора базиса. Следовательно, $B_{i_1, \ldots, i_n} = B(H_{i_1, \ldots, i_n})$. Отсюда, в свою очередь, следует, что если вектор ξ является конечной линейной комбинацией векторов базиса $\{\xi_i\}_{i \in I}$, то $P_\xi \in B$, где ξ —проектор на одномерное подпространство в H, порожденное вектором ξ. Пусть $\xi \in H$. Существует последовательность векторов $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H, каждый из которых является конечной линейной комбинацией векторов базиса $\{\xi_i\}_{i \in I}$, сходящаяся к вектору ξ по норме. Тогда последовательность $\{P_{\eta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к P_ξ по норме оператора. Согласно доказанному, $\{P_{\eta_n}\} \subset B$ и B является замкнутой по норме подалгеброй в $B(H)$. Следовательно, $P_\xi \in B$. Таким образом, алгебра B содержит все одномерные проекторы в H. Пусть p — произвольный проектор в H. Тогда $P = \bigoplus\limits_{j \in J} P_j$, где P_j — одномерные проекторы. Согласно доказанному, $P_j \in B$ для всех $j \in J$. Так как Π — точное представление, то в A существует система попарно ортогональных проекторов $\{S_j\}$, таких, что $\Pi(S_j) = P_j$. Пусть $S = \sup S_j$, $q = \Pi[S]$. Поскольку $S \geqslant S_j$ для всех $j \in J$, то $\Pi[S] \geqslant \Pi[S_j]$. Следовательно, $q \geqslant p$. Предположим, что $q \neq p$. Тогда существует одномерный проектор q' в H, ортогональный p и такой, что $q' \leqslant q$. Однако в этом случае, согласно доказанному, в A существует проектор S', ортогональный к каждому из проекторов S_j и такой, что $S' \leqslant S$, $S' \neq 0$. Это противоречит тому, что $S = \sup\limits_{j \in J} S_j$. Следовательно, $q = p$ и $p \in B$. Итак, B — замкнутая по норме $*$-подалгебра $B(H)$, содержащая все проекторы в H. Таким образом, $B = B(H)$, т. е. Π — $*$-изоморфизм A на $B(H)$.

Осталось показать, что $E=A$, т. е. что в E не существует неограниченных элементов. Предположим, что a — неограниченный элемент, тогда $b=a^*a$ является положительным неограниченным элементом E. Пусть $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента b. Тогда $e_\lambda=0$ при $\lambda\leqslant 0$ и $e_\lambda\neq 1$ для любого $\lambda>0$. Рассмотрим спектральное семейство $\{\Pi[e_\lambda]\}$ проекторов в H. Самосопряженный оператор $c=\int\limits_0^{+\infty}\lambda d\Pi[e_\lambda]$ является положительным и неограниченным, так как $\Pi[e_\lambda]\neq 1$ для всех $\lambda>0$.

Пусть $b_n=\int\limits_0^n\lambda de_\lambda$, $c_n=\int\limits_0^n\lambda d\Pi[e_\lambda]$, где $n=1,\ 2,\dots$. Тогда $b_n\in A$, $c_n=\Pi[b_n]$.

Выберем произвольный единичный вектор $\xi\in H$. Согласно доказанному, в A существует атом e, такой, что $\Pi(e)=P_\xi$. Поскольку e — атом, то $eEe=\{\lambda e,\ \lambda\in\boldsymbol{C}\}$. Следовательно, $ebe=\mu e$, где $\mu>0$. Так как $b_n\leqslant b$, то $eb_ne\leqslant ebe=\mu e$, т. е. $eb_ne\leqslant\mu e$ для всех $n=1,\ 2,\dots$. Отсюда вытекает, что

$$P_\xi c_n P_\xi\leqslant\mu P_\xi.$$

В частности, $(c_n\xi,\ \xi)=(c_nP_\xi(\xi),\ P_\xi(\xi))=((P_\xi^*c_nP_\xi)(\xi),\ \xi)\leqslant\leqslant\mu(P_\xi\xi,\ \xi)=\mu(\xi,\ \xi)=\mu$, т. е. $(c_n\xi,\ \xi)\leqslant\mu$ для всех $n=1,2,\dots$, где μ зависит только от ξ. Последнее неравенство перепишем в виде

$$\int\limits_0^n\lambda d\,\|\Pi[e_\lambda]\xi\|^2\leqslant\mu,$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty\lambda d\,\|\Pi[e_\lambda]\xi\|^2<+\infty.$$

Следовательно, вектор ξ принадлежит области определения оператора $\sqrt{c}$ ([85], с. 337). Так как вектор ξ был выбран произвольно, то оператор $\sqrt{c}$ определен на всем пространстве H. Следовательно, оператор $\sqrt{c}$ ограничен, но тогда ограничен и оператор c. Полученное противоречие показывает, что $E=A=B(H)$.

Следствие. Пусть E — O^*-алгебра, $Z(\nabla)$ — булева алгебра центральных проекторов из E. Алгебра E является дискретной в том и только в том случае, когда каждый ненулевой проектор из $Z(\nabla)$ мажорирует некоторый атом в E. В этом случае $Z(\nabla)$ — дискретная булева алгебра и O^*-алгебра E $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре произведения $\prod\limits_{i\in\Delta}B(H_i)$, где Δ — множество всех атомов булевой алгебры $Z(\nabla)$, H_i — некоторые гильбертовы пространства.

Доказательство. Если E — дискретная O^*-алгебра, то любой ненулевой проектор (в частности, центральный) мажорирует некоторый атом. Наоборот, пусть любой ненулевой центральный проектор мажорирует некоторый атом, а $z(e)$ — центральный носитель e. По предположению, существует атом $q \leqslant z(e)$. В силу следствия 1 к предложению 3 из § 3 найдутся ненулевые проекторы $e_1 \leqslant e$ и $q_1 \leqslant q$, такие, что $e_1 \sim q_1$. Так как q — атом, то $q_1 = q$ и e_1 — также атом (см. доказательство теоремы 1). Поэтому любой проектор e мажорирует некоторый атом, т. е. E — дискретная O^*-алгебра.

Пусть теперь E — дискретная O^*-алгебра, e — атом в E. Покажем, что $z(e)$ — атом в булевой алгебре $Z(\nabla)$. Если z — ненулевой центральный проектор из E и $z \leqslant z(e)$, то $ez \neq 0$. Так как e — атом, то $ez = e$ и потому $z = z(e)$. Следовательно, $z(e)$ — атом в $Z(\nabla)$.

Если z — произвольный ненулевой центральный проектор, то существует атом e, такой, что $e \leqslant z$, но тогда z мажорирует проектор $z(e)$, который, согласно доказанному, является атомом в булевой алгебре $Z(\nabla)$. Таким образом, $Z(\nabla)$ — дискретная булева алгебра.

Пусть Δ — совокупность всех атомов булевой алгебры $Z(\nabla)$. Если $z_1, z_2 \in \Delta$, то $z_1 \perp z_2$. Кроме того, $\sup \Delta = \mathbf{1}$. Как показано в конце § 3, O^*-алгебра E $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре произведения $\prod\limits_{z \in \Delta} zE$. Из предложения 4 § 3 следует, что O^*-алгебра zE имеет тривиальный центр. Поскольку E — дискретная O^*-алгебра, то дискретна также алгебра zE. По доказанной теореме, O^*-алгебра zE $*$-изоморфна алгебре $B(H_z)$, где H_z — некоторое гильбертово пространство. ■

Покажем теперь, что любая O^*-алгебра представима в виде прямого произведения дискретной и непрерывной O^*-алгебр.

Предложение 1. Пусть ∇ — логика проекторов в O^*-алгебре E. Тогда существует такой центральный проектор z_0, что $z_0\nabla$ — дискретная логика, а $z_0^\perp \nabla$ — непрерывная логика.

Доказательство. Обозначим через Δ совокупность всех атомов в ∇. Если $\Delta = \{\varnothing\}$, то ∇ — непрерывная логика и в этом случае $z_0 = 0$. Пусть $\Delta \neq \varnothing$ и $z_0 = \vee \Delta$. Для каждого унитарного элемента $u \in E$ преобразование $e \to u^*eu$ есть изоморфизм логики ∇. Поэтому

$$u^*z_0u = \vee \{ u^*qu : q \in \Delta \},$$

но $u^*qu \in \Delta$ для каждого $q \in \Delta$ (так как изоморфизм логики переводит атомы в атомы). Следовательно,

$$u^*z_0u \leqslant \vee \Delta = z_0.$$

Отсюда $z_0 = u(u^*z_0u)u^* \leqslant uz_0u^*$ для любого унитарного элемента u. Поэтому $z_0 = u^*z_0u$ для всех унитарных элементов $u \in E$, т. е. z_0 — центральный проектор. Очевидно, что $z_0^{\perp}\nabla = \{e \in \nabla : e \leqslant \leqslant z_0^{\perp}\}$ — непрерывная логика. Покажем, что $z_0\nabla$ — дискретная логика. Пусть $g \in z_0\nabla$, $g \neq 0$ и $z(g)$ — центральный носитель g. Тогда $z(g) \leqslant z_0 = \sup\{z(q) : q \in \Delta\}$. Поэтому найдется такое $q_0 \in \Delta$, что $z(g)z(q_0) \neq 0$ Следовательно, существуют такие ненулевые проекторы $g_1 \leqslant g$ и $q_1 \leqslant q_0$, что $g_1 \sim q_1$. Так как q_0 — атом, то $q_1 = q_0$ и g_1 — также атом. Это означает, что $z_0\nabla$ — дискретная логика. ∎

Следствие. Пусть E — произвольная O^*-алгебра. Тогда E изоморфно прямому произведению $E_1 \times E_2$, где E_1 — дискретная, а E_2 — непрерывная O^*-алгебра.

Доказательство. Положим $E_1 = z_0E$, $E_2 = z_0^{\perp}E$, где z_0 — центральный проектор в E, построенный при доказательстве предложения 1. Тогда, очевидно, $E = E_1 \times E_2$. Логика проекторов в E_1 совпадает с логикой $z_0\nabla$, где ∇ — логика проекторов в E. Следовательно, E_1 — дискретная O^*-алгебра. Аналогично, E_2 — непрерывная O^*-алгебра.

Библиография: [59, 85, 110, 150].

§ 6. O^*-Алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана

В этом параграфе строится пример некоммутативной O^*-алгебры, содержащей неограниченные элементы. Вначале приводятся некоторые результаты из теории замкнутых операторов. Доказательства этих результатов можно найти в [85].

Пусть H — гильбертово пространство, T, S — линейные операторы, действующие в H, и $D(T)$, $D(S)$ — их области определения (всюду в дальнейшем предполагается, что область определения — линейное подпространство в H). Оператор $S+T$ (соответственно ST) определяется равенством $(S+T)\xi = S\xi + T\xi$ $((ST)\xi = S(T\xi))$ и имеет область определения $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$ (соответственно $D(ST) = \{\xi \in D(T) : T\xi \in D(S)\}$). Оператор T называется замкнутым, если его график $\Gamma(T) = \{(\xi, T\xi) \in H \times H : \xi \in D(T)\}$ замкнут в $H \times H$. Очевидно, что всякий ограниченный оператор в H является замкнутым.

Если T — не замкнутый оператор, но замыкание $\overline{\Gamma(T)}$ его графика в $H \times H$ есть график некоторого линейного оператора S, то говорят, что T допускает замыкание, а оператор S называется замыканием оператора T и обозначается $\overline{T}$.

Оператор S называют расширением оператора T, а оператор T — сужением оператора S, если $D(T) \subset D(S)$ и $T\xi = S\xi$ для всех $\xi \in D(T)$. В этом случае пишут $T \subset S$.

Если T допускает замыкание $\overline{T}$, то $\overline{T}$ есть расширение оператора T.

Пусть T — произвольный оператор в H, область определения которого плотна в H. Обозначим через D^* множество всех таких $\eta \in H$, для которых существует такое $\zeta \in H$, что $(T\xi, \eta) = (\xi, \zeta)$ для всех $\xi \in D(T)$. Оператор T^*, действующий в H, определенный по формуле $T^*\eta = \zeta$, $\eta \in D^*$, называется сопряженным к оператору T. Ясно, что сопряженный оператор всегда линеен. График оператора T^* есть ортогональное дополнение в $H \times H$ множества всех пар $\{iT\xi, -i\xi\}$, $\xi \in D(T)$ (см. [85], с. 126), поэтому T^* – замкнутый линейный оператор.

Теорема 1 ([85], с. 127). Если линейный оператор T с плотной областью определения допускает замыкание $\overline{T}$, то $T^* = \overline{T}^*$, $D(T^*)$ плотно в H и $T^{**} = \overline{T}$. В частности, если оператор T замкнут, то $T^{**} = T$.

Линейный оператор T с плотной областью определения называется симметрическим, если $(T\xi, \eta) = (\xi, T\eta)$ для всех $\xi, \eta \in D(T)$. Так как T^* — замкнутый оператор, то симметрический оператор всегда допускает замыкание.

Оператор T в H, для которого $\overline{D(T)} = H$ и $T = T^*$, называют самосопряженным. Из этого определения следует, что самосопряженный оператор замкнут.

Оператор T в H называется положительно определенным, если $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in D(T)$.

Теорема 2 ([85], с. 129). Если T — замкнутый линейный оператор в H, $\overline{D(T)} = H$, то T^*T — положительно определенный самосопряженный оператор в H.

Говорят, что оператор $\mathbf{A}$ из $*$-алгебры $B(H)$ всех ограниченных операторов в H коммутирует с оператором T, действующим в H, если $\mathbf{A}T \subset T\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{A}\big(D(T)\big) \subset D(T)$ и $\mathbf{A}T\xi = T\mathbf{A}\xi$ для всех $\xi \in D(T)$.

Важную роль в теории самосопряженных операторов играет спектральная теорема.

Теорема 3 ([85], с. 298). Для всякого самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве H существует единственная операторная функция $P(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающая следующими свойствами:

1) $P(\lambda)$ — проектор из $B(H)$;
2) $P(\lambda)P(\mu) = P(\lambda)$ при $\lambda \leqslant \mu$;
3) $P(\lambda)$ коммутирует с каждым $\mathbf{A}$ из $B(H)$, коммутирующим с T;
4) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P(\lambda)\xi = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P(\lambda)\xi = \xi$ для любого $\xi \in H$;
5) $P(\lambda)\xi$ — непрерывная слева функция при любом $\xi \in H$;
6) $\xi \in D(T)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \, d\, \| P(\lambda)\xi \|^2 < \infty,$$

и в этом случае

$$T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP(\lambda)\,\xi. \qquad (1)$$

Семейство $\{P(\lambda)\}$ из теоремы 3 называется спектральным семейством проекторов для T, а формула (1) — спектральным разложением для этого оператора.

Из теоремы 3, в частности, следует, что для любого положительно определенного самосопряженного оператора T существует единственный положительно определенный самосопряженный оператор S, такой, что $S^2 = T$ $\left(\text{достаточно взять } D(S) = \left\{\xi \in H : \right.\right.$ $\left.\left. : \int_0^{\infty} \lambda d\|P(\lambda)\xi\|^2 < \infty\right\} \text{ и положить } S\xi = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda)\,\xi\right)$. Для оператора S используется обозначение $\sqrt{T}$. Из построения $\sqrt{T}$ вытекает, что он коммутирует со всяким оператором из $B(H)$, коммутирующим с T.

Теорема 4 ([85], с. 337). Всякий замкнутый линейный оператор T в H с плотной областью определения представим в виде

$$T = US,$$

где S — самосопряженный оператор в H с областью определения $D(S) = D(T)$, а U — частичная изометрия из $B(H)$, для которой U^*U есть проектор на $\overline{T^*(H)}$, а UU^* — проектор на $\overline{T(H)}$. Операторы U и S определяются этими условиями единственным образом, при этом $S = \sqrt{T^*T} = |T|$.

Полученное представление $T = U|T|$ называют полярным разложением оператора T.

Введем теперь, следуя [120], понятие оператора, измеримого относительно алгебры фон Неймана. Пусть B — произвольная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Линейное подпространство D из H называется присоединенным к B (обозначение $D\eta B$), если $U(D) \subset D$ для каждого унитарного оператора $U \in B'$, Если D — замкнутое подпространство в H и P — проектор на D, то $D\eta B$ в том и только в том случае, когда $P \in B$.

Определение. Линейное подпространство D гильбертова пространства H называется сильно плотным в H относительно алгебры фон Неймана B, если

1) $D\eta B$;

2) существует такая последовательность проекторов $\{P_n\} \subset B$, что $P_n \uparrow \mathbf{1}$, $P_n(H) \subset D$ и $P_n^{\perp} = (\mathbf{1} - P_n)$ — конечный проектор для $n = 1, 2, \ldots$ (в этом случае говорят, что множество D определено последовательностью $\{P_n\}$).

Ясно, что сильно плотное множество в H является всюду плотным в H.

Оператор T в H называется присоединенным к B (обозначение $T\eta B$), если T коммутирует с каждым унитарным оператором U из B'. Очевидно, что ограниченный оператор T присоединен к B в том и только в том случае, когда $T \in B$. Если T — самосопряженный оператор в H, $T\eta B$ и $\{P(\lambda)\}$ — спектральное разложение T, то $P(\lambda) \in B$ для всех λ (см, теорему 3).

Оператор T в H называется измеримым относительно B, если

1) $T\eta B$;

2) область определения $D(T)$ оператора T сильно плотна в H;

3) оператор T замкнут.

Оператор T в H называется в существенном измеримым оператором относительно алгебры фон Неймана B, если

1) $T\eta B$;

2) существует такая последовательность проекторов $\{P_n\} \subset B$, что $P_n \uparrow \mathbf{1}$, $P_n(H) \subset D(T)$, $P_n^{\perp}$ — конечен и $TP_n \in B(H)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$;

3) оператор T допускает замыкание.

В обоих случаях говорят, что оператор T сильно определен на $\{P_n\}$.

Если T — измеримый оператор, сильно определенный на $\{P_n\}$, то график оператора TP_n замкнут в $H \times H$. Поэтому из теоремы о замкнутом графике [97] следует, что $TP_n \in B(H)$. Таким образом, каждый измеримый оператор является в существенном измеримым оператором.

Обратно, если T — в существенном измеримый оператор относительно B, то его замыкание $\bar{T}$ будет измеримым оператором относительно B.

Если B — коммутативная алгебра фон Неймана, то она $*$-изоморфна $*$-алгебре $L_\infty(\Omega, \mu)$ всех ограниченных измеримых комплексных функций на некотором локализуемом пространстве с мерой (Ω, μ) (см. §1). В этом случае B можно отождествить с коммутативной алгеброй фон Неймана мультипликаторов T_f, действующей в $H = L_2(\Omega, \mu)$, где $(T_f g)(x) = f(x)\, g(x)$, $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$, $g \in H$ (см. [120]). Понятие измеримого оператора в этой ситуации, по существу, эквивалентно понятию измеримой функции. Более точно (см. [120]) оператор T в $H = L_2(\Omega, \mu)$ измерим относительно B в том и только в том случае, если он имеет вид $(Tg)(x) = f(x)\, g(x)$, где $g \in H$, $f(x)$ — некоторая измеримая функция на (Ω, μ) (область определения оператора T состоит из всех $g \in H$, для которых $fg \in H$).

Предложение 1. Пусть T—в существенном измеримый оператор относительно алгебры фон Неймана B, D — сильно плотное относительно B подпространство в H и $T^{-1}(D) = \{\xi \in D(T) : T\xi \in D\}$. Тогда $T^{-1}(D)$ — снльно плотно относительно B в H.

Доказательство. Пусть T сильно определен на $\{P_n\}$, а D определено последовательностью R_n. Оператор $T_n = TP_n$ принадлежит B. Положим $Q_n = 1 - r\left(R_n^\perp T_n\right)$, где $r\left\{R_n^\perp T\right)$ — правый носитель оператора $R_n^\perp T_n$ в B. Имеем

$$T_n Q_n = R_n T_n Q_n + R_n^\perp T_n Q_n = R_n T_n Q_n,$$

и так как левый $l(S)$ и правый $r(S)$ проекторы эквивалентны для любого $S \in B$, то

$$Q_n^\perp = r\left(R_n^\perp T_n\right) \sim l\left(R_n^\perp T_n\right) \leqslant R_n^\perp,$$

т. е. $Q_n^\perp \lesssim R_n^\perp$.

Положим $L_n = Q_n \wedge P_n$. Тогда

$$R_{n+1}^\perp T_{n+1} L_n = R_{n+1}^\perp R_n^\perp T_{n+1} P_n L_n = R_{n+1}^\perp R_n^\perp T_n Q_n L_n =$$

$$= R_{n+1}^\perp R_n^\perp R_n T_n L_n = 0,$$

т. е. $L_n \leqslant 1 - r\left(R_{n+1}^\perp T_{n+1}\right) = Q_{n+1}$. Так как $L_n \leqslant P_n \leqslant P_{n+1}$, то $L_n \leqslant L_{n+1}$. Следовательно, последовательность проекторов $\{L_n\}$ возрастает. Обозначим через D размерностную функцию на логике всех проекторов алгебры фон Неймана B (см. §1). Тогда $D\left(L_n^\perp\right)$ убывает и

$$D\left(L_n^\perp\right) \leqslant D\left(Q_n^\perp\right) + D\left(P_n^\perp\right) \leqslant D\left(R_n^\perp\right) + D\left(P_n^\perp\right).$$

Но $P_n^\perp$, $R_n^\perp$ — конечные проекторы и $P_n^\perp \downarrow 0$, $R_n^\perp \downarrow 0$. Следовательно, $D\left(P_n^\perp\right) \downarrow 0$ и $D\left(R_n^\perp\right) \downarrow 0$ (сходимость измеримых функций $D\left(P_n^\perp\right)$ понимается как сходимость почти всюду (см. §1)). Поэтому $D\left(L_n^\perp\right) \downarrow 0$, откуда $D\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n^\perp\right) = 0$, т. е. $L_n^\perp \downarrow 0$. Если $\xi \in L_n(H)$, то $\xi \in D(T)$ и

$$T\xi = T_n \xi = R_n T_n \xi + R_n^\perp T_n \xi = R_n T_n \xi \in R_n(H) \subset D.$$

Следовательно, $T(L_n(H)) \subset D$. Кроме того, если U — унитарный оператор из B' и $\xi \in T^{-1}(D)$, то

$$TU\xi = UT\xi \in D,$$

т. е. $U\left(T^{-1}(D)\right) = \left(T^{-1}(D)\right)U$. Это означает, что $T^{-1}(D)\,\eta B$. Поэтому $T^{-1}(D)$ — сильно плотно в H относительно B. ■

Предложение 2. Пусть T — замкнутый оператор в H и $T = U|T|$ — его полярное разложение. Тогда T измерим относительно алгебры фон Неймана B в том и только в том случае когда $U \in B$ и $|T|$ измерим относительно B.

Доказательство. Если T измерим относительно H, то $D(|T|) = D(T)$ сильно плотно в H, при этом $|T|$ коммутирует со всяким унитарным оператором из B'. Следовательно, $|T|$ измерим относительно B. Пусть V — произвольный унитарный оператор из B'. Тогда

$$T = VTV^{-1} = VUV^{-1}|T|.$$

В силу теоремы 4 $U = VUV^{-1}$ и поэтому $U \in B$. Обратно, если $U \in B$ и $|T|$ измерим относительно B, то $D(T)$ сильно плотно в H и

$$VT = VU|T| = U|T|V = TV$$

для любого унитарного оператора $V \in B'$, т. е. T измерим относительно B. ■

Теорема 5. Если S и T — в существенном измеримые операторы относительно алгебры фон Неймана B в гильбертовом пространстве H, то операторы S^*, $S+T$ и ST также в существенном измеримы относительно B.

Доказательство. Пусть $\overline{S} = U|\overline{S}|$ — полярное разложение замыкания $\overline{S}$ оператора S. В силу предложения 2 $U \in B$ и $|\overline{S}|$ измерим относительно B. Но $S^* = |\overline{S}|U^*$, следовательно, $S^* \eta B$ и $D(S^*) = (U^*)^{-1}(D(|\overline{S}|))$ сильно плотно в H (предложение 1), т. е. оператор S^* измерим относительно B.

Пусть S и T сильно определены на $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ соответственно. Положим $R_n = P_n \wedge Q_n$, тогда $\{R_n\}$ — возрастающая последовательность проекторов, причем $R_n^\perp = P_n^\perp \vee Q_n^\perp$ — конечный проектор для всех n. Если D — размерностная функция на логике всех проекторов из B, то

$$D\left(R_n^\perp\right) \leqslant D\left(P_n^\perp\right) + D\left(Q_n^\perp\right)$$

и $D\left(P_n^\perp\right) \downarrow 0$, $D\left(Q_n^\perp\right) \downarrow 0$. Следовательно, $D\left(R_n^\perp\right) \downarrow 0$ и поэтому $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} R_n^\perp = 0$, т. е. $R_n \uparrow 1$. Так как $R_n(H) \subset D(S+T) = D(S) \cap D(T)$, то $D(S+T)$ сильно плотно в H и $S+T$ сильно определено на $\{R_n\}$. Очевидно, что $(S+T)\eta B$. Покажем, что $S+T$ допускает замыкание. Операторы S^* и T^* измеримы относительно B (см. начало доказательства), поэтому $D(S^* + T^*)$ сильно плотно в H. Но $(S+T)^* \supset S^* + T^*$, следовательно, $D((S+T)^*)$ сильно плотно в H, в частности $D((S+T)^*) = H$. Значит, определен оператор $(S+T)^{**}$ и поэтому оператор $S+T$ допускает замыкание. Таким образом, $S+T$ — в существенном измеримый оператор относительно B.

Областью определения оператора ST является множество $D(ST) = D(T) \cap T^{-1}(D(S))$. Используя предложение 1, включение $(ST)^* \supset T^*S^*$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что оператор ST в существенном измерим относительно B. ■

Предложение 3. Если T — симметрический оператор $T\eta B$, $D(T)$ сильно плотно в H, то T имеет самосопряженное замыкание.

Доказательство. Достаточно показать, что в области значений операторов $T+iI$ и $T-iI$ плотны в H (см. [97], с. 383). Пусть M — ортогональное дополнение к области значений оператора $T-iI$. Если $\xi \in M$, $\eta \in D(T)$, U — унитарный оператор из B', то

$$((T-iI)\eta,\ U\xi) = (U^*(T-iI)\eta,\ \xi) = ((T-iI)U\eta,\ \xi) = 0,$$

т. е. $U\xi \in M$. Это означает, что $M\eta B$. Обозначим через P проектор на M и пусть $D(T)$ определено последовательностью $\{P_n\}$. Если $\xi \in P_n(H) \cap M$, то

$$(T\xi - i\xi,\ \xi) = 0 \quad \text{или} \quad (T\xi,\ \xi) = i(\xi,\ \xi).$$

Но $(T\xi, \xi) = (\xi, T\xi) = \overline{(T\xi, \xi)}$, следовательно, $(\xi, \xi) = 0$, т. е. $\xi = 0$. Поэтому $P \wedge P_n = 0$ и $P^\perp \vee P_n^\perp = 1$ для всех n. Так как

$$P \vee Q - Q \sim P - P \wedge Q$$

для любых P, $Q \in B$, то

$$P = P^\perp \vee P_n^\perp - P^\perp \sim P_n^\perp - P^\perp \wedge P_n^\perp \leqslant P_n^\perp,$$

т. е. $P \lesssim P_n^\perp$. Если D — размерностная функция на логике всех проекторов из B, то $D(P) \leqslant D\left(P_n^\perp\right)$ и $D\left(P_n^\perp\right) \downarrow 0$. Следовательно, $D(P) = 0$, т. е. $P = 0$.

Аналогично показывается, что область значений оператора $T+iI$ плотна в H. ■

Следствие 1. Если S и T в существенном измеримы относительно B и совпадают на сильно плотном относительно B подмножестве D, то S и T имеют одинаковое замыкание.

Доказательство. Пусть S_1 — сужение оператора S на D. Тогда $\overline{S}_1$ и $\overline{S}$ — измеримые операторы и $\overline{S}_1 \subset \overline{S}$. Поэтому для доказательства достаточно показать, что если S и T — измеримые операторы и $S \subset T$, то $S = T$.

Множество $D(T^*)$ сильно плотно в H и $D(T^*) \subset D(S^*)$. Поэтому в силу предложения 1 множество

$$D_0 = D(S) \cap T^{-1}\left(D\left(T^*\right)\right)$$

также сильно плотно в H. Если $\xi \in D_0$, то

$$T\xi = S\xi \in D(T^*) \quad \text{и} \quad T^*T\xi = S^*T\xi = S^*S\xi.$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ сужение оператора T^*T на D_0. Тогда $\mathbf{A}$ — симметричный оператор, $\mathbf{A}\eta B$ и потому $\mathbf{A}$ имеет самосопряженное замыкание $\bar{\mathbf{A}}$ (предложение 3). Но $\bar{\mathbf{A}} \subset T^*T$ и $\bar{\mathbf{A}} \subset S^*S$ (теорема 2). Следовательно, $T^*T = \bar{\mathbf{A}} = S^*S$ ([85], с. 378). Это означает, что $D(T) = D(|T|) = D(|S|) = D(S)$, т. е. $S = T$.

Следствие 2. Если измеримый относительно B оператор T сильно определен последовательностью $\{P_n\}$, то T является замыканием сужения T на линейную оболочку подпространств $P_n(H)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Введем теперь понятие сильной суммы и сильного произведения измеримых операторов. Пусть S и T — измеримые операторы относительно алгебры фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H. Замыкания операторов $S+T$ и ST называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов S и T и обозначаются через $S\dot{+}T$ и $S\cdot T$.

Теорема 6. Совокупность $C(B)$ всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H, является $*$-алгеброй с единицей I относительно сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что $0\cdot T=0$).

Доказательство. Для проверки алгебраических тождеств, представляющих утверждение теоремы, нужно установить равенство некоторых измеримых операторов. Но эти операторы совпадают на сильно плотном множестве и поэтому они тождественны (следствие 1 к предложению 3). ■

Приведем теперь критерий измеримости замкнутого оператора T, присоединенного к алгебре фон Неймана, на языке спектрального разложения для $|T|$.

Теорема 7 [62]. Пусть T — замкнутый оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H. Следующие условия эквивалентны:

1) T — измеримый оператор относительно B;

2) $D(T)$ плотно в H и $\mathbf{1} - P(\lambda)$ — конечный проектор для некоторого $\lambda > 0$, где $\{P(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$.

Доказательство. Если $D(T)$ плотно в H и $\mathbf{1} - P(\lambda)$ — конечный проектор, то $\mathbf{1} - P(\lambda + n)$ — также конечный проектор для всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $P_n = P(\lambda+n)$, тогда $P_n \uparrow \mathbf{1}$, $P_n^{\perp}$ — конечный проектор и $P_n(H) \subset D(|T|) = D(T)$ (последнее включение вытекает из неравенства $\int\limits_0^{\infty} \mu^2 d\|P(\mu)\xi\|^2 = \int\limits_0^{\lambda+n} \mu^2 d\|P(\mu)\xi\|^2 < \infty$, если $\xi \in P_n(H)\Big)$. Следовательно, T — измеримый оператор относительно B.

Для доказательства обратной импликации используется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть T — замкнутый оператор, $T\eta B$, $\overline{D(T)} = H$ и $\{P(\lambda)\}$ — спектральное разложение для $|T|$. Если Q — проектор из B, $Q(H) \subset D(T)$, $TQ \in B(H)$ и $\|TQ\| < \lambda$, то $\mathbf{1} - P(\lambda) \precsim \mathbf{1} - Q$.

Доказательство леммы. Пусть $R = Q \wedge (\mathbf{1} - P(\lambda)) \neq 0$ и ξ — ненулевой вектор из $R(H)$. Тогда $\xi \in D(T)$ и $P(\mu)\xi = 0$ для всех неотрицательных $\mu \leqslant \lambda$. Поэтому

$$\|T\xi\|^2 = (|T|^2\xi, \xi) = \int_0^\infty \nu^2 d(P(\nu)\xi, \xi) = \int_0^\infty \nu^2 d\|P(\nu)\xi\|^2 =$$

$$= \int_\lambda^\infty \nu^2 d\|P(\nu)\xi\|^2 \geqslant \lambda^2 \|\xi\|^2.$$

Отсюда $\|T\xi\| \geqslant \lambda\|\xi\|$, что противоречит неравенству $\|TQ\| < \lambda$. Следовательно, $R = 0$ и потому

$$\mathbf{1} - P(\lambda) = (\mathbf{1} - P(\lambda)) - Q \wedge (\mathbf{1} - P(\lambda)) \sim Q \vee (\mathbf{1} - P(\lambda)) - Q \leqslant \mathbf{1} - Q,$$

т. е. $\mathbf{1} - P(\lambda) \precsim \mathbf{1} - Q$. ■

Докажем теперь импликацию 1)$\to$2) из теоремы 7. Пусть T — измеримый оператор относительно B. Тогда $\overline{D(T)} = H$ и существует такой проектор $Q \in B$, что $TQ \in B(H)$ и $(\mathbf{1} - Q)$ — конечный проектор. Если $\lambda > \|TQ\|$, то в силу леммы 1 $\mathbf{1} - P(\lambda) \precsim \mathbf{1} - Q$ и поэтому $(\mathbf{1} - P(\lambda))$ — конечный проектор. ■

Следствие 1. Если B — конечная алгебра фон Неймана, то любой замкнутый оператор $T\eta B$ с плотной областью определения измерим относительно B.

Следствие 2. Если B — конечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, и $\{P_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, — спектральное семейство проекторов из B, то существует такой самосопряженный оператор T, измеримый относительно B, что

$$T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda \xi$$

для всех $\xi \in D(T)$.

Доказательство. Положим $T_n\xi = \int_{-n}^{n} \lambda dP_\lambda \xi$, $\xi \in H$. Тогда $T_n \in B$ и $T_nQ_n = Q_nT_n = T_n$, где $Q_n = P_n \wedge P_{-n}^{\perp}$, причем]

$$T_mQ_n = T_nQ_n = T_n,$$

если $n < m$. Линейное подпространство $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n(H)$ плотно в H, так как $Q_n \uparrow 1$. Для каждого $\xi \in D$ положим $T\xi = T_n\xi$, где n — такой номер, для которого $\xi \in Q_n(H)$. Линейный оператор T, очевидно, симметрический (действительно, $(T\xi, \xi) = (T_n\xi, \xi) = (\xi, T_n\xi) = (\xi, T\xi)$ для любого $\xi \in Q_n(H)$), и поэтому допускает замыкание $\overline{T}$. Кроме того, $TU\xi = UT\xi$ для всех $\xi \in D$ и унитарных операторов $U \in B'$. Следовательно, $\overline{T}\eta B$, т. е. $\overline{T}$ измерим относительно B. Из спектральной теоремы 3 вытекает, что

$$\overline{T}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda \xi$$

для всех $\xi \in D(\overline{T})$. ■

Рассмотрим теперь класс локально измеримых операторов. Впервые эти операторы изучались в [99], затем — в [62].

Пусть B — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, и T — замкнутый оператор, присоединенный к B. Оператор T называется локально измеримым относительно B, если существует последовательность Z_n центральных проекторов из B, для которой $Z_n \uparrow 1$ и $TZ_n \in C(B)$, где $C(B)$ — $*$-алгебра всех измеримых относительно B операторов.

Если в предыдущем определении вместо замкнутости T потребовать, чтобы оператор T допускал замыкание и TZ_n были в существенном измеримыми операторами, то в этом случае T называется в существенном локально измеримым оператором относительно B.

Если T — в существенном локально измеримый относительно B оператор и $\overline{T}$ — замыкание оператора T, то в силу равенства $\overline{TZ} = \overline{T}Z$, где Z—центральный проектор из B, оператор $\overline{T}$ локально измерим относительно B.

Обозначим через $S(B)$ совокупность всех локально измеримых относительно B операторов. Очевидно, что $C(B) \subset S(B)$, и если $T \in S(B)$, $T = U|T|$ — полярное разложение T, то $U \in B$ и $|T| \in S(B)$ (так как $|T|Z_n = |TZ_n|$ для центрального проектора Z_n).

Теорема 8 [62]. Пусть T — замкнутый оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H. Следующие условия эквивалентны:

1) $T \in S(B)$;

2) существует возрастающая сеть $\{Z_\alpha\}$ центральных проекторов из B, для которой $\sup\limits_\alpha Z_\alpha = 1$ и $TZ_\alpha \in C(B)$;

3) $D(T)$ плотно в H и существуют такие центральные проекторы Z_n из B, что $Z_n \uparrow 1$ и $Z_n(1 - P(n))$ — конечный проектор для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\{P(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$;

4) существуют проекторы $Q_n \in B$ и центральные проекторы $Z_n \in B$, для которых $\sup\limits_n Z_n = 1 = \sup Q_n$, $Q_n(H) \subset D(T)$ и $Z_n(1-Q_n)$ конечны для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Импликация 1)→2) очевидна. Пусть $\{Z_\alpha\}$ удовлетворяет условию 2). Так как $Z_\alpha(H) \cap D(TZ_\alpha)$ плотно в $Z_\alpha(H)$, $\bigcup\limits_\alpha Z_\alpha(H)$ плотно в H и $Z_\alpha(H) \cap D(TZ_\alpha) \subset D(T)$, то $D(T)$ плотно в H. Пусть $\{P(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$ и Z_n — наибольший центральный проектор, для которого $Z_n(1-P(n))$ — конечный проектор. Семейство проекторов $\{1 - Z_\alpha + Z_\alpha P(\lambda)\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, является спектральным для $|T|Z_\alpha = |TZ_\alpha|$ при всех α. Но $TZ_\alpha \in C(B)$, поэтому для каждого α найдется такое λ_α, что

$$((1-Z_\alpha) + Z_\alpha P(\lambda_\alpha))^\perp = Z_\alpha(1-P(\lambda_\alpha))$$

— конечный проектор (теорема 7). Следовательно, $Z_\alpha \leqslant Z_n$ при $n \geqslant \lambda_\alpha$ и поэтому $\sup Z_n = 1$. Так как Z_n — возрастающая последовательность, то $Z_n \uparrow 1$.

Импликация (3)⟶4) очевидна. Осталось доказать импликацию 4)→1). Пусть $\{Q_n\}$ и $\{Z_n\}$ удовлетворяют условию 4). Оператор TZ_n замкнут и $(TZ_n)\eta B$. Для каждого натурального m положим

$$E_{nm} = (1-Z_n) + Z_n Q_{n+m}.$$

Так как проектор Z_n — центральный, то $Z_n Q_{n+m} \uparrow Z_n$ при $m \to \infty$ для каждого фиксированного n. Поэтому $E_{nm} \uparrow 1$ при $m \to \infty$ и фиксированном n. Но $1 - E_{nm} = Z_n(1-Q_{n+m}) \leqslant Z_n(1-Q_n)$, поэтому проектор $1 - E_{nm}$ конечен и

$$E_{nm}(H) = (1-Z_n)(H) + Z_n Q_{n+m}(H) \subset (1-Z_n)(H) + \\ + Z_n(D(T)) = D(TZ_n).$$

Следовательно, $TZ_n \in C(B)$ для каждого n, т. е. оператор T локально измерим относительно B. ■

Линейное подпространство $D \subset H$, присоединенное к B, называется локально измеримым относительно B, если существуют такие проекторы $Q_n \in B$ и центральные проекторы $Z_n \in B$, что $Q_n \uparrow 1$, $Z_n \uparrow 1$, $Q_n(H) \subset D$ и $Z_n(1-Q_n)$ — конечный проектор для любого $n = 1, 2, \ldots$ (будем говорить, что D определено последовательностями $\{Z_n\}$ и $\{Q_n\}$).

Из теоремы 8 следует, что если T — замкнутый оператор (допускает замыкание), $T\eta B$, то $T \in S(B)$ (соответственно в существенном локально измерим относительно B) в том и только в том случае, когда $D(T)$ локально измеримо относительно B.

П р е д л о ж е н и е 4. Если $T \in S(B)$, D — локально измеримо относительно B, то $T^{-1}(D)$ локально измеримо относительно B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{Q_n\}$, $\{Z'_n\}$ — последовательности, определяющие D, $\{P(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$ и $\{Z''_n\}$ — такая последовательность центральных проекторов, что $Z''_n \uparrow \mathbf{1}$ и $Z''_n(\mathbf{1}-P(n))$ — конечный проектор. Положим

$$R_n = \mathbf{1} - r\left(Q_n^{\perp} TP(n)\right),$$

где $r\left(Q_n^{\perp} TP(n)\right)$ — правый носитель оператора $Q_n^{\perp} TP(n)$ в B. Тогда $R_n^{\perp} \lesssim Q_n^{\perp}$, и если $L_n = R_n \wedge P(n)$, то $\{L_n\}$ — возрастающая последовательность (см. доказательство предложения 1). Пусть D — размерностная функция на логике всех проекторов из B и $Z_n = Z'_n Z''_n$. Проектор $Z_n L^{\perp}_{n+m}$ конечен, $m = 1, 2, \ldots$, так как

$$Z_n L^{\perp}_{n+m} \leqslant \left(Z'_n R^{\perp}_{n+m}\right) \vee Z''_n P^{\perp}(n+m)$$

и

$$Z'_n R^{\perp}_{n+m} \lesssim Z'_n Q^{\perp}_{n+m}.$$

При этом

$$D\left(Z_n L^{\perp}_{n+m}\right) \leqslant D\left(Z'_n R^{\perp}_{n+m}\right) + D\left(Z''_n P^{\perp}(n+m)\right).$$

Но $D\left(Z'_n R^{\perp}_{n+m}\right) \downarrow 0$, $D\left(Z''_n P^{\perp}(n+m)\right) \downarrow 0$ при $m \to \infty$ и фиксированном n, следовательно, $Z_n L^{\perp}_{n+m} \downarrow 0$ при $m \to \infty$ и фиксированном n. Так как $Z_n \uparrow \mathbf{1}$ и последовательность $\{L_n^{\perp}\}$ убывает, то $L_n^{\perp} \downarrow 0$, т. е. $L_n \uparrow \mathbf{1}$.

Так же, как и при доказательстве предложения 1, получим, что $T\left(L_n(H)\right) \subset D$ и $T^{-1}(D) \eta B$. Следовательно, $T^{-1}(D)$ локально измеримо относительно B. ■

Теорема 9. Если S и T — в существенном локально измеримые операторы относительно алгебры фон Неймана B в гильбертовом пространстве H, то операторы S^*, $S+T$ и ST также в существенном локально измеримы относительно B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 4 и повторяя начало доказательства теоремы 5, получаем, что $S^* \in S(B)$. Пусть $\{Z_n\}$ — возрастающая к единице последовательность центральных проекторов из B, для которой SZ_n и TZ_n — в существенном измеримые относительно B операторы, $n = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы 5 оператор $(S+T)Z_n$ в существенном измерим относительно B. Пусть $\{Z'_n\}$, $\{Q'_n\}$ и $\{Z''_n\}$, $\{Q''_n\}$ — последовательности, определяющие $D(S)$ и $D(T)$ соответственно. Положим $Z_n = Z'_n Z''_n$ и $Q_n = Q'_n \wedge Q''_n$. Тогда $Z_n \uparrow 1$, последовательность $\{Q_n\}$ возрастает и

$$Z_n Q_n^{\perp} = Z_n\Big(\big(Q'_n\big)^{\perp} \vee \big(Q''_n\big)^{\perp}\Big) = Z_n \wedge \Big(\big(Q'_n\big)^{\perp} \vee \big(Q''_n\big)^{\perp}\Big) =$$

$$= \Big(Z_n \wedge \big(Q'_n\big)^{\perp}\Big) \vee \Big(Z_n \wedge \big(Q''_n\big)^{\perp}\Big) \leqslant Z'_n\big(1 - Q'_n\big) \vee Z''_n\big(1 - Q''_n\big).$$

Следовательно, проектор $Z_n Q_n^{\perp}$ конечен для всех n и

$$D\big(Z_n Q_{n+m}^{\perp}\big) \leqslant D\Big(Z'_n\big(1 - Q'_{n+m}\big)\Big) + D\Big(Z''_n\big(1 - Q''_{n+m}\big)\Big),$$

где D — размерностная функция на логике всех проекторов из B. Повторяя доказательство предложения 4, получаем $Q_n \uparrow 1$. Очевидно, что $Q_n(H) \subset D(S) \cap D(T)$. Таким образом, $D(S) \cap D(T)$ локально измеримо относительно B. Теперь, повторяя доказательство теоремы 5 и используя предложение 4, получаем, что операторы $S+T$ и ST в существенном локально измеримы относительно B. ■

П р е д л о ж е н и е 5. Если T — симметрический оператор, $T\eta B$, $D(T)$ локально измеримо относительно B, то T имеет самосопряженное замыкание.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство предложения 3.

Следствие 1. Если S и T в существенном локально измеримы относительно B и совпадают на локально измеримом относительно B подмножестве, то S и T имеют одинаковое замыкание.

Доказательство точно такое же, как и доказательство следствия 1 к предложению 3.

Следствие 2 Если $T \in S(B)$, $D(T)$ определено последовательностями $\{Z_n\}$ и $\{Q_n\}$, то T является замыканием сужения T на линейную оболочку подпространств $Q_n(H)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Так же, как и для измеримых операторов, вводится понятие сильной суммы и сильного произведения для операторов из $S(B)$, которые также обозначаются $S \dotplus T$ и $S \dot{} T$.

Теорема 10. Совокупность $S(B)$ всех операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H, является $*$-алгеброй с единицей I относительно сильного сложения и сильного умножения и перехода к сопряженному оператору. При этом $C(B)$ есть $*$-подалгебра $S(B)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Замечание. Если B — конечная алгебра фон Неймана или центр в B тривиален (т. е. B — фактор), то $C(B) = S(B)$. Если же в B существует возрастающая к единице последовательность

$\{Z_n\}$ центральных проекторов, для которой $(\mathbf{1}-Z_n)$ — не конечный проектор, $n=1, 2, \dots$, то $S(B) \neq C(B)$.

Предложение 6. Пусть S, T — самосопряженные операторы из $\mathbf{S}(B)$ и $\{P(\lambda)\}$, $\{Q(\lambda)\}$ — спектральные семейства проекторов S и T соответственно. Тогда $S \cdot T = T \cdot S$ в том и только в том случае, когда $P(\lambda) Q(\mu) = Q(\mu) P(\lambda)$ при всех μ и λ.

Доказательство. Обозначим через $U(T)$ преобразование Кэли для оператора T (см. [97], с. 380), т. е.

$$U(T) = (T - iI)(T + iI)^{-1}.$$

Оператор $U(T)$ унитарен и, очевидно, принадлежит B. Так как

$$T = i(I + U(T))(I - U(T))^{-1},$$

то $T \cdot S = S \cdot T$ тогда и только тогда, когда $U(T) \cdot S = S \cdot U(T)$. Отсюда вытекает, что $T \cdot S = S \cdot T$ в том и только в том случае, если $U(T) U(S) = U(S) U(T)$. Но для $A \in B(H)$ $AU(T) = U(T) A$ тогда и только тогда, когда $AQ(\lambda) = Q(\lambda) A$ для всех λ ([85)], с. 392). Следовательно, равенство $P(\mu) Q(\lambda) = Q(\lambda) P(\mu)$ является необходимым и достаточным условием для равенства

$$S \cdot T = T \cdot S. \blacksquare$$

Наша дальнейшая цель — показать, что $S(B)$ является O^*-алгеброй. Определим на эрмитовой части $S_h(B)$ $*$-алгебры $S(B)$ частичный порядок. Элемент $T \in S_h(B)$ назовем положительным, если $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in D(T)$, и будем считать, что $T \leqslant S$, если $(T - S)$ — положительный оператор, $T, S \in S_h(B)$. Такой частичный порядок согласован с алгебраическими операциями. Аксиомы 1), 2) и 4) проверяются непосредственно. Если $T, S \in S_h(B)$ и $T \geqslant 0$, $S \geqslant 0$, то существуют положительные квадратные корни $\sqrt{T}$ и $\sqrt{S}$, причем $\sqrt{T} \cdot \sqrt{S} = \sqrt{S} \cdot \sqrt{T}$, если только $TS = ST$. Следовательно, $T \cdot S = (\sqrt{T} \cdot \sqrt{S})^* \times \times (\sqrt{T} \cdot \sqrt{S}) \geqslant 0$.

Если $T \in S_h(B)$ и $0 \leqslant T \leqslant \mathbf{1}$, то для любого $\xi \in D(T)$

$$\|\sqrt{T}\xi\|^2 = (T\xi, \xi) \leqslant (\xi, \xi) = \|\xi\|^2.$$

Следовательно, оператор $\sqrt{T}$, а вместе с ним и оператор T, ограничены. Это означает, что множество всех ограниченных элементов в $S(B)$ совпадает с алгеброй фон Неймана B.

Покажем, что для $S(B)$ выполняется аксиома (I) из определения 2 § 2 гл. IV. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть операторов из $S_h(B)$. Будем считать, что $0 \leqslant T_\alpha \leqslant S$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, где $S \in S_h(B)$, $S \geqslant \mathbf{1}$. Так как $(S\xi, \xi) \geqslant (\xi, \xi)$ для всех $\xi \in D(S)$, то S является инъекцией. Поэтому существует обратный оператор S^{-1} с областью определения $D(S^{-1}) = \{S\xi : \xi \in D(S)\}$. Если $(S\xi, \eta) = 0$ для всех $\xi \in D(S)$, то $\eta \in D(S^*)$ и $S^*\eta = 0$. Но $S = S^*$, следовательно, $\eta \in D(S)$ и $S\eta = 0$, т. е. $\eta = 0$. Это означает, что $\overline{D(S^{-1})} = H$. Тогда (см. [85], с 125)

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1} = S^{-1},$$

т. е. S^{-1} — положительно определенный самосопряженный оператор в H. Поэтому существует $\sqrt{S^{-1}}$ и если $\eta = S\xi$, $\xi \in D(S)$, то

$$(S^{-1}\eta, \eta) = \left(\sqrt{S^{-1}}\eta, \sqrt{S^{-1}}\eta\right) \leqslant \left(S\sqrt{S^{-1}}\eta, \sqrt{S^{-1}}\eta\right) = (\eta, \eta).$$

Следовательно, $0 \leqslant S^{-1} \leqslant 1$ и поэтому $S^{-1} \in B(H)$. Так как

$$S^{-1}U\eta = US^{-1}\eta$$

для любых $\eta \in D(S^{-1})$ и унитарного оператора $U \in B'$, то $S^{-1} \in B$ и $\sqrt{S^{-1}} \in B$. Если $T \in S_h(B)$ и $T \geqslant 0$, то

$$\sqrt{S^{-1}} \cdot T \cdot \sqrt{S^{-1}} = \left(\sqrt{T}\sqrt{S^{-1}}\right)^* \left(\sqrt{T} \cdot \sqrt{S^{-1}}\right) \geqslant 0,$$

так что отображение $T \to \sqrt{S^{-1}}\, T \sqrt{S^{-1}}$ из $S_h(B)$ в $S_h(B)$ сохраняет порядок. Положим $\mathbf{B}_\alpha = \sqrt{S^{-1}}\, T_\alpha \sqrt{S^{-1}}$, тогда $\{\mathbf{B}_\alpha\}$ — возрастающая сеть из B и $0 \leqslant \mathbf{B}_\alpha \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}$. Алгебра фон Неймана B монотонно полна, поэтому в B существует элемент $\mathbf{B} = \sup\limits_\alpha \mathbf{B}_\alpha$.

Если $\mathbf{B}_0 \in S_h(B)$ и $\mathbf{B}_0 \geqslant \mathbf{B}_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}$, то $(\mathbf{B}_0\xi, \xi) \geqslant \lim\limits_\alpha (\mathbf{B}_\alpha\xi, \xi) = (\mathbf{B}\xi, \xi)$, $\xi \in D(\mathbf{B}_0)$. Следовательно, $\mathbf{B}$ есть точная верхняя грань в $S_h(B)$ для сети $\{\mathbf{B}_\alpha\}$. Но $\sqrt{S^{-1}} = (\sqrt{S})^{-1}$, поэтому отображение

$$T \to \sqrt{S} \cdot T \cdot \sqrt{S}$$

из $S_h(B)$ в $S_h(B)$ является биекцией и сохраняет порядок. Это означает, что оператор $T = \sqrt{S} \cdot \mathbf{B} \cdot \sqrt{S}$ есть точная верхняя грань в $S_h(B)$ для сети $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$. Пусть P — проектор из B и $P \cdot T_\alpha = T_\alpha \cdot P$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}$. Повторяя доказательство предложения 3 из § 2 гл. IV, получаем, что $\sup\limits_\alpha P \cdot T_\alpha \cdot P = P \cdot T \cdot P$.

Следовательно,

$$P \cdot T \cdot P \dotplus P^\perp \cdot T \cdot P^\perp = \sup_\alpha P \cdot T_\alpha \cdot P \dotplus \sup_\alpha P^\perp \cdot T_\alpha \cdot P^\perp =$$

$$= \sup_\alpha \left(P \cdot T_\alpha \cdot P \dotplus P^\perp \cdot P_\alpha \cdot P^\perp\right) = \sup_\alpha T_\alpha = T.$$

Отсюда $P \cdot T = T \cdot P$. Теперь, используя предложение 6, легко получить, что $T \cdot C = C \cdot T$, если только $T_\alpha \cdot C = C \cdot T_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, где $C \in S(B)$. Таким образом, $S(B)$ удовлетворяет аксиоме (I).

Покажем теперь, что эрмитова часть E_h максимальной коммутативной $*$-алгебры E из $S(B)$ является решеткой относительно индуцированного частичного порядка. Достаточно показать, что для каждого $T \in E_h$ существует $T \vee 0$, так как

$$T \vee S = ((T - S) \vee 0) \dot{+} S$$

для любых T, $S \in E_h$. Пусть $T \in E_h$ и $\{P(\lambda)\}$ — спектральное семейство проекторов для T. Положим $T_0 = T \cdot P^\perp(0) = P^\perp(0) \cdot T$. Тогда $T_0 \in E_h$ и

$$T_0 \xi = \int_0^\infty \lambda \, dP(\lambda) \xi$$

для любого $\xi \in D(T_0)$. В частности,

$$(T_0 \xi, \xi) = \int_0^\infty \lambda \, d(P(\lambda)\xi, \xi) \geqslant 0, \ \xi \in D(T_0)$$

и

$$((T - T_0)\xi, \xi) = (P(0) T\xi, \xi) = \int_{-\infty}^\infty \lambda \, d(P(\lambda) P(0)\xi, P(0)\xi) =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \lambda \, d(P(\lambda)\xi, \xi) \leqslant 0,$$

т. е. $T_0 \geqslant 0$ и $T_0 \geqslant T$. Пусть $S \in E_h$, $S \geqslant 0$, $S \geqslant T$, тогда $P(0) \cdot S = P(0) \cdot S \cdot P(0) \geqslant 0$, $P^\perp \cdot S \geqslant P^\perp(0) \cdot T \cdot P^\perp(0) = T_0$ и $S = P^\perp(0) \cdot S + P(0) \cdot S \geqslant T_0$. Следовательно, $T_0 = T \vee 0$ в E_h, т. е. E_h — решетка. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 11. *$*$-Алгебра $S(B)$ всех операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана B, действующей в гильбертовом пространстве H, является O^*-алгеброй.*

Покажем теперь, что $C(B)$ есть заполненная $*$-подалгебра в $S(B)$.

Лемма 2. *Пусть S, $T \in S_h(B)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, $1 \leqslant T$. Тогда существует единственный оператор $\mathrm{B} \in B$, такой, что*

$$\sqrt{S} = \mathrm{B} \cdot \sqrt{T}.$$

Доказательство. Область $D_0 = D(T) \cap D(S)$ локально измерима относительно B. Из неравенства $(T\xi, \xi) \geqslant (\xi, \xi)$, $\xi \in D_0$ вытекает, что $\sqrt{T}(D_0) = H$ (см. доказательство теоремы 11). Зададим отображение C из $\sqrt{T}(D_0)$ в H, полагая

$$C(\sqrt{T}\xi) = \sqrt{S}\xi, \ \xi \in D_0.$$

Очевидно, что C — линейное отображение и

$$\|C\sqrt{T}\xi\|^2 = \|\sqrt{S}\xi\|^2 = (\sqrt{S}\xi, \sqrt{S}\xi) = (S\xi, \xi) \leqslant (T\xi, \xi) = \|\sqrt{T}\xi\|^2,$$

$\xi \in D_0$. Поэтому C непрерывно на $\sqrt{T}(D_0)$. Пусть $\mathbf{B}$ — непрерывное продолжение C на $\overline{\sqrt{T}(D_0)} = H$. Тогда $\mathbf{B}$ — ограниченный линейный оператор в H и $\mathbf{B}\sqrt{T}\xi = \sqrt{S}\xi$ для всех $\xi \in D_0$. Если $\mathbf{B}_1 \in B(H)$ и $\mathbf{B}_1\sqrt{T}\xi = \sqrt{S}\xi$, $\xi_0 \in D_0$, то $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ на $\sqrt{T}(D_0)$ и потому $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$. Для любого унитарного оператора $U \in B$ и $\xi \in D_0$

$$\sqrt{S}\xi = U\sqrt{S}U^{-1}\xi = U\mathbf{B}\sqrt{T}U^{-1}\xi = U\mathbf{B}U^{-1}\sqrt{T}\xi.$$

Следовательно, $\mathbf{B} = U\mathbf{B}U^{-1}$, что означает $\mathbf{B} \in B$.

Теорема 12. $C(B)$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(B)$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant S \leqslant T$, $T \in C(B)$, $S \in S(B)$. В силу леммы 2 существует такое $\mathbf{B} \in B$, что

$$\sqrt{S} = \mathbf{B}\cdot\sqrt{T+1},$$

но $\sqrt{T+1} \in C(B)$, поэтому $\sqrt{S} \in C(B)$ и, следовательно, $S \in C(B)$.

Из теоремы 12 и теоремы 1 из § 3 гл. IV вытекает следующее

Следствие. $C(B)$ является O^*-подалгеброй в $S(B)$.

Библиография: [61, 62, 74, 85, 87, 90, 97, 99, 120, 125, 138].

§ 7. Универсальные O*-алгебры

Определение 1. O^*-Алгебра E называется универсальной, если всякая ее максимальная коммутативная $*$-подалгебра является универсальным комплексным полуполем. Это эквивалентно тому, что ее эрмитова часть E_h относительно симметризованного произведения является универсальной OJ-алгеброй.

Как известно из теории полуполей (см. гл. II, § 6), всякое полуполе изоморфно вкладывается в универсальное полуполе, имеющее то же множество ограниченных элементов. Однако в некоммутативном случае это уже не так. Рассмотрим пример. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в H. Тогда $B(H)$ — дискретная O^*-алгебра с тривиальным центром, и все элементы ее ограничены. Если E — некоторая O^*-алгебра, у которой OC^*-подалгебра ограниченных элементов A $*$-изоморфна $B(H)$, то так как идемпотенты в E и A одни и те же, E является дискретной O^*-алгеброй с тривиальным центром. По теореме 1 из § 5 $E \simeq B(H)$. В то же время $B(H)$ не является универсальной O^*-алгеброй, так как существуют спектральные семейства $\{e_\lambda\} \subset B(H)$, для которых оператор $x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ неограничен, т. е. $x \overline{\in} B(H)$. Таким образом, $B(H)$ ($\dim H = \infty$) не является универсальной и не вкладывается изоморфно ни в какую универсальную O^*-алгебру.

В частности, эрмитова часть $B(H)$ является примером неуниверсальной OJ-алгебры, которая не вкладывается ни в какую универсальную OJ-алгебру, OJB-алгебра ограниченных элементов которой изоморфна:

$$B_h(H) = \{x \in B(H) : x^* = x\}.$$

Однако при некоторых условиях вложение O^*-алгебры в универсальную возможно, а именно: O^*-алгебру E с OC^*-алгеброй A ограниченных элементов можно вложить в универсальную O^*-алгебру, у которой OC^*-алгебра ограниченных элементов изоморфна A тогда и только тогда, когда существует универсальная O^*-алгебра с алгеброй ограниченных элементов, $*$-изоморфной A. Необходимость этого условия очевидна. Достаточность вытекает из следующего более общего результата.

Теорема 1. Пусть E, $\overline{E}$ — O^*-алгебры, A и $\overline{A}$ — OC^*-алгебры ограниченных элементов E и $\overline{E}$ соответственно. И пусть $\Phi: A \to \overline{A}$ $*$-изоморфизм A на $\overline{A}$. Предположим, что $\overline{E}$ удовлетворяет условию ($*$) из теоремы 1, § 8, гл. III, т. е. для любого $a \in E_h$ со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$ в алгебре $\overline{E}$ существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\Phi(e_\lambda)$ (в частности, если O^*-алгебра $\overline{E}$ универсальна, то условие ($*$) автоматически выполнено) Тогда Φ можно единственным образом продолжить до $*$-изоморфизма $\overline{\Phi}$ O^*-алгебры E на заполненную O^*-подалгебру $\overline{E}$. При этом, если E универсальна, то и $\overline{E}$ универсальна, и $\overline{\Phi}(E) = \overline{E}$.

Доказательство. Рассмотрим OJ-алгебру E_h (соответственно $\overline{E}_h$) эрмитовых элементов E (соответственно $\overline{E}$) с симметризованным умножением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Тогда для OJ-алгебр E_h и $\overline{E}_h$ выполнены все условия теоремы 1, § 8, гл. III. В силу этой теоремы Φ можно продолжить до йорданова изоморфизма $\overline{\Phi}$ алгебры E_h на заполненную OJ-подалгебру $\overline{\Phi}(E_h)$ OJ-алгебры $\overline{E}_h$. Для произвольного $x \in E$, $x = a + ib$, $a, b \in E_h$ положим

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}(a) + i\,\overline{\Phi}(b).$$

Итак, мы построили отображение $\overline{\Phi}: E \to \overline{E}$, которое линейно и сохраняет йорданово произведение эрмитовых элементов, т. е. $\overline{\Phi}(x \circ y) = \overline{\Phi}(x) \circ \overline{\Phi}(y)$ для всех $x, y \in E_h$. В силу следствия 2 теоремы 3 § 1 коммутируемость эрмитовых элементов O^*-алгебры эквивалентна их совместности относительно симметризованного произведения. Поэтому, если $xy = yx$ в E_h, то $x \leftrightarrow y$ и $\overline{\Phi}(x) \leftrightarrow \overline{\Phi}(y)$. Следовательно, $\overline{\Phi}(x)\overline{\Phi}(y) = \overline{\Phi}(y)\overline{\Phi}(x)$. Итак, для коммутирующих эрмитовых $x, y \in E_h$ имеем $\Phi(xy) = \overline{\Phi}(x \circ y) = \overline{\Phi}(x) \circ \overline{\Phi}(y) = \overline{\Phi}(x)\overline{\Phi}(y)$, так как для коммутирующих элементов симметризованное произведение совпадает с обычным.

Пусть x — обратимый эрмитов элемент в E. Поскольку $\Phi(1) = \overline{1}$ (где $\overline{1}$ — единица $\overline{E}$), то по доказанному $\overline{\Phi}(x)\overline{\Phi}(x^{-1}) = \overline{\Phi}(x^{-1})\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}(1) = \overline{1}$. т. е. элемент $\overline{\Phi}(x)$ также обратим и $\overline{\Phi}(x)^{-1} = \overline{\Phi}(x^{-1})$.

Так как $\overline{\Phi}$ — йорданов изоморфизм E_h в $\overline{E}_h$ и для любых $a, b \in E_h$ $aba = U_a b = 2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b$, то

$$\overline{\Phi}(aba) = \overline{\Phi}(U_a b) = \overline{\Phi}(2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b) =$$
$$= 2\overline{\Phi}(a) \circ (\overline{\Phi}(a) \circ \overline{\Phi}(b)) - \overline{\Phi}(a)^2 \circ \overline{\Phi}(b) =$$
$$= U_{\overline{\Phi}(a)} \overline{\Phi}(b) = \overline{\Phi}(a)\overline{\Phi}(b)\overline{\Phi}(a).$$

Итак, $\overline{\Phi}(aba) = \overline{\Phi}(a)\overline{\Phi}(b)\overline{\Phi}(a)$ для любых $a, b \in E_h$.

Пусть $x, y \in E_h^+$, причем элемент x ограничен. Тогда, если $y_1 = y + 1$, то

$$\overline{\Phi}(xy) = \overline{\Phi}(y_1 y_1^{-1} x y y_1^{-1} y_1) = \overline{\Phi}(y_1)\overline{\Phi}(y_1^{-1} x y y_1^{-1})\overline{\Phi}(y_1).$$

Поскольку $0 \leqslant yy_1^{-1} \leqslant 1$, то элемент yy_1^{-1} ограничен. Кроме того, элемент x ограничен по предположению и поэтому элемент $y_1^{-1}x$ также ограничен. Следовательно, $\overline{\Phi}(y_1^{-1} x y y_1^{-1}) = \Phi(y_1^{-1} x y y_1^{-1}) = \Phi(y_1^{-1}x)\Phi(y y_1^{-1}) = \Phi(y_1)^{-1}\Phi(x)\overline{\Phi}(y)\Phi(y_1)^{-1}$. Здесь мы воспользовались тем, что элементы y и y_1^{-1} коммутируют и потому $\Phi(y y_1^{-1}) = \overline{\Phi}(y)\Phi(y_1^{-1})$. Таким образом, $\overline{\Phi}(xy) = \overline{\Phi}(x)\overline{\Phi}(y)$.

Так как по построению $\overline{\Phi}(a^*) = \overline{\Phi}(a)^*$, то $\overline{\Phi}(yx) = \overline{\Phi}(y)\overline{\Phi}(x)$ для любых $x, y \in E_h^+$, $x \in A$.

Пусть теперь $x, y \in E_h$ — произвольные положительные элементы. Положим $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_1 = z + 1$. Тогда

$$(z_1^{-1}x)(z_1^{-1}x)^* = z_1^{-1}x^2 z_1^{-1} \leqslant z_1^{-1} z^2 z_1^{-1} \leqslant 1.$$

Следовательно, элемент $z_1^{-1}x$ ограничен. Аналогично доказывается ограниченность элемента yz_1^{-1}. Поэтому

$$\overline{\Phi}(xy) = \overline{\Phi}(z_1 z_1^{-1} x y z_1^{-1} z_1) = \overline{\Phi}(z_1)\overline{\Phi}(z_1^{-1} x y z_1^{-1})\overline{\Phi}(z_1) =$$
$$= \overline{\Phi}(z_1)\overline{\Phi}(z_1^{-1}x)\overline{\Phi}(yz_1^{-1})\overline{\Phi}(z_1).$$

Так как z_1^{-1} — ограниченный элемент, то, как показано выше,

$$\overline{\Phi}\left(z_1^{-1}x\right)=\overline{\Phi}(z_1)^{-1}\overline{\Phi}(x),\ \overline{\Phi}\left(y z_1^{-1}\right)=\overline{\Phi}(y)\,\overline{\Phi}(z_1)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\overline{\Phi}\,(xy)=\overline{\Phi}\,(x)\,\overline{\Phi}\,(y)$$

для любых $x,\ y\in E_h$. Поскольку любой элемент E является линейной комбинацией положительных, то $\overline{\Phi}\,(xy)=\overline{\Phi}\,(x)\,\overline{\Phi}\,(y)$ для любых $x,\ y\in E$.

Итак, Φ продолжается до $*$-изоморфизма E на некоторую $*$-подалгебру $\overline{\Phi}(E)$ в $\bar{E}$. Так как $\overline{\Phi}(E)$ — заполненная $*$-подалгебра и содержит единицу, то по теореме 1 § 3 $\overline{\Phi}(E)$ — O^*-подалгебра E. Остальные утверждения теоремы следуют из теоремы 1 § 8 гл. III. ■

Примеры. 1. Всякое комплексное универсальное полуполе, т. е. E_0+iE_0, где E_0 — универсальное полуполе, является коммутативной универсальной O^*-алгеброй. 2. Некоммутативной универсальной O^*-алгеброй является алгебра $C(A)$ всех измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана A. В самом деле, если $\{P_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов из $C\,(A)$, то в силу следствия 2 к теореме 7 из § 6 существует $T\in C_h(A)$, для которого $T=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda dP_\lambda$. Таким образом, $C\,(A)$ — универсальная O^*-алгебра. Отсюда и из теоремы 1 следует, что если E — произвольная O^*-алгебра, A — OC^*-алгебра ограниченных элементов E, причем A изоморфна некоторой конечной алгебре фон Неймана B, то E $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в $C\,(B)$.

Покажем, что аналогичное вложение имеет место и в случае произвольной алгебры фон Неймана B.

Теорема 2. Пусть E — O^*-алгебра. Существует единственный центральный проектор $e\in E$, такой, что

1) O^*-алгебра eE $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре (содержащей единицу) O^*-алгебры $S\,(B)$ всех линейных операторов, локально измеримых относительно некоторой алгебры фон Неймана B;

2) на OC^*-алгебре ограниченных элементов O^*-алгебры $(1-e)E$ не существует ни одного нормального состояния.

Доказательство. Если рассмотреть OJ-алгебру E_h всех эрмитовых элементов E, то из теоремы 3 § 9 гл. III следует существование и единственность центрального проектора e, такого, что на OJB-алгебре ограниченных элементов eE_h есть разделяющее семейство нормальных состояний; на OJB-алгебре ограниченных элементов $(1-e)\,E_h$ нет ни одного нормального состояния. Тогда ясно, что на OC^*-алгебре O^*-алгебры $(1-e)E$ нет ни одного нормального состояния, а OC^*-алгебра A ограниченных элементов из eE обладает разделяющим семейством нормальных состояний.

Итак, A — AW^*-алгебра, которая обладает разделяющим семейством нормальных состояний. Следовательно (см § 1), A изоморфна некоторой алгебре фон Неймана B в гильбертовом пространстве H. Пусть $\Phi\colon A \longrightarrow B$ — изоморфизм и $S(B)$ — алгебра всех линейных операторов в H, локально измеримых относительно B. Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что Φ продолжается до изоморфизма $\overline{\Phi}$ O^*-алгебры $F = eE$ на заполненную подалгебру в $S(B)$. По теореме 1 следует лишь проверить выполнение условия (*), т. е. если x — положительный эрмитов элемент F, $\{e_\lambda\}$ — его спектральное семейство, то линейный положительный самосопряженный оператор T в H, определенный спектральным семейством $\{\Phi(e_\lambda)\}$, локально измерим относительно B.

Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что оператор T не является локально измеримым.

Сначала рассмотрим случай, когда алгебра фон Неймана B полуконечная. Пусть $g_\lambda = \Phi(e_\lambda)$ и z_n — наибольший центральный проектор в B, для которого проектор $z_n g_n^\perp$ является конечным, где $n = 1, 2, \dots$. Последовательность проекторов $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает, $\sup_n g_n = 1$ и $g_n(H) \subset D(T)$. Следовательно, последовательность проекторов $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает и так как оператор T нелокально измерим, то $\sup_n z_n \neq 1$ (см. § 6).

Можно считать что $z_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$ (в противном случае можно перейти к алгебре фон Неймана zB, где $z = 1 - \sup_n z_n$).

Пусть Z — центр алгебры B. Существует семейство $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ попарно ортогональных проекторов из Z, таких, что $\sup_\alpha W_\alpha = 1$ и для каждого α алгебра $W_\alpha Z$ является алгеброй фон Неймана счетного типа. Следовательно, можно считать, что Z — алгебра счетного типа (в противном случае рассмотрим каждую из алгебр $W_\alpha B$).

Поскольку Z — алгебра счетного типа, то на Z существует положительный нормальный функционал μ с носителем (см. § 9 гл. III), равным единице, и алгебра Z $*$-изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega, \mu)$ всех измеримых существенно ограниченных комплексных функций на пространстве с конечной мерой (Ω, μ) (см. § 1).

Пусть n_0 — такое натуральное число, что $g_{n_0} \neq 0$. Так как B — полуконечная алгебра фон Неймана, то существует такой ненулевой конечный проектор h_0, что $g_{n_0} \geqslant h_0$. Пусть D — размерностная функция на логике проекторов алгебры B со значениями в множестве неотрицательных измеримых функций на Ω. Каков бы ни был центральный проектор $z \neq 0$, проектор $g_{n_0}^{\perp} z$ по построению бесконечен. Следовательно, $D\left(g_{n_0}^{\perp}\right)(\omega) = +\infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Положим $k_n = g_{n+1} - g_n$. Тогда $g_{n_0}^{\perp} = \sup\limits_{n \geqslant n_0} k_n$. Существуют номер n_1 и центральный проектор z_1, такие, что $D(z_1 h_0)(\omega) \leqslant \leqslant D\left(z_1 \sup\limits_{n_0 \leqslant n \leqslant n_1} k_n\right)(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, $z_1 \leqslant z_0$, $\mu(z_1) \geqslant \geqslant \mu(z_0) - \mu(z_0)/2^2$, где z_0 — центральный носитель проектора h_0,

Рассуждая далее таким же образом, построим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_0 < n_1 < \ldots$ и убывающую последовательность центральных проекторов $z_0 \geqslant z_1 \geqslant \ldots$ со свойствами:

$$1)\ D(z_i h_0)(\omega) \leqslant D\left(z_i \sup\{k_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}\right)(\omega)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$;

$$(2)\ \mu(z_i) \geqslant \mu(z_{i-1}) - \mu(z_0)/2^{i+1}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $z = \inf\limits_i z_i$, $h_i = z \cdot \sup\limits_{n_{i-1} \leqslant n \leqslant n_i} k_n$, $\hat{h}_0 = z h_0$. Тогда $D\left(\hat{h}_0\right)(\omega) \leqslant \leqslant D(h_i)(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\mu(z) \geqslant \mu(z_0) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(z_0)/2^{i+1} \neq 0$, то z — ненулевой центральный проектор и $z \leqslant z_0$. Следовательно, $\hat{h}_0$ — ненулевой конечный проектор. Из теоремы о сравнении проекторов и свойства функции D следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существует проектор $\hat{h}_i \leqslant h_i$, эквивалентный проектору $\hat{h}_0$. Проекторы $\left\{\hat{h}_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ попарно ортогональны.

Пусть для каждого $i = 1, 2, \ldots$ v_i — частичная изометрия из B с начальным проектором $\hat{h}_0$ и конечным $\hat{h}_i$. Рассмотрим наименьшую алгебру фон Неймана C в H, содержащую все элементы $v_1, v_2, \ldots$. Тогда алгебра C изоморфна алгебре $B(H_1)$ всех ограниченных линейных операторов на некотором гильбертовом пространстве H_1 ([126, гл. V, предложение 1.22]). Пусть ψ — изоморфизм C на $B(H_1)$ и $P_i = \psi\left(\hat{h}_i\right)$. Тогда $\{P_i\}$ — последовательность ненулевых попарно ортогональных проекторов в H_1. Пусть ξ_0 — произвольный единичный вектор в H_1 и q_0 — проектор на одномерное подпространство в H_1, порожденное вектором ξ_0. В C существует проектор r_0, такой, что $\psi(r_0)=q_0$. Поскольку q_0 — атом в $B(H_1)$, то r_0 — атом в C. Следовательно, если $y\in C$, то $r_0yr_0=\lambda r_0$, где λ — комплексное число. Поэтому для любого $n=1, 2, \ldots$

$$r_0\left(\sum_{i=1}^{n} i\hat{h}_i\right)r_0=\lambda_n r_0,\ \lambda_n\geqslant 0.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n} n_i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right)\leqslant x.$$

Следовательно, в A существует элемент

$$\hat{x}=\sup_n\left\{\sum_{i=1}^{n} i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right)\right\}$$

и

$$\Phi^{-1}(r_0)\hat{x}\Phi^{-1}(r_0)=\sup_n\left\{\Phi^{-1}\left(r_0\left(\sum_{i=1}^{n} i\hat{h}_i\right)r_0\right)\right\}=$$

$$=\sup_n\left\{\lambda_n\Phi^{-1}(r_0)\right\}.$$

Последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и для каждого $n=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\lambda_n\Phi^{-1}(r_0)\leqslant\Phi^{-1}(r_0)\hat{x}\Phi^{-1}(r_0).$$

Следовательно, $\sup\limits_n\lambda_n=\lambda<+\infty$. Но тогда $\Phi^{-1}(r_0)\hat{x}\Phi^{-1}(r_0)=$ $=\lambda\Phi^{-1}(r_0)$ и, значит,

$$r_0\left(\sum_{i=1}^{n} i\hat{h}_i\right)r_0\leqslant\lambda r_0,\ n=1, 2, \ldots .$$

Отсюда

$$q_0\left(\sum_{i=1}^{n} iP_i\right)q_0\leqslant\lambda q_0,\ n=1, 2, \ldots .$$

Таким образом, для любого $\xi_0\in H_1$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} i\,(P_i\,\xi_0,\ \xi_0)\right\}<+\infty.$$

Однако существует такой вектор $\xi_0\in H_1$, что $(P_i\,\xi_0,\ \xi_0)=i^{-2}$, $i=1, 2, \ldots$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(P_i\,\xi_0,\ \xi_0)=\sum_{i=1}^{n} i^{-1}.$$

Полученное противоречие доказывает, что оператор T локально измерим относительно алгебры фон Неймана B.

Теперь рассмотрим случай, когда B — чисто бесконечная алгебра фон Неймана. Как и в предыдущем случае, будем считать, что центр Z алгебры B является алгеброй фон Неймана счетного типа. Пусть z_n — центральный носитель проектора $g_n^{\perp}$, где $g_\lambda = \Phi(e_\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку B — чисто бесконечная алгебра фон Неймана и оператор $T \overline{\in} S(B)$, то $\inf\limits_n z_n \neq 0$. Следовательно, можно считать, что $z_n = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$ (в противном случае достаточно перейти к алгебре zB, где $z = \inf\limits_n z_n$). Пусть $k_n = g_{n+1} - g_n$. Будем считать, что $k_n \neq 0$ при всех n. Каждый проектор k_n мажорирует некоторый ненулевой проектор r_n счетного типа и поскольку Z — счетного типа, то можно считать, что $z(r_n) = z(k_n)$, где $z(\cdot)$ означает центральный носитель. Пусть $r = \sup\limits_n r_n$. Тогда алгебра фон Неймана rBr является алгеброй счетного типа [58]. Проверим, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ центральный носитель проектора $\sup\limits_{i > n} r_i$ в алгебре rBr равен r. Пусть $\hat{z}$ — ненулевой центральный проектор в rBr. Тогда $\hat{z} = zr$, где z — центральный проектор в B ([58]).

Так как проектор $\sup\limits_{i \geqslant n} k_i$ имеет в B центральный носитель, равный единице, то для некоторого $i \geqslant n$ проектор $k_i z$ отличен от нуля. Но проектор r_i имеет в B тот же центральный носитель, что и проектор k_i. Следовательно, $r_i z \neq 0$. Но тогда $r_i \hat{z} = (r_i z) r \neq 0$. Поскольку центральный проектор $\hat{z} \in rBr$ был выбран произвольно, то центральный носитель проектора $\sup\limits_{i > n} r_i$ в rBr равен r.

Так как в чисто бесконечной алгебре фон Неймана счетного типа любые два проектора, имеющие равные центральные носители, эквивалентны ([58]), то поступим следующим образом. Пусть μ — положительный нормальный функционал на rBr, имеющий носитель, равный r. Существует натуральное число $n_2 \geqslant 2$, такое, что, если $\hat{z}_1$ — центральный носитель проектора r_1 в rBr, $\hat{z}_2$ — центральный носитель проектора $\hat{z}_1 \sup\limits_{2 < i < n_2} \{r_i\}$ в rBr, то $\mu(\hat{z}_2) \geqslant \mu(\hat{z}_1) - \mu(\hat{z}_1)/2^2$ (здесь мы используем то, что $\hat{z}\left(\sup\limits_{i > 2} \{r_i\}\right) = r$, где $\hat{z}(\cdot)$ — центральный носитель в rBr).

Рассуждая далее таким же образом, построим возрастающую последовательность натуральных чисел $2 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \ldots$, такую, что, если $\hat{z}_l$ — центральный носитель проектора

$$\hat{z}_{l-1}\Bigl(\sup_{n_{l-1}<m<n_l}\{r_m\}\Bigr),$$

то

$$\mu\left(\hat{z}_l\right) \geqslant \mu\left(\hat{z}_{l-1}\right) - \mu\left(\hat{z}_1\right)/2^{l+1}.$$

Пусть $\hat{z} = \inf\limits_l \hat{z}_l$, $h_1 = \hat{z}r$, $h_l = \hat{z}\sup\limits_{n_{l-1}<m<n_l}\{r_m\}$, тогда $\mu\left(\hat{z}\right)>0$ и поэтому $h_1, h_2, \ldots$ — ненулевые проекторы, имеющие общий центральный носитель $\hat{z}$. Как уже отмечалось, эти проекторы попарно эквивалентны. Отсюда, как и в случае полуконечной алгебры, приходим к противоречию.

Поскольку любая алгебра фон Неймана распадается в произведение полуконечной и чисто бесконечной алгебр, то тем самым доказано выполнение условия (*). ■

Из теоремы 2 вытекает следующий результат, содержащий частичное описание OJ-факторов.

Теорема 3. Произвольный OJ-фактор принадлежит одному и только одному из следующих типов:

A. OJ-фактор, на OJB-алгебре ограниченных элементов которого нет ни одного нормального состояния;

B. исключительная OJ-алгебра M_3^8;

C. спин-фактор (см. § 1, гл. III, пример 1);

D. OJ-фактор, OJB-алгебра ограниченных элементов которого изоморфна эрмитовой части некоторой алгебры фон Неймана (фактора) B, а сама является заполненной OJ-подалгеброй OJ-алгебры $S_h(B)$-эрмитовой части O^*-алгебры $S(B)$ всех операторов, локально измеримых относительно B;

E. OJ-фактор, OJB-алгебра ограниченных элементов которого изоморфна эрмитовой части вещественной алгебры фон Неймана*) (фактора).

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы 3 § 9 гл. III произвольный OJ-фактор принадлежит типу A, либо B, либо его подалгебра ограниченных элементов изоморфна JW-алгебре. По теореме 6.4 [160] всякий JW-фактор либо является спин-фактором, либо изоморфен эрмитовой части алгебры фон Неймана B, либо эрмитовой части вещественной алгебры фон Неймана. В первом случае наш OJ-фактор сам изоморфен спин-фактору (тип C) (поскольку не может содержать неограниченные элемен-

*) Вещественная *-алгебра B ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H называется вещественной алгеброй фон Неймана, если она слабо замкнута и $B \cap iB = \{0\}$.

ты), во втором случае по теореме 2 OJ-фактор изоморфен OJ-подалгебре $S_h(B)$ (тип D). ■

Замечание. Для OJ-факторов типа E верна теорема о представлении их неограниченными самосопряженными операторами аналогично случаю D (Аюпов Ш. А. О конструкции йордановых самосопряженных операторов.— ДАН СССР, 1982, т. 267, № 3).

Рассмотрим прямое произведение универсальных O^*-алгебр.

Предложение 1. Пусть E — универсальная O^*-алгебра и $\{z_i\}_{i\in I}$ — семейство ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов из E, для которого $\bigvee_{i\in I} z_i = 1$. Для каждого $i\in I$ положим $E_i = z_i E$. Тогда E — $*$-изоморфно прямому произведению $\prod_{i\in I} E_i$ универсальных O^*-алгебр E_i, $i\in I$.

Доказательство. Если F_i — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в E_i, $i\in I$, и F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в E, содержащая E_i, то $F_i = z_i F$. Следовательно, F_i — универсальное комплексное полуполе, и потому E_i — универсальная O^*-алгебра, $i\in I$. Пусть $\{e_\lambda\} = \left\{\left(e_\lambda^{(i)}\right)\right\}$ — спектральное семейство проекторов в O^*-алгебре $\prod_{i\in I} E_i$. Тогда при каждом фиксированном $i\in I$ семейство проекторов $\left\{e_\lambda^{(i)}\right\}$ является спектральным в универсальной O^*-алгебре E_i. Следовательно, существует такой $x_i\in E_i$, что $x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda^{(i)}$. Элемент $x = \{x_i\}_{i\in I}$ принадлежит $\prod_{i\in I} E_i$ и $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Таким образом, O^*-алгебра $\prod_{i\in I} E_i$ — универсальная. Если $\{x_i\}_{i\in I}$ — ограниченный положительный элемент из $\prod_{i\in I} E_i$, то существует такое число $\lambda > 0$, что $0 \leqslant x_i \leqslant \lambda z_i \leqslant \lambda 1$. Для каждого конечного подмножества $\alpha = (i_1, i_2, \dots i_n) \subset I$ положим $x_\alpha = \sum_{i\in\alpha} x_i \in E$. Множество $\mathrm{A} = \{\alpha\}$ есть направление при введении частичного порядка по включению $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha \subset \beta$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ возрастает и $0 \leqslant x_\alpha \leqslant \lambda 1$. Следовательно, в E_h существует $x = \sup_\alpha x_\alpha$; при этом $0 \leqslant x \leqslant \lambda 1$ и $xz_i = z_i x z_i = \sup_\alpha z_i x_\alpha z_i = x_i$. Это означает, что отображение Φ из OC^*-алгебры B ограниченных элементов в E в OC^*-алгебру $\overline{B}$ ограниченных элементов в $\prod_{i\in I} E_i$, определяемое по формуле $\Phi(x) = \{xz_i\}_{i\in I}$, является $*$-изоморфизмом B на $\overline{B}$. Из теоремы 1 вытекает, что универсальные O^*-алгебры E и $\prod_{i\in I} E_i$ $*$-изоморфны. ■

Глава V

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ O^*-АЛГЕБРЫ

В данной главе рассматривается класс O^*-алгебр, на которых можно ввести топологию, аналогичную по своим свойствам топологии сходимости по мере. Эти O^*-алгебры названы топологическими, а топология в них — R-топологией. Выясняются условия, при которых на O^*-алгебре существует R-топология, устанавливается единственность R-топологии и дается критерий полноты топологической O^*-алгебры относительно равномерности, порожденной R-топологией.

Отметим, что R-топологию можно рассматривать и на OJ-алгебрах. Результаты настоящей главы с некоторой модификацией верны и для топологических OJ-алгебр. Подробнее об этом см. [30].

§ 1. Топология сходимости по мере в алгебре $S(B)$

Пусть B — конечная алгебра фон Неймана, μ — точный нормальный конечный след на B, ∇ — логика проекторов в B и $S(B)$ — алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к B. Обозначим через $U(\varepsilon, \delta)$ множество тех $T \in S(B)$, для которых существует $P \in \nabla$, такое, что

$$\mu(P^{\perp}) \leqslant \delta,\ TP \in B,\ \|TP\| \leqslant \varepsilon,\ \delta > 0,\ \varepsilon > 0.$$

Предложение 1: а) $\lambda U(\varepsilon, \delta) = U(|\lambda|\varepsilon, \delta)$, если $\lambda \neq 0$;

б) $U(\varepsilon, \delta) + U(\varepsilon, \delta) \subset U(2\varepsilon, 2\delta)$;

в) $U(\varepsilon, \delta)^* = \{T^* : T \in U(\varepsilon, \delta)\} \subset U(\varepsilon, 2\delta)$;

г) если $T \in U(\varepsilon, \delta)$, $S \in B$, $\|S\| \leqslant 1$, то $ST \in U(\varepsilon, \delta)$;

д) $\bigcap\limits_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} U(\varepsilon, \delta) = \{0\}$.

Доказательство. Пункты а) и г) очевидны.

б) Пусть T, $S \in U(\varepsilon, \delta)$ и P, Q — такие проекторы из B, что $\mu(P^\perp) \leqslant \delta$, $\mu(Q^\perp) \leqslant \delta$, $TP \in B$, $SQ \in B$, $\|TP\| \leqslant \varepsilon$, $\|SQ\| \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\mu\left(P^\perp)Q)^\perp\right) = \mu\left(P^\perp \vee Q^\perp\right) \leqslant \mu\left(P^\perp\right) + \mu\left(Q^\perp\right) \leqslant 2\delta,$$

при этом $(T+S)(P \wedge Q) \in B$ и

$$\|(T+S)(P \wedge Q)\| \leqslant \|T(P \wedge Q)\| + \|S(P \wedge Q)\| \leqslant \|TP\| + \|SQ\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, $T + S \in U(2\varepsilon, 2\delta)$.

в) При доказательстве этого пункта используется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $T \in S(B)$, P — проектор из B и $P_T = 1 - r(P^\perp T)$, где $r(P^\perp T)$ — правый носитель оператора $P^\perp T$. Тогда $TP_T = PTP_T$ и $P_T^\perp \underset{\sim}{<} P^\perp$.

Доказательство. Имеем

$$TP_T = PTP_T + P^\perp TP_T = PTP_T + P^\perp T\left(1 - r\left(P^\perp T\right)\right) = PTP_T.$$

Так как правый и левый проекторы $r(T)$ и $l(T)$ эквивалентны для любого $T \in S(B)$, то

$$P_T^\perp = r\left(P^\perp T\right) \sim l\left(P^\perp T\right) \leqslant P^\perp,$$

следовательно, $P_T^\perp \underset{\sim}{<} P^\perp$. ■

Доказательство п. в) Пусть $S \in U(\varepsilon, \delta)^*$, тогда $S = T^*$, где $T \in U(\varepsilon, \delta)$. Выберем проектор P так, чтобы $\mu\left(P^\perp\right) \leqslant \delta$ и $TP \in B$, $\|TP\| \leqslant \varepsilon$. Тогда $\|PTP\| \leqslant \varepsilon$ и потому $\|PT^*P\| \leqslant \varepsilon$. Положим $Q = P \wedge P_{T^*}$. В силу леммы 1

$$\mu\left(Q^\perp\right) \leqslant \mu\left(P^\perp\right) + \mu\left(P_{T^*}^\perp\right) \leqslant 2\mu\left(P^\perp\right) \leqslant 2\delta.$$

Кроме того,

$$SQ = T^*Q = T^*P_{T^*}Q = PT^*Q = PT^*PQ,$$

следовательно, $SQ \in B$ и $\|SQ\| \leqslant \varepsilon$, т. е. $S \in U(\varepsilon, 2\delta)$.

д) Пусть $T \in U(\varepsilon, \delta)$ при всех $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $T = W|T|$ — полярное разложение оператора T. Тогда $|T| = W^*T$ и в силу п. г) $|T| \in U(\varepsilon, \delta)$ при всех $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Алгебра $S(B)$ является O^*-алгеброй (см. § 6, гл. IV), поэтому если $|T| \neq 0$, то найдутся такие ненулевой проектор $P \in B$ и число $\varepsilon > 0$, что

$$P|T| = |T|P = P|T|P \geqslant 2\varepsilon P.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\mu(P) > \delta$. Покажем, что $|T| \bar{\in} U(\varepsilon, \delta)$. Если $|T| \in U(\varepsilon, \delta)$, то найдется такое $Q \in \nabla$, что $\mu\left(Q^\perp\right) \leqslant \delta$ и $\||T|Q\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда

$$2\varepsilon\|PQ\|^2 = 2\varepsilon\|(PQ)^*(PQ)\| = 2\varepsilon\|QPQ\| \leqslant \|QP|T|PQ\| \leqslant$$
$$\leqslant \||T|Q\| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\|PQ\| < 1$. Это означает, что $P \wedge Q = 0$. Следовательно,

$$\mu(P) + \mu(Q) = \mu(P \vee Q) \leqslant \mu(1) = \mu(Q^{\perp}) + (Q).$$

Поэтому $\mu(P) \leqslant \mu(Q^{\perp}) \leqslant \delta$, что противоречит выбору числа δ. Таким образом, $|T| = 0$ и $T = W|T| = 0$. ■

Из предложения 1 следует, что множества $\{T + U(\varepsilon, \delta)\}$, $T \in S(B)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ определяют на $S(B)$ топологию t, относительно которой $S(B)$ — топологическое векторное пространство; при этом множества $\{U(\varepsilon, \delta)\}$ образуют базис окрестностей нуля в $(S(B), t)$. В случае, когда B — коммутативная алгебра фон Неймана и μ — точный нормальный конечный след на B, сходимость последовательностей в топологии t совпадает с известной сходимостью последовательностей по мере μ.

Топологию t в $S(B)$, построенную выше, называют топологией сходимости по мере, а сходимость последовательностей операторов из $S(B)$ в этой топологии — сходимостью по мере. Впервые топология сходимости по мере в $S(B)$ как $*$-сходимость к сходимости почти всюду была рассмотрена в работе [120]. Затем свойства этой топологии изучались в работах [62, 87, 90, 100, 125] и др., где уже предполагалось, что B — полуконечная алгебра фон Неймана.

Из построения топологии сходимости по мере t видно, что множества $U\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют счетный базис окрестностей нуля, поэтому $(S(B), t)$ метризуемо.

Предложение 2. Пусть t — топология сходимости по мере в $S(B)$. Тогда:

1) инволюция $T \longrightarrow T^*$ непрерывна;

2) если последовательность проекторов $\{P_n\}$ сходится к нулю в топологии t, то $T_n P_n \xrightarrow{t} 0$ для любой последовательности $\{T_n\} \subset S(B)$;

3) если сеть проекторов $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ монотонно убывает, то $P_\alpha \xrightarrow{t} 0$;

4) операция умножения TS непрерывна по совокупности переменных;

5) множества $S_h(B) = \{T \in S(B) : T = T^*\}$ и $S^+(B) = \{T \in S(B) : T \geqslant 0\}$ замкнуты в топологии t.

Доказательство. Пункт 1) следует из п. в.) предложения 1.

2) Пусть $\{P_n\} \subset B$ и $P_n \xrightarrow{t} 0$. Покажем, что $\mu(P_n) \to 0$. Для произвольной окрестности нуля $U(\varepsilon, \delta)$, $\varepsilon < 1$ существует такой номер n_0, что $P_n \in U(\varepsilon, \delta)$ при $n \geqslant n_0$, следовательно, найдутся такие $Q_n \in \nabla$, что $\mu(Q_n^{\perp}) \leqslant \delta$ и $\|P_n Q_n\| \leqslant \varepsilon < 1$, $n \geqslant n_0$. Тогда $P_n \wedge Q_n = 0$ и $\mu(P_n) \leqslant \mu(Q_n^{\perp}) \leqslant \delta$ при $n \geqslant n_0$, т. е. $\mu(P_n) \to 0$.

Пусть $T_n \in S(B)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Выберем n_0 так, чтобы $\mu(P_n) \leqslant \delta$ при $n \geqslant n_0$; тогда $T_n P_n \in U(\varepsilon, \delta)$ при $n \geqslant n_0$, так как $\left\| (T_n P_n) P_n^{\perp} \right\| = 0 < \varepsilon$.

3) Если $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — убывающая к нулю сеть проекторов из B, то в силу нормальности следа μ $\mu(P_\alpha) \to 0$. Поэтому для каждой окрестности нуля $U(\varepsilon, \delta)$ найдется такое $\alpha_0 \in A$, что $\mu(P_\alpha) \leqslant \delta$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ и потому $P_\alpha \in U(\varepsilon, \delta)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, т. е. $P_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

4) Покажем, что для любых $T \in S(B)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, что

$TU(\varepsilon_0, \delta_0) \subset U(\varepsilon, \delta)$, $U(\varepsilon_0, \delta_0) T \subset U(\varepsilon, \delta)$, $U(\varepsilon_0, \delta_0) U(\varepsilon_0, \delta_0) \subset U(\varepsilon, \delta)$.

Пусть $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Выберем $\lambda_0 > 0$ так, чтобы $\mu\left(E_{\lambda_0}^{\perp}\right) \leqslant \delta/4$, и положим $\varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon\lambda_0^{-1}, \varepsilon\right)$, $\delta_1 = \delta/4$. Если $S \in U(\varepsilon_1, \delta_1)$, то найдется такое $Q \in \nabla$, что $\mu(Q^{\perp}) \leqslant \delta_1$ и $\|SQ\| \leqslant \varepsilon_1$.

Пусть $P = Q \wedge E_{\lambda_0}$ и $R = P \wedge P_S$, тогда

$$\mu(P^{\perp}) \leqslant \mu(Q^{\perp}) + \mu\left(E_{\lambda_0}^{\perp}\right) \leqslant \frac{1}{2}\delta,$$

$$\mu(R^{\perp}) \leqslant \mu(P) + \mu\left(P_S^{\perp}\right) \leqslant 2\mu(P^{\perp}) \leqslant \delta,$$

$$\| |T| SR \| = \| |T| PSP_S R \| \leqslant \| |T| P \| \cdot \|SR\| \leqslant \| |T| E_{\lambda_0} \| \|SQ\| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_0 \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $|T| S \in U(\varepsilon, \delta)$ и в силу п. г) предложения 1 $TS = W|T|S \in U(\varepsilon, \delta)$, где $T = W|T|$ — полярное разложение оператора T. Таким образом,

$$TU(\varepsilon_1, \delta_1) \subset U(\varepsilon, \delta).$$

В частности, для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдутся такие $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, что $T^* U(\varepsilon_2, \delta_2) \subset U(\varepsilon, \delta/2)$. Если $S \in U(\varepsilon_2, \delta_2/2)$, то $S^* \in U(\varepsilon_2, \delta_2)$ (п. в.) предложения 1) и $T^* S^* \in U(\varepsilon, \delta/2)$, откуда $ST = (T^* S^*)^* \subset U(\varepsilon, \delta)$. Следовательно,

$$U(\varepsilon_2, \delta_2/2)\, T \subset U(\varepsilon, \delta).$$

Пусть теперь $\varepsilon_3 = \sqrt{\varepsilon}$, $\delta_3 = \delta/2$, S, $T \in U(\varepsilon_3, \delta_3)$ и P, Q — такие проекторы из B, что $\mu(P^{\perp}) < \delta_3$, $\mu(Q^{\perp}) < \delta_3$, $\|SP\| \leqslant \varepsilon_3$, $\|TQ\| \leqslant \varepsilon_3$. Положим $R = Q \wedge P_T$, тогда $\mu(R^{\perp}) \leqslant \mu(Q^{\perp}) + \mu\left(P_T^{\perp}\right) \leqslant \mu(Q^{\perp}) + \mu(P^{\perp}) \leqslant \delta$ и

$$\|STR\| = \|SPTP_T R\| \leqslant \|SP\| \|TQ\| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $ST \in U(\varepsilon, \delta)$ и потому

$$U(\varepsilon_3, \delta_3)\, U(\varepsilon_3, \delta_3) \subset U(\varepsilon, \delta).$$

Осталось положить $\varepsilon_0 = \min\limits_{i=1,2,3} \varepsilon_i$, $\delta_0 = \min\limits_{i=1,2,3} \delta_i$.

5) Так как инволюция непрерывна в $(S(B), t)$, то $S_h(B)$ замкнуто в топологии t.

Покажем, что $S^+(B)$ замкнуто в $S_h(B)$ (отсюда будет следовать, что $S^+(B)$ замкнуто в $S(B)$). Пусть $T \in S_h(B)$, но $T \bar{\in} S^+(B)$. Тогда существуют такой ненулевой проектор P и число $\varepsilon > 0$, что $PT = PTP \leqslant -2\varepsilon P$. Выберем $\delta < \mu(P)$ и пусть $S \in (T + U(\varepsilon, \delta)) \cap \cap S_h(B)$. Пусть Q — такой проектор из B, что $\mu(Q^\perp) \leqslant \delta$ и $\|(S-T)Q\| \leqslant \varepsilon$. Если $R = Q \wedge P = 0$, то $\mu(P) \leqslant \mu(Q^\perp) \leqslant \delta < \mu(P)$, что невозможно. Поэтому $R \neq 0$ и

$$\|R(S-T)R\| \leqslant \|(S-T)Q\| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что

$$RSR \leqslant \varepsilon R + RTR \leqslant \varepsilon R - 2\varepsilon R = -\varepsilon R,$$

т. е. $S \bar{\in} S^+(B)$. Следовательно,

$$(T + U(\varepsilon, \delta)) \cap S^+(B) = \varnothing. \blacksquare$$

Из п. 4 предложения 2 вытекает, что $S(B)$ относительно топологии сходимости по мере является топологическим кольцом.

Теорема 1. Кольцо $S(B)$ является полным равномерным пространством относительно равномерности, порожденной топологией сходимости по мере.

Доказательство. Так как $(S(B), t)$ — метризуемое топологическое векторное пространство и инволюция непрерывна в $(S(B), t)$, то достаточно показать, что каждая фундаментальная последовательность $\{T_n\} \subset S_h(B)$ сходится в $(S(B), t)$.

Множества $\{U(2^{-n}, 2^{-n})\}$ образуют базис окрестностей нуля в топологии t. Если $\{T_n\} \subset S_h(B)$ — фундаментальная последовательность, то, заменив эту последовательность на подпоследовательность, можно считать, что

$$T_{n+1} - T_n \in U(2^{-n}, 2^{-n}),\ n = 1, 2, \dots .$$

Выберем проекторы P_n так, чтобы $\mu(P_n^\perp) \leqslant 2^{-n}$, $(T_{n+1} - T_n)P_n \in B$ и $\|(T_{n+1} - T_n)P_n\| \leqslant 2^{-n}$. Если $\{E_\lambda^{(n)}\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора T_n, то, очевидно, существует такое $\lambda(n) > 0$, что $\mu(Q_n^\perp) \leqslant 2^{-n}$, где $Q_n = \left(E_{-\lambda(n)}^{(n)}\right)^\perp \wedge \wedge E_{\lambda(n)}^{(n)}$, при этом $\|T_n Q_n\| \leqslant \lambda(n)$.

Пусть $R_k = \bigwedge\limits_{n \geqslant k} (P_n \wedge Q_n)$, тогда

$$\mu(R_k^\perp) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu(P_n^\perp \vee Q_n^\perp) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu(P_n^\perp) + \mu(Q_n^\perp) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n+1} = 2^{-k+2}.$$

Так как $\{R_k\}$ — возрастающая последовательность проекторов и $\mu(R_k^{\perp}) \to 0$ при $k \to \infty$, то $\bigwedge_{k=1}^{\infty} R_k = \mathbf{1}$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем $\|(T_{n+1} - T_n) R_k\| \leqslant 2^{-n}$ при $n \geqslant k$. Так как $T_n R_k \in B$ при $n \geqslant k$, то последовательность $\{T_n R_k\}$, $n = 1, 2, \ldots$ фундаментальна по норме в B для каждого фиксированного k. Поэтому существует $S_k \in B$, такое, что $\|T_n R_k - S_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $m \geqslant k$, то

$$S_m R_k = \left(\lim_n T_n R_m\right) R_k = \lim_n T_n R_m R_k = \lim_k T_n R_k = S_k. \quad (1)$$

Обозначим через H гильбертово пространство, в котором действует алгебра фон Неймана B, и определим в H линейный оператор S с плотной областью определения $D(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k(H)$, полагая

$$S\xi = S_k \xi, \text{ если } \xi \in R_k(H).$$

В силу (1) определение S корректно. Покажем, что оператор S присоединен к B. Пусть V — произвольный унитарный оператор из коммутанта B' алгебры B. Тогда $R_k V = V R_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ и потому $V(D(S)) \subset D(S)$.

Следовательно, $S_\eta B$. Если $\xi, \zeta \in D(S)$, то $\xi, \zeta \in R_k(H)$ для некоторого k. Поэтому

$$(S\xi, \zeta) = (S_k \xi, \zeta) = \lim_n (T_n R_k \xi, \zeta) = \lim_n (T_n \xi, \zeta) = $$
$$= \lim_n (\xi, T_n \zeta) = (\xi, S\zeta),$$

т. е. S — симметрический оператор в H с плотной областью определения. Следовательно, S допускает замыкание $\bar{S}$ и оператор $\bar{S}$ измерим относительно B (напомним, что B — конечная алгебра фон Неймана), т. е. $\bar{S} \in S(B)$.

Так как

$$\|(S - T_n) R_n\| = \|S_n - T_n R_n\| = \lim_m \|(T_{n+m} - T_n) R_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \|(T_{n+m+1} - T_{n+m}) R_n\| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(n+m)} = 2^{-n+1}$$

и $\mu(R_n^{\perp}) \leqslant 2^{-n+2}$, то $(\bar{S} - T_n) \in U(2^{-n+1}, 2^{-n+2})$. Поэтому $T_n \xrightarrow{t} \bar{S}$. ■

Теорема 1 позволяет установить связь между (o)-топологией в $S_h(B)$ и топологией сходимости по мере.

Предложение 3. Топология сходимости по мере индуцирует в $S_h(B)$ (o)-топологию.

Доказательство. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset B_h$ и $T_\alpha\xrightarrow{(o)}0$ в B_h. Тогда существуют сети $\{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, $\{\mathbf{B}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, такие, что $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{B}_\alpha\in B_h$, $\mathbf{A}_\alpha\leqslant T_\alpha\leqslant\mathbf{B}_\alpha$ и $\mathbf{A}_\alpha\uparrow 0$, $\mathbf{B}_\alpha\downarrow 0$. В силу нормальности следа $\mu(\mathbf{A}_\alpha)\to 0$ и $\mu(\mathbf{B}_\alpha)\to 0$. Но

$$\mu(\mathbf{A}_\alpha)\leqslant\mu(T_\alpha)\leqslant\mu(\mathbf{B}_\alpha),$$

поэтому $\mu(T_\alpha)\to 0$.

Обозначим через $\left\{E_\lambda^{(\alpha)}\right\}$ — спектральное семейство проекторов для T_α. Так как для каждого проектора P

$$P\mathbf{A}_\alpha P\leqslant PT_\alpha P\leqslant P\mathbf{B}_\alpha P$$

и

$$P\mathbf{A}_\alpha P\uparrow 0,\quad P\mathbf{B}_\alpha P\downarrow 0,$$

то $\mu(PT_\alpha P)\to 0$. В частности, $\mu\left(E_{-\varepsilon}^{(\alpha)}T_\alpha\right)\to 0$. Если $P(\alpha,\varepsilon)=\left(1-E_\varepsilon^{(\alpha)}\right)\vee E_{-\varepsilon}^{(\alpha)}$, то

$$\mu(P(\alpha,\varepsilon))=\mu\left(1-E_\varepsilon^{(\alpha)}\right)+\mu\left(E_{-\varepsilon}^{(\alpha)}\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\mu(T_\alpha)-\frac{1}{\varepsilon}\mu\left(E_{-\varepsilon}^{(\alpha)}T_\alpha\right)\to 0.$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\delta>0$; выберем α_0 так, чтобы $\mu(P(\alpha,\varepsilon))\leqslant\delta$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$. Тогда $\left\|T_\alpha P^\perp(\alpha,\varepsilon)\right\|\leqslant\varepsilon$ и потому $T_\alpha\in U(\varepsilon,\delta)$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$. Следовательно, $T_\alpha\xrightarrow{t}0$. Если $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset B_h$ и $T_\alpha\xrightarrow{(o)}T$ в B_h, $T\in B_h$, то $T_\alpha-T\xrightarrow{(o)}0$. Поэтому $T_\alpha-T\xrightarrow{t}0$.

Пусть теперь $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset S_h(B)$, $T_\alpha\xrightarrow{(o)}0$ в $S_h(B)$ и $\{\mathbf{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, $\{\mathbf{B}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$ — такие сети из $S_h(B)$, что $\mathbf{A}_\alpha\mathrel{\dot\leqslant}T_\alpha\leqslant\mathbf{B}_\alpha$ и $\mathbf{A}_\alpha\uparrow 0$, $\mathbf{B}_\alpha\downarrow 0$. Фиксируем $\alpha_0\in\mathbf{A}$ и положим $S_\alpha=T_\alpha-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1}$. Тогда $\mathbf{1}\leqslant\mathbf{A}_\alpha'\leqslant S_\alpha\leqslant\mathbf{B}_\alpha'$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$, где $\mathbf{B}_\alpha'=\mathbf{B}_\alpha-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1}$, $\mathbf{A}_\alpha'=\mathbf{A}_\alpha-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1}$ и очевидно, что $\mathbf{A}_\alpha'\uparrow(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1})$, $\mathbf{B}_\alpha'\downarrow(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1})$. Так как $\mathbf{B}_{\alpha_0}'\geqslant\mathbf{1}$, то существует обратный оператор $\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}$, причем $0\leqslant\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}\leqslant\mathbf{1}$. Пусть

$$\mathbf{A}_\alpha''=\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}\mathbf{A}_\alpha'\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1},\quad \mathbf{B}_\alpha''=\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}\mathbf{B}_\alpha'\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1},$$

$$R_\alpha=\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}S_\alpha\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}.$$

Тогда при $\alpha\geqslant\alpha_0$

$$0\leqslant\mathbf{A}_\alpha''\leqslant R_\alpha\leqslant\mathbf{B}_\alpha'',\quad \mathbf{A}_\alpha''\uparrow\left[\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+\mathbf{1})\left(\mathbf{B}_{\alpha_0}'\right)^{-1}\right],$$

$$\mathbf{B}''_\alpha \downarrow \left[\left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+1)\left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}\right],$$

при этом

$$\mathbf{B}''_\alpha \leqslant \mathbf{B}''_{\alpha_0} = \left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1} \leqslant 1,$$

т. е. $\mathbf{A}''_\alpha$, R_α, $\mathbf{B}''_\alpha \in B_h$ и $R_\alpha \xrightarrow{(o)} \left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+1)\left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}$ в B_h. Согласно доказанному выше,

$$R_\alpha \xrightarrow{t} \left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}(-\mathbf{A}_{\alpha_0}+1)\left(\mathbf{B}'_{\alpha_0}\right)^{-1}.$$

Отсюда в силу непрерывности операции умножения по совокупности переменных (п. 4) предложения 2) вытекает, что $T_\alpha \xrightarrow{t} 0$. Это означает, что топология t в $S_h(B)$ слабее, чем (o)-топология.

Пусть теперь $T_n \in S_h(B)$ и $T_n \xrightarrow{t} 0$. Из полярного разложения $T_n = W_n|T_n|$ и п. г) предложения 1 следует, что $|T_n| \xrightarrow{t} 0$. Выберем базис $\{U_k\}$ окрестностей нуля в $(S(B), t)$ так, чтобы $U_{k+1} + U_{k+1} \subset U_k$ при всех k. Существует подпоследовательность $\{T_{n_k}\}$, такая, что $|T_{n_k}| \in U_k$. Положим $S_k = \sum_{l=1}^{k} |T_{n_l}|$, тогда $S_k - S_m \in U_m$, если $k > m$, и потому последовательность $\{S_k\}$ фундаментальна в $(S(B), t)$.

Следовательно, по теореме 1, существует такое $S \in S_h(M)$, что $S_k \xrightarrow{t} S$ при $k \to \infty$, т. е. $S = \sum_{k=1}^{\infty} |T_{n_k}|$. Последовательность $\mathbf{A}_k = S - \sum_{l=1}^{k-1} |T_{n_l}|$ убывает и $\mathbf{A}_k \xrightarrow{t} 0$. Из п. 5) предложения 2 вытекает, что $S \geqslant S_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, в частности, $\mathbf{A}_k \geqslant |T_{n_k}|$. Пусть $S_0 = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$, тогда $S_0 \geqslant 0$ и так как $\mathbf{A}_k - S_0 \geqslant 0$, то $S_0 \leqslant 0$. Поэтому $S_0 = 0$, т. е. $\mathbf{A}_k \downarrow 0$. Следовательно, $T_{n_k} \xrightarrow{(o)} 0$ в $S_h(B)$, так как $-\mathbf{A}_k \leqslant -|T_{n_k}| \leqslant T_{n_k} \leqslant |T_{n_k}| \leqslant \mathbf{A}_k$. Таким образом, для каждой последовательности $\{T_n\} \subset S_h(B)$, сходящейся к нулю в топологии t, существует подпоследовательность $\{T_{n_k}\}$, которая (o)-сходится к нулю. Это означает, что (o)-топология слабее топологии t, поэтому они совпадают в $S_h(B)$. ■

Библиография: [62, 74, 87, 90, 100, 120, 125].

§ 2. R-Топология на O*-алгебре

Пусть E — O^*-алгебра, B — OC^*-алгебра ограниченных элементов в E, ∇ — логика проекторов в E и t — T_1-отделимая топология на E, относительно которой E — топологическое векторное пространство.

Определение. Пара (E, t) называется топологической O^*-алгеброй, а топология t — R-топологией в E, если выполнены следующие условия:

(T1) инволюция $x \longrightarrow x^*$ непрерывна в (E, t);

(T2) для любой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля $V \subset U$, что из $x \in V$, $a \in B$, $\|a\| \leqslant 1$ следует $ax \in V$;

(T3) если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $x_\alpha e_\alpha \xrightarrow{t} 0$ для любой сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E$;

(T4) если $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ и $e_\alpha \downarrow 0$, то $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Примеры. а) *-Алгебра всех комплексных измеримых функций на измеримом пространстве с конечной мерой (эквивалентные функции отождествляются) является коммутативной топологической O^*-алгеброй относительно топологии, порожденной сходимостью по мере.

б) Пусть B — конечная алгебра фон Неймана, μ — точный нормальный конечный след на B и t — топология сходимости по мере в алгебре $S(B)$ всех измеримых операторов, присоединенных к B, построенная по следу μ (см. § 1). Тогда в силу предложения 2 и п. г) предложения 1 из § 1 топология t является R-топологией на $S(B)$.

Множество W из O^*-алгебры E назовем нормальным, если из $x \in W$, a, $b \in B$, $\|a\| \leqslant 1$, $\|b\| \leqslant 1$, где B — OC^*-алгебра ограниченных элементов в E, следует, что $axb \in W$.

Предложение 1. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра, ∇ — логика проекторов в E. Тогда:

1) (E, t) имеет базис замкнутых нормальных окрестностей нуля;

2) если $\{x_\alpha\} \subset E_h$, то $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$ в том и только в том случае, когда $|x_\alpha| \xrightarrow{t} 0$;

3) топология τ в ∇, индуцируемая из (E, t), слабее (o)-топологии;

4) булева алгебра $Z(\nabla)$ центральных проекторов в E является равномерной булевой алгеброй (см. § 7 гл. 1) относительно индуцированной из E равномерности, порожденной R-топологией t;

5) для каждого $e \in \nabla$ алгебра eEe есть топологическая O^*-алгебра относительно индуцированной топологии;

6) если F — правильная или заполненная O^*-подалгебра в E, то F является топологической O^*-алгеброй относительно индуцированной топологии.

Доказательство. 1) Пусть U — произвольная окрестность нуля в (E, t). Выберем окрестности нуля V_1 и V_2 так, чтобы $V_2^* \subset V_1$, $V_1^* \subset U$, причем если $x \in V_1$, $y \in V_2$, $a \in B$, $\|a\| \leqslant 1$, то $ax \in V_1$, $ay \in V_2$ (см. аксиомы ($T1$) и ($T2$)). Положим

$$W = \{axb : x \in V_2,\ a,\ b \in B,\ \|a\| \leqslant 1,\ \|b\| \leqslant 1\}.$$

Очевидно, что W — нормальное множество в E и $V_2 \subset W$, т. е. W — нормальная окрестность в (E, t). Если $x \in V_2$, то $ax \in V_2$, где $a \in B$ и $\|a\| \leqslant 1$. Тогда $x^* a^* = (ax)^* \in V_2^* \subset V_1$ и $b^* x^* a^* \in V_1$, если $b \in B$, $\|b\| \leqslant 1$. Отсюда $axb \in V_1^* \subset U$. Следовательно, $W \subset U$.

Осталось показать, что замыкание $\overline{W}$ нормального множества W является также нормальным множеством.

Пусть $x_\alpha \in W$ и $x_\alpha \xrightarrow{t} x$, тогда $x_\alpha - x \xrightarrow{t} 0$. Так как в (E, t) существует базис нормальных окрестностей нуля, то $a(x_\alpha - x)b \xrightarrow{t} 0$ для любых a, $b \in B$, $\|a\| \leqslant 1$, $\|b\| \leqslant 1$. Поэтому $ax_\alpha b \xrightarrow{t} axb$, но $ax_\alpha b \in W$, следовательно, $axb \in \overline{W}$, т. е. $\overline{W}$ — нормальное множество.

2) Если $x \in E_h$, то $x = a|x|$, $|x| = ax$, где $a = e_+ - e_-$, e_+, e_- — носители x_+ и x_- соответственно. Поэтому п. 2) предложения 1 вытекает из аксиомы (T2).

3) Пусть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$, $e \in \nabla$ и $e_\alpha \downarrow e$; тогда $(e_\alpha - e) \downarrow 0$ и в силу (T4) $e_\alpha \xrightarrow{t} e$. Если $e_\alpha \uparrow e$, то $e_\alpha^\perp \downarrow e^\perp$ и потому $(1 - e_\alpha) \xrightarrow{t} (1 - e)$, т. е. $e_\alpha \xrightarrow{t} e$. Пусть теперь $e_\alpha \xrightarrow{(o)} e$ в ∇ и $\{f_\alpha\}$, $\{g_\alpha\}$ — такие сети проекторов, что $f_\alpha \leqslant e_\alpha \leqslant g_\alpha$, $f_\alpha \uparrow e$, $g_\alpha \downarrow e$. Тогда $f_\alpha \xrightarrow{t} e$, $g_\alpha \xrightarrow{t} e$, $g_\alpha - f_\alpha \xrightarrow{t} 0$ и $0 \leqslant e_\alpha - f_\alpha \leqslant g_\alpha - f_\alpha$. Следовательно, $(e_\alpha - f_\alpha) = (e_\alpha - f_\alpha)(g_\alpha - f_\alpha)$, причем $\|e_\alpha - f_\alpha\| \leqslant 1$. В силу аксиомы (T2) $e_\alpha - f_\alpha \xrightarrow{t} 0$ и потому $e_\alpha \xrightarrow{t} e$.

Таким образом, любая (o)-сходящаяся сеть в ∇ сходится в топологии τ, индуцируемой из (E, t), т. е. τ слабее (o)-топологии в ∇.

4) Пусть τ_1 — топология в $Z(\nabla)$, индуцируемая из (E, t). В силу замечания из § 7 гл. 1 достаточно показать, что

1) ортодополнение $e \to e^\perp$ непрерывно в $(Z(\nabla), \tau_1)$;

2) операция $(e, f) \to e \vee f$ непрерывна по совокупности переменных в $(Z(\nabla), \tau_1)$;

3) если $e_\alpha \downarrow 0$, $e_\alpha \in Z(\nabla)$, то $e_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$.

Свойство (1) очевидно, так как (E, t) — топологическое векторное пространство. Из предложения 3 § 3 гл. 1 следует, что $Z(\nabla)$ — правильная подлогика в ∇; следовательно, если $e_\alpha \downarrow 0$ в $Z(\nabla)$, то $e_\alpha \downarrow 0$ в ∇, и в силу (T4) $e_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$. Далее центр

Z в E является комплексным полуполем, поэтому для любых e, f, g, $d \in Z(\nabla)$ справедливо неравенство

$$|e \vee f - g \vee d| \leqslant |e-g| + |f-d|$$

и, значит, существует такое $a \in Z \cap B$, $\|a\| \leqslant 1$, что

$$|e \vee f - g \vee d| = a(|e-g| + |f-d|).$$

Отсюда, используя (T2) и п. 2), получаем свойство 2) для $(Z(\nabla), \tau_1)$. Следовательно, $Z(\nabla)$ — равномерная булева алгебра.

Для доказательства п. 5) достаточно заметить, что OC^*-алгебра ограниченных элементов в eEe совпадает с алгеброй $eEe \cap B$ и логику проекторов в eEe образует множество $\{f \in \nabla : f \leqslant e\}$.

Доказательство п. 6) очевидно. ■

Следствие 1. Если (E, t) — топологическая O^*-алгебра, то OC^*-алгебра ограниченных элементов в E имеет конечный тип.

Доказательство. Если B — не является конечной OC^*-алгеброй, то в B найдется последовательность $\{e_n\}$ ненулевых попарно эквивалентных и попарно ортогональных проекторов (см. § 1 гл. IV). Обозначим через u_n элементы из B, для которых

$$u_n u_n^* = e_1, \quad u_n^* u_n = e_n,$$

в частности,

$$e_1 = u_n e_n u_n^*.$$

Так как $e_n \leqslant e_k^\perp$ при $n \neq k$, то существует максимальная булева подалгебра ∇_1 в логике ∇ всех проекторов из B, которая содержит каждое e_n, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{e_n\}$ (o)-сходится к нулю в ∇_1, но ∇_1 — правильная подлогика в ∇ (см. предложение 1 из § 4 гл. I), поэтому $e_n \xrightarrow{(o)} 0$ в ∇. В силу п. 3) предложения 1 $e_n \xrightarrow{t} 0$. Следовательно, для каждой нормальной окрестности нуля W существует такое n_0, что $e_{n_0} \in W$. Тогда $e_1 = u_{n_0} e_{n_0} u_{n_0}^* \in W$, так как $\|u_n\| \leqslant 1$, но нормальные окрестности образуют базис окрестностей нуля в (E, t) (п. 1) предложения 1). Поэтому $e_1 = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, B имеет конечный тип. ■

Следствие 2. Если ∇ — логика проекторов в топологической O^*-алгебре (E, t), то на ∇ существует R-равномерность (см. § 7 гл. I).

Доказательство. Так как OC^*-алгебра ограниченных элементов в E имеет конечный тип, то логика ∇ дедекиндова (см. § 1 гл. IV), причем булева алгебра центральных проекторов в ∇ является равномерной (п. 4) предложения 1). Поэтому в силу теоремы 4 из § 10 гл. I на логике ∇ существует R-равномерность. ■

Предложение 2. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра, ∇ — логика проекторов в E, $И$ — R-равномерность на ∇

и τ_1 — топология на ∇, порожденная $И$. Тогда τ_1 совпадает с топологией τ, индуцируемой из (E, t) в том и только в том случае, когда E — коммутативная O^*-алгебра.

Доказательство. Если E — коммутативная O^*-алгебра, то булева алгебра $Z(\nabla)$ центральных проекторов есть все ∇ и поэтому в силу единственности R-равномерности на ∇ (теорема 3 из § 7 гл. I) и п. 4) предложения 1 топология τ совпадает с топологией τ_1.

Пусть E — некоммутативная O^*-алгебра. Тогда существует нецентральный проектор $e \neq 0$, $e \neq \mathbf{1}$. Если $z(e)z(e^{\perp}) = 0$, где $z(e)$ — центральный носитель проектора e, то $e = z(e) \in Z(\nabla)$, что не так. Поэтому $z(e)z(e^{\perp}) \neq 0$ и, следовательно, существуют такие ненулевые проекторы $e_1 \leqslant e$, $e_2 \leqslant e^{\perp}$, что $e_1 \sim e_2$. Положим $r = e_1 \vee e_2$, $E_1 = rEr$; OC^*-алгеброй ограниченных элементов в E_1 является алгебра $B_1 = B \cap E_1$, где B — OC^*-алгебра ограниченных элементов в E. Пусть A — совокупность всех таких $x \in B_1$, для которых $u_i^* x u_j = \lambda_{ij} r$, λ_{ij} — комплексные числа, $i, j = 1, 2$, $u_1 = e_1$, u_2 — частичная изометрия, для которой $u_2^* u_2 = e_1$, $u_2 u_2^* = e_2$. Тогда A есть AW^*-подалгебра в B_1, $*$-изоморфная $*$-алгебре $B(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в двумерном гильбертовом пространстве H (см. § 1 гл. IV). Поэтому логика ∇_0 всех проекторов в A является подлогикой в логике $\{f \in \nabla : f \leqslant r\}$ и ∇_0 изоморфна логике всех проекторов в $B(H)$. Следовательно, R-равномерность на ∇_0 дискретна. Так как A — конечномерное векторное пространство, то топология в A, индуцируемая из (E, t), совпадает с нормированной топологией, порожденной C^*-нормой. Но в A существуют такие ненулевые проекторы P, P_n, $n = 1, 2, \ldots$, что $P_n \neq P$ для всех n и $\|P_n - P\| \to 0$ при $n \to \infty$ (действительно, если ξ_1, ξ_2 — ортонормированный базис в H, $\eta_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi_1 + \frac{1}{n}\xi_2$ и P_n — проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором η_n, $n = 1, 2, \ldots$, а P — проектор на одномерное подпространство, порожденное ξ_1, то $\|P_n - P\| \to 0$ при $n \to \infty$). Следовательно, топология на ∇_0, индуцируемая из (E, t), не дискретна. Поэтому $\tau_1 \neq \tau$. ■

Следствие. Если (E, t) — некоммутативная топологическая O^*-алгебра и ∇ — логика проекторов в E, то топология τ в ∇, индуцируемая из (E, t), не совпадает с (o)-топологией.

Доказательство. Так как ∇ — дедекиндова равномерная логика, то ∇ изоморфно прямому произведению равномерных дедекиндовых логик ∇_i счетного типа, $i \in I$ (см. теорему 4 из § 10 гл. I).

Выберем такое $i_0 \in I$, для которого ∇_{i_0} не является булевой алгеброй (это возможно, так как E — некоммутативная O^*-алгебра). Если τ совпадает с (o)-топологией в ∇, то t индуцирует в ∇_{i_0} (o)-топологию, которая совпадает с топологией, порожденной R-равномерностью на ∇_{i_0} (теорема 1 из § 7 гл. I). В силу предложения 2 это невозможно. ■

Из предыдущего следствия вытекает, что для топологической O^*-алгебры (E, t) счетного типа топология τ в логике ∇, индуцируемая из (E, t), совпадает с (o)-топологией в том и только в том случае, когда E — коммутативная алгебра. Следующее предложение показывает, что сходимости сетей в нуле в топологии τ и (o)-топологии совпадают для любых топологических O^*-алгебр счетного типа.

Предложение 3. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра счетного типа и ∇ — логика проекторов в E. Тогда сеть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ сходится к нулю в (o)-топологии тогда и только тогда, когда $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

При доказательстве предложения 3 используется следующая лемма.

Лемма. Операция $(e, g) \to e \vee g$, $e, g \in \nabla$ непрерывна в нуле по совокупности переменных относительно топологии t.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность нуля в (E, t). Выберем нормальную окрестность нуля W так, чтобы $W + W \subset U$. Если $e, g \in \nabla$, то

$$f = (e \vee g - g) \sim (e - e \wedge g) = d,$$

т. е. существует такая частичная изометрия $u \in E$, что $u^*u = f$, $uu^* = d$, в частности, $f = u^*du$. Пусть $e, g \in W$, тогда $f \in W$ и

$$e \vee g = f \vee g = f + g \in W + W \subset U. \blacksquare$$

Доказательство предложения 3. Покажем, что в (E, t) существует последовательность $\{W_n\}$ замкнутых нормальных окрестностей нуля, таких, что

$$(W_{n+1} \cap \nabla) \vee (W_{n+1} \cap \nabla) \subset W_n \cap \nabla, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и

$$\nabla \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \right) = \{0\}.$$

Выберем замкнутую окрестность нуля $U_1^{(1)}$ в (E, t), не содержащую 1, и построим замкнутые окрестности нуля $U_n^{(1)}$ так, чтобы

$$\left(U_{n+1}^{(1)} \cap \nabla\right) \vee \left(U_{n+1}^{(1)} \cap \nabla\right) \subset U_n^{(1)} \cap \nabla, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(это возможно в силу предыдущей леммы).

Пусть $M_1 = \nabla \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(1)} \right)$ и $e_1 = \vee M_1$. Для каждого конечного набора $\alpha = \{g_1, \dots, g_n\} \subset M_1$ положим $f_\alpha = \bigvee_{i=1}^{n} g_i$. Множество $\mathbf{A} = \{\alpha\}$ является направлением при введении частичного порядка по включению.

Сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ возрастает и $f_\alpha \in M_1$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}$. Так как $\bigvee_\alpha f_\alpha = e_1$, то $f_\alpha \xrightarrow{t} e_1$ и в силу замкнутости $U_n^{(1)}$ $e_1 \in M_1$, причем $e_1 < 1$. Если $e_1 \neq 0$, то выберем замкнутую окрестность нуля $U_1^{(2)}$, не содержащую e_1, и построим замкнутые окрестности $U_n^{(2)}$ так чтобы

$$\left(U_{n+1}^{(2)} \cap \nabla \right) \vee \left(U_{n+1}^{(2)} \cap \nabla \right) \subset U_n^{(2)} \cap \nabla, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Положим $M_2 = M_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(2)} \right)$; тогда, рассуждая как и выше, получим $\vee M_2 = e_2 \in M_2$, $e_1 < e_1$ и т. д. Построим убывающую последовательность $\{e_n\} \subset \nabla$ и счетное семейство $\left\{ U_n^{(k)} \right\}$ замкнутых окрестностей нуля в (E, t), $n, k = 1, 2, \dots$, для которых $e_k = \vee \left(M_{k-1} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(k)} \right)$. Если $\bigwedge_{n=1}^{\infty} e_n = 0$, то, обозначив через G совокупность всех конечных пересечений множеств $U_n^{(k)}$, получим счетный набор окрестностей нуля в (E, t), для которого $\nabla \cap \left(\bigcap_{V \in G} V \right) = \{0\}$ и для каждого $V_i \in G$ существует такое $V_k \in G$, что

$$(\nabla \cap V_k) \vee (\nabla \cap V_k) \subset \nabla \cap V_i .$$

Строим замкнутые нормальные окрестности нуля $W_n \subset V_n$ так, чтобы $(\nabla \cap W_{n+1}) \vee (\nabla \cap W_{n+1}) \subset \nabla \cap W_n$. Эта последовательность окрестностей будет искомой.

Если $e_\omega = \bigwedge_{n=1}^{\infty} e_n \neq 0$, то для проектора e_ω строим последовательность замкнутых окрестностей нуля $\left\{ U_n^{(\omega)} \right\}$ так, чтобы $e_\omega \overline{\in} U_1^{(\omega)}$ и

$$\left(\nabla \cap U_{n+1}^{(\omega)} \right) \vee \left(\nabla \cap U_{n+1}^{(\omega)} \right) \subset \nabla \cap U_n^{(\omega)}$$

и т. д. Так как логика проекторов в E имеет счетный тип, то этот процесс закончится на счетном трансфинитном числе. Поэтому в (E, t) существует такая последовательность $\{W_n\}$ замкнутых нормальных окрестностей нуля, что

$$\nabla \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \right) = \{0\}$$

и

$$(\nabla \cap W_{n+1}) \vee (\nabla \cap W_{n+1}) \subset \nabla \cap W_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $g_n \in \nabla \cap W_n$, $f_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} g_k$. Тогда $g_n \leqslant f_n$, $\{f_n\}$ — убывающая последовательность проекторов и $f_n \in W_{n-1}$. Следовательно, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} f_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \{0\}$, т. е. $f_n \downarrow 0$. Поэтому $g_n \xrightarrow{(o)} 0$, в частности, $g_n \to 0$ относительно (o)-топологии в ∇.

Пусть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ и $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$, но $\{e_\alpha\}$ не сходится к нулю в (o)-топологии. Тогда существуют окрестность нуля V в (o)-топологии и конфинальная подсеть $\{e_{\alpha_\beta}\}$, такие, что $e_{\alpha_\beta} \bar{\in} V$ для всех β. Так как $e_{\alpha_\beta} \xrightarrow{t} 0$, то найдутся $g_n = e_{\alpha_{\beta_n}} \in W_n$. Но $\{g_n\}$ сходится к нулю в (o)-топологии, следовательно, $g_n \in V$ начиная с некоторого номера n_0, что невозможно. Таким образом, из сходимости $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$ вытекает сходимость сети $\{e_\alpha\}$ к нулю в (o)-топологии. Обратная импликация получена в п. 3) предложения 1. ■

Теорема. Топологическая O^*-алгебра (E, t)-метризуема в том и только в том случае, когда E имеет счетный тип.

Доказательство. Пусть (E, t) метризуемо и $\{W_n\}$—базис нормальных окрестностей нуля в E. Если $\{e_k\}$ — последовательность попарно ортогональных проекторов из E, то $e_k \xrightarrow{(o)} 0$ и в силу п. 3 предложения 1 $e_k \xrightarrow{t} 0$. Поэтому любой набор попарно ортогональных проекторов из множества $E \setminus W_n$ конечен, но $E \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus W_n)$. Следовательно, каждое множество ненулевых попарно ортогональных проекторов из E не более чем счетно, т. е. E имеет счетный тип.

Наоборот, пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра счетного типа и $\{W_n\}$ — последовательность нормальных окрестностей нуля в (E, t), построенная при доказательстве предложения 3. Можно считать, что

$$W_n = W_n^* \quad \text{и} \quad W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Покажем, что последовательность окрестностей $\left\{n^{-1} W_n\right\}$ образует базис окрестностей нуля в (E, t). Для этого достаточно установить, что если $Z_n \in n^{-1} W_n$, то $Z_n \xrightarrow{t} 0$. Пусть

$$Z_n = x_n + iy_n \in n^{-1} W_n, \quad x_n, y_n \in E_h;$$

тогда $Z_n^* \in n^{-1} W_n$ и потому $x_n, y_n \in n^{-1} W_{n-1}$. Обозначим через $\left\{ e_\lambda^{(n)} \right\}$ спектральное семейство проекторов для элемента $\{x_n\}$. Так как $|x_n| \geqslant \left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) |x_n| \geqslant \frac{1}{n}\left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right)$, то $\left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) \leqslant$ $\leqslant n|x_n|$, т. е. $\left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) \in W_{n-1}$. В силу выбора окрестностей W_n имеем

$$\left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) \xrightarrow{t} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $|x_n| \left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) \xrightarrow{t} 0$ (аксиома Т3).

Далее

$$|x_n| e_{\frac{1}{n}}^{(n)} \leqslant \frac{1}{n} \mathbf{1},$$

поэтому в силу п. 1) предложения 1 $|x_n| e_{\frac{1}{n}}^{(n)} \xrightarrow{t} 0$.

Таким образом,

$$|x_n| = |x_n| e_{\frac{1}{n}}^{(n)} + |x_n| \left(1 - e_{\frac{1}{n}}^{(n)}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Аналогично $|y_n| \xrightarrow{t} 0$. Из п. 2) предложения 1 вытекает, что $Z_n = x_n + iy_n \xrightarrow{t} 0$ при $n \to \infty$. ■

В заключение рассмотрим произведение топологических O^*-алгебр.

Предложение 4. Прямое произведение $E = \prod_{i \in I} E_i$ топологических O^*-алгебр (E_i, t_i), $i \in I$, является топологической O^*-алгеброй относительно тихоновской топологии t.

Доказательство. Базис окрестностей нуля в (E, t) образует множества вида

$$W = \left(\prod_{k=1}^{n} W_{i_k}\right) \times \prod_{i \neq i_k} E_i,$$

где W_{i_k} — нормальная окрестность нуля в (E_{i_k}, t_{i_k}), $k = 1, \ldots, n$. Поэтому t удовлетворяет аксиоме (Т2).

Так как алгебраические операции и инволюция в $E = \prod_{i \in I} E_i$ покоординатные, а сходимость сетей в тихоновской топологии t совпадает с покоординатной сходимостью, то топология t, очевидно, удовлетворяет и аксиомам (T1), (T3), (T4). Следовательно, (E, t) — топологическая O^*-алгебра. ■

Библиография: [9, 10, 148, 149, 151].

§ 3. Единственность R-топологии

Пусть E — O^*-алгебра, E_h — подпространство эрмитовых элементов в E и ∇ — логика всех проекторов в E. Для каждого $x \in E_h$ и $\varepsilon > 0$ положим $g(x, \varepsilon) = \mathbf{1} - e_\varepsilon$, где e_ε — спектральный проектор для элемента $|x|$ при $\lambda = \varepsilon$. Проектор $g(x, \varepsilon)$ коммутирует с $|x|$ и

$$|x|\, g^\perp(x, \varepsilon) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}, \quad \varepsilon g(x, \varepsilon) \leqslant |x|\, g(x, \varepsilon).$$

Лемма. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра, $\{x_\alpha\} \subset E_h$. Тогда $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$ в том и только в том случае, когда $g(x_\alpha, \varepsilon) \xrightarrow{t} 0$ при всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Если $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $|x_\alpha| \xrightarrow{t} 0$. Поэтому из неравенства $\varepsilon g(x_\alpha, \varepsilon) \leqslant |x_\alpha|$ и п. 1) предложения 1 из § 2 следует, что $g(x_\alpha, \varepsilon) \xrightarrow{t} 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Наоборот, пусть $g(x_\alpha, \varepsilon) \xrightarrow{t} 0$ при всех $\varepsilon > 0$ и U — произвольная окрестность нуля в (E, t). Выберем нормальную окрестность нуля W так, чтобы $W + W \subset U$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$, для которого $\varepsilon\mathbf{1} \in W$. Тогда

$$|x_\alpha|\, g^\perp(x_\alpha, \varepsilon) \in W$$

при всех α и

$$|x_\alpha|\, g(x_\alpha, \varepsilon) \in W$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого α_0 (аксиома (T3)). Следовательно,

$$|x_\alpha| = |x_\alpha|\, g(x_\alpha, \varepsilon) + |x_\alpha|\, g^\perp(x_\alpha, \varepsilon) \in W + W \subset U$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0$ и поэтому $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$. ■

Теорема. Если t_1 и t_2 — R-топологии на O^*-алгебре E, то $t_1 = t_2$.

Доказательство. В силу леммы и аксиомы (T1) достаточно показать, что из сходимости $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$, $e_\alpha \in \nabla$ вытекает сходимость $e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$, где ∇ — логика всех проекторов в E. Для O^*-алгебр счетного типа это следует из предложения 3 § 2. В общем случае логика ∇ проекторов в E является дедекиндовой равномерной логикой (следствие 2 к предложению 1 из § 2) и поэтому ∇ изоморфно прямому произведению $\prod_{i \in I} \nabla_i$ равномерных логик счетного типа (теорема 4 из § 10 гл. I), т. е. в ∇ существует семейство $\{z_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов, для которых $\bigvee_i z_i = \mathbf{1}$ и $\nabla_i = z_i \nabla$ есть логика счетного типа, $i \in I$. Пусть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ и $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$. Тогда $z_i e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$ для каждого фиксированного $i \in I$; O^*-алгебра $z_i E$ имеет счетный тип и t_1, так же как и t_2, индуцирует в $z_i E$ R-топологию. Поэтому $z_i e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$ для каждого фиксированного $i \in I$. Для каждого конечного набора $\beta = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$ положим $u_\beta = \bigvee_{k=1}^{n} z_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} z_{i_k}$. Тогда $u_\beta \uparrow 1$ и поэтому $u_\beta \xrightarrow{t_2} 1$.

Пусть U — произвольная окрестность нуля в (E, t_2). Выберем нормальную окрестность нуля W в (E, t_2) так, чтобы $W + W \subset U$. Существует такое β_0, что $(1 - u_{\beta_0}) \in W$. Так как $z_i e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$ при всех $i \in I$, то $u_{\beta_0} e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$. Следовательно, $u_{\beta_0} e_\alpha \in W$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого α_0. Тогда $e_\alpha = u_{\beta_0} e_\alpha + (1 - u_{\beta_0}) e_\alpha \in W + W \subset U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$, т. е. $e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$. ■

Следствие 1. Любой $*$-изоморфизм Φ топологической O^*-алгебры (E_1, t_1) на топологическую O^*-алгебру (E_2, t_2) является топологическим изоморфизмом.

Доказательство. Семейство множеств $\{\Phi(U) : U \in t_1\}$ определяет в E_2 топологию t, относительно которой E_2 — топологическая O^*-алгебра. Поэтому $t = t_2$ и, следовательно, отображения Φ и Φ^{-1} непрерывны. ■

Следствие 2. Любая топологическая O^*-алгебра (E, t) топологически $*$-изоморфна тихоновскому произведению $(E_1, t_1) \times (E_2, t_2)$ дискретной и непрерывной топологических O^*-алгебр (E_1, t_1) и (E_2, t_2).

Доказательство вытекает из следствия к предложению 1 из § 5 гл. IV и следствия 1 к теореме.

Следствие 3. Любая топологическая O^*-алгебра (E, t)-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в тихоновском произведении $\prod_{i \in I} (E_i, t_i)$ топологических O^*-алгебр (E_i, t_i) счетного типа, $i \in I$, при этом вложение (E, t) в $\prod_{i \in I} (E_i, t_i)$ является топологическим.

Доказательство. Так как логика ∇ всех проекторов в (E, t) есть равномерная дедекиндова логика, то в ∇ существует семейство $\{z_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов, для которых $\bigvee_{i \in I} z_i = 1$ и $\nabla_i = z_i \nabla$ является логикой счетного типа. Положим $E_i = z_i E$ и обозначим через t_i топологию в E_i, индуцируемую из (E, t). Тогда (E_i, t_i) — топологическая O^*-алгебра счетного типа, $i \in I$ (п. 5) предложения 1 из § 2). Зададим отображение $\Phi : E \to \prod_{i \in I} E_i$, полагая $\Phi(x) = \{x z_i\}_{i \in I}$. Очевидно, что Φ есть $*$-изоморфизм E на $*$-подалгебру F в $\prod_{i \in I} E_i$. Покажем, что F — заполненная O^*-подалгебра в $\prod_{i \in I} E_i$. Пусть

$0 \leqslant \{x_i\} \leqslant \{y_i\}$ и $\{y_i\} \in F$, $\{x_i\} \in \prod E_i$. Существует такое $y \in E$, $y \geqslant 0$, что $yz_i = y_i$. Для каждого конечного набора $\alpha = (i_1, \ldots, i_n \subset I$ положим $x_\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \in E$. Тогда $\{x_\alpha\}$ — возрастающая сеть положительных элементов в E и $x_\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} = y \sum_{k=1}^{n} z_{i_k} \leqslant y$. Следовательно, в E существует $x = \sup x_\alpha$, при этом $xz_i = z_i x z_i = \sup z_i x_\alpha z_i = x_i$, т. е. $\Phi(x) = \{x_i\}$. Таким образом, $\Phi(E)$ — заполненная O^*-подалгебра в $\prod_i E_i$. Так как тихоновская топология является R-топологией в $\prod_{i \in I} E_i$ и эта топология индуцирует в $\Phi(E) = F$ также R-топологию, то вложение $\Phi : (E, t) \to \prod_{i \in I} (E_i, t_i)$ топологическое (теорема). ■

Предложение 1. Пусть (E_1, t_1), (E_2, t_2) — топологические O^*-алгебры, $\Phi : E_1 \to E_2$ — $*$-гомоморфизм. Следующие условия эквивалентны:

1) график Φ замкнут в $(E_1, t_1) \times (E_2, t_2)$;

2) $\Phi(\vee M) = \vee \Phi(M)$ для любого семейства M попарно ортогональных проекторов из E_1;

3) Φ непрерывно.

Доказательство. Импликация 3)⟶1) очевидна. Докажем импликацию 1)⟶2). Пусть M — произвольное семейство попарно ортогональных проекторов из E_1. Для каждого конечного подмножества $\alpha = (m_{i_1}, \ldots, m_{i_n}) \subset M$ положим $f_\alpha = \bigvee_{k=1}^{n} m_{i_k}$. Множество $\mathrm{A} = \{\alpha\}$ образует направление, если положить $\alpha \leqslant \beta$ при $\alpha \subset \beta$. Поэтому $\{f_\alpha\}$ и $\{\Phi(f_\alpha)\}$ — возрастающие сети проекторов. Следовательно,

$$f_\alpha \xrightarrow{t_1} \bigvee_\alpha f_\alpha = \vee M \text{ и } \Phi(f_\alpha) \xrightarrow{t_2} \bigvee_\alpha \Phi(f_\alpha) = \vee \Phi(M).$$

Так как график Φ замкнут, то

$$\Phi(\vee M) = \vee \Phi(M).$$

Докажем теперь импликацию 2)⟶3). Ядро J $*$-гомоморфизма Φ есть двусторонний идеал в E_1, содержащий точную верхнюю грань любого семейства $M \subset J$ попарно ортогональных проекторов, т. е. J — $\perp$-правильный идеал. Поэтому существует такой центральный проектор $z \in E_1$, что $J = zE_1$ (теорема 3 из § 3 гл. IV). Обозначим через Ψ сужение Φ на $z^\perp E_1$; тогда Ψ есть $*$-изоморфизм $z^\perp E_1$ на O^*-подалгебру $F = \Phi(E_1) = \Psi(z^\perp E_1) \subset E_2$.

Пусть t — топология в F, индуцируемая из (E_2, t_2). Пара (F, t) является отделимым топологическим векторным пространством, удовлетворяющим требованиям аксиом (T1)—(T3). Покажем, что для (F, t) справедлива и аксиома (T4). Логика ∇ всех проекторов алгебры F изоморфна дедекиндовой равномерной логике всех проекторов в $z^{\perp}E_1$. Поэтому в ∇ существует семейство $\{z_i\}_{i\in I}$ ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов, таких, что $\bigvee_{i\in I} z_i = \Psi(z^{\perp})$ и $z_i\nabla$ — логика счетного типа для каждого $i \in I$.

Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \nabla$ и $f_\alpha \uparrow \Psi(z^{\perp})$. Тогда $(f_\alpha z_i) \uparrow z_i$ при всех $i\in I$. Следовательно, для каждого $i \in I$ найдется такая последовательность индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_k \leqslant \cdots$, что $(f_{\alpha k}) \uparrow z_i$ при $k \to \infty$ (предложение 2 из § 4 гл. I). Это означает, что $z_i = \bigvee_{k=0}^{\infty} (f_{\alpha_{k+1}} - f_{\alpha_k}) z_i$, где $f_{\alpha_0} = 0$.

В силу условия 2) проектор z_i совпадает с точной верхней гранью множества $\{(f_{\alpha_{k+1}} - f_{\alpha_k}) z_i\}$, $k = 0, 1, \ldots$, взятой в логике ∇_2 всех проекторов алгебры E_2. Следовательно, точная верхняя грань сети $\{f_\alpha z_i\}_{\alpha\in A}$, взятая в ∇_2, равна z_i, т. е. $f_\alpha z_i \uparrow z_i$ в ∇_2. Тогда $f_\alpha z_i \xrightarrow{t_2} z_i$ при всех $i\in I$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы, получаем $f_\alpha = f_\alpha \Psi(z^{\perp}) \xrightarrow{t_2} \Psi(z^{\perp})$. Таким образом, если $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ и $e_\alpha \downarrow 0$ в ∇, то $e_\alpha \xrightarrow{t_2} 0$, т. е. для (F, t) справедлива аксиома (T4). Следовательно, (F, t) — топологическая O^*-алгебра. В силу следствия 1 к теореме отображение $\Psi: (z^{\perp}E, t_1) \to (F, t)$ непрерывно и поэтому $\Phi: (E_1, t_1) \to (E_2, t_2)$ также непрерывно. ■

Выясним теперь условия, при которых R-топология локально выпукла и нормируема.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) E — дискретная O^*-алгебра;

2) R-топология t локально выпукла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E — дискретная O^*-алгебра. Тогда в силу следствия к теореме 1 из § 5 гл. IV E — $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в прямом произведении $\prod_{i\in\Delta} B(H_i)$ O^*-алгебр $B(H_i)$ всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H_i, $i\in\Delta$. Если q_i — атом в булевой алгебре центральных проекторов из E, то $q_iE = B(H_i)$; но q_iE — топологическая O^*-алгебра и потому $B(H_i)$ имеет конечный тип (следствие 1 к предложению 1 из § 2), т. е. H_i — конечномерное гильбертово пространство. В этом случае нормированная топология t_i в $B(H_i)$, порожденная C^*-нормой, является R-топологией в $B(H_i)$. Следовательно, тихоновская топология t_0 в $\prod_{i\in\Delta}(B(H_i), t_i)$ локально выпукла и является R-топологией в $\prod_{i\in\Delta} B(H_i)$. Топология t_0 индуцирует в E R-топологию (считаем, что $E \subset \prod_{i\in\Delta} B(H_i)$). Поэтому в силу теоремы $t_0 = t$, т. е. R-топология t локально выпукла.

Наоборот, пусть t — локально выпуклая топология. Если E — не дискретная O^*-алгебра, то существует такой ненулевой центральный проектор $z_0 \in E$, что z_0E — непрерывная O^*-алгебра (предложение 1 из § 5 гл. IV). Пусть φ — действительный непрерывный линейный функционал на (E, t), для которого $\varphi(z_0) > 0$ (такое φ существует, так как (E, t) — отделимое локально выпуклое пространство).

Если $e_\alpha \xrightarrow{(o)} e$, $e_\alpha, e \in \nabla$, то $e_\alpha \xrightarrow{t} e$ и $\varphi(e_\alpha) \to \varphi(e)$. Поэтому в силу следствия к теореме 1 из § 4 гл. I множество $\varphi(z_0\nabla)$ является связным подмножеством в поле действительных чисел, где ∇ — логика всех проекторов в E. Для каждой нормальной окрестности нуля W $z_0\nabla \subset \lambda W$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ для некоторого λ_0. Следовательно, $z_0\nabla$ — топологически ограниченное подмножество в (E, t). Отсюда вытекает, что $\varphi(z_0\nabla) = [-\varepsilon, \delta]$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ (концы отрезка, быть может, не входят в $\varphi(z_0\nabla)$). Выберем проектор $e_1 \in z_0\nabla$ так, чтобы $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}\varphi(z_0)$. Тогда $e_1 < z_0$ и $\varphi(z - e_1) = \frac{1}{2}\varphi(z_0)$. Аналогично существует проектор $e_2 < z_0 - e_1$, для которого $\varphi(e_2) = \frac{1}{2^2}\varphi(z_0)$ и т. д. Построим последовательность ненулевых проекторов $\{e_n\}$, таких, что $e_n < z_0 - \sum_{i=1}^{n-1} e_i$ и $\varphi(e_n) = \frac{1}{2^n}\varphi(z_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\{e_n\}$ — попарно ортогональны, то $e_n \xrightarrow{t} 0$. Положим $x_n = 2^n e_n$. По аксиоме (Т3), $x_n e_n \xrightarrow{t} 0$, но $\varphi(x_n e_n) = \varphi(z_0) \neq 0$, что противоречит непрерывности функционала φ. Следовательно, E—дискретная O^*-алгебра. ■

Замечание. При доказательстве предложения 2 получено, что каждая дискретная топологическая O^*-алгебра *-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в прямом произведении $\prod_{i\in\Delta} B(H_i)$, где H_i— конечномерные гильбертовы пространства.

Предложение 3. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) E — непрерывная O^*-алгебра;

2) на E нет ни одного ненулевого непрерывного линейного функционала.

Доказательство. Пусть (E, t) — непрерывная топологическая O^*-алгебра и φ — ненулевой непрерывный линейный функционал на (E, t). Тогда действительная часть $\mathrm{Re}\,\varphi$ есть действительный непрерывный линейный функционал на (E, t), при этом существует такое $x \in E$, $x \geqslant 0$, что $\mathrm{Re}\,\varphi(x) \neq 0$.

Если $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для элемента x, то $e_\lambda^\perp \xrightarrow{t} 0$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому $xe_\lambda^\perp \xrightarrow{t} 0$ (аксиома (Т3)). Тогда $\operatorname{Re}\varphi(xe_\lambda^\perp) \to 0$ и, следовательно, существует такое $\lambda_0 > 0$, что $\operatorname{Re}\varphi(xe_{\lambda_0}) \neq 0$. Но $xe_{\lambda_0} \in B$, где B — OC^*-алгебра ограниченных элементов в E. Поэтому найдется последовательность неотрицательных элементов $\{x_n\} \subset B$, имеющих вид $x_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \lambda_i^{(n)} e_i^{(n)}$ $(\lambda_i^{(n)} > 0$, $\{e_i^{(n)}\}$ — попарно ортогональные проекторы$)$ и таких, что $x_n \leqslant xe_{\lambda_0}$, $\|xe_{\lambda_0} - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$; но $0 \leqslant x - x_n \leqslant \|x - x_n\| \mathbf{1}$, следовательно, $x_n \xrightarrow{t} xe_{\lambda_0}$ (так как (E, t) имеет базис нормальных окрестностей нуля). Тогда $\operatorname{Re}\varphi(x_n) \to \operatorname{Re}\varphi(xe_{\lambda_0})$ и потому существует такой проектор $e \in E$, что $\operatorname{Re}\varphi(e) \neq 0$.

Повторяя конец доказательства предложения 2, убеждаемся в том, что это невозможно. Таким образом, на (E, t) нет ни одного ненулевого непрерывного линейного функционала.

Докажем импликацию 2)⟶1). Если E не является непрерывной O^*-алгеброй, то существует такой ненулевой центральный проектор z_0, что z_0E — дискретная O^*-алгебра. В силу предложения 2 топология t индуцирует в z_0E локально выпуклую топологию t_1 и потому на (z_0E, t_1) существует ненулевой непрерывный линейный функционал φ. Для каждого $x \in E$ положим $\psi(x) = \varphi(xz_0)$. Тогда, очевидно ψ — ненулевой непрерывный линейный функционал на (E, t), что противоречит условию 2). Следовательно, E — непрерывная O^*-алгебра. ■

П р е д л о ж е н и е 4. Если (E, t) — топологическая O^*-алгебра, то следующие условия эквивалентны:

1) E конечномерно:

2) R-топология t-нормируема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация 1)⟶2) очевидна, так как векторная топология в конечномерном пространстве всегда нормируема [97].

Наоборот, пусть t — нормируемая топология и E не конечномерно. Тогда E — дискретная O^*-алгебра и в силу замечания к предложению 2 в E существует последовательность $\{e_n\}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов. Положим $x_n = \frac{1}{\|e_n\|_t} e_n$, где $\|\cdot\|_t$ — норма, порождающая топологию t. Так как $e_n \xrightarrow{t} 0$, то $x_n \xrightarrow{t} 0$, но это противоречит равенству: $\|x_n\|_t = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, E конечномерно. ■

Следствие. Если (E, t) — нормированная топологическая O^*-алгебра, то E — $*$-изоморфно прямому произведению $\prod_{i=1}^{n} B(H_i)$, где H_i — конечномерные гильбертовы пространства, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство следует из замечания к предложению 2 и предложения 4.

Библиография: [104, 144, 148—151].

§ 4. Критерий существования R-топологии

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия для существования R-топологии на O^*-алгебре.

Как было отмечено в § 1 гл. IV, логика всех проекторов в конечной AW^*-алгебре является дедекиндовой. Покажем, что верно и обратное.

Предложение 1. Если логика ∇ всех проекторов в AW^*-алгебре B-дедекиндова, то B имеет конечный тип.

Доказательство. Так как ∇ — полная дедекиндова логика, то из теоремы Ф. Маеды (§ 10 гл. I) вытекает существование размерностной функции D на ∇ со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$, где $X(Z(\nabla))$ — экстремальный компакт, реализующий булеву алгебру $Z(\nabla)$ центральных проекторов в ∇. Покажем, что если e и f — эквивалентные попарно ортогональные проекторы из B, то e и f перспективны в ∇ (см. § 10 гл. I) и потому $D(e)=D(f)$. Можно считать, что $e \vee f = \mathbf{1}$ (в противном случае можно рассмотреть OC^*-алгебру $(e \vee f)B(e \vee f)$. Обозначим через A совокупность всех таких $x \in B$, для которых $u_j^* x u_i = \lambda_{ij}\mathbf{1}$, λ_{ij} — комплексные числа, $i, j = 1, 2$, $u_1 = e$ и u_2 — такая частичная изометрия, что $u_2^* u_2 = e$, $u_2 u_2^* = f$, Тогда A есть AW^*-подалгебра в B, $*$-изоморфная $*$-алгебре $B(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в двумерном гильбертовом пространстве H (см. § 1 гл. IV). Поэтому логика ∇_0 всех проекторов в A есть подлогика в логике ∇ и ∇_0 изоморфна логике всех проекторов в $B(H)$. Следовательно, существует такой проектор $q \in \nabla_0$, что

$$e \wedge q = f \wedge q = 0 \text{ и } e \vee q = f \vee q = \mathbf{1}.$$

Это означает, что проекторы e и f перспективны в ∇.

Покажем теперь, что B имеет конечный тип. Если это не так, то в ∇ существует последовательность $\{e_n\}$ ненулевых попарно ортогональных и попарно эквивалентных проекторов, для которых $D(e_n) = D(e_1) \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Положим $g_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} e_k$. Тогда $g_n \downarrow 0$ и поэтому $D(g_n) \downarrow 0$, что противоречит неравенству

$$0 \neq D(e_1) \leqslant D(g_n),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, B — конечная OC^*-алгебра.

Предложение 2. В конечной AW^*-алгебре понятия перспективности и эквивалентности проекторов совпадают.

Доказательство. Если e и f — перспективные проекторы в логике ∇ всех проекторов AW^*-алгебры B, то найдется такое $g \in \nabla$, что

$$e \wedge g = f \wedge g = 0 \text{ и } e \vee g = f \vee g.$$

Отсюда следует

$$(e \vee g - g) \sim (e - e \wedge g) = e$$

и

$$(f \vee g - g) \sim (f - f \wedge g) = f,$$

т. е. $f \sim e$.

Наоборот, пусть e и f — эквивалентные проекторы в B. Так как ∇ — полная дедекиндова решетка с ортодополнением, то ∇ является непрерывной геометрией ([122], теорема 27) и потому найдутся такие проекторы e_1, e_2, f_1, f_2 ([122], предложение 79), что

$$e = e_1 \vee e_2,\ f = f_1 \vee f_2,\ e_1 \wedge e_2 = f_1 \wedge f_2 = 0,$$

e_1 и f_1 перспективны и $z(e_1) = z(f_1) = z(e)z(f)$, $z(e_2)z(f_2) = 0$, где $z(e)$ — центральный носитель проектора e. Проекторы e и f эквивалентны, следовательно,

$$z(e) = z(f) = z(e_1) = z(f_1).$$

Из свойства 7° логик (см. § 2 гл. I) вытекает, что

$$(e_1 z(e_2)) \vee e_2 = (e_1 z(e_2)) \vee (e_2 z(e_2)) = ez(e_2) \sim fz(e_2) =$$
$$= (f_1 z(e_2)) \vee (f_2 z(e_2)) = f_1 z(e_2);$$

но e_1 и f_1 перспективны, поэтому $e_1 \sim f_1$. Тогда $e_1 z(e_2) \sim f_1 z(e_2) \sim$ $\sim (e_1 z(e_2)) \vee e_2$. Так как B имеет конечный тип, то $e_2 \leqslant e_1$ и потому $e_2 = 0$. Аналогично $f_2 = 0$. Следовательно, проекторы e и f перспективны. ■

Замечание. Из предложения 2 и теоремы Ф. Маеды вытекает, что если D — размерностная функция на логике ∇ всех проекторов конечной AW^*-алгебры и $e, f \in \nabla$, $e \sim f$, то $D(e) = D(f)$. Отсюда, в частности, следует, что $D(e) \leqslant D(f)$, если $e \precsim f$.

Теорема 1. Пусть E — O^*-алгебра, B — OC^*-алгебра ограниченных элементов E и ∇ — логика всех проекторов в E. Следующие условия эквивалентны:

1) на E существует R-топология;

2) B имеет конечный тип и центр алгебры E является топологической O^*-алгеброй;

3) ∇ — дедекиндова логика, множество $Z(\nabla)$ центральных проекторов которой является равномерной булевой алгеброй.

Доказательство. Импликация 1) $\to$ 2) вытекает из п. 6) предложения 1 и следствия 1 к предложению 1 из § 2.

Импликация 2) $\to$ 3) следует из § 1 гл. IV и п. 4) предложения 1 из § 2.

Докажем импликацию 3) $\to$ 1). Пусть τ — топология на $Z(\nabla)$, порожденная R-равномерностью, и $И = \{U\}$ — базис замкнутых заполненных окрестностей нуля в $(Z(\nabla), \tau)$ (см. следствие 1 к предложению 1 из § 6 гл. I),

Обозначим через D размерностную функцию на ∇ со значениями в $C(X(Z(\nabla)))$, где $X(Z(\nabla))$ — экстремальный компакт, реализующий булеву алгебру $Z(\nabla)$. В силу предложения 1 OC^*-алгебра B имеет конечный тип и потому $D(e) \leqslant D(f)$, если $e \precsim f$ (см. замечание к предложению 2).

Комплексификация $*$-алгебры $C(X(Z(\nabla)))$ всех непрерывных действительных функций на $X(Z(\nabla))$ является коммутативной OC^*-алгеброй, эрмитовая часть которой есть полуполе с булевой алгеброй идемпотентов $Z(\nabla)$. Поэтому эта OC^*-алгебра $*$-изоморфна OC^*-алгебре ограниченных элементов из центра Z O^*-алгебры E. Следовательно, можно считать, что размерностная функция D принимает значения в Z_h.

Пусть $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ — множество тех $x \in E$, для которых существует такое $e \in \nabla$, что $xe \in B$, $\|xe\| \leqslant \varepsilon$ и $z^{\perp}(e^{\perp}, \lambda) = 1 - z(e^{\perp}, \lambda) \in U$, где $z(e^{\perp}, \lambda)$ — спектральный проектор для элемента $D(e^{\perp}) \in Z_h$, т. е. $z(e^{\perp}, \lambda)$ — наибольший среди проекторов $z \in Z(\nabla)$, для которых $zD(e^{\perp}) \leqslant \lambda z$.

Ясно, что проектор $Z(e^{\perp}, \lambda)$ соответствует замыканию открытого множества $\{t \in X(z(\nabla)) : D(e^{\perp})(t) < \lambda\}$.

Пусть $U, V \in И$, $V \vee V \subset U$ и $x, y \in \Omega(V, \varepsilon, \lambda)$. Выберем $e, f \in \nabla$, для которых $xe, yf \in B$, $\|xe\| \leqslant \varepsilon$, $\|yf\| \leqslant \varepsilon$, $z^{\perp}(e^{\perp}, \lambda) \in V$, $z^{\perp}(f^{\perp}, \lambda) \in V$. Положим $g = e \wedge f$, тогда $\|(x+y)g\| \leqslant 2\varepsilon$. Из свойств размерностной функции вытекает

$$D(g^{\perp}) \leqslant D(e^{\perp}) + D(f^{\perp})$$

Поэтому

$$z(e^{\perp}, \lambda) \wedge z(f^{\perp}, \lambda) \leqslant z(g^{\perp}, 2\lambda).$$

Следовательно,

$$z^{\perp}(g^{\perp}, 2\lambda) \leqslant z^{\perp}(e^{\perp}, \lambda) \vee z^{\perp}(f^{\perp}, \lambda) \in V \vee V \subset U.$$

Таким образом, $x + y \in \Omega(U, 2\varepsilon, 2\lambda)$, т. е.

$$\Omega(V, \varepsilon, \lambda) + \Omega(V, \varepsilon, \lambda) \subset \Omega(U, 2\varepsilon, 2\lambda).$$

Очевидно, что $\alpha\Omega(U, \varepsilon, \lambda) = \Omega(U, |\alpha|\varepsilon, \lambda)$ для любого числа $\alpha \neq 0$ и если $x \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$, $a \in B$, $\|a\| \leqslant 1$, то $ax \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$.

Следовательно, множества

$$\{x + \Omega(U, \varepsilon, \lambda)\},\ U \in И,\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0,\ x \in E$$

определяют на E топологию t, относительно которой E — топологическое векторное пространство [49]; при этом множества $\{\Omega(U, \varepsilon, \lambda)\}$ образуют базис окрестностей нуля в (E, t), удовлетворяющий требованиям аксиомы (T2) из определения топологической O^*-алгебры.

Покажем, что

$$\Omega^*(U, \varepsilon, \lambda) \subset \Omega(U, \varepsilon, 2\lambda).$$

Пусть $x \in \Omega^*(U, \varepsilon, \lambda)$ и e — такой проектор из E, что $x^*e \in B$, $\|x^*e\| \leqslant \varepsilon$ и $z^\perp(e^\perp, \lambda) \in U$. Положим $e_x = 1 - r(e^\perp x)$, где $r(e^\perp x)$ — правый носитель элемента $e^\perp x$. Так как левый и правый проекторы для элемента из O^*-алгебры эквивалентны, то, повторяя доказательство леммы 1 из § 1, получаем

$$xe_x = exe_x \text{ и } e_x^\perp \precsim e^\perp.$$

Пусть $g = e \wedge e_x$, тогда

$$xg = xe_x g = exe_x g = exg = exeg.$$

Но $\|ex^*e\| \leqslant \varepsilon$, поэтому $\|exe\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\|xg\| \leqslant \|exe\| \leqslant \varepsilon$ и так как

$$D(g^\perp) \leqslant D(e^\perp) + D(e_x^\perp) \leqslant 2D(e^\perp),$$

то

$$z^\perp(g^\perp, 2\lambda) \leqslant z^\perp(e^\perp, \lambda) \in U.$$

Поэтому $x \in \Omega(U, \varepsilon, 2\lambda)$, т.е. $\Omega^*(U, \varepsilon, \lambda) \subset \Omega(U, \varepsilon, 2\lambda)$. Это означает, что инволюция в (E, t) непрерывна.

Докажем теперь, что топология t — T_1-отделима.

Пусть $x = x^*$ и $x \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ для всех $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Тогда $|x|$ принадлежит каждому множеству $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$.

Если $x \neq 0$, то существуют проектор $e \neq 0$ и $\delta > 0$, такие, что

$$e|x| = e|x|e \geqslant 2\delta e.$$

Выберем $\lambda > 0$ и $U \in И$ так, чтобы $z^\perp(e, \lambda) \bar{\in} U$. Так как $|x| \in \Omega(U, \delta, \lambda)$, то найдется такое $f \in \nabla$, что $\||x|f\| \leqslant \delta$ и $z^\perp(f^\perp, \lambda) \in U$, но

$$2\delta\|ef\|^2 = 2\delta\|fef\| = \|f(2\delta e)f\| \leqslant \|fe|x|ef\| =$$
$$= \|fe|x|f\| \leqslant \||x|f\| \leqslant \delta.$$

Следовательно, $\|ef\| < 1$, т. е. $e \wedge f = 0$. Тогда

$$D(e) + D(f) = D(e \vee f) \leqslant D(1) = D(f) + D(f^\perp)$$

и потому $D(e) \leqslant D(f^\perp)$, в частности, $z^\perp(e, \lambda) \leqslant z^\perp(f^\perp, \lambda)$, но это невозможно, так как $z^\perp(e, \lambda) \bar{\in} U$. Следовательно, $x = 0$. Если $a = x + iy \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ для всех $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, где $x, y \in E_h$, то из непрерывности инволюции вытекает, что x и y принадлежат каждому множеству $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ и потому $x = 0$, $y = 0$, т. е. $a = 0$.

Таким образом, топология t — T_1-отделима.

Осталось показать, что топология t удовлетворяет аксиомам (T3) и (T4) из определения топологической O^*-алгебры.

Пусть $e \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$, $\varepsilon < 1$ и f — такой проектор из E, что $\|ef\| \leqslant \varepsilon$ и $z^{\perp}(f^{\perp}, \lambda) \in U$. Тогда $e \wedge f = 0$ и, следовательно, $D(e) \leqslant D(f^{\perp})$, в частности, $z^{\perp}(e, \lambda) \leqslant z^{\perp}(f^{\perp}, \lambda)$. Это означает, что $z^{\perp}(e, \lambda) \in U$. Поэтому, если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $z^{\perp}(e_\alpha, \lambda) \xrightarrow{\tau} 0$ для каждого фиксированного $\lambda > 0$. Следовательно, для любой сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E$ и любых $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ имеем $(x_\alpha e_\alpha) e_\alpha^{\perp} = 0$ и $z^{\perp}(e_\alpha, \lambda) \in U$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in A$, т. е. $x_\alpha e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Если $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ и $e_\alpha \downarrow 0$, то $D(e_\alpha) \downarrow 0$ и потому $z^{\perp}(e_\alpha, \lambda) \xrightarrow{\tau} 0$ для любого фиксированного λ. Это означает, что $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Таким образом, t является R-топологией на E. ■

Следствие 1. В алгебре фон Неймана A существует R-топология в том и только в том случае, когда A имеет конечный тип.

Для доказательства достаточно заметить, что на булевой алгебре центральных проекторов в A существует разделяющее семейство (o)-непрерывных оценок.

Замечание. В силу теоремы из § 3 и п. 4) предложения 1 из § 2 можно считать, что базис окрестностей нуля в топологической O^*-алгебре (E, t) образуют множества $\{\Omega(U, \varepsilon, \lambda)\}$, $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, где $И$ — базис замкнутых заполненных окрестностей нуля в $(Z(\nabla), \tau)$ и τ — топология в $Z(\nabla)$, индуцируемая из (E, t).

Следствие 2. Если t—R-топология на O^*-алгебре E, то на OC^*-алгебре ограниченных элементов из E топология t мажорируется топологией, порожденной C^*-нормой.

Доказательство вытекает из предыдущего замечания и определения окрестностей $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$.

П р е д л о ж е н и е 3. Любая топологическая O^*-алгебра (E, t) является топологическим кольцом (т. е. операция умножения в (E, t) непрерывна по совокупности переменных).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания к теореме 1 достаточно показать, что для любых $x \in E$, $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ найдутся такие $V \in И$, $\delta > 0$, $\mu > 0$, что

$$x \Omega(V, \delta, \mu) \subset \Omega(U, \varepsilon, \lambda), \quad \Omega(V, \delta, \mu) x \subset \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$$

и

$$\Omega(V, \delta, \mu)\, \Omega(V, \delta, \mu) \subset \Omega(U, \varepsilon, \lambda).$$

Положим $\mu_1 = \frac{\lambda}{4}$ и выберем $V_1 \in И$ так, чтобы

$$V_1 \vee V_1 \subset U.$$

Пусть $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для элемента x^*x. Так как $e_\lambda^\perp \downarrow 0$, то $D\left(e_\lambda^\perp\right) \downarrow 0$ и потому существует такое $\lambda_0 > 0$, что $z^\perp\left(e_{\lambda_0}^\perp, \mu_1\right) \in V_1$. Пусть

$$\delta_1 = \min\left(\varepsilon\lambda_0^{-1/2}, \varepsilon\right).$$

Если $y \in \Omega(V_1, \delta_1, \mu_1)$, то найдется такое $e \in \nabla$, что

$$\|ye\| \leqslant \delta_1 \text{ и } z^\perp\left(e^\perp, \mu_1\right) \in V_1.$$

Положим $g = e \wedge e_{\lambda_0}$ и $f = g \wedge g_y$, где $g_y = 1 - r(g^\perp y)$ (см. доказательство теоремы 1). Тогда

$$\|xyf\| = \|xgyg_yf\| \leqslant \|xg\|\|yf\| = (\|gx^*xg\|)^{1/2}\|yf\| \leqslant \lambda_0^{1/2}\delta_1 \leqslant \varepsilon$$

и

$$D(f^\perp) \leqslant D(g^\perp) + D(g_y^\perp) \leqslant 2D(g^\perp) \leqslant 2\left(D(e^\perp) + D\left(e_{\lambda_0}^\perp\right)\right).$$

Отсюда

$$z\left(e^\perp, \mu_1\right) \wedge z\left(e_{\lambda_0}^\perp, \mu_1\right) \leqslant z\left(f^\perp, 4\mu_1\right).$$

Поэтому

$$z^\perp(f^\perp, \lambda) \leqslant z^\perp\left(e^\perp, \mu_1\right) \vee z^\perp\left(e_{\lambda_0}^\perp, \mu_1\right) \in V_1 \vee V_1 \subset U.$$

Следовательно, $xy \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$, т. е.

$$x\Omega(V_1, \delta_1, \mu_1) \subset \Omega(U, \varepsilon, \lambda).$$

Используя непрерывность инволюции как и при доказательстве п. 4) предложения 2 из § 1, получаем существование таких $V_2 \in И$, $\delta_2 > 0$, $\mu_2 > 0$, что

$$\Omega(V_2, \delta_2, \mu_2)\, x \subset \Omega(U, \varepsilon, \lambda).$$

Пусть теперь $\delta_3 = \sqrt{\varepsilon}$, $\mu_3 = \lambda/2$ и $x, y \in \Omega(V_1, \delta_3, \mu_3)$. Выберем проекторы $e, f \in \nabla$ так, чтобы $\|xe\| \leqslant \delta_3$, $\|yf\| \leqslant \delta_3$ и $z^\perp\left(e^\perp, \mu_3\right) \in V_1$, $z^\perp\left(f^\perp, \mu_3\right) \in V_1$. Положим $g = f \vee e_y$, тогда

$$\|xyg\| = \|xeye_yg\| \leqslant \|xe\|\|yf\| \leqslant \varepsilon$$

и

$$D(g^\perp) \leqslant D(f^\perp) + D\left(e_y^\perp\right) \leqslant D(f^\perp) + D(e^\perp).$$

Из последнего неравенства следует, что $z^\perp(g^\perp, \lambda) \in U$. Это означает, что $xy \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ и потому

$$\Omega(V_1, \delta_3, \mu_3)\,\Omega(V_1, \delta_3, \mu_3) \subset \Omega(U, \varepsilon, \mu).$$

Осталось положить $V = V_1 \cap V_2$, $\delta = \min\limits_{i=1,2,3} \delta_i$, $\mu = \min\limits_{i=1,2,3} \mu_i$. ■

Предложение 4. В топологической O^*-алгебре (E, t) множество E^+ всех неотрицательных элементов замкнуто.

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 3, считаем, что базис окрестностей нуля в (E, t) образуют множества $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$, $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Так как множество E_h эрмитовых элементов из E замкнуто в (E, t), то достаточно показать, что E^+ замкнуто в E_h. Пусть $x \in E_h$, $x \bar{\in} E^+$ и e — такой ненулевой проектор из E, что $exe \leqslant -2\varepsilon e$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выберем $\lambda > 0$ и $U \in И$ так, чтобы $z^\perp(e, \lambda) \bar{\in} U$. Пусть

$$y \in E_h \cap (x + \Omega(U, \varepsilon, \lambda)).$$

Тогда найдется проектор $f \in \nabla$, такой, что

$$\|(y - x) f\| \leqslant \varepsilon \text{ и } z^\perp(f^\perp, \lambda) \in U.$$

Положим $g = e \wedge f$. Если $g = 0$, то $D(e) \leqslant D(f^\perp)$ и, следовательно, $z^\perp(e, \lambda) \leqslant z^\perp(f^\perp, \lambda)$, т. е. $z^\perp(e, \lambda) \in U$, что невозможно. Поэтому $g \neq 0$ и

$$\|g(y - x) g\| \leqslant \|(y - x) f\| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что

$$gyg \leqslant \varepsilon g + gxg \leqslant \varepsilon g - 2\varepsilon g = -\varepsilon g.$$

Следовательно, $y \bar{\in} E^+$ и потому

$$E^+ \cap (x + \Omega(U, \varepsilon, \lambda)) = \varnothing. \blacksquare$$

Следствие. В топологической O^*-алгебре (E, t) каждый отрезок $[x, y] = \{a \in E_h : x \leqslant a \leqslant y\}$ является замкнутым подмножеством.

В заключение выясним вид окрестностей нуля $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ для коммутативных топологических O^*-алгебр.

Если E — коммутативная O^*-алгебра, B—OC^*-алгебра ограниченных элементов в E и ∇ — булева алгебра всех проекторов из E, то отображение $D: \nabla \to B$, $D(e) = e$, $e \in \nabla$, является размерностной функцией на ∇ со значениями в коммутативной OC^*-алгебре B. Из теоремы 1 следует, что R-топология t на E существует в том и только в том случае, когда булева алгебра ∇ проекторов в E равномерна. В этом случае базис окрестностей нуля в (E, t) состоит из множеств вида $\Omega(U, \varepsilon) = \{x \in E :$ существует $e \in \nabla$, такое, что $xe \in B$, $\|xe\| \leqslant \varepsilon$, $e^\perp \in U\}$, $U \in И$, $\varepsilon > 0$, где $\{U\} = И$ — базис замкнутых заполненных окрестностей нуля в равномерной булевой алгебре ∇.

Если рассматривать эрмитову часть E_h коммутативной топологической O^*-алгебры (E, t) и топологию t_0 на E_h, индуцируемую из (E, t), то пара (E_h, t_0) является топологическим полуполем в смысле работ [9, 10]. Наоборот, если E_h есть топологическое полуполе, т. е. на E_h существует T_1-отделимая топология t_0, удовлетворяющая аксиомам (T2)—(T4) (см. [9]), то на $E=E_h+iE_h$ можно определить тихоновскую топологию $t=t_0\times t_0$, которая является R-топологией. Свойства топологических полуполей изучались в работах [1, 8, 11, 104] и др.

Предложение 5. Пусть (E, t) — коммутативная топологическая O^*-алгебра. Тогда на E_h R-топология t мажорируется (o)-топологией.

Доказательство. Для каждого $x\in E_h$ и $\varepsilon>0$ положим $g(x, \varepsilon)=1-e_\varepsilon$, где e_ε — спектральный проектор для элемента $|x|$ при $\lambda=\varepsilon$ (см. начало § 3). Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset E_h$, $x_\alpha\downarrow 0$, $\varepsilon>0$ и $g_\alpha=g(x_\alpha, \varepsilon)$, $\alpha\in\mathbf{A}$. Пространство E_h является векторной решеткой и точная верхняя грань для множества $\{g_\beta:\beta\geqslant\alpha\}$, взятая в E_h, совпадает с точной верхней гранью этого множества, взятой в булевой алгебре ∇ проекторов из E. Поэтому в силу неравенства $\varepsilon g_\alpha\leqslant x_\alpha g_\alpha\leqslant x_\alpha$ получим $f_\alpha=\sup\limits_{\beta\geqslant\alpha}g_\beta\leqslant\varepsilon^{-1}x_\alpha$.

Сеть проекторов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$ монотонно убывает и так как $\varepsilon^{-1}x_\alpha\downarrow 0$, то $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathbf{A}}f_\alpha=0$, т. е. $f_\alpha\downarrow 0$. Тогда $f_\alpha\xrightarrow{t}0$ и, следовательно, $g_\alpha\xrightarrow{t}0$. Это означает, что $x_\alpha\xrightarrow{t}0$ (лемма из § 3). Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset E_h$ и $x_\alpha\xrightarrow{(o)}0$. Выберем сеть $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}\subset E_h$ так, чтобы $y_\alpha\downarrow 0$ и $|x_\alpha|\leqslant y_\alpha$, $\alpha\in\mathbf{A}$.

Так как E_h — полуполе, то существует элемент $a_\alpha\in E_h$ такой, что $|x_\alpha|=a_\alpha y_\alpha$, $0\leqslant a_\alpha\leqslant 1$, $\alpha\in\mathbf{A}$. В силу пп. 1), 2) предложения 1 из § 2 и сходимости $y_\alpha\xrightarrow{t}0$ получим, что $x_\alpha\xrightarrow{t}0$.

Если $\{x_\alpha\}$ — произвольная сеть из E_h, (o)-сходящаяся к элементу $x\in E_h$, то $(x_\alpha-x)\xrightarrow{(o)}0$ и потому $x_\alpha\xrightarrow{t}x$. Следовательно, топология t на E_h мажорируется (o)-топологией. ■

Библиография: [1, 8—11, 14, 17, 19, 103, 104, 122, 148, 149].

§ 5. Пополнение топологических O*-алгебр

Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра, $\mathcal{U}=\{U\}$ — совокупность всех окрестностей нуля в (E, t). Для каждого $U\in\mathcal{U}$ положим $W(U)=\{(x, y)\}\in E\times E: x-y\in U\}$. Семейство $\{W(U): U\in\mathcal{U}\}$ является базисом некоторой равномерности на E. Эту равномерность называют равномерностью, порожденной топологией t.

В этом параграфе приводится критерий полноты топологических O^*-алгебр относительно равномерности, порожденной R-топологией.

Предложение 1. Пусть (B, t) — топологическая OC^*-алгебра счетного типа и $\{x_n\}$ — убывающая к нулю фундаментальная последовательность из B_h. Тогда $x_n \xrightarrow{t} 0$.

Доказательство. Обозначим через D размерностную функцию на логике ∇ всех проекторов в B со значениями в центре Z алгебры B. R-Топология t метризуема (теорема 1 из § 2), поэтому базис окрестностей нуля в (E, t) образуют множества $\Omega_n = \Omega\left(U_n, 2^{-n}, 2^{-n}\right)$, где $\{U_n\} = И$ — базис замкнутых заполненных окрестностей нуля из $(Z(\nabla), \tau)$, для которого $U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n$ (см. замечание к теореме 1 из § 4). Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $x_n - x_{n+1} \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Выберем $e_n \in \nabla$, для которого $\|(x_n - x_{n+1}) e_n\| \leqslant 2^{-n}$, $z^{\perp}\left(e_n^{\perp}, 2^{-n}\right) \in U_n$, где $z\left(e_n^{\perp}, 2^{-n}\right)$ — спектральный проектор для элемента $D\left(e_n^{\perp}\right) \in Z_h$ при $\lambda = 2^{-n}$. Положим $f_n = \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} e_k$, $z_n = \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} z\left(e_k^{\perp}, 2^{-k}\right)$. Из свойств размерностной функции D получим

$$D\left(f_n^{\perp}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} D\left(e_k^{\perp}\right),$$

отсюда

$$z_n \leqslant z\left(f_n^{\perp}, 2^{n-1}\right)$$

и потому

$$z^{\perp}\left(f_n^{\perp}, 2^{n-1}\right) \leqslant z_n^{\perp} = \bigvee_{k=n}^{\infty} z^{\perp}\left(e_k^{\perp}, 2^{-k}\right).$$

Так как

$$\bigvee_{k=n}^{m} z^{\perp}\left(e_k^{\perp}, 2^{-k}\right) \in U_n \vee U_{n+1} \vee \cdots \vee U_m \subset U_{n-1}$$

и

$$\left(\bigvee_{k=n}^{m} z^{\perp}\left(e_k^{\perp}, 2^{-k}\right)\right) \uparrow z_n^{\perp}$$

при $m \to \infty$, то $z_n^{\perp} \in U_{n-1}$. Следовательно, $z^{\perp}\left(f_n^{\perp}, 2^{n-1}\right) \in U_{n-1}$, так что $f_n^{\perp} \in \Omega\left(U_{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}\right) = \Omega_{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $f_n^{\perp} \xrightarrow{t} 0$. Последовательность проекторов $\{f_n\}$ возрастает и $f_n \xrightarrow{t} \mathbf{1}$. В силу п. 3) предложения 1 из § 2 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \mathbf{1}$, т. е. $f_n \uparrow \mathbf{1}$. Очевидно, что $\|y_m f_n\| \leqslant 2^{-m}$ при $m \geqslant n$, где $y_m = x_m - x_{m+1} \geqslant 0$.

Положим $S_{n,N}=\sum_{m=1}^{N}\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}$, тогда для $N_2>N_1\geqslant n$

$$\|S_{n,N_2}-S_{n,N_1}\|\leqslant\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\left\|\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\right\|=\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\left\|f_n\sqrt{y_n}\right\|^2=$$

$$=\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\|f_n y_n f_n\|\leqslant 2^{-N_1}.$$

Таким образом, при каждом фиксированном n последовательность $\{S_{n,N}\}$ фундаментальна на норме. Следовательно, существует $S_n\in B$, для которого $\|S_{n,N}-S_n\|\to 0$ при $N\to\infty$. Множество всех неотрицательных элементов в B замкнуто относительно топологии, порожденной нормой. Поэтому $0\leqslant S_{n,N}\leqslant S_n$ и если $x\geqslant S_{n,N}$, $x\in B_h$, для всех N, то $x\geqslant S_n$, т. е. $S_{n,N}\uparrow S_n$ при $N\to\infty$. Так как $\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\leqslant\sqrt{y_m}f_k\sqrt{y_m}$ при $n\leqslant k$, то $S_n\leqslant S_k$ для $n\leqslant k$.

Покажем, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Если $N>n$, то

$$\left\|\sum_{m=n}^{N}\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\right\|\leqslant\sum_{m=n}^{N}\left\|\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\right\|\leqslant 2^{-n+1}.$$

Но

$$0\leqslant\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\leqslant\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{y_m}\,1\,\sqrt{y_m}=\sum_{m=1}^{n-1}y_m=x_1-x_n\leqslant x_1.$$

Поэтому

$$\|S_{n,N}\|\leqslant\|x_1\|+1$$

и, следовательно, $\|S_n\|\leqslant\|x_1\|+1$, т. е. $S_n\leqslant(\|x_1\|+1)\,1$.

Пусть $S=\sup\limits_n S_n$. Покажем, что $\left(\sum_{m=1}^{N}y_m\right)\uparrow S$ при $N\to\infty$. В силу предложения 3 из § 4 и п. 3) предложения 1 из § 2

$$S\geqslant S_{n,N}=\sum_{m=1}^{N}\sqrt{y_m}f_n\sqrt{y_m}\xrightarrow{t}\sum_{m=1}^{N}y_m \text{ при } n\to\infty$$

и потому $\sup\limits_N\left(\sum_{m=1}^{N}y_m\right)\leqslant S$ (см. предложение 4 из § 4).

С другой стороны,

$$S_{n,N}\leqslant\sum_{m=1}^{N}y_m\leqslant\sup_N\left(\sum_{m=1}^{N}y_m\right),$$

так что $\left(\sum_{m=1}^{N} y_m\right) \uparrow S$ при $N \to \infty$. Тогда

$$f_n\left(\sum_{m=1}^{N} y_m\right) f_n \uparrow f_n S f_n \text{ при } N \to \infty$$

для каждого фиксированного n. Но последовательность $\left\{f_n\left(\sum_{m=1}^{N} y_m\right) f_n\right\}$ фундаментальна по норме для любого фиксированного n, так как при $N_2 > N_1 \geqslant n$

$$\left\| f_n\left(\sum_{m=N_1+1}^{N_2} y_m\right) f_n \right\| \leqslant \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \| y_m f_n \| < 2^{-N_1}.$$

Поэтому

$$\left\| f_n\left(\sum_{m=1}^{N} y_m - S\right) f_n \right\| = \left\| f_n\left(\sum_{m=1}^{N} y_m\right) f_n - f_n S f_n \right\| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Следовательно,

$$\left\| \sqrt{S - \sum_{m=1}^{N} y_m}\, f_n \right\| \to 0 \text{ при } N \to \infty$$

для каждого фиксированного n. Так как

$$\left\| \sqrt{S - \sum_{m=1}^{N} y_m} \right\| = \sqrt{\left\| S - \sum_{m=1}^{N} y_m \right\|} \leqslant \sqrt{\|S\|},$$

то

$$\left\| \left(S - \sum_{m=1}^{N} y_m\right) f_n \right\| \leqslant \sqrt{\|S\|} \left\| \sqrt{S - \sum_{m=1}^{N} y_m}\, f_n \right\| \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

в частности, для каждого n найдется такое $N(n)$, что $\left\| \left(S - \sum_{m=1}^{N} y_m\right) f_n \right\| \leqslant 2^{-n}$ при $N \geqslant N(n)$. Это означает, что $\left(S - \sum_{m=1}^{N} y_m\right) \in \Omega_{n-1}$, $N \geqslant N(n)$, т. е.

$$x_1 - x_{N+1} = \sum_{m=1}^{N} y_m \xrightarrow{t} S \text{ при } N \to \infty$$

и $x_n \xrightarrow{t} (x_1 - S) = x$. Из предложения 4 § 4 следует, что $0 \leqslant x \leqslant x_n$ для всех n и потому $x = 0$, т. е. $x_n \xrightarrow{t} 0$. ■

Следствие. Если $\{x_n\}$ — фундаментальная возрастающая (или убывающая) к элементу x последовательность из топологической OC^*-алгебры (B, t) счетного типа, то $x_n \xrightarrow{t} x$.

Предложение 2. В любой топологической OC^*-алгебре (B, t) множество $B(\lambda) = \{x \in B_h : \|x\| \leqslant \lambda\}$, $\lambda > 0$ является полным подмножеством относительно равномерности, порожденной R-топологией t.

Доказательство. В OC^*-алгебре B существует семейство $\{z_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов, для которых $\bigvee\limits_{i \in I} z_i = 1$ и $B_i = z_i B$ — OC^*-алгебра счетного типа, при этом B $*$-изоморфно заполненной O^*-подалгебре в тихоновском произведении $\prod\limits_{i \in I} (B_i, t_i)$, где t_i — R-топология в B_i, индуцируемая из (E, t) (см. следствие 3 к теореме из § 3). Отождествляя $x \in B$ с элементом $\{xz_i\}_{i \in I}$, будем считать, что $B \subset \prod\limits_{i \in I} B_i$. В этом случае тихоновская топология индуцирует в B R-топологию t. Легко видеть, что $B(\lambda) = \prod\limits_{i \in I} B_i(\lambda)$. Поэтому, если множество $B_i(\lambda)$ полно относительно равномерности, порожденной топологией t_i, $i \in I$, то $B(\lambda)$ будет полно относительно равномерности, порожденной R-топологией t [72].

Таким образом, предложение 2 достаточно доказать для OC^*-алгебр счетного типа. Пусть (B, t) — топологическая OC^*-алгебра счетного типа и $\Omega_n = \Omega\left(U_n, 2^{-n}, 2^{-n}\right)$ — базис окрестностей нуля в (B, t) (см. доказательство предложения 1). Если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность из $B(\lambda)$ и $y_n = \dfrac{(x_n + \lambda 1)}{2\lambda}$, то $\{y_n\}$ — также фундаментальная последовательность и $0 \leqslant y_n \leqslant 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $(y_n - y_{n+1}) \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Как и при доказательстве предложения 1, строим последовательность проекторов $f_n \uparrow 1$, для которой

$$\|(y_{m+1} - y_m) f_n\| \leqslant 2^{-m} \text{ при } m \geqslant n.$$

Если $k > m \geqslant n$, то

$$\|y_k f_n y_k - y_m f_n y_m\| \leqslant \|y_k f_n y_k - y_k f_n y_m\| + \|y_k f_n y_m - - y_m f_n y_m\| \leqslant \|f_n (y_k - y_m)\| + \|(y_k - y_m) f_n\| = 2\|(y_k - - y_m) f_n\| \leqslant 2 \sum_{i=m}^{k-1} \|(y_{i+1} - y_i) f_n\| < 2^{-(m-2)}.$$

Следовательно, для каждого фиксированного n последовательность $\{y_m f_n y_m\}$ фундаментальна относительно нормы в B. Поэтому существует $a_n \in B$, такое, что $\|y_m f_n y_m - a_n\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Ясно, что $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ и так как $y_m f_n y_m \leqslant y_m f_k y_m$ для $n \leqslant k$, то $a_n \leqslant a_k$, т. е. $\{a_n\}$ — возрастающая ограниченная сверху последовательность неотрицательных элементов из B. Покажем, что $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность в (B, t). Зафиксируем n и выберем номер m_0 так, чтобы $z^{\perp}\left(f_m^{\perp}, 2^{-(n+2)}\right) \in U_{n+2}$ при $m \geqslant m_0$. В силу следствия 2 к теореме 1 из § 4 $y_m f_n y_m \xrightarrow{t} a_n$ при $m \to \infty$. Поэтому для $m > k \geqslant m_0$ найдется такое r, что

$$a_m - y_r f_m y_r \in \Omega_{n+2} \text{ и } a_k - y_r f_k y_r \in \Omega_{n+2}.$$

Тогда

$$a_m - a_k = (a_m - y_r f_m y_r) + (y_r f_k y_r - a_k) + \\ + y_r (f_m - f_k) y_r \in \Omega_{n+2} + \Omega_{n+2} + \Omega_{n+1} \subset \Omega_n,$$

так как $\|y_r\| \leqslant 1$, $y_r(f_m - f_k) \in \Omega_{n+2}$,

$$(f_m - f_k) y_r = (y_r(f_m - f_k))^* \in \Omega_{n+1}$$

и, следовательно, $y_r(f_m - f_k) y_r \in \Omega_{n+1}$.

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна.

Из следствия к предложению 1 вытекает, что $a_n \xrightarrow{t} a$, где $a = \sup a_n$. Это означает, что существует последовательность номеров $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$, такая, что $y_{m_n} f_n y_{m_n} \xrightarrow{t} a$.

Из сходимости $f_n^{\perp} \xrightarrow{t} 0$ и п. 1) предложения 1 из § 2 следует $y_{m_n} f_n^{\perp} y_{m_n} \xrightarrow{t} 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$y_{m_n}^2 = y_{m_n} f_n y_{m_n} + y_{m_n} f_n^{\perp} y_{m_n} \xrightarrow{t} a$$

при $n \to \infty$.

Далее используется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть (B, t) — топологическая OC^*-алгебра счетного типа, $x_n \in B$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и $x_n \xrightarrow{t} x$. Тогда $\sqrt{x_n} \xrightarrow{t} \sqrt{x}$.

Доказательство. Если $a \in B$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$, то спектр $S = Spa$ элемента a лежит в отрезке $[0, 1]$ (см. [59]).

Пусть A — C^*-подалгебра в B, порожденная элементом a и единицей 1. Существует $*$-изоморфизм φ из A на C^*-алгебру $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на S, для которого $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(a)(t) = t$, $t \in S$ (см. [59], теорема 1. 51). Выберем многочлен $\sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k t^k$, $t \in S$, так, чтобы $\left|\sqrt{t} - \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right| \leqslant$

$\leqslant 2^{-(n+2)}$ при всех $t \in S$ и фиксированном n. Тогда $\Big\| \sqrt{a} - \sum_{k=0}^{m} \lambda_k a^k \Big\| \leqslant 2^{-(n+2)}$. Это же неравенство сохранится, если вместо элемента a взять x или x_n. Так как $x_n \xrightarrow{t} x$, то $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_n^k \xrightarrow{t} \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k$ при $n \to \infty$ (см. предложение 3 из § 4). Поэтому для каждой окрестности нуля Ω_n найдется такое n_0, что

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k - \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_n^k \right) \in \Omega_{n+2} \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Тогда

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_n} = \left(\sqrt{x} - \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k - \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_n^k \right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_n^k - \sqrt{x_n} \right) \in \Omega_{n+2} + \Omega_{n+2} + \Omega_{n+2} \subset \Omega_n \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Следовательно, $\sqrt{x_n} \xrightarrow{t} \sqrt{x}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 2. Согласно лемме 1, $y_{m_n} \xrightarrow{t} \sqrt{a}$ и поэтому фундаментальная последовательность $x_n = (2\lambda y_n - \lambda 1)$ сходится относительно R-топологии к некоторому элементу $x \in B$. В силу следствия к предложению 4 из § 4 элемент x принадлежит $B(\lambda)$. Следовательно, $B(\lambda)$ — полное подмножество в (B, t). ■

Пусть (E, t) — произвольная топологическая O^*-алгебра и $(\hat{E}, \hat{t})$ — пополнение (E, t) относительно равномерности, порожденной R-топологией t. Алгебраические операции и инволюция продолжаются по непрерывности на $(\hat{E}, \hat{t})$, поэтому $\hat{E}$ является $*$-алгеброй с единицей над полем комплексных чисел, топология $\hat{t}$ — T_2-отделима и наделяет $\hat{E}$ структурой топологического векторного пространства, причем инволюция непрерывна, а операция умножения непрерывна по совокупности переменных в $(\hat{E}, \hat{t})$ (см. [49], теорема 1, с. 100 и предложение 6, с. 101). O^*-Алгебра E $*$-изоморфна всюду плотной $*$-подалгебре в (E, t), так что можно считать, что E есть всюду плотная $*$-подалгебра в $\hat{E}$, при этом R-топология t совпадает с топологией, индуцируемой из $(\hat{E}, \hat{t})$. Если

$\hat{x} \in \hat{E}$, то существует фундаментальная сеть $\{x_\alpha\} \subset E$, такая, что $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} x$. Отсюда следует

$$\mathbf{1}\hat{x} = \lim_\alpha \mathbf{1}\, x_\alpha = \lim_\alpha x_\alpha = x,$$

т. е. единица из E является единицей в $\hat{E}$.

Пусть K — замыкание в $(\hat{E}, \hat{t})$ множества всех неотрицательных элементов из E.

Предложение 3. Множество K — собственный конус в эрмитовой части $\hat{E}_h$-алгебры $\hat{E}$.

Доказательство. Если $\hat{x}, \hat{y} \in K$, то существуют такие сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, x_α, $y_\alpha \in E$, $x_\alpha \geqslant 0$, $y_\alpha \geqslant 0$, что $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} x$ и $y_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} \hat{y}$ (здесь и в дальнейшем в этом параграфе направление A есть направление, составленное из всех окрестностей нуля в $(\hat{E}, \hat{t})$, упорядоченных по включению: $\alpha \leqslant \beta$, если $\beta \subset \alpha$). Тогда $x_\alpha + y_\alpha \geqslant 0$, $x_\alpha + y_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} x + y$, т. е $K + K \subset K$. Аналогично $\lambda K \subset K$ для всех чисел $\lambda \geqslant 0$.

Пусть $\hat{x} \in K \cap (-K)$ и $\{x_\alpha\}$, $\{y_\alpha\}$ — такие сети из E, что $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$, $y_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} -\hat{x}$, x_α, $y_\alpha \geqslant 0$. Тогда $x_\alpha + y_\alpha \xrightarrow{t} 0$. Далее используется следующая лемма.

Лемма 2. Если (E, t) — топологическая O^*-алгебра, x_α, $y_\alpha \in E$, $0 \leqslant x_\alpha \leqslant y_\alpha$ для всех α и $y_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant x \leqslant y$ и $y \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$. Выберем проектор e так, чтобы $ye \in B$, $\|ye\| \leqslant \varepsilon$ и $z^\perp(e^\perp, \lambda) \in U$. Так как $0 \leqslant exe \leqslant eye$, то элемент $(\sqrt{x}e)^*(\sqrt{x}e) = exe$ принадлежит B и

$$\|\sqrt{x}e\|^2 = \|exe\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\sqrt{x} \in \Omega(U, \sqrt{\varepsilon}, \lambda)$. Таким образом, если $0 \leqslant x_\alpha \leqslant y_\alpha$ и $y_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $\sqrt{x_\alpha} \xrightarrow{t} 0$. В силу предложения 3 из § 4

$$x_\alpha = \sqrt{x_\alpha}\sqrt{x_\alpha} \xrightarrow{t} 0.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что если $x_\alpha + y_\alpha \xrightarrow{t} 0$, $x_\alpha \geqslant 0$, $y_\alpha \geqslant 0$, то $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$, т. е. $\hat{x} = 0$.

Конус K определяет в $\hat{E}_h$ частичный порядок ($\hat{x} \geqslant \hat{y}$, если $\hat{x} - \hat{y} \in K$), удовлетворяющий условиям 1), 2), 4) из определения 1 § 2 гл. IV. Этот частичный порядок индуцирует в E_h исходный частичный порядок.

Как и для O^*-алгебр, элемент $\hat{a} = \hat{x} + i\hat{y}$ из $\hat{E}$, $\hat{x}$, $\hat{y} \in \hat{E}_h$ назовем ограниченным, если существует такое число $\lambda > 0$, что $-\lambda 1 \leqslant \hat{x} \leqslant \lambda 1$, $-\lambda 1 \leqslant \hat{y} \leqslant \lambda 1$. Обозначим через $\hat{B}$ множество всех ограниченных элементов из $\hat{E}$.

Предложение 4. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра счетного типа и $(\hat{E}, \hat{t})$ — ее пополнение. Если $\hat{x} \in \hat{B}$ и $0 \leqslant \hat{x} \leqslant \lambda 1$, то найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E_h$, что $\|x_n\| \leqslant \lambda + 1$ и $x_n \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$.

Доказательство. Выберем последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ из E_h так, чтобы $a_n \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$, $b_n \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$ при $n \to \infty$ и $a_n \geqslant 0$, $\lambda 1 - b_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Базис окрестностей нуля в (E, t) образуют множества $\Omega_n = \Omega\left(U_n, 2^{-n}, 2^{-n}\right)$ (см. доказательство предложения 1). Без ограничения общности можно считать, что $a_n - b_n \in \Omega_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Как и при доказательстве предложения 1, построим последовательность проекторов $f_n \uparrow 1$, для которой

$$\|(a_n - b_n) f_k\| \leqslant 2^{-n} \text{ при } n \geqslant k.$$

Тогда

$$-2^{-n} f_k \leqslant f_k a_n f_k - f_k b_n f_k \leqslant 2^{-n} f_k \text{ при } n \geqslant k.$$

Так как $f_k a_n f_k \geqslant 0$, то $-f_k b_n f_k \leqslant 2^{-n} f_k$. Пусть b_n^+ и b_n^- — соответственно положительная и отрицательная части элемента b_n. Тогда $b_n^+ \leqslant \lambda 1$,

$$-f_k b_n^+ f_k + f_k b_n^- f_k \leqslant 2^{-n} f_k$$

и

$$0 \leqslant f_k b_n^- f_k \leqslant 2^{-n} f_k + \lambda f_k \leqslant (\lambda + 1) f_k.$$

Из последнего неравенства вытекает

$$\|f_k b_n f_k\| \leqslant \lambda + 1 \text{ при } n \geqslant k.$$

Элемент $x_k = f_k b_k f_k$ принадлежит E_h, $\|x_k\| \leqslant \lambda + 1$ и в силу непрерывности операции умножения в $(\hat{E}, \hat{t})$ $x_k \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$. ■

Предложение 5. Множество $\hat{B}$ всех ограниченных элементов из пополнения $(\hat{E}, \hat{t})$ топологической O^*-алгебры (E, t) совпадает с OC^*-алгеброй B ограниченных элементов из E.

Доказательство. Выберем в E семейство $\{z_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов, для которых $E_i = z_i E$ есть O^*-алгебра счетного типа, $i \in I$ и $\sup\limits_{i \in I} z_i = 1$. Обозначим через t_i R-топологию в E_i, индуцируемую из (E, t). В силу единственности пополнения замыкания $\bar{E}_i$ O^*-алгебры E_i в $(\hat{E}, \hat{t})$ совпадает с пополнением $(\hat{E}_i, \hat{t}_i)$ алгебры (E_i, t_i) относительно равномерности, порожденной R-топологией t_i. Поэтому можно считать, что $\bar{E}_i = \hat{E}_i$ и $\hat{t}$ индуцирует в $\hat{E}_i$ топологию $\hat{t}_i$.

Пусть $\hat{x} \in \hat{E}$, $0 \leqslant \hat{x} \leqslant \lambda 1$ и $\hat{x}_i = z_i \hat{x}$. Тогда $\hat{x}_i \in \hat{E}_i$ и $0 \leqslant \hat{x}_i \leqslant \lambda 1$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\} \subset E_i$, такая, что $\|x_n\| \leqslant \lambda + 1$, $x_n = x_n^*$ и $x_n \xrightarrow{t_i} \hat{x}_i$ (предложение 4). Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в (E, t) и в силу предложения 2 сходится к некоторому элементу a из E_i, $\|a\| \leqslant \lambda + 1$. Это означает, что $\hat{x}_i = a \in B_i = z_i B$. Для каждого конечного подмножества $\beta = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$ положим $g_\beta = \bigvee\limits_{i \in \beta} z_i$ и $x_\beta = \hat{x} g_\beta = \sum\limits_{i \in \beta} \hat{x}_i$. Тогда $\{g_\beta\}$ и $\{x_\beta\}$ — возрастающие сети из B и $\sup\limits_\beta g_\beta = 1$, $0 \leqslant x_\beta \leqslant \lambda 1$. Точная верхняя грань $x = \sup x_\beta$ принадлежит B и $g_\beta x g_\beta = x_\beta = \hat{x} g_\beta$, но $g_\beta \xrightarrow{\hat{t}} 1$, поэтому $g_\beta x g_\beta \xrightarrow{\hat{t}} x$ и $\hat{x} g_\beta \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$, т. е. $x = \hat{x}$. ■

Предложение 6. Пусть F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в пополнении $(\hat{E}, \hat{t})$ топологической O^*-алгебры (E, t). Тогда существует максимальная коммутативная $*$-подалгебра G в E, замыкание которой в $(\hat{E}, \hat{t})$ совпадает с F.

При доказательстве используются две леммы.

Лемма 3. Если $\hat{x} \in (\hat{E}, \hat{t})$ и $x \geqslant 1$, то в $\hat{E}$ существует обратный элемент $\hat{x}^{-1}$, при этом $0 \leqslant \hat{x}^{-1} \leqslant 1$.

Доказательство. Выберем сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E_h$, для которой $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$ и $x_\alpha - 1 \geqslant 0$, $\alpha \in A$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фундаментальна в (E, t) и так как $x_\alpha \geqslant 1$, то в E_h существует обратный элемент x_α^{-1}, причем $0 \leqslant x_\alpha^{-1} \leqslant 1$ (это непосредственно следует из того, что эрмитовая часть максимальной коммутативной $*$-подалгебры в E, содержащей элемент x_α, является полуполем). Из равенства

$$x_\beta^{-1} - x_\alpha^{-1} = x_\beta^{-1} x_\alpha x_\alpha^{-1} - x_\beta^{-1} x_\beta x_\alpha^{-1} = x_\beta^{-1} (x_\alpha - x_\beta) x_\alpha^{-1}$$

и существования базиса нормальных окрестностей нуля в (E, t) получим, что сеть $\{x_\alpha^{-1}\}$ фундаментальна. В силу предложения 2 сеть $\{x_\alpha^{-1}\}$ сходится к некоторому элементу $a \in E$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Очевидно, что $a\hat{x} = \hat{x}a = 1$, т. е. $a = \hat{x}^{-1}$. ∎

Лемма 4. Если F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в пополнении $(\hat{E}, \hat{t})$ топологической O^*-алгебры (E, t), то каждый элемент $\hat{x} \in F$ представим в виде $\hat{x} = (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + i(\hat{x}_3 - \hat{x}_4)$, где $\hat{x}_i \in F$, $\hat{x}_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Достаточно показать, что каждый эрмитовый элемент $\hat{x}$ из $\hat{F}$ имеет вид $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, где $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in F$ и $\hat{x}_1 \geqslant 0$, $\hat{x}_2 \geqslant 0$. Выберем сеть $\{x_\alpha\} \subset E_h$, для которой $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$. Тогда $(1 + x_\alpha)^2 \xrightarrow{\hat{t}} (1 + \hat{x})^2$ и так как $(1 + x_\alpha)^2 \geqslant 0$, то $(1 + \hat{x})^2 \geqslant 0$. Элемент $\hat{x}_1 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})^2$ принадлежит F. Аналогично $\hat{x}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})^2 \in F$ и $\hat{x}_2 \geqslant 0$. Осталось заметить, что $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$. ∎

Доказательство предложения 6. Пусть $F_+ = \{\hat{x} \in F : \hat{x} \geqslant 0\}$. Для любого $\hat{x} \in F_+$ существует элемент $y(\hat{x}) = (1 + \hat{x})^{-1}$, при этом $0 \leqslant y(\hat{x}) \leqslant 1$, $y(\hat{x}) \in E$ (лемма 3 и предложение 5). Очевидно, что элементы $y(\hat{x})$, $\hat{x} \in F_+$ попарно коммутируют. Пусть G — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в E, содержащая все элементы $y(\hat{x})$, $\hat{x} \in F_+$.

Если $s\left(y\left(\hat{x}\right)\right)$ — носитель элемента $y\left(\hat{x}\right)$ в E и $e=1-s\left(y\left(\hat{x}\right)\right)$, то $e=\left(1+\hat{x}\right)y\left(\hat{x}\right)e=0$, т. е. $s\left(y\left(\hat{x}\right)\right)=1$. Обозначим через $\{e_\lambda\}$ спектральное семейство проекторов для $y\left(\hat{x}\right)$ и положим $a_n=n^{-1}e_{\frac{1}{n}}+y\left(\hat{x}\right)e^{\perp}_{\frac{1}{n}}$. Тогда $a_n\in G$, $a_n\geqslant n^{-1}\mathbf{1}$ и поэтому в коммутативной O^*-алгебре G существует обратный элемент a_n^{-1}; но

$$a_n\left(ne_{\frac{1}{n}}+\left(1+\hat{x}\right)e^{\perp}_{\frac{1}{n}}\right)=\left(ne_{\frac{1}{n}}+\left(1+\hat{x}\right)e^{\perp}_{\frac{1}{n}}\right)a_n=\mathbf{1}.$$

Следовательно, $ne_{\frac{1}{n}}+\left(1+\hat{x}\right)e^{\perp}_{\frac{1}{n}}=a_n^{-1}\in G$.

Так как $s\left(y\left(\hat{x}\right)\right)=1$, то $e_{\frac{1}{n}}\downarrow 0$ при $n\to\infty$. Поэтому $a_n^{-1}\xrightarrow{\hat{t}}\mathbf{1}+\hat{x}$.

Это означает, что $F_+\subset\overline{G}$, где $\overline{G}$ — замыкание O^*-алгебры G в $\left(\hat{E},\hat{t}\right)$. В силу леммы 4 $F=\hat{G}$. ■

Наша дальнейшая цель — показать, что пополнение $(\hat{E},\hat{t})$ топологической O^*-алгебры (E,t) является топологической O^*-алгеброй. Получим этот результат сначала для коммутативных O^*-алгебр.

Теорема 1. Пусть (E, t) — коммутативная топологическая O^*-алгебра, ∇ — булева алгебра проекторов в E и S — комплексное универсальное полуполе с булевой алгеброй идемпотентов ∇. Обозначим через t_0 R-топологию в S (эта топология существует, так как ∇ — равномерная булева алгебра). Тогда пополнение $(\hat{E},\hat{t})$ топологической O^*-алгебры (E,t) $*$-изоморфно (S, t_0), причем $*$-изоморфизм является топологическим.

Доказательство. Будем считать, что E вложено в S как заполненная O^*-подалгебра. Пусть $x\in S_h$, $x\geqslant 0$, и $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для x. Тогда $x_n=xe_n\in E$ и $x-x_n=xe_n^{\perp}\xrightarrow{t_0}0$ (аксиома (Т3) из определения топологической O^*-алгебры). Следовательно, E есть всюду плотная $*$-подалгебра в (S, t_0), при этом топология t_0 индуцирует в E R-топологию t. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что S полно относительно равномерности, порожденной R-топологией t_0. Предположим сначала, что ∇ имеет счетный тип. В этом случае топология t_0 метризуема. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность эрмитовых элементов из (S, t_0). Повторяя начало доказательства предложения 1, построим последовательность проекторов $f_n\uparrow\mathbf{1}$, для которой

$$\|(x_m - x_{m+1}) f_n\| \leqslant 2^{-m} \text{ при } m \geqslant n.$$

Положим $a_{n,N} = \left[\sum_{m=1}^{N} (x_m - x_{m+1})\right] f_n$. Для каждого фиксированного n последовательность $\{a_{n,N}\}$ фундаментальна по норме. Поэтому существует такой элемент a_n из OC^*-алгебры B ограниченных элементов из S, что $\|a_{n,N} - a_n\| \to 0$ при $N \to \infty$. Ясно, что

$$a_n f_n = a_n \quad \text{и} \quad a_k f_n = a_n \quad \text{при } k \geqslant n.$$

Положим

$$b_1 = a_1,\ b_n = a_n (f_n - f_{n-1}),\quad n = 2, 3, \ldots .$$

Элементы b_n принадлежат B_h и $b_n b_k = 0$, $n \neq k$. Так как S—коммутативная O^*-алгебра, то $|b_n||b_k| = 0$, $n \neq k$, т. е. $\{b_n\}$—последовательность попарно дизъюнктных элементов из S_h. Полуполе S_h универсально, следовательно, существует такое $a \in S_h$, что $af_1 = b_1$ и $a(f_n - f_{n-1}) = b_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Считая $f_0 = 0$, получаем

$$af_n = a\sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (f_k - f_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_n (f_k - f_{k-1}) = a_n f_n = a_n;$$

но $f_n^{\perp} \xrightarrow{t_0} 0$, поэтому

$$a - a_n = a - af_n = af_n^{\perp} \xrightarrow{t_0} 0.$$

Базис окрестностей нуля в (S, t_0) образуют множества $\Omega_n = \Omega(U_n, 2^{-n})$, где $\{U_n\} = И$ — базис замкнутых заполненных окрестностей нуля в равномерной булевой алгебре ∇, для которого $U_{n+1} \vee U_{n+1} \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. конец § 4). Положим $S_N = \sum_{m=1}^{N} (x_m - x_{m+1}) = x_1 - x_{N+1}$ и покажем, что $S_N \xrightarrow{t_0} a$. Зафиксируем n и выберем n_1 так, чтобы $a - a_k \in \Omega_{n+1}$ при $k \geqslant n_1$. Зафиксируем $k_1 \geqslant n_1$, для которого $f_{k_1}^{\perp} \in U_{n+1}$ и выберем такое N_1, что

$$\left\| \left(a_{k_1} - \sum_{m=1}^{N} (x_m - x_{m+1}) f_{k_1} \right\| = \| a_{k_1} - a_{k_1, N} \| \leqslant 2^{-(n+1)} \text{ при } N \geqslant N_1.$$

Тогда $(a_{k_1} - S_N) \in \Omega_{n+1}$ и

$$a - S_N = (a - a_{k_1}) + (a_{k_1} - S_N) \in \Omega_{n+1} + \Omega_{n+1} \subset \Omega_n \quad \text{при} \quad N \geqslant N_1.$$

Следовательно, $(x_1 - x_{N+1}) \xrightarrow{t_0} a$ и $x_n \xrightarrow{t_0} (x_1 - a)$.

Если $\{a_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из (S, t_0), $a_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in S_h$, то последовательности $x_n = \dfrac{a_n + a_n^*}{2}$, $y_n = \dfrac{a_n - a_n^*}{2i}$ также фундаментальны и потому существуют такие $x, y \in S_h$, что $x_n \xrightarrow{t_0} x$ и $y_n \xrightarrow{t_0} y$. Тогда $a_n \xrightarrow{t_0} (x + iy)$. Таким образом, в случае, когда ∇ имеет счетный тип, топологическая O^*-алгебра (S, t_0) полна относительно равномерности, порожденной R-топологией t_0.

В общем случае в ∇ существует семейство $\{e_i\}_{i \in I}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов, для которых $S_i = e_i S$ имеет счетный тип, $i \in I$, и $\bigvee_{i \in I} e_i = 1$. Обозначим через t_i R-топологию в S_i, индуцируемую из (S, t_0). Топологическая O^*-алгебра (S, t_0) $*$-изоморфна заполненной O^*-подалгебре в тихоновском произведении $\prod_{i \in I} (S_i, t_i)$ (см. следствие 3 к теореме 1 из § 3).

Если $\{x_i\}_{i \in I} \in \prod_{i=I} S_i$, $x_i \geqslant 0$, то $x_i x_j = 0$, $i \neq j$ и поэтому в силу универсальности S существует такое $x \in S$, что $xe_i = x_i$. Это означает, что отображение $\varphi: S \to \prod_{i \in I} S_i$, где $\varphi(x) = \{xe_i\}_{i \in I}$ является $*$-изоморфизмом S на $\prod_{i \in I} S_i$, т. е. можно считать, что $(S, t_0) = \prod_{i \in I} (S_i, t_i)$. Так как S_i имеет счетный тип, то (S_i, t_i) — полное равномерное пространство, $i \in I$. Следовательно, (S, t_0) — также полное равномерное пространство [72]. ■

Следствие. Коммутативная топологическая O^*-алгебра (E, t) полна относительно равномерности, порожденной R-топологией, в том и только в том случае, когда E — универсальная O^*-алгебра.

Теперь мы можем доказать теорему о пополнении топологических O^*-алгебр.

Теорема 2. Пусть (E, t) — произвольная топологическая O^*-алгебра и $(\hat{E}, \hat{t})$ — ее пополнение относительно равномерности, порожденной R-топологией. Тогда $(\hat{E}, \hat{t})$ — универсальная топологическая O^*-алгебра.

Доказательство. Нам уже известно, что $\hat{E}$ есть $*$-алгебра с единицей 1, на эрмитовой части $\hat{E}_h$ которой задан частичный порядок, удовлетворяющий условиям 1), 2) и 4) из определения 1 § 2 гл. IV. Как и прежде, считаем, что E есть всюду плотная $*$-подалгебра в $(\hat{E}, \hat{t})$.

Пусть $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}_h$, $\hat{x} \geqslant 0$, $\hat{y} \geqslant 0$, $\hat{x}\hat{y} = \hat{y}\hat{x}$ и F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\hat{E}$, содержащая элементы $\hat{x}$ и $\hat{y}$. В силу предложения 6 существует максимальная коммутативная $*$-подалгебра G в E, для которой $\overline{G} = F$. Обозначим через t_1 топологию в G, индуцируемую из (E, t). Тогда (G, t_1) — коммутативная топологическая O^*-алгебра (п. 6) предложения 1 из § 2) и замыкание $\overline{G} = F$ алгебры G в $(\hat{E}, \hat{t})$ совпадает с пополнением (G, t_1) относительно равномерности, порожденной R-топологией t_1. Из теоремы 1 следует, что F — универсальная коммутативная O^*-алгебра. Поэтому $\hat{x}\hat{y} \geqslant 0$. Это означает, что частичный порядок в $\hat{E}_h$, определенный с помощью конуса K (см. предложение 3), согласован с алгебраическими операциями. Кроме того, из предыдущих рассуждений следует, что каждая максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\hat{E}$ является комплексным универсальным полуполем. Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\hat{E}_h$ удовлетворяет аксиоме (I) из определения O^*-алгебры.

Пусть $\{\hat{x}_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — возрастающая сеть неотрицательных элементов из $\hat{E}_h$ и $\hat{x}_\alpha \leqslant \hat{y}$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и некоторого $\hat{y} \in \hat{E}_h$. Положим $\hat{a} = \hat{y} + 1$, тогда существует обратный элемент $\hat{a}^{-1}$, при этом $0 \leqslant \hat{a}^{-1} \leqslant 1$ и $\hat{a}^{-1} \in E$ (см. лемму 3 и предложение 5). Если F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\hat{E}$, содержащая неотрицательный элемент $\hat{b}$ из $\hat{E}$, то так как F — комплексное универсальное полуполе, существует $\hat{b}_0 \in F$, такое, что $\hat{b}_0^2 = \hat{b}$, $\hat{b}_0 \geqslant 0$. Поэтому

$$\hat{d}^* \hat{b} \hat{d} = \left(\hat{d}^* \hat{b}_0\right)\left(\hat{b}_0 \hat{d}\right) = \left(\hat{b}_0 \hat{d}\right)^* \left(\hat{b}_0 \hat{d}\right) \geqslant 0$$

для каждого $\hat{d} \in \hat{E}$. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \hat{a}^{-1} \hat{x}_\alpha \hat{a}^{-1} \leqslant \hat{a}^{-1} \hat{a} \hat{a}^{-1} = \hat{a}^{-1} \leqslant 1$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Сеть $\left\{\hat{a}^{-1} \hat{x}_\alpha \hat{a}^{-1}\right\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ монотонно возрастает и

$\hat{a}^{-1}\hat{x}_\alpha\hat{a}^{-1} \in E_h$, $\alpha \in \mathbf{A}$ (предложение 5). Следовательно, в E_h существует $b = \sup\limits_\alpha \hat{a}^{-1}\hat{x}_\alpha\hat{a}^{-1}$.

Далее используется следующая лемма.

Лемма 5. Если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая сеть неотрицательных элементов из E_h и x — точная верхняя грань для $\{x_\alpha\}$ в E_h, то x является точной верхней гранью для сети $\{x_\alpha\}$ в $\hat{E}_h$.

Доказательство. Пусть $\hat{y} \in \hat{E}_h$ и $x_\alpha \leqslant \hat{y}$ для всех α. Положим $d = \left(\hat{y} + 1\right)^{-1}$. Тогда $d \in E_h$, $0 \leqslant d \leqslant 1$ и

$$0 \leqslant d\left(x_\alpha + 1\right)d \leqslant d\left(\hat{y} + 1\right)d = d.$$

Если $c = \sup\limits_\alpha d\left(x_\alpha + 1\right)d$ в E_h, то $c \leqslant d$. Поэтому

$$\left(\hat{y} + 1\right)c\left(\hat{y} + 1\right) \leqslant \hat{y} + 1,$$

но в силу предложения 3 из § 2 гл. IV

$$c = \sup_\alpha d\,(x_\alpha + 1)\,d = d\left(\sup_\alpha\,(x_\alpha + 1)\right)d = d\,(x + 1)\,d,$$

так что $x \leqslant \hat{y}$. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что $b = \sup\limits_\alpha \hat{a}^{-1}\hat{x}_\alpha\hat{a}^{-1}$ есть точная верхняя грань для сети $\left\{\hat{a}^{-1}\hat{x}_\alpha\hat{a}^{-1}\right\}$ в $\hat{E}_h$. Соответствие $\hat{x} \to \hat{a}\hat{x}\hat{a}$ взаимно однозначно и сохраняет порядок в $\hat{E}_h$, поэтому элемент $\hat{x} = \hat{a}b\hat{a}$ является точной верхней гранью в $\hat{E}_h$ для сети $\left\{\hat{x}_\alpha\right\}$. Таким образом, каждая возрастающая ограниченная сверху сеть элементов из $\hat{E}_h$ имеет в $\hat{E}_h$ точную верхнюю грань. Повторяя доказательство предложения 3 из § 2 гл. IV, получаем, что если $\left\{\hat{x}_\alpha\right\} \subset \hat{E}_h$ и $\hat{x}_\alpha \uparrow \hat{x}$, то $\hat{a}\hat{x}_\alpha\hat{a} \uparrow \hat{a}\hat{x}\hat{a}$ для каждого $\hat{a} \in \hat{E}_h$. Пусть e — проектор в E и $e\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha e$ для каждого $\alpha \in \mathbf{A}$. Тогда

$$\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha e + \hat{x}_\alpha e^\perp = e\hat{x}_\alpha e + e^\perp\hat{x}_\alpha e^\perp$$

и

$$\hat{x} = \sup_\alpha \hat{x}_\alpha = \sup\left(e\hat{x}_\alpha e + e^\perp\hat{x}_\alpha e^\perp\right) = \sup_\alpha e\hat{x}_\alpha e + \sup_\alpha e^\perp\hat{x}_\alpha e^\perp =$$

$$= e\hat{x}e + e^\perp\hat{x}e^\perp.$$

Отсюда следует, что $\hat{x}e = e\hat{x}e = e\hat{x}$.

Каждый эрмитов элемент $\hat{y}$ из $\hat{E}$ лежит в некоторой максимальной коммутативной $*$-подалгебре F, являющейся универсальным комплексным полуполем. Поэтому существует спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ проекторов из F, для которого $\hat{y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$. Это спектральное семейство не зависит от выбора максимальной коммутативной $*$-подалгебры $F \ni \hat{y}$ (см. начало § 4 гл. III). Следовательно, если $\hat{y}\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha\hat{y}$, то $\hat{x}_\alpha e_\lambda = e_\lambda\hat{x}_\alpha$ (достаточно взять максимальную коммутативную $*$-подалгебру в $\hat{E}$, содержащую $\hat{y}$ и $\hat{x}_\alpha$). Из доказанного выше вытекает, что $\hat{x}e_\lambda = e_\lambda\hat{x}$ для всех λ. Пусть y — ограниченный элемент из E_h, F — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $\hat{E}$, содержащая y, и $\hat{t}_1$ — R-топология в F, индуцируемая из $(\hat{E}, \hat{t})$. Существует последовательность элементов $\{y_n\} \subset E_h$ вида $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(e_{\lambda_{i+1}} - e_{\lambda_i})$, которая сходится к y относительно топологии $\hat{t}_1$. Поэтому если $yx_\alpha = x_\alpha y$ для всех α, то $\hat{x}y_n = y_n\hat{x}$, $n = 1, 2, \ldots$ и

$$\hat{x}y = \lim \hat{x}y_n = \lim y_n\hat{x} = y\hat{x}.$$

Пусть $\hat{y}$ — произвольный эрмитовый элемент из $\hat{E}_h$, F — то же, что и выше, $b_n = \hat{y}\left(e_{-n}^{\perp} \wedge e_n\right)$ и $\hat{y}\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha\hat{y}$, $\alpha \in \mathbf{A}$. Тогда b_n — ограниченный элемент из F_h и $b_n\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha b_n$, $\alpha \in \mathbf{A}$. Следовательно, $b_n\hat{x} = \hat{x}b_n$. Но $\left(e_{-n}^{\perp} \wedge e_n\right) \uparrow \mathbf{1}$, поэтому $\left(e_{-n}^{\perp} \wedge e_n\right) \xrightarrow{\hat{t}} \mathbf{1}$ и $b_n \xrightarrow{\hat{t}} \hat{y}$. Отсюда $\hat{y}\hat{x} = \hat{x}\hat{y}$. Если $\hat{d}$ — произвольный элемент из $\hat{E}$, $\hat{d} = \hat{y}_1 + i\hat{y}_2$, $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \hat{E}_h$ и $\hat{d}\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha\hat{d}$, $\alpha \in \mathbf{A}$, то $\hat{x}_\alpha\hat{d}^* = \hat{d}^*\hat{x}_\alpha$ и потому $\hat{y}_i\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha\hat{y}_i$, $i = 1, 2$. В силу доказанного выше $\hat{d}\hat{x} = \hat{x}\hat{d}$. Таким образом, $\hat{E}$ — универсальная O^*-алгебра.

Покажем, что $\hat{t}$ — R-топология на $\hat{E}$. Аксиома (T1) для $\hat{t}$ уже проверена, аксиома (T4) следует из предложения 5. Базис окрестностей нуля в (E, t) образуют множества $\{\Omega(U, \varepsilon, \lambda)\}$, $U \in И$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ (см. замечание к теореме 1 из § 4). Следовательно, замыкания $\{\overline{\Omega}(U, \varepsilon, \lambda)\}$ множеств $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ в $\left(\hat{E}, \hat{t}\right)$ образуют базис окрестностей нуля в $\left(\hat{E}, \hat{t}\right)$ ([49], предложение 7, с. 55). Если $\hat{x} \in \overline{\Omega}(U, \varepsilon, \lambda)$ и $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сеть из $\Omega(U, \varepsilon, \lambda)$, для которой $x_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} \hat{x}$, то $ax_\alpha \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ для каждого $a \in B$, $\|a\| \leqslant 1$ и поэтому $a\hat{x} = \lim\limits_\alpha ax_\alpha \in \overline{\Omega}(U, \varepsilon, \lambda)$, т. е. топология $\hat{t}$ удовлетворяет аксиоме (T2).

Пусть e — проектор из $\hat{E}$ и $e \in \overline{\Omega}(U, \varepsilon, \lambda)$, $\varepsilon < 1$. Тогда $e \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ (предложение 5) и $z^\perp(e, \lambda) \in U$ (см. доказательство теоремы 1 из § 4). Следовательно, $xe \in \Omega(U, \varepsilon, \lambda)$ для всех $x \in E$ и потому $\hat{x}e \in \overline{\Omega}(U, \varepsilon, \lambda)$ для всех $\hat{x} \in \hat{E}$. Это означает, что если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сеть проекторов из $\hat{E}$, сходящаяся к нулю в топологии $\hat{t}$, то $\hat{x}_\alpha e_\alpha \xrightarrow{\hat{t}} 0$ для любой сети $\left\{\hat{x}_\alpha\right\}_{\alpha \in A} \subset \hat{E}$.

Таким образом, $\hat{t}$ — R-топология на $\hat{E}$. ■

Следствие. Пусть (E, t) — топологическая O^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) E — универсальная O^*-алгебра;

2) (E, t) полно относительно равномерности, порожденной R-топологией t.

Доказательство. Импликация 2)⟶1) следует из теоремы 2. Пусть B — OC^*-алгебра ограниченных элементов в E и $\left(\hat{E}, \hat{t}\right)$ — пополнение (E, t). OC^*-Алгебра ограниченных элементов универсальной O^*-алгебры $\left(\hat{E}, \hat{t}\right)$ $*$-изоморфна B (предложение 5), поэтому если E — универсальная O^*-алгебра, то E $*$-изоморфно $\hat{E}$ (теорема 1 из § 7 гл. IV) и (E, t) полно относительно равномерности, порожденной R-топологией t (следствие 1 к теореме 1 из § 3). ■

Как уже отмечалось в § 7 гл. IV, не всякую O^*-алгебру можно вложить как заполненную O^*-подалгебру в универсальную O^*-алгебру. Однако для топологических O^*-алгебр в силу теоремы 2 такое вложение возможно.

Теорема 3. Для каждой топологической O^*-алгебры (E, t) существуют единственная с точностью до $*$-изоморфизма универсальная топологическая O^*-алгебра $\left(\hat{E}, \hat{t}\right)$ и $*$-изоморфизм $\Phi: E \longrightarrow$

$\to\hat{E}$, такие, что $\Phi(E)$ — заполненная O^*-подалгебра в $\hat{E}$ и $\Phi(1)=1$.

Доказательство. Пусть $(\hat{E}, \hat{t})$ — пополнение (E, t) относительно равномерности, порожденной R-топологией t, и Φ — естественное вложение E в $\hat{E}$. Топологическая O^*-алгебра $(\hat{E}, \hat{t})$ универсальна (теорема 2), $\Phi(1)=1$ и Φ является $*$-изоморфизмом OC^*-алгебры B ограниченных элементов из E на OC^*-алгебру $\hat{B}$ ограниченных элементов из $\hat{E}$ (предложение 5). В силу теоремы 1 из §7 гл. IV $\Phi(E)$ — заполненная O^*-подалгебра в $\hat{E}$.

Если (E_1, t_1) — другая универсальная топологическая O^*-алгебра и $\Phi_1: E\to E_1$ — $*$-изоморфизм E на заполненную O^*-подалгебру в E_1, для которого $\Phi_1(1)=1$, то OC^*-алгебры ограниченных элементов в E и E_1 $*$-изоморфны и поэтому E_1 $*$-изоморфно $\hat{E}$ (теорема 1 из §7 гл. IV). ■

Следствие. Для любой топологической OC^*-алгебры (B, t) существует универсальная топологическая O^*-алгебра $(\hat{E}, \hat{t})$, у которой OC^*-алгебра ограниченных элементов $*$-изоморфна B.

В заключение параграфа отметим, что в силу предложения 1 из § 7 гл. IV и следствия 3 к теореме из § 3 каждая универсальная топологическая O^*-алгебра (E, t) $*$-изоморфна тихоновскому произведению $\prod\limits_{i\in I}(E_i, t_i)$ универсальных топологических O^*-алгебр (E_i, t_i) счетного типа, $i\in I$, где I — некоторое множество индексов.

Библиография [104, 148, 149, 151].

§ 6. Связь R- и (o)-топологий в коммутативных топологических O*-алгебрах

Пусть (E, t) — коммутативная топологическая O^*-алгебра. Как показано в предложении 5 из § 4, R-топология t на E_h мажорируется (o)-топологией. В этом параграфе устанавливается, что необходимым условием для совпадения R- и (o)-топологий на E_h является счетность типа O^*-алгебры E. Для универсальных коммутативных O^*алгебр это условие также достаточно.

Предложение. Если (E, t) — универсальная топологическая O^*-алгебра счетного типа, то R-топология на E_h мажорирует (o)-топологию.

Доказательство. В силу теоремы из § 2 и следствия к теореме 1 из § 5 O^*-алгебра (E, t) является полным метризуемым пространством. Пусть $x_n\in E_h$ и $x_n\xrightarrow{t}0$. Тогда $|x_n|\xrightarrow{t}0$ и существует такая подпоследовательность $\{|x_{n_k}|\}$, что $|x_{n_k}|\in U_k$, где

$\{U_k\}$ — базис нормальных окрестностей нуля в (E, t), для которого $U_{k+1} + U_{k+1} \subset U_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, последовательность $S_k = \sum_{i=1}^{k} |x_{n_i}|$ фундаментальна в (E, t). Используя предложение 4 из § 4 и повторяя конец доказательства предложения 3 из § 1, получаем, что $x_{n_k} \xrightarrow{(o)} 0$. Это означает, что на E_h R-топология сильнее (o)-топологии. ■

Из предложения 1 и предложения 5 из § 4 вытекает следствие.

Следствие. На эрмитовой части универсальной коммутативной топологической O^*-алгебры счетного типа R-топология и (o)-топология совпадают.

Для получения необходимого условия совпадения R-топологии и (o)-топологии нам понадобится следующее понятие.

Определение (см. [72], с. 304). Топологическое пространство (X, τ) называется k-пространством, если каждое подмножество $F \subset X$, пересечение которого с любым замкнутым компактным множеством замкнуто, само замкнуто в (X, τ).

Лемма 1. Пусть E — заполненное подполуполе в универсальном дискретном полуполе R^{Δ} и $\tau_0(E)$ — (o)-топология в E. Тогда $(E, \tau_0(E))$ — k-пространство.

Доказательство. Обозначим через t топологию в E, индуцируемую тихоновской топологией из прямого произведения $R^{\Delta} = \prod_{q \in \Delta} R_q$, $R_q = \boldsymbol{R}$, $q \in \Delta$. Если сеть $\{x_\alpha\} \subset E$ (o)-сходится в E к элементу x, то $x_\alpha(q) \to x(q)$ для всех $q \in \Delta$ (здесь $x_\alpha = \{x_\alpha(q)\}$). Следовательно, $x_\alpha \xrightarrow{t} x$, т. е. $t \leqslant \tau_0(E)$. Пусть F — произвольное подмножество из E, пересечение которого с любым замкнутым компактным множеством из $(E, \tau_0(E))$ замкнуто. Если $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset F$ и $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ в E, то существуют такие $\alpha_0 \in A$ и $y \in E$, что $|x_\alpha| \leqslant y$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Положим

$$S = \{x \in E : |x| \leqslant y\} = \{x \in R^{\Delta} : |x| \leqslant y\}.$$

Очевидно, что $S = \prod_{q \in \Delta} [-y(q), y(q)]$. Поэтому S — компактное подмножество в (E, t).

Если $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset S$, $y_\alpha \xrightarrow{t} y$ и $a_\alpha = \bigwedge_{\beta > \alpha} y_\beta$, $b_\alpha = \bigvee_{\beta > \alpha} y_\beta$, то $a_\alpha, b_\alpha \in S$, $a_\alpha \leqslant y_\alpha \leqslant b_\alpha$ и $\bigvee_\alpha a_\alpha = y = \bigwedge_\alpha b_\alpha$, т. е. $y_\alpha \xrightarrow{(o)} y$ в E. Это означает, что на множестве S (o)-топология и топология t совпадают. Следовательно, S компактно в $(E, \tau_0(E))$ и потому множество $F \cap S$ замкнуто в $(E, \tau_0(E))$.

Так как $\{x_\alpha\}_{\alpha > \alpha_0} \subset F \cap S$ и $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, то $x \in F \cap S \subset F$. Таким образом, F замкнуто в $(E, \tau_0(E))$, т. е. $(E, \tau_0(E))$ есть k-пространство. ■

Лемма 2. Пусть E — заполненное подполуполе в универсальном дискретном полуполе R^Δ и t — топология в E, индуцируемая тихоновской топологией из R^Δ. Тогда (E, t) является k-пространством в том и только в том случае, когда множество Δ не более чем счетно.

Доказательство. Если Δ — конечное или счетное множество, то топология t метризуема. Пусть F — не замкнутое подмножество в (E, t) и x — предельная точка для F, которая не принадлежит F. Выберем такую последовательность $\{x_n\} \subset F$, что $x_n \xrightarrow{t} x$ и положим $S = \{x\} \cup \{x_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда S — компактное множество в (E, t), но $F \cap S$ не замкнуто. Это означает, что (E, t) является k-пространством.

Предположим теперь, что Δ — несчетное множество. Обозначим через F множество всех таких $x \in E$, что для некоторого натурального n каждая координата $x(q)$ элемента x, за исключением не более n из них, равна n, причем остальные координаты x равны нулю.

Ясно, что $0 \in \overline{F}$. Для каждого конечного подмножества $\alpha = (q_1, \ldots, q_n) \subset \Delta$ положим $x_\alpha(q) = |\alpha|$, если $q \,\overline{\in}\, \alpha$, и $x_\alpha(q) = 0$, если $q \in \alpha$, где $|\alpha|$ — число элементов в α. Множество $\mathrm{A} = \{\alpha\}$ образует направление при введении частичного порядка по включению. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ принадлежит F и $x_\alpha \xrightarrow{t} 0$. Следовательно, множество F не замкнуто в (E, t). Покажем, что $F \cap S$ замкнуто в (E, t) для каждого компактного множества $S \subset (E, t)$.

Если S — компактное подмножество в (E, t), то $pr_q(S) = \{x(q) : x \in S\}$ — компактное подмножество в R и потому существует такое $y \in R^\Delta$, $y \geqslant 0$, что

$$S \subset \prod_{q \in \Delta} [-y(q),\ y(q)].$$

Так как Δ — несчетное множество, то найдется такое n_0, для которого множество $\{q \in \Delta : n_0 \leqslant y(q) \leqslant n_0 + 1\}$ также несчетно. Пусть $z = \{z(q)\}_{q \in \Delta}$ принадлежит замыканию $\overline{F \cap S}$ множества $F \cap S$ в (E, t). Если z имеет счетное число нулевых координат, то найдется такое $x \in F \cap S$, что $x(q_i) = 0$ для некоторых $q_i \in \Delta$, $i = 1, \ldots, n_0 + 1$, но тогда $x(q) > n_0 + 1$ для всех $q \in \Delta$, за исключением конечного числа, что противоречит включению $x \in S$. Следовательно, z имеет только конечное число координат $(z(q_{i_1}), \ldots, z(q_{i_n}))$, равных нулю. Выберем сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset F \cap S$ так, чтобы $x_\alpha \xrightarrow{t} z$. Тогда $x_\alpha(q) \to z(q)$ для всех $q \in \Delta$ и так как $x_\alpha \in F$, то $z(q)$ — натуральное число для каждого $q \neq q_{i_k}$, $k =$

$=1, 2, \ldots, n$ и $z(q)=z(p)$ для всех $q, p \in \Delta \setminus \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}\}$. Поэтому $z \in F \cap S$, т. е. $F \cap S$ замкнуто в (E, t). Таким образом, если Δ несчетно, то (E, t) не является k-пространством. ■

Из лемм 1 и 2 вытекает следствие.

Следствие. Если E — заполненное подполуполе в универсальном дискретном полуполе R^{Δ} и (o)-топология в E совпадает с топологией t, индуцируемой тихоновской топологией из R^{Δ}, то E имеет счетный тип.

Замечание. Счетность типа подполуполя E еще не обеспечивает совпадения (o)-топологии и топологии t (обозначения взяты из предыдущего следствия).

Пример. Пусть l_∞ — полуполе всех ограниченных числовых последовательностей. Очевидно, что l_∞ есть заполненное подполуполе в универсальном дискретном полуполе R^N, где N — множество всех натуральных чисел. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset l_\infty$, для которой

$$x_n(i)=0, \text{ если } n \neq i \text{ и } x_n(n)=n, \ i \in N.$$

Очевидно, что $x_n \xrightarrow{t} 0$. С другой стороны, если бы $x_n \xrightarrow{\tau_0(E)} 0$, то в силу счетности типа l_∞ существовала бы последовательность $x_{n_k} \xrightarrow{(o)} 0$ ([52], с. 177), но это невозможно, так как множество $\{x_{n_k}\}$, $k=1, 2, \ldots$ неограниченно сверху в l_∞. Следовательно, (o)-топология в l_∞ существенно сильнее топологии t.

Следующая теорема обобщает утверждение предыдущего следствия на все коммутативные топологические O^*-алгебры.

Теорема 1. Если в коммутативной топологической O^*-алгебре (E, t) R-топология t на E_h совпадает с (o)-топологией, то E имеет счетный тип.

Доказательство. Пусть $\Delta=\{e_i\}_{i \in I}$ — произвольное множество попарно ортогональных ненулевых проекторов из E и $\vee \Delta = \mathbf{1}$. Обозначим через F множество всех таких элементов x из E, для которых $xe_i=\lambda_i e_i$, $i \in I$, где λ_i — некоторое комплексное число. Очевидно, что F — $*$-подалгебра в E, $\mathbf{1} \in F$ и частичный порядок в F_h, индуцированный из E_h, согласован с алгебраическими операциями (см. определение 1 из § 2 гл. IV). Так как E — коммутативная O^*-алгебра, то E_h является полуполем. Поэтому для любых $x, y \in F_h$ существует точная верхняя грань $x \vee y$ в E_h и если $xe_i=\lambda_i e_i$ и $ye_i=\mu e_i$, $i \in I$, то $(x \vee y)e_i = =(xe_i) \vee (ye_i) = \max(\lambda_i, \mu_i)\, e_i$. Поэтому $x \vee y \in F_h$, т. е. F_h является решеткой. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть из F_h и $x=\sup\limits_\alpha x_\alpha$ (точная верхняя грань для $\{x_\alpha\}$ берется в

E_h). Тогда $xe_i = e_i x e_i = \sup_\alpha e_i x_\alpha e_i = (\sup_\alpha \lambda_i^{(\alpha)}) e_i$, где $x_\alpha e_i = \lambda_i^{(\alpha)} e_i$, $i \in I$. Следовательно, $x \in E_h$. Это означает, что F есть правильная O^*-подалгебра в E.

В силу п. 6) предложения 1 из § 2 R-топология t индуцирует в F R-топологию. С другой стороны, F_h является дискретным полуполем и потому F_h изоморфна заполненному подполуполю в универсальном полуполе R^I (будем считать, что $F_h \subset R^I$). Обозначим через t_0 топологию в F_h, индуцируемую тихоновской топологией из R^I. Произведение топологий $t_0 \times t_0$ в $F = F_h + iF_h$ удовлетворяет аксиомам (T1) — (T4) и потому $t_0 \times t_0$ есть R-топология на F. Следовательно, t_0 совпадает с топологией, индуцируемой R-топологией t на F_h (теорема из § 3). Так как F — правильная O^*-подалгебра в E и каждая (o)-сходящаяся в E_h сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset F_h$ ограничена при $\alpha \geqslant \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in A$, то, повторяя доказательство п. б) предложения 1 из § 3 гл. I, получаем, что (o)-топология $\tau_0(E_h)$ в E_h индуцирует (o)-топологию $\tau_0(F_h)$ в F_h. В силу предположения теоремы $\tau_0(F_h) = t_0$. Поэтому из следствия к леммам 1 и 2 вытекает, что I — счетное множество. Это означает, что O^*-алгебра E имеет счетный тип. ■

Следствие. Пусть (E, t) — коммутативная универсальная топологическая O^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) E имеет счетный тип;

2) R-топология t на E_h совпадает с (o)-топологией.

Приведем теперь критерий непрерывности операции сложения относительно (o)-топологии в эрмитовой части коммутативной универсальной O^*-алгебры.

Теорема 2. Пусть E — универсальная коммутативная O^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

1) операция $x+y$ непрерывна по совокупности переменных относительно (o)-топологии в E_h;

2) E — топологическая O^*-алгебра счетного типа.

Доказательство. Импликация 2)⟶1) вытекает из следствия к предложению.

Докажем импликацию 1)⟶2). Если F — замкнутое в (o)-топологии $\tau_0(E_h)$ подмножество из E_h, то $(-F)$ также замкнуто в $\tau_0(E_h)$. Поэтому $(E_h, \tau_0(E_h))$ является отделимой топологической группой.

Обозначим через $И$ совокупность всех симметричных окрестностей нуля в $(E_h, \tau_0(E_h))$ (т. е. $U = -U$ для всех $U \in И$) и для каждого $U \in И$ положим

$$\Omega(U) = \{x \in U : [0, |x|] \subset U\}.$$

Ясно, что $\Omega(U) \subset U$, $-\Omega(U) = \Omega(U)$ и если $0 \leqslant |y| \leqslant |x|$,

$x \in \Omega(V)$, где $V \in И$, $V+V \subset U$, то $y_+, y_- \in V$, $y = y_+ - y_- \in V + V \subset U$ и, следовательно, $y \in \Omega(U)$.

Пусть $x_1, x_2 \in \Omega(V)$ и $0 \leqslant y \leqslant |x_1 + x_2|$. Так как E_h — полуполе, то $y \leqslant |x_1| + |x_2|$ и поэтому найдутся такие элементы y_1, $y_2 \in E_h$, что $y = y_1 + y_2$ и $0 \leqslant y_i \leqslant |x_i|$, $i = 1, 2$. Это означает, что $y \in V + V \subset U$, т. е.

$$\Omega(V) + \Omega(V) \subset \Omega(U).$$

Таким образом, система множеств $\{\Omega(U)\}$, $U \in И$ определяет на E_h отделимую топологию τ, относительно которой E_h есть топологическая группа [49]; при этом базис окрестностей нуля в (E_h, τ) образуют множества $\{\Omega(U)\}$, $U \in И$, в частности, $\tau_0(E_h) \leqslant \tau$. Покажем, что $\tau_0(E_h) = \tau$. Пусть $\{x_\alpha\} \subset E_h$, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, но $\{x_\alpha\}$ не сходится к нулю в (E_h, τ). Тогда существуют такие $\Omega(U)$ и $0 \leqslant y_{\alpha_\beta} \leqslant |x_{\alpha_\beta}|$, что $y_{\alpha_\beta} \overline{\in} U$, где $\{x_{\alpha_\beta}\}$ — конфинальная подсеть сети $\{x_\alpha\}$. Так как $|x_{\alpha_\beta}| \xrightarrow{(o)} 0$, то $y_{\alpha_\beta} \xrightarrow{(o)} 0$ и $y_{\alpha_\beta} \xrightarrow{\tau_0(E_h)} 0$, что противоречит выбору $\{y_{\alpha_\beta}\}$. Следовательно, $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ и потому из (o)-сходимости сетей вытекает их сходимость в топологии τ. Это означает, что $\tau \leqslant \tau_0(E_h)$.

Таким образом, множества $\{\overline{\Omega(U)}\}$, $U \in И$ образуют базис окрестностей нуля в $(E_h, \tau_0(E_h))$, где $\overline{\Omega(U)}$ — замыкание $\Omega(U)$ в $(E_h, \tau_0(E_h))$.

Если F — замкнутое подмножество в $(E_h, \tau_0(E_h))$, то множество $\{x \in E_h : |x| \in F\}$ также замкнуто в (o)-топологии (так как из $\{x_\alpha\} \subset E_h$, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ вытекает $|x_\alpha| \xrightarrow{(o)} |x|$ и потому $|x| \in F$). Поэтому операция $x \to |x|$ непрерывна в $(E_h, \tau_0(E_h))$. Далее в силу неравенства

$$|(x \vee u) - (y \vee v)| \leqslant |x - y| + |n - v|,$$

$x, y, u, v \in E_h$ (напомним, что E_h — векторная решетка) и существования базиса окрестностей $\{\Omega(U)\}$, для которого из $0 \leqslant |y| \leqslant |x|$, $x \in \Omega(V)$ вытекает $y \in \Omega(U)$, где $U, V \in И$, $V + V \subset U$, получим, что операция $x \vee y$ равномерно непрерывна по совокупности переменных относительно равномерности $И$, порожденной топологией $\tau_0(E_h)$. Следовательно, булева алгебра ∇ всех проекторов в E является равномерной относительно равномерности, индуцируемой $И$ из E_h. Поэтому на E существует R-топология t (теорема 1 из § 4), которая на E_h мажорируется (o)-топологией (предложение 5 из § 4).

Покажем, что $t = \tau_0(E_h)$ на E_h. Пусть $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — возрастающая к единице сеть проекторов счетного типа из ∇ (см. п. 2) теоремы 1 из § 7 гл. I). Для каждого натурального n положим $y_\alpha^{(n)} = n(1-g_\alpha)$. Тогда $y_\alpha^{(n)} \downarrow 0$ для любого фиксированного n, и поэтому для каждого $U \in И$ найдется такое $\alpha(n) \in A$, что $y_{\alpha(n)}^{(n)} \in \Omega(V)$, где $V \in И$ и

$$(\overline{\Omega(V) + \Omega(V)}) + \Omega(V) \subset \Omega(U)$$

(здесь замыкание берется в топологии $\tau_0(E_h)$).

Положим $g_0 = \bigvee_{n=1}^{\infty} g_{\alpha(n)}$. Если $x \in E_h$, $\{e_\lambda\}$ — спектральное разложение для x и $x_n = x(1-g_0)e_n(1-e_{-n})$, то $|x_n| \leqslant n(1-g_0) \leqslant y_{\alpha(n)}^{(n)}$ и потому $x_n \in \Omega(V) + \Omega(V)$; но $e_n(1-e_{-n}) \uparrow 1$ при $n \to \infty$, следовательно, $x_n \xrightarrow{(o)} x(1-g_0)$ и $x(1-g_0) \in \overline{\Omega(V) + \Omega(V)}$. Таким образом,

$$E_h(1-g_0) \subset \overline{\Omega(V) + \Omega(V)},$$

R-топология t индуцирует на Eg_0 R-топологию t_1 (п. 5) предложения 1 из § 2), а $\tau_0(E_h)$, очевидно, индуцирует на эрмитовую часть $E_h g_0$ O^*-алгебры Eg_0 (o)-топологию $\tau_0(E_h g_0)$.

Так как Eg_0 — коммутативная универсальная O^*-алгебра счетного типа, то $t_1 = \tau_0(E_h g_0)$ на $E_h g_0$ (следствие к предложению 1). Поэтому существует такая нормальная окрестность нуля W в (E, t), что

$$W \cap (E_h g_0) \subset \Omega(V) \cap (E_h g_0).$$

Если $x \in W \cap E_h$, то $xg_0 \in W$ и

$$x = xg_0 + x(1-g_0) \in \Omega(V) + \overline{\Omega(V) + \Omega(V)} \subset \Omega(U),$$

т. е. $W \cap E_h \subset \Omega(U)$. Это означает, что $\tau_0(E_h) \leqslant t$ и потому $t = \tau_0(E_h)$.

Следовательно, (E, t) — топологическая O^*-алгебра счетного типа (см. теорему 1). ■

Следствие. Если Δ — несчетное множество, то операция сложения в R^Δ не является непрерывной по совокупности переменных относительно (o)-топологии.

Библиография: [33—37, 103, 140].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акмалов Н., Хаджиев Д. Некоторые вопросы теории топологических полуполей. — ДАН УзССР, 1975, № 8, с. 7—8.
2. Алберт (Albert A. A.). On a certain algebra of Quantum Mechanics.— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 65—73.
3. Алберт (Albert A. A.). A construction of Exeptional Jordan Division algebras. — Ann. Math., 1958, vol. 67, p. 1—28.
4. Алфсен, Шульц, Штёрмер (Alfcen E. M., Shultz F. W., Stormer E.). Gelfand — Neumark theorem for Jordan algebras. — Advances in Math., 1978, vol. 28, № 1, p. 11—56.
5. Алфсен, Шульц (Alfsen E. M., Shultz F. W.). State space of Jordan algebras. — Acta Math., 1978, vol. 140, № 3—4, p. 155—190.
6. Алфсен, Шульц (Alfsen E. M., Shultz F. W.). On non-commutative spectral theory and Jordan algebras. — Proc. London Math. Soc., 1979, vol. 38, p. 497—516.
7. Алфсен, Ханке-Ольсен, Шульц (Alfsen E. M., Hanche-Olsen H., Shultz F. W.). State space of C*-algebras.—Acta Math., 1980, vol. 144, № 3—4, p. 207—305.
8. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Топологические полуполя. Ташкент, изд-во САГУ, 1960.
9. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Топологические алгебры Буля. Ташкент, изд-во АН УзССР, 1963.
10. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Очерк теории топологических полуполей. — УМН, вып. 4 (130), 1966, с. 185—218.
11. Антоновский М. Я. Топологические полуполя и абстрактные динамические системы. — Труды ТашПИ, вып. 37 (математика). Ташкент, 1966, с. 3—10.
12. Антоновский М. Я., Миронов А. В. B^*-Топология в дискретных K-пространствах. — ДАН УзССР, 1974, № 1, с. 3—5.
13. Аренс (Arens R.). The adjoint of bilinear operation. — Proc. Amer. Sos., 1951, vol. 2, p. 839—848.
14. Аюпов Ш. А., Хаджиев Д. Топология в K-пространствах с единицей.— ДАН УзССР, 1975, № 1, с. 3—4.
15. Аюпов Ш. А. T^m-Топологические алгебры Буля. — ДАН УзССР, 1975, № 9, с. 9—10.
16. Аюпов Ш. А. T^m-Топология в полных булевых алгебрах.—Труды ТашГУ «Вопросы математики», вып. 490, 1976, с. 27—37.
17. Аюпов Ш. А. Топология C-сходимости в полуполях. — Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1976, № 5, с. 3—7.
18. Аюпов Ш. А. Эргодическая теорема в O^*-алгебрах.— ДАН УзССР, 1977, № 3, с. 3—4.
19. Аюпов Ш. А. Об одном классе топологий в универсальном полуполе.—

Сб. научных трудов ТашГУ. Функциональный анализ, 1978, № 573, с. 15—17.
20. Аюпов Ш. А. Эргодические теоремы для цепей Маркова на O^*-алгебрах.— ДАН УзССР, 1978, № 7, с. 11—13.
21. Аюпов Ш. А. Несколько эргодических теорем для цепей Маркова на O^*-алгебрах.—Сб. научных трудов ТашГУ. Математический анализ, 1979, № 576, с. 3—13.
22. Аюпов Ш. А. К теории частично упоряченных йордановых алгебр.— ДАН УзССР, 1979, № 8, с. 6—8.
23. Аюпов Ш. А. Спектральная теорема для OJ-алгебр.—ДАН УзССР, 1979, № 9, 3—5.
24. Аюпов Ш. А. Теорема эргодического типа в йордановых алгебрах. — Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1980, № 6, с. 10—16.
25. Аюпов Ш. А. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры.— УМН, 1980, т. 35, вып. 3 (213), с. 138—140.
26. Аюпов Ш. А. Матричные OJ-алгебры.—ДАН УзССР, 1980, № 5, 3—4.
27. Аюпов Ш. А. OJ-Алгебры ограниченных элементов.— Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1980, № 2, с. 3—8.
28. Аюпов Ш. А. Нормальные состояния на OJB-алгебрах.—Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1980, № 3, с. 9—13.
29. Аюпов Ш. А., Усманов Ш. М. R-Топология на OJ-алгебрах. — ДАН УзССР, 1980, № 8, с. 3—4.
30. Аюпов Ш. А., Усманов Ш. М. Порядок и топология в йордановых алгебрах.— Деп ВИНИТИ № 4232 — 80 деп., 77 с.
31. Безносиков Ф. Д. Теорема о множестве значений непрерывной внешней меры, заданной в σ-полной непрерывной булевой алгебре.— Труды Московского гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина «Вопросы дифференциальной и неэвклидовой геометрии», 1972—1973.
32. Беллисар, Иокум (Bellisard J., Iochum B.). Homogeneous self dual cones, versus Jordan algebras. — The theory revisited Ann Inst. Fourier Grenoble, 1978, vol. 28, № 1, p. 27—67.
33. Бендерский О. Я. О B^*-топологии в K-линеалах.— ДАН УзССР, 1974, № 1, с. 6—7.
34. Бендерский О. Я. О B^*-топологии в недискретных полуполях. — ДАН УзССР, 1974, № 12, с. 3—4.
35. Бендерский О. Я. B^*-Топология в K-линеалах. — Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1975, № 5, с. 3—7.
36. Бендерский О. Я. Об одной внутренней топологии. — Труды НИИ математики ВГУ, вып. XX. Функциональный анализ и его приложения, 1975, с. 66—67.
37. Бендерский О. Я., Чилин В. И. (o)-Топология в топологических полуполях.— ДАН УзССР, 1976, № 3, с. 9—10.
38. Бендерский О. Я., Внутренние топологии в l-группах и в K-линеалах— Бюлл. Польской АН, серия матем. наук, 1979, т. XXVII, № 1, с. 15—19.
39. Бенке, Бос (Behncke H., Bos W.) JB-Algebras with an exceptional ideal. — Math. Scand., 1978, vol. 42, p. 306—312.
40 Берберьян (Berberian S. K.). Baer *-ring. Springer Verlag, 1972.
41. Биркгоф Г. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
42. Бонсалл (Bonsall F. F.). Jordan subalgebras of Banach algebras. — Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 1978, vol. 21, p. 103—110.
43. Бонсалл (Bonsall F. F.) Jordan algebras spanned by hermitian elements of a Banach algebra. — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1977, vol. 81, № 1, p. 3—13.
44. Бояджиев (Boyadziev H. N.) Order characterization of some Banach Jordan algebras. — Докл. Болг. АН, 1979, vol. 32, № 8, p, 1019—1022.
45. Браун, Кёхер (Braun H., Koecher M.). Jordan-Algebren Berlin— Cottinge — Heidelber, Springer — Verlag, 1966.
46. Бройер, Харп (Breur M., Harpe P.). Characterisation des AW*-al-

gebras semi-finies qui sont des algebres de von Neumann. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1979, t. 289, ser. A. A 21—A 23.
47. Бунс (Bunce J.). The ordered vector space structure of JC-algebras.— Proc. London Math. Soc., 1971, vol. 22, № 2, p. 359—368.
48. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). М., «Наука», 1968.
49. Бурбаки Н. Общая топология (топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства). М., «Наука», 1969.
50. Варадарайан (Varadarajan V. S.). Probability in physics and a theorem on simultaneous observability. — Comm. Pure and Appl. Math., 1962, vol. 15, p. 189—217.
51. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М., «Наука», 1969.
52. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
53. Гайна Стелян (Caina Stelian). Order topology on Boolean algebras.— Rev. Roum Math. Pures. et Appl., 1972, vol. 17, № 2, p. 243—254.
54. Гайфман (Gaifman H.). Concerning measures on boolean algebras.— Pacific J. Math., 1964, vol. 14, № 1, p. 61—73.
55. Гольдштейн М. Ш. О существовании меры на топологических алгебрах Буля.— ДАН УзССР, 1976, № 3, с. 3—5.
56. Джекобсон (Jacobson N.). General Representation theory of Jordan algebras.— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, vol. 70, № 3, p. 509—530.
57. Джекобсон (Jacobson N.). Structure and Representations of Jordan algebras. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence RI, 1968, vol. 39.
58. Диксмье (Dixmier J.). Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris, 1969.
59. Диксмье. C^*-Алгебры и их представления. М., «Наука», 1974.
60. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М., «Наука», 1978.
61. Иедон (Yeadon F. J.). Non-commutative L^p-spaces Math. Proc. Cambrige Phil. Soc., 1975, vol. 77, p. 91—102.
62. Иедон (Yeadon F. J.). Convergence of measurable operators. — Proc. Cambridge Phil. Soc., 1973, vol. 74, p. 257—268.
63. Йордан, фон Нейман, Вигнер (Jordan P., Neumann J., Wigner E.). On an algebraic generalizaton of the quantum mechanical formalism. — Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 29—64.
64. Калинин В. В. Ортомодулярные частично упорядоченные множества с размерностью.— Алгебра и логика 1976, т. 15, № 6, с. 535—557.
65. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., Гостехиздат, 1950.
66. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., «Наука», 1977.
67. Капланский (Kaplansky I.). Projections in Banach algebras. — Ann. Math., 1951, vol. 53, p. 235—249.
68. Капланский (Kaplansky I.). Algebras of type I. — Ann. Math., 1952, vol. 56, p. 460—472.
69. Капланский (Kaplansky I). Any orthocomlémented complete modular lattice is continuous geometry.— Ann. Math., 1955, vol. 61, p. 524—541.
70. Капланский (Kaplansky I.). Rings of operators. New-York, 1968.
71. Катетов (Katetov M.). Remark on Boolean algebras. — Colloq. Math., 1951, vol. 11, p. 229—235.
72. Келли Дж. Л. Общая топология. М., «Наука», 1968.
73. Киселева Т. Г. Частично упорядоченные множества, наделенные равномерной структурой. — Вестник ЛГУ, 1967, № 13, с. 51—57.
74. Кунц (Kunze R. A.). L_p -Fourier transforms on locally compact unimodular groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 89, p. 519—540.
75. Кэдисон (Kadison R.). Order properties of bounded self-adjoint operators. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, vol. 2, p. 505—510.
76. Кэдисон (Kadison R.). A representation theory for commutative

topological algebra. — Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence RI, 1951, vol. 7.

77. Ловденслагер (Lowdenslager D. B.). On postulates for general quantum mechanics. — Proc. Amer. Math. Soc., 1957, vol. 8, p. 88—91.

78. Лодкин А. Л. Всякая мера на проекторах W^*-алгебры продолжается до состояния.—Функциональный анализ и его приложения, 1974, т. 8, вып. 4, р. 54—58.

79. Магарам (Maharam P.). An algebraic characterisation of measure algebras. — Ann. Math., 1947, vol. 43, № 1, p. 154—167.

80. Маеда (Maeda F.). Kontinuerliche Geometrien. Berlin, 1958.

81. Мацусима (Matsushima Y.). On the B-covers in lattices, — Proc. Japan Acad., 1956, vol. 32, № 7, p. 549—553.

82. Мацусима (Matsushima Y.). Between-topology on a Distributive lattice. — Proc. Japan Acad., 1959, vol. 35, № 4, p. 221—225.

83. Мацусима (Matsushima Y.). Between-topology for lattices. — J. Math. Soc. Japan., 1964, vol. 16, № 4, p. 335—341.

84. Миронов А. В. B^*-Топология в полуполях I рода. — Труды ТашГУ «Вопросы математики», вып. 418, 1972, с. 220—226.

85. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968.

86. Фон Нейман И. Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры (ч. 1). — Матем. сб., 1936, т. 1, № 4, с. 415—484.

87. Нельсон (Nelson E.). Notes on non commutative integration. — J. Funct. Anal., 1974, vol. 15, p. 103—116.

88. Нортхэм ((Northam E. S.). The interval topology of an lattice. — Proc. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 4, № 5, p. 824—827.

89. Огасавара, Иошинага (Ogasawara T., Yoshinaga K.). A non commutative theory of integration for operators. — J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, Ser. A, vol. 18, № 3, p. 311—347.

90. Падманабхан (Padmanabhan A. K.). Convergence in measure and related results in finite rings of operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 128, p. 359—388.

91. Педерсен (Pedersen G. K.). Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras. — Bull. London Math. Soc., 1972, vol. 4, p. 171—175.

92. Потепун А. В. Связь равномерного и структурного пополнения топологических K-линеалов и булевых алгебр. — Вестник ЛГУ, вып. 1, 1975, № 1, р. 139—140.

93. Ротхаус (Rothaus O. S.). Ordered Jordan algebras. — Amer. J. Math., 1978, vol. 100, № 5, p. 925—939.

94. Райт, Янгсон (Wright M. J. D.. Youngson M. A.). On isometries of Jordan algebras. — J. London Math. Soc., 1978, vol. 17, p. 339—345.

95. Рема (Rema P. S.). On a class of topologies in lattice ordered groups.— Madr. Univ. J., 1965, vol. XXXV, p. 19—26.

96. Робинсон, Штермер (Robinson D. W., Stormer E.). Lie and Jordan structure in operator algebras.—J. Austral Math. Soc., 1980, vol. A29, № 2, p. 129—142.

97. Рудин У. Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.

98. Сакаи (Sakai S.). C^*-Algebras and W^*-algebras. — Springer Verlag., 1971.

99. Санкаран (Sankaran S.). The *-algerbra of unbounded operators. — J. Lond. Math. Soc., 1959, vol. 34, p. 337—344.

100. Санкаран (Sankaran S.). Stochastic convergence for operators. — Quart J. Math. Oxford., 1964, Ser. 2, № 15, p. 97—102.

101. Сасаки (Sasaki V.). Lattices of projections in AW^*-algebras.— J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, vol. 19, p. 1—30.

102. Сарымсаков Т. А. Топологические полуполя и теория вероятностей. Ташкент, «Фан», 1969.

103. Сарымсаков Т. А., Исламов А. Н. О существовании внешней меры на алгебрах Буля и некоторые вопросы сходимости в топологических полуполях.— ДАН УзССР, 1974, № 4, с. 3—5.

104. Сарымсаков Т. А., Рубштейн Б. А., Чилин В. И. Полные тензорные произведения топологических полуполей. — ДАН СССР, 1974, т. 216, № 6, с. 1226—1228.
105. Сарымсаков Т. А., Винокуров В. Г., Чилин В. И. Меры на топологических алгебрах Буля. — ДАН СССР, 1974, т. 218, № 1, с. 42—45.
106. Сарымсаков Т. А., Чилин В. И. Меры на булевых алгебрах счетного типа.— Тезисы докладов советско-японского симпозиума по теории вероятностей. Ташкент, 1975, т. 1, с. 151—153.
107. Сарымсаков Т. А., Рубштейн Б. А., Чилин В. И. О полных тензорных произведениях топологических булевых алгебр и полуполей. — ДАН УзССР, 1976, № 7, с. 3—4.
108. Сарымсаков Т. А., Бендерский О. Я., Чилин В. И. Меры со значениями в полуполях и их приложения в теории вероятностей. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 1, с. 41—44.
109. Сарымсаков Т. А., Чилин В. И. Равномерности и внешние оценки на логиках. — ДАН СССР, 1976, т. 230, № 6, с. 1282—1285.
110. Сарымсаков Т. А., Гольдштейн М. Ш. О частично упорядоченных инвалютивных алгебрах. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 2, с. 306—309.
111. Сарымсаков Т. А., Чилин В. И. Гомоморфизмы равномерных логик.— Тезисы VII Всесоюзной топологической конференции. Минск, 1977, с. 171.
112. Сарымсаков Т. А., Чилин В. И. (Sarymsakov T. A., Cilin V. I.). Measures on topological boolean algebras. — Proc. Conf. Topology and measure, part 2. Greifswald, 1978, p. 315—332.
113. Сарымсаков Т. А. Некоммутативные вероятностные пространства на O^*-алгебрах. — ДАН СССР, 1978, т. 241, № 2, р. 297—300.
114. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Регулярность цепей Маркова на O^*-алгебрах.—ДАН УзССР, 1979, № 4, с. 3—5.
115. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Марковские процессы на O^*-алгебрах.— Сб. научных трудов ТашГУ «Прикладная математика и механика», 1979, № 590, с. 6—11.
116. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Частично упорядоченные йордановы алгебры.— ДАН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 789—792.
117. Семенова В. Э. Об идеалах кольца S_τ. — Функциональный анализ и его приложения, 1973, т. 7, № 1, с. 86—87.
118. Семенова В. Э. О гомоморфизмах универсальных топологических полуполей. — ДАН УзССР, 1974, № 6, с. 6—8.
119. Сигал (Segal E. I.). Postulates for general Quantum Mechanics. — Ann. Math., 1947, vol. 48, p. 930—948.
120. Сигал (Segal E. I.) A non-commutative extension of abstract integration. — Ann. Math., 1953, vol. 57, p. 401—457.
121. Сикорский Р. Булевы алгебры. М., «Мир», 1969.
122. Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М., Физматгиз, 1961.
123. Слугин С. И. Аналог топологии пространства измеримых функций в K-линеале с единицей. — ДАН СССР, 1968, т. 180, № 6, с. 1306—1308.
124. Смит (Smith R. R.). On non unital Jordan Banach algebras. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1977, vol. 82, № 3, p. 375—380.
125. Стайнспринг (Stinespring W. F.). Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 90, p. 15—56.
126. Такесаки (Takesaki M.). Theory of operator algebras I.—Springer Verlag, 1979.
127. Топпинг (Topping D.). Jordan algebras of self — adjoint operators. — Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence RI, 1965, vol. 53, p. 1—48.
128. Уолк (Wolk E. S.). On the interval topology of an l-group. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, vol. 12, № 2, p. 304—307.
129. Флаксмайер (Flachsmeyer J.). Einige topologische Fragen in der Boolishe Algebren. — Arch. Math., 1965, vol. 16, p. 25—33.
130. Флаксмайер (Flachsmeyer J.). Topologisation of Boolean algebras. — Lect. Notes. Math., 1977, vol. 609, p. 81—97.

131. Флойд (Floyd E. E.). Boolean algebras with pathological order topologies. — Pacific J. Math., 1955, № 5, p. 687—689.
132. Фринк (Frink O.). Topology in lattices. — Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 51, p. 569—582.
133. Хаджиев Д. Несколько замечаний о полуполях. — ДАН УзССР, 1973, № 12, с. 3—4.
134. Хаджиев Д. О связи между непрерывными и дискретными булевыми алгебрами. — Научные труды ТашГУ, вып. 446, 1973, с. 185—187.
135. Хаджиев Д. Некоторые вопросы теории топологических полуупорядоченных систем.— Научные труды ТашГУ, вып. 460, Вопросы математики. Ташкент, 1974, с. 137—144.
136 Хаджиев Д. Некоторые вопросы топологии в структурах. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, с. 815—817.
137. Халмош П. Теория меры. М., «Мир», 1953.
138. Чеккини (Cesshini Garlo). On two definitions of measurable and locally measurable operators. — Boll. Unione mat. ital., 1978, vol. A 15, № 3, p. 526—534.
139. Чилин В. И. Тензорные произведения булевых алгебр. — ДАН УзССР, 1974, № 2, с. 3—4.
140. Чилин В. И. К аксиоматике топологических полуполей. — ДАН УзССР, 1974, № 10, с. 3—5.
141. Чилин В. И. R-Топология в булевых алгебрах. — Вопросы математики. Труды ТашГУ, вып. 460, 1974, с. 153—156.
142. Чилин В. И. Булевы алгебры с R-топологией.— Труды НИИ математики ВГУ, вып. XX, 1975, с. 91—93.
143. Чилин В. И. Правильные подполуполя топологических полуполей. — ДАН УзССР, 1976, № 1, с. 5—6.
144. Чилин В. И. Гомоморфизмы полуполей. — Вопросы математики. Труды ТашГУ, вып. 490, 1976, с. 236—240.
145. Чилин В. И. Порядковые топологии в логиках. — Вопросы математики. Труды ТашГУ, № 548, 1977, с. 115—120.
146. Чилин В. И. Непрерывные оценки на логиках. — ДАН УзССР, 1978, № 6, с. 6—8.
147. Чилин В. И. Равномерности и оценки на логиках. — Функциональный анализ. Труды ТашГУ, № 573, 1978, с. 89—96.
148. Чилин В. И. Топологические O^*-алгебры. I.— Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1979, № 3, с. 27—34.
149. Чилин В. И. Топологические O^*-алгебры. II.— Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1979, № 4, с. 33—41.
150. Чилин В. И. Гомоморфизмы топологических O^*-алгебр. — ДАН УзССР, 1979, № 1, с. 7—8.
151. Чилин В. И. Топологические O^*-алгебры.— Функциональный анализ и его приложения, 1980, т. 14, вып. 1, с. 87—88.
152. Чилин В. И. Алгебраическое описание некоммутативных вероятностных пространств. — ДАН УзССР, 1980, № 7, с. 5—8.
153. Чилин В. И. Бэровские упорядоченные алгебры типа I. — ДАН УзССР, 1980, № 8, с. 7—10.
154. Чилин В. И. Эквивалентность проекторов в AW^*-факторах типа III.— Математический анализ и геометрия, Труды ТашГУ, № 623, 1980, с. 78—83.
155. Шерман (Sherman S.). Non-negative observables are squares. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, vol. 2, p. 31—33.
156. Шерман (Sherman S.). On Segal's Postulates for General Quantum Mechanics. — Ann. Math., 1956, vol. 64, p. 593—601.
157. Шерстнев А. Н. О булевских логиках. — Вероятностные методы и кибернетика. Ученые записки Казанского ун-та, 1968, т. 128, кн. 2, с. 48—62.
158. Шерстнев А. Н. О представлении мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта, билинейными формами.— Изв. вузов, серия «Математика», 1970, № 9, с. 90—97.

159. Штёрмер (Stormer E.). On the Jordan structure of G^*-algebras. — Trans. Amer. Soc., 1965, vol. 120, p. 438—447.
160. Штёрмер (Stormer E.). Jordan algebras of tupe I.—Acta Mathematica, 1966 vol. 115, № 3—4, p. 165—184.
161. Штёрмер (Stormer E.). Irreducible Jordan algebras of self adjoint operators. — Trans. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 130, p. 153—166.
162. Штёрмер (Stormer E.). Jordan algebras versus C^*-algebras.— Acta Physica Austriaca, Suppl., 1976, vol. 16, p. 1—13.
163. Шульц (Stultz F. W.). On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. — J. Funct. Anal., 1979, vol. 31, № 3, p. 360—376.
164. Эдвардс (Edwards C. M.). Ideal theory in JB-algebras. — J. London Math. Soc., 1977, vol. 16, № 3, p. 507—517.
165. Эдвардс (Edwards C. M.). On the facial structure of a JB-algebras.— J. London Math. Soc., 1979, vol. 19, № 2, p. 335—344.
166. Эдвардс (Edwards C. M.). On centres of hereditary JBW-subalgebras of a JBW-algebra. — Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1979, vol. 85, p. 317—324.
167. Эдвардс (Edwards C. M.). Multipliers of JB-algebras.—Math. Ann., 1980, vol. 249, № 3, p. 265—272.
168. Эффрос, Штёрмер (Effros E., Stormer E.). Jordan algebras of self adjoint operators. — Trans. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 127, p. 313—316.
169. Эффрос, Штёрмер (Effros E. G., Stormer E.). Positive projections and Jordan structure in operator algebras. — Math. Scand., 1979, vol. 45, № 1, p. 127—138.
170. Янгсон (Youngson M. A.). A-Vidav theorem for Banach Jordan algebras. — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1978, vol. 84, № 2, p. 263—272.
171. Янгсон (Youngson M. A.). Eguivalent norms on Banach Jordan algebras. — Math. Proc. Cambridge, Phil Soc., 1979, vol. 86, № 2, p. 261—269.
172. Янгсон (Youngson M. A.). Hermitian elements on Banach Jordan algebras.— Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, vol. 22, № 2, p. 169—180.
173. Янсен (Janssen G.). Formal-reelle Jordanalgebren unendlicher Dimension und verallgemeinerte Positivetäts bereiche.— Journ. reine und angew. Math., 1971, № 249, p. 143—200.
174. Янсен (Janssen G.). Reelle Jordanalgebren mit endlicher Spur. — Manuscripta Math., 1974, vol. 13, № 3, p. 237—278.
175. Янсен (Janssen G.). Die structur endlicher schwach abgeschlossener Jordan Algebren, Stetige Algebren. — Manuscripta Math., 1975, vol. 16, p. 277—305.
176. Янсен (Janssen G.). Diskrete Jordan Algebren. — Manuscripta Math., 1975, vol. 16, № 4, p. 307—332.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ташмухамед Алиевич Сарымсаков,
Шавкат Абдуллаевич Аюпов,
Джавват Хаджиев, Владимир Иванович Чилин

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ

Утверждено к печати Ученым советом Института математики имени В. И. Романовского, Отделением физико-математических наук АН УзССР

Редактор *Н. М. Вайсбрит*
Художник *Г. Н. Просвиров*
Технический редактор *В. М. Тарахович*
Корректор *Ф. А. Сигал*

ИБ № 2304

Сдано в набор 21.02.83. Подписано к печати 30.11.83. Р07873. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,0. Уч.-изд. л. 18,2. Тираж 1472. Заказ 10. Цена 3 р. 10 к.

Адрес Издательства: 700047. Ташкент, ул. Гоголя, 70.
Типография Издательства «Фан» УзССР, Ташкент, проспект М. Горького, 79.