УДК 517.98

Ф.А.Сукочев

# ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА НОРМ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Целью настоящей работы является введение отношения эквивалентности в классе всех симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к конечной непрерывной алгебре фон Неймана, и доказательство инвариантности некоторых свойств нормы симметричного пространства относительно введенного отношения эквивалентности.

Обозначим через $M_1$ и $M_2$ -конечные непрерывные алгебры фон Неймана; $\mu_1$ и $\mu_2$ - точные нормальные следы на $M_1$ и $M_2$ такие, что $\mu_1(\mathbb{1}_1)=\mu_2(\mathbb{1}_2)=1$, где $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ - единицы соответствующих алгебр. Банахово пространство всех интегрируемых операторов, присоединенных к $M_i$, обозначим $L^1(M_i,\mu_i)\,(i=1,2)$. Перестановкой оператора $A\in L^1(M_i,\mu_i)$ называем функцию $\widetilde{A}(\alpha)=\inf\{\lambda:\mu_i(\mathbb{1}_i-E_\lambda)<\alpha\}$, где $\{E_\lambda\}$ - спектральное семейство оператора $|A|$. Симметричным пространством на алгебре $M_i\,(i=1,2)$ называется нормированное пространство $(X_i,\|\cdot\|_{X_i})\subset L^1(M_i,\mu_i)$, для которого из соотношений $A\in X_i$ и $\widetilde{B}(\alpha)\le\widetilde{A}(\alpha)$, $B\in L^1(M_i,\mu_i)$ следует $B\in X_i$ и $\|B\|_{X_i}\le\|A\|_{X_i}$.

Пусть $X_i$ - симметричное пространство на $M_i\,(i=1,2)$. Положим, что $X_1$ $(en)$- эквивалентно $X_2$, если для любых $A_1\in X_1$, $B_2\in X_2$ существуют такие $B_1\in X_1$, $A_2\in X_2$, что $\widetilde{A}_1(\alpha)=\widetilde{A}_2(\alpha)$, $\widetilde{B}_2(\alpha)=\widetilde{B}_1(\alpha)$ и $\|A_1\|_{X_1}=\|A_2\|_{X_2}$; $\|B_2\|_{X_2}=\|B_1\|_{X_1}$. Отношение $(en)$-эквивалентности, очевидно, является отношением эквивалентности на множестве всех симметричных пространств и в случае, когда $M_1$ и $M_2$ коммутативны, совпадает с $(en)$ - эквивалентностью [2].

Пусть $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ $(i=1,2)$ симметричное пространство. Так же, как и в теории банаховых решеток, норму симметричного пространства $X_i$ будет называть порядково непрерывной, монотонно полной, порядково полунепрерывной, если выполнены соответственно следующие условия:

(A) Из $\{T_n\} \subset X_i$, $T_n \downarrow 0$ следует $\|T_n\|_{X_i} \to 0$;

(B) Из $T_n \geq 0$, $T_n \uparrow$, $T_n \in X_i$, $\sup_n \|T_n\|_{X_i} < \infty$ следует существование такого $T \in X_i$, что $T_n \uparrow T$;

(C) Из $T_n, T \in X_i$, $T_n \uparrow T$ следует $\|T_n\|_{X_i} \to \|T\|_{X_i}$.

А.А.Меклером [2] доказана $(en)$ -инвариантность (т.е. инвариантность относительно $(en)$-эквивалентности) свойств (A),(B),(C) нормы симметричного пространства в том случае, когда алгебры, на которых рассматриваются $X_i$, коммутативны. В настоящей работе этот результат устанавливается для произвольных непрерывных алгебр фон Неймана.

Для максимальной коммутативной подалгебры $\mathcal{U}_i$ в $M_i$ $(i=1,2)$ положим $X_i(\mathcal{U}_i) = X_i \cap L^1(\mathcal{U}_i, \mu_i)$ с индуцированной из $X_i$ нормой. Будем отождествлять $\mathcal{U}_i$ с $L^\infty(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $L^1(\mathcal{U}_i, \mu_i)$ с $L^1(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, где $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$ - непрерывное вероятностное пространство с мерой. В этом случае $X_i(\mathcal{U}_i)$ можно считать некоторым функциональным симметричным пространством. Очевидно, что $X_i(\mathcal{U}_i)$ - $(en)$-эквивалентно $X_i$, и, если норма пространства $X_i$ удовлетворяет какому-либо из свойств (A),(B),(C), то и норма $X_i(\mathcal{U}_i)$ ему удовлетворяет.

Т е о р е м а I. Свойства (A),(B),(C) нормы симметричного пространства $(en)$ -инвариантны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пространства $X_1$ и $X_2$ - $(en)$ -эквивалентны и норма $X_2$ удовлетворяет какому-либо из указанных свойств, тогда норма $X_1$ также ему удовлетворяет. Основным инструментом в доказательстве будет служить теорема о существовании для любого непрерывного вероятностного пространства с мерой $(\Omega, \Sigma, \mu)$ и любой функции $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, сохраняющей меру отображения $\pi: \Omega \to (0,1)$, что $|f| = \tilde{f} \circ \pi$ [6].

I. Пусть норма $X_1(U_1)$ порядково непрерывна. Пусть $T_n \in X_1, T_n \geq 0, T_n \downarrow 0$. Тогда $T_n \to 0$ по мере [3], что равносильно $\tilde{T}_n(\alpha) \to 0$ [7]. Имеем: $T_n \geq T_{n+1}$ влечет $\tilde{T}_{n+1}(\alpha) \geq \tilde{T}_n(\alpha)$, и значит $\tilde{T}_n(\alpha) \downarrow 0$ для $n \geq 1$. [4]. Выбираем некоторое сохраняющее меру отображение $\pi: \Omega_1 \to (0,1)$ и полагаем, $B_n = \tilde{T}_n \circ \pi$. Имеем $B_n \geq B_{n+1}$, ибо $B_n(\omega) = \tilde{T}_n(\pi(\omega)) \geq \tilde{T}_{n+1}(\pi(\omega)) = B_{n+1}(\omega), \omega \in \Omega_1$; $\tilde{B}_n(\alpha) = \tilde{T}_n(\alpha)$ и поскольку $\tilde{B}_n(\alpha) = \tilde{T}_n(\alpha) \downarrow 0$, то $B_n \to 0$ по мере. В силу симметричности пространства $X_1$ операторы $B_n \in X_1(U_1)$ монотонно убывают и сходятся по мере к нулю. Значит, $B_n \downarrow 0$ и в силу предположения о порядковой непрерывности нормы $X_1(U_1)$ получаем $\|T_n\|_{X_1} = \|B_n\|_{X_1(U_1)} \downarrow 0$, что и означает порядковую непрерывность нормы $X_1$.

2. Пусть норма $X_1(U_1)$ монотонно полна. Пусть $T_n \in X_1$, $T_n \geq 0$, $T_n \uparrow$, $\sup_n \|T_n\|_{X_1} < \infty$. Тогда в силу непрерывности вложения $X_1 \subset L^1(M_1, \mu_1)$ [5] имеем $\sup_n \|T_n\|_1 < \infty$, и поскольку $L^1(M_1, M_1)$ монотонно полна [3], то существует $T \in L^1(M_1, M_1)$, что $T_n \uparrow T$. Покажем, что $T \in X_1$. Как и в пункте I полагаем, $B_n = \tilde{T}_n \circ \pi$. Тогда $\tilde{T}_n(\alpha)$ возрастает с ростом $n$ и, значит, $B_n \uparrow$. Кроме того, $B_n \geq 0$, $\|B_n\|_{X_1(U_1)} = \|T_n\|_{X_1}$ и, значит, $\sup_n \|B_n\|_{X_1(U_1)} < \infty$; следовательно, существует $B \in X_1(U_1)$, что $B_n \uparrow B$. Осталось показать, что $\tilde{B}(\alpha) = \tilde{T}(\alpha)$. Имеем $\|T - T_n\|_1 = \|T\|_1 - \|T_n\|_1$, следовательно, $\|T_n\|_1 \uparrow \|T\|_1$ или $\int_0^1 \tilde{T}_n(\alpha)\,d\alpha \uparrow \int_0^1 \tilde{T}(\alpha)\,d\alpha$. Аналогично: $\int_0^1 \tilde{B}_n(\alpha)\,d\alpha \uparrow \int_0^1 \tilde{B}(\alpha)\,d\alpha$. С другой стороны, $\tilde{B}_n(\alpha) \uparrow$

и $\widetilde{B}_n(\alpha) \le \widetilde{B}_{n+1}(\alpha)$ для любого $n$. Поэтому последовательность функций $\widetilde{B}_n(\alpha)$ сходится к некоторой интегрируемой функции, которую обозначим $f(\alpha)$. Ясно, что $f(\alpha) \le \widetilde{B}(\alpha)$ и $\int_0^1 \widetilde{B}_n(\alpha)d\alpha \uparrow \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$. Поэтому $f(\alpha) = \widetilde{B}(\alpha)$ почти всюду. Аналогично $f(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$ почти всюду. $\widetilde{B}(\alpha)$ и $\widetilde{T}(\alpha)$ – непрерывные слева функции, поэтому $\widetilde{B}(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0,1)$. Следовательно, в силу симметричности пространства $X_1$ оператор $T$ ему принадлежит.

3. Пусть норма $X_1(u_1)$ порядково полунепрерывна. Пусть $T_n, T \in X_1$, $T_n \uparrow T$. Отсюда, как и в пункте 2, заключаем: $\widetilde{T}_n(\alpha) \uparrow \widetilde{T}(\alpha)$ и, значит, функция $\widetilde{T}_n(\alpha)$ сходится к функции $\widetilde{T}(\alpha)$ по мере, что равносильно $(\widetilde{T}-\widetilde{T}_n)\check{}(\beta) \to 0$. Полагаем, $B_n = \widetilde{T}_n \circ \pi$, $B = \widetilde{T} \circ \pi$. Имеем $\widetilde{B}(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$, $\widetilde{B}_n(\alpha) = \widetilde{T}_n(\alpha)$, следовательно, $B_n, B \in X_1(u_1)$ и, кроме того, $B_n \le B_{n+1}$ и $B_n \le B$ для всех $n \ge 1$. Рассматривая разность $B - B_n = \widetilde{T} \circ \pi - \widetilde{T}_n \circ \pi = (\widetilde{T} - \widetilde{T}_n) \circ \pi$, видим, что $(B-B_n)\check{}(\alpha) = (\widetilde{T}-\widetilde{T}_n)\check{}(\alpha) \downarrow 0$, т.е. $B_n$ сходится к $B$ по мере и $B_n \uparrow B$ [3]. В силу предположения получаем $\|B_n\|_{X_1(u_1)} \uparrow \|B\|_{X_1(u_1)}$ или $\|T_n\|_{X_1} \uparrow \|T\|_{X_1}$, что и означает порядковую полунепрерывность нормы пространства $X_1$.

Известно, что топология сходимости по мере в кольце $S(M)$ всех измеримых операторов, присоединенных к $M$, индуцируется некоторой метрикой $\rho$, относительно которой $S(M)$ превращается в полное метрическое пространство $(S_M, \rho)$. По аналогии с теорией меры будем называть след $M$-сепарабельным, если логика $P_M$ всех проекторов $M$ является сепарабельным метрическим пространством в индуцированной из $(S_M, \rho)$ метрике. Легко проверяются следующие леммы.

Лемма I. $(P_M, \rho)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $(S_M, \rho)$ сепарабельно.

Л е м м а 2. [3]. Если $X$ – нормированное симметричное пространство в $L^1(M,\mu)$ с условием $(A)$ и $H = \{T \in L^1(M,\mu), T=\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k, P_k \in P_M$ ; $\lambda_k$ – действительные числа $\}$, то $H+iH$ плотно в $X$ по норме.

Т е о р е м а 2. Пусть $M$ – конечная непрерывная алгебра фон Неймана, $\mu$ – точный нормальный след на $M$, $X$ – симметричное пространство на $M$. Тогда $X$ сепарабельно тогда и только тогда, если след $\mu$ – сепарабелен и в $X$ выполнено условие $(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть след $\mu$ -сепарабелен и в $X$ выполнено условие $(A)$. Ввиду предыдущих лемм достаточно доказать, что множество $G=\{\sum_{k=1}^{n} r_k P_k, P_k \in P_M^0, r_k$ – рациональные числа, $P_M^0$ – счетное плотное по метрике $\rho$ множество в $P_M\}$, плотно в множестве $H$ из леммы 2 по норме. Для этого достаточно доказать следующую импликацию: $P_k^n$ сходится почти всюду к $P_k$, влечет $\|P_k^n-P_k\|_X \to 0$ при $n \to 0$. По определению сходимости почти всюду для любой последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ действительных чисел, сходящихся к нулю, существует $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty} \subset P_m$, что $\|(P_k^n-P_k)Q_m\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$ и $\mu(\mathbb{1}-Q_m) < \varepsilon_m$. Тогда $\|P_k^n-P_k\|_X \le \|(P_k^n-P_k)Q_m\|_X + \|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_X \le \|(P_k^n-P_k)Q_m\|_\infty + \|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_X$, ибо $\|A\|_X \le \|A\|_\infty$ для любого $A \in M$. Далее, в силу идеальности пространства $X$ [5]: $\|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_X \le \|P_k^n-P_k\|_\infty \cdot \|\mathbb{1}-Q_m\|_X \le 2 \cdot \|\mathbb{1}-Q_m\|_X$.

Легко видеть, что условие $(A)$ обеспечивает $\|\mathbb{1}-Q_m\|_X \downarrow 0$. Поэтому при достаточно больших $n$ выполнено $\|P_k^n-P_k\|_X \le 3\varepsilon_N$ для любого $N$.

Обратно. Пусть симметричное пространство $X$ -сепарабельно. Очевидно, что тогда след $\mu$ -сепарабелен и пространство $X(u)=L^1(u,\mu)\cap X$ с индуцированной из $X$ нормой есть сепарабельное функциональное симметричное пространство. Тогда [I] в $X(u)$ выполнено условие $(A)$, значит в силу теоремы I, оно выполнено и в $X$ [I].

Список использованных источников и литературы


I Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.– 744 с.

2 Меклер А.А. Операторы усреднения по $\sigma$ -подалгебрам в идеалах пространства $L^1(\mu)$. – Дис....канд.физ.-мат.наук.– Л., 1977. – 96 с.

3 Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов. – Дис....канд.физ.-мат.наук. – Ташкент. – 133 с.

4 Овчинников В.И. О $s$ -числах измеримых операторов. – Функциональный анализ и его приложения, т.4, вып.3, 1970, с.78–85.

5 Овчинников В.И. Симметричные пространства измеримых операторов.–Труды/НИИ математики. – Воронеж, ВГУ, 1971, № 3, с.88–107.

6 K.-M. Chong, N.M. Rice. Equimeasurable rearrangements of functions. Quenn's papers in pure and appl. math. 1971, v. 28, pp 1-177.

7 F. J. Yeadon. Non commutative $L^p$-spaces. Math. Proc. Cambridge Phil, Soc. 1975, v. 77, pp. 91-102.