МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЗБЕКСКОЙ ССР

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

СУКОЧЕВ Федор Анатольевич

УДК 517.98

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

01.01.01 – математический анализ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических
наук, доцент ЧИЛИН В.И.

Ташкент – 1987

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Изучение алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве было начато в 30-40-х годах в серии основополагающих работ Дж. фон Неймана и Ф.Дж.Мюррея [66], [67], [68], [70], в которых были исследованы слабо-замкнутые $*$ - подалгебры алгебры $B(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, названные впоследствии алгебрами фон Неймана. Дальнейшее развитие теория этих алгебр получила в работах Х.Дая, И.Сигала, Ж.Диксмье, Ш.Сакаи, М.Томита, М.Такесаки, А.Конна и др., и в последнее время представляет собой обширную и интенсивно развивающуюся часть общей теории нормированных колец, богатую интересными и глубокими результатами, насыщенную разветвленными связями со многими разделами математики и математической физики.

Одна из наиболее плодотворных идей этой теории состоит в рассмотрении алгебры фон Неймана в качестве некоммутативного аналога классического пространства L_∞ и развития на этой основе так называемой теории некоммутативного интегрирования. В частности, введенное И.Сигалом [75] кольцо $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, позволило построить теорию интегрирования в полуконечных алгебрах фон Неймана относительно следа. Эта теория нашла полезные приложения в теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп [62], [76] и стимулировала целый поток исследований по "некоммутативной" теории вероятности. Дальнейший прогресс в некоммутативном интегрировании связан с теорией Томита - Такесаки [78], позволившей описывать некоммутативные L_p - пространства, ассоциированные с произвольным точным нормальным полуконечным весом. Различные подходы к описанию таких пространств предложены в работах У.Хаагерупа [55], А.Конна [51], М.Хилсума [56], Н.В.Трунова [33-36], А.Н. Шерстнева [39-40], Х.Араки, Т.Масуды [42], Х.Косаки [60], О.Е.Тихонова [32].

Параллельно с развитием общей теории некоммутативного интегрирования для весов продолжались исследования, посвященные изучению различных классов банаховых пространств операторов, интегрируемых относительно следа. Основное внимание при этом уделялось пространствам, являющимся некоммутативными аналогами известных классических функциональных пространств: L_p - пространств, пространств Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Все эти пространства являются содержательными примерами симметричных пространств - одного из важнейших классов функциональных пространств. Теория таких пространств, развитая в работах [II], [65], играет исключительно полезную роль при изучении различных свойств операторов в функциональных пространствах.

В этом плане естественно возникает необходимость введения и исследования класса симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. Эти пространства являются частично упорядоченными нормированными пространствами относительно порядка, определенного конусом положительных элементов из $S(\mathfrak{A})$, причем они, так же,как и само кольцо $S(\mathfrak{A})$ уже не являются решетками в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ некоммутативна.

Впервые некоммутативные симметричные пространства для алгебр $\mathfrak{A}$ отличных от $B(H)$, рассматривались в работах

В.И.Овчинникова [19-21] . В случае алгебры $B(H)$ класс некоммутативных симметричных пространств совпадает с классом симметрично - нормированных идеалов компактных операторов [74] , [5] , теория которых получила развитие в работах [63] , [54] , [46] , [64] , [43] , [44] , [45] .

Исследованию свойств конкретных примеров некоммутативных симметричных пространств - некоммутативным L_p - пространствам, пространствам Орлича, Лоренца, Марцинкевича посвящены работы [82] , [21] , [59] , [15] , [58] , [84] , [37] . В частности, было установлено, что L_p - пространство измеримых операторов присоединенных к некоммутативной алгебре фон Неймана не изометрично никакому функциональному L_p - пространству [58] , [84] , что кстати объясняет необходимость привлечения новых методов для доказательства даже традиционных свойств L_p - пространств (см., напр., [82]).

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению геометрических, топологических и порядковых свойств некоммутативных симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.

Предложенный в работе метод исследования, использующий понятие (ϱn) - эквивалентности симметричных пространств, позволяет с единой точки зрения описывать многие свойстванекоммутативных симметричных пространств в зависимости от свойств их функциональных прототипов.

Целью работы является:

1) построение различных классов некоммутативных симметричных пространств с помощью их функциональных прототипов;

2) исследования свойств некоммутативных симметричных пространств инвариантных относительно (ϱn) - эквивалентно-

сти;

3) описание крайних точек орбит интегрируемых операторов;

4) установление неизометричности некоммутативных и коммутативных пространств Лоренца.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации. Она состоит из десяти параграфов, разбитых на две главы. В § I.I, содержащем предварительные сведения, приведены основные определения и сводка результатов, касающихся теории некоммутативного интегрирования на алгебре фон Неймана относительно следа.

Результаты § I.2 посвящены построению некоммутативного симметричного пространства на конечной алгебре фон Неймана по произвольному симметричному пространству функций на непрерывном пространстве с мерой. Истоки этой задачи восходят к исследованиям Дж. фон Неймана [69] , связанных с изучением унитарно - инвариантных норм на алгебре конечных матриц. Для алгебры всех ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве такие нормы рассматривались в [74], [5] ; возникающие при этом симметрично - нормированные идеалы компактных операторов, являлись аналогами симметричных пространств последовательностей. Существует естественная связь между этими исследованиями и задачей о "представлении" симметричного функционального пространства E как пространства функций на отрезке $[0, a]$ или полуоси $[0, +\infty)$, порожденного перестановками элементов из E (решение этой задачи дано в [65] , [I3]). Используя идеи [65] Едоном в [83] был построен класс некоммутативных симметричных пространств со свойством Фату на полуконечных алгебрах фон Неймана.

В § I.2 предлагается общий метод построения некоммутативных симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана. Построенный при этом класс пространств существенно шире класса пространств из [83]. В частности, удается описать все интерполяционные некоммутативные симметричные пространства.

В § I.3 рассматривается вопрос о наследовании некоммутативным симметричным пространством различных свойств его функционального прототипа. Установлен критерий сепарабельности некоммутативного симметричного пространства, получено описание ассоциированных пространств. Последнее, в частности, позволяет значительно проще чем в [82], [16] описать сопряженные пространства к некоммутативным L_p - пространствам и пространствам Орлича.

В § I.4 приводятся различные примеры некоммутативных симметричных пространств на конечном непрерывном факторе, характеризующие взаимосвязи между результатами § I.2.

В § I.5 дано явное описание результата метода комплексной интерполяции, примененного к паре некоммутативных симметричных интерполяционных пространств.

В § I.6 вычисляется коэффициент упаковки единичной сферы некоммутативного L_p - пространства, что позволяет получить некоторые структурные результаты о некоммутативных L_p - пространствах.

Глава II посвящена подробному изучению геометрических свойств некоторых выпуклых подмножеств интегрируемых операторов.

В § 2.I подробно изучаются орбиты интегрируемых операторов и дается описание множества всех крайних точек орбит.

В § 2.2 выясняется вид всех крайних точек единичных шаров некоммутативных пространств Лоренца и Марцинкевича. Это позволяет установить, что некоммутативные пространства Лоренца действительно некоммутативны, т.е. не существует изометрии между пространством Лоренца на некоммутативной алгебре фон Неймана и функциональным пространством Лоренца на некотором пространстве с мерой.

В § 2.3 выделяется класс строго нормированных некоммутативных симметричных пространств. Дается характеристика некоммутативных симметричных пространств, обладающих свойством Крейна - Мильмана.

В § 2.4 описываются все замкнутые выпуклые симметричные подмножества в пространстве $L_1(\mathfrak{A})$.

В диссертации все утверждения внутри каждого параграфа нумеруются подряд с первой цифрой, обозначающей номер главы, и со второй цифрой, обозначающей номер параграфа. Список литературы содержит 84 наименования советских и зарубежных авторов.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [25 - 30]. В статье [30] В.И.Чилину принадлежит постановка задачи и идея доказательства следствия к теореме.

Результаты диссертации докладывались на Всероссийской научно-методической конференции по проблемам преподавания математического анализа в вузах (Ленинград, 1985 г.), на XI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (Челябинск, 1986 г.), на конференции - семинаре молодых ученых Новосибирского государственного университета (Новосибирск, 1987 г.), на семинаре по теории полуупорядоченных пространств при кафедре математического анализа Ленинградского государственного университета (1986 г.) на городском семинаре по функциональному анализу при кафедре функционального анализа Ташкентского государственного университета (1984 - 1986 гг.), на семинаре при отделе функционального анализа Института математики АН УзССР (1984 - 1985 гг.), на конференциях молодых ученых ТашГУ (1984 - 1985 гг.), на конференции молодых ученых Института математики АН УзССР (1984 г.)

Основные положения, выносящиеся на защиту:

1. Решена задача об описании всех некоммутативных интерполяционных пространств и некоммутативных симметричных пространств с порядково полунепрерывной нормой.

2. Изучены различные топологические и порядковые свойства некоммутативных симметричных пространств и установлена взаимосвязь с соответствующими свойствами их функциональных прототипов.

3. Решена задача об упаковке единичной сферы некоммутативного L_p - пространства на конечной непрерывной алгебре фон Неймана.

4. Описано множество всех крайних точек орбиты интегрируемого оператора.

5. Установлена неизометричность некоммутативных и коммутативных пространств Лоренца.

Автор выражает искреннюю признательность и глубокую благодарность своему научному руководителю Владимиру Ивановичу Чилину за постоянное внимание и большую помощь при работе над диссертацией.

Г Л А В А I

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1.1. Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения об алгебрах фон Неймана, кольцах измеримых операторов и теории некоммутативного интегрирования. Более подробно см. [75] , [52] , [77] , [73] .

1. Алгебры фон Неймана и измеримые операторы

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов в H . Замкнутая в слабой операторной топологии инволютивная подалгебра $\mathfrak{A}$ в $B(H)$, содержащая единичный оператор $\mathbb{1}$, называется алгеброй фон Неймана [52] . Множество $Z(\mathfrak{A})$ всех операторов из $\mathfrak{A}$, коммутирующих с каждым оператором из $\mathfrak{A}$, называется центром алгебры $\mathfrak{A}$. Если $Z(\mathfrak{A})$ состоит только из скалярных кратных единичного оператора $\mathbb{1}$, то $\mathfrak{A}$ называется фактором.

Частичный порядок на $\mathfrak{A}$ определяется конусом положительных элементов $\mathfrak{A}_+ = \{A^*A,\ A \in \mathfrak{A}\}$.

Множество всех проекторов алгебры $\mathfrak{A}$ (т.е. всех самосопряженных идемпотентов) обозначается через $\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$. Символами $\vee$ и $\wedge$ будем обозначать точную верхнюю и нижнюю грани элементов из $\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$.

Функция $\mu : \mathfrak{A}_+ \longrightarrow [0, +\infty]$ называется следом на $\mathfrak{A}$, если

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B);$$

$$\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A), \quad (0 \cdot \infty = 0);$$

$$\mu(u^* A u) = \mu(A),$$

для всех $A, B \in \mathfrak{A}_+$, $\lambda \geqslant 0$, $u \in \mathfrak{A}_U$, где $\mathfrak{A}_U$ – совокупность всех унитарных операторов из $\mathfrak{A}$. Если $\mu(A) < \infty$ для любого $A \in \mathfrak{A}_+$, то говорят, что след μ конечный. След μ называется точным, если из $A \in \mathfrak{A}_+$ и $\mu(A) = 0$ следует, что $A = 0$.

След называется нормальным, если для любого возрастающего семейства $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}_+$ с верхней гранью $A \in \mathfrak{A}_+$ число $\mu(A)$ есть верхняя грань чисел $\mu(\mathcal{F})$. Если $\mu(\mathbb{1}) = 1$, то след на алгебре $\mathfrak{A}$ называется нормированным.

Алегбра фон Неймана $\mathfrak{A}$ называется конечной, если для любого оператора $A \in \mathfrak{A}_+$, $A \neq 0$ существует конечный нормальный след μ на $\mathfrak{A}$, такой, что $\mu(A) \neq 0$. Конечная алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ с точным нормальным конечным следом μ называется непрерывной, если для любого ненулевого $P \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$ существуют $P_1, P_2 \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$ такие, что: $P = P_1 + P_2$, $P_1 P_2 = 0$ и $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

Известно, что в конечной непрерывной алгебре фон Неймана всякая максимальная коммутативная $*$ - подалгебре также непрерывна.

Линейное подпространство $\mathcal{D} \subset H$ называется присоединенным к $\mathfrak{A}$ (обозначение $\mathfrak{D}\,\eta\,\mathfrak{A}$), если $A'(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ для каждого оператора $A' \in \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ - коммутант $\mathfrak{A}$ в $B(H)$. Замкнутое подпространство $\mathfrak{D}$ присоединено к $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда оператор проектирования на $\mathfrak{D}$ лежит в $\mathfrak{A}$.

Линейный оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$ называется присоединенным к $\mathfrak{A}$ (обозначение $A\,\eta\,\mathfrak{A}$), если $\mathfrak{D}(A)\,\eta\,\mathfrak{A}$ и $AA'\xi = A'A\xi$ для всех $A' \in \mathfrak{A}'$ и $\xi \in \mathfrak{D}(A)$. Ограниченный оператор A присоединен к $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда он принадлежит $\mathfrak{A}$.

Спектральным семейством в H называется отображение $\lambda \longrightarrow E(\lambda)$ вещественной оси в $B(H)$, обладающее свойствами:

(i) $E(\lambda)$ - оператор проектирования в H ;

(ii) если $\lambda \leq \mu$, то $E(\lambda) \leq E(\mu)$;

(iii) $\bigwedge_\lambda E(\lambda) = 0$, $\bigvee_\lambda E(\lambda) = \mathbb{1}$;

(iv) $E(\mu) = \bigvee_{\lambda<\mu} E(\lambda)$ для любого μ .

Т е о р е м а I.I.I. [17]. Для каждого самосопряженного оператора A в H существует и притом только одно спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ со свойствами:

(i) $E(\lambda)$ перестановочен с любым оператором $B \in B(H)$ перестановочным с A ;

(ii) $\xi \in \mathfrak{D}(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 d\,\|E(\lambda)\xi\|^2 < \infty$$

и в этом случае

$$A\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)\xi .$$

$\{E(\lambda)\}$ называется спектральным семейством оператора A, а $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ его спектральным разложением. Оператор A присоединен к $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда его спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ целиком содержится в $\mathfrak{A}$.

Всюду в дальнейшем $\mathfrak{A}$ - конечная алгебра фон Неймана. Линейный оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$ называется измеримым относительно $\mathfrak{A}$, если:

(i) $A \eta \mathfrak{A}$

(ii) A - замкнут ([75] опр. 2.1)

Через $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ обозначим множество всех линейных операторов в H измеримых относительно $\mathfrak{A}$. Если $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$, то $A^*, \lambda A \in \mathcal{S}(A)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Кроме того, для любых $A, B \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ операторы $A+B$, $A \cdot B$ определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые вновь являются измеримыми операторами относительно $\mathfrak{A}$ [75] . Эти операторы называются сильной суммой и сильным произведением операторов A и B . Таким образом $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ является $*$ - алгеброй относительно операций сильной суммы и сильного произведения и взятия инволюции.

На множестве $\mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$ всех эрмитовых операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ естественным образом вводится частичный порядок: $A \geqslant B$, если $((A-B)\xi, \xi)$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(A-B)$.
Этот частичный порядок согласован с алгебраическими операциями, причем, если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая, ограниченная

сверху последовательность операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$, то в $\mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$ существует $A = \sup\limits_n A_n$, при этом $AB = BA$, для всех $B \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$, для которых $A_n B = BA_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Точную верхнюю и точную нижнюю грани семейства операторов $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$, если они существуют, будем обозначать $\sup\limits_\alpha A_\alpha$ и $\inf\limits_\alpha A_\alpha$. Если $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset$

$\subset \mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$, $A_n \leq A_{n+1}$ (соответственно $A_n \geqslant A_{n+1}$),

$n \geqslant 1$ и $\sup\limits_n A_n = A$ ($\inf\limits_n A_n = A$),

то будем писать $A_n \uparrow A$ (соответственно $A_n \downarrow A$).

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathfrak{A})_+$ множество всех положительных операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$. Каждый $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})_h$ единственным образом представим в виде $A = A^+ - A^-$, где $A^+, A^- \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})_+$, $A^+ \cdot A^- = 0$. Для всякого оператора $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ справедливо полярное разложение $A = u \cdot |A|$, где $u \in \mathfrak{A}_U$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$ – модуль оператора A.

Модифицируя рассуждения [41] можно показать (такое доказательство предложено В.И.Чилиным [38]), что для любых $A, B \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ найдутся унитарные операторы u и v, такие, что:

$$|A+B| \leq u|A|u^* + v|B|v^* .$$

2. Пространство $L_1(\mathfrak{A})$

Пусть $\mathfrak{A}$ – конечная алгебра фон Неймана и μ – точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$. Оператор $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ называется интегрируемым, если $\int\limits_0^\infty \lambda d\mu(E(\lambda)) < \infty$, где $\{E(\lambda)\}$ – спектральное семейство оператора $|A|$. Совокупность всех интегрируемых операторов из $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ обозначается $L_1(\mathfrak{A})$. След μ продолжается до положительного функционала μ' на $L_1(\mathfrak{A})$, обладающего свойствами:

(i) $\mu'(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_+$;

(ii) $\mu'(A^*) = \overline{\mu'(A)}$ для всех $A \in L_1(\mathfrak{A})$;

(iii) $\mu'(AB) = \mu'(AB)$ для всех $A \in L_1(\mathfrak{A}), B \in (\mathfrak{A})$;

(iv) если $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})_h \cap L_1(\mathfrak{A})$, то

$$\mu'(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mu(E(\lambda)),$$

где $\{E(\lambda)\}$ – спектральное семейство оператора A.

В дальнейшем функционал μ' будем обозначать через μ. Для каждого $A \in L_1(\mathfrak{A})$ положим

$$\|A\|_1 = \mu(|A|).$$

Т е о р е м а 1.1.2. [75]. $(L_1(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_1)$ – банахово пространство.

В случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ – коммутативна, существует пространство с мерой (Ω, m), такое, что $m(\Omega) = \mu(\mathbb{1})$

и пространства $L_1(\Omega, m)$ и $L_1(\mathfrak{A})$ алгебраически и изометрически изоморфны, при этом, если $\mathfrak{A}$ – непрерывная алгебра, то пространство (Ω, m) – также непрерывно.

Теорема I.I.3. [79] Пусть $\mathfrak{A}$ – конечная алгебра фон Неймана и $\mathcal{B}$ – ее слабо замкнутая подалгебра. Тогда существует единственное линейное отображение $T_{\mathcal{B}}$ пространства $L_1(\mathfrak{A})$ на $L_1(\mathcal{B})$ такое, что:

1) $T_{\mathcal{B}}(A^*) = T_{\mathcal{B}}(A)^*$, $A \in L_1(\mathfrak{A})$;

2) $A \geq 0$ влечет $T_{\mathcal{B}}(A) \geq 0$; при этом если $T_{\mathcal{B}}(A) = 0$, то $A = 0$;

3) $T_{\mathcal{B}}(B) = B$ для всех $B \in L_1(\mathcal{B})$;

Более того, отображение $T_{\mathcal{B}}$ обладает следующими свойствами:

4) $T_{\mathcal{B}}(T_{\mathcal{B}}(A)B) = T_{\mathcal{B}}(A \cdot T_{\mathcal{B}}(B)) =$

$= T_{\mathcal{B}}(A) \cdot T_{\mathcal{B}}(B)$ для всех $A \in L_1(\mathfrak{A})$, $B \in \mathfrak{A}$

или $A \in \mathfrak{A}$, $B \in L_1(\mathcal{B})$;

5) $\|T_{\mathcal{B}}\|_{\mathfrak{A} \to \mathcal{B}} = 1$, $\|T_{\mathcal{B}}\|_{L^1(\mathfrak{A}) \to L^1(\mathcal{B})} = 1$;

6) если $A_n, A \in L_1(\mathfrak{A})$ и $A_n \uparrow A$, то $T_{\mathcal{B}}(A_n) \uparrow T_{\mathcal{B}}(A)$;

7) $T_{\mathcal{B}}(A^*)T_{\mathcal{B}}(A) \leq T_{\mathcal{B}}(A^*A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$;

Оператор $T_{\mathcal{B}}$ называется оператором условного математического ожидания (УМО) на подалгебру $\mathcal{B}$. Такие операторы являются частным случаем допустимых операторов на алгебрах фон Неймана. Линейный оператор T на $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ называется допустимым, если

$$\|T\|_{L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})\to L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})} \leq 1,\ T(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) \subset \mathcal{O}\!\mathcal{L} \text{ и } \|T\|_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}\to\mathcal{O}\!\mathcal{L}} \leq 1.$$

Очевидно, что множество $\sum$ всех допустимых операторов на $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ образует полугруппу.

Для каждого оператора $A \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ определим функцию $\tilde{A} : (0, \mu(\mathbb{1})] \longrightarrow (0, +\infty)$, полагая

$\tilde{A}(t) = \inf\{\lambda \in (0,\infty) : \mu(\mathbb{1} - E(\lambda)) < t\}$, где $\{E(\lambda)\}$ – спектральное семейство оператора $|A|$ (см. [19, 82]).

Функция $\tilde{A}(t)$ называется перестановкой оператора и обладает следующими свойствами [19, 82] :

(i) $\tilde{A} = (A^*)^{\sim} = |A|^{\sim}$, $A \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$;

(ii) если $A \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L}), B \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$, то $(AB)^{\sim} \leq \|B\|_\infty \tilde{A}$,

где $\|\cdot\|_\infty$ – C^* – норма на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$.

(iii) если $A, B \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$, $0 \leq B \leq A$, то $\tilde{B} \leq \tilde{A}$;

(iv) если $A \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$, то $\int_0^{\mu(\mathbb{1})} \tilde{A}(t)\,dt < \infty$ при этом $\|A\|_1 = \int_0^{\mu(\mathbb{1})} \tilde{A}(t)\,dt$.

Если для операторов A и B из $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ справедливо равенство $\tilde{A}(t) = \tilde{B}(t)$, $t \in [0, \mu(\mathbb{1})]$, то операторы A и B называются равноизмеримыми (обозначение $A \sim B$). Если же $\int_0^s \tilde{A}(t)\,dt \le \int_0^s \tilde{B}(t)\,dt$ для всех $s \geq 0$, то говорят, что оператор B мажорирует оператор A (обозначение $A \prec B$). Множество всех операторов $A \prec B$ называется орбитой оператора B и обозначается $\Omega(B)$. Следующее предложение описывает множество $\Omega(B)$ с помощью полугруппы Σ.

Предложение I.I.4. $(A \in \Omega(B)) \Longleftrightarrow (\exists T \in \Sigma,$ что $A = T(B)$).

Доказательство. Пусть $A \prec B$ и $A = u|A|$, $B = v|B|$ - полярные разложения операторов A и B. Обозначим через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ - максимальные коммутативные $*$ - подалгебры в $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, содержащие спектральные семейства операторов $|B|$ и $|A|$ соответственно. Используя [49] найдем такие T_1 и T_2 , что:

$$T_1 : L_1(\mathcal{B}) \longrightarrow L_1(0,1),\ T_1(|B|) = \tilde{A},\ \|T_1\|_{L_1(\mathcal{B}) \to L_1(0,1)} \le 1,$$

$$T_1(\mathcal{B}) \subset L_\infty(0,1) \quad \text{и} \quad \|T_1\|_{\mathcal{B} \to L_\infty(0,1)} \le 1;$$

$$T_2 : L_1(0,1) \longrightarrow L_1(\mathcal{U}),\ T_2(\tilde{A}) = |A|,\ \|T_2\|_{L_1(0,1) \to L_1(\mathcal{U})} \le 1,$$

$$T_2(L_\infty(0,1)) \subset \mathcal{U} \quad \text{и} \quad \|T_2\|_{L_\infty(0,1) \to \mathcal{U}} \le 1 .$$

Пусть $T_{\mathcal{B}}$ - оператор УМО на $L_1(\mathcal{B})$; T_{v^*}, T_u - оператор умножения слева на v^* и u соответственно.

Тогда оператор $T = T_u \circ T_2 \circ T_1 \circ T_{\mathcal{B}} \circ T_{v^*}$ - допустимый и $T(B) = A$.

Обратно, пусть T - допустимый оператор. Покажем, что $T(B) \prec B$. Воспользуемся следующим равенством (см. [20]):

$$\int_0^t \tilde{A}(s)\,ds = \inf\{\|\bar{A}\|_{L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})} + t\,\|\bar{\bar{A}}\|_\infty\},$$

где инфинум берется по всем представлениям $A = \bar{A} + \bar{\bar{A}}$, $\bar{A} \in L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})$, $\bar{\bar{A}} \in \mathcal{O}\mathcal{L}$. Положим $K(t,A) = \int_0^t \tilde{A}(s)\,ds$.

Нам достаточно показать, что $K(t, T(B)) \le K(t, B)$.

Имеем:

$$K(t, T(B)) = \inf_{\bar{B}+\bar{\bar{B}} = T(B)} \{\|\bar{B}\|_{L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})} + t\,\|\bar{\bar{B}}\|_\infty\} \le$$

$$\le \inf_{\bar{B}+\bar{\bar{B}} = B} \{\|T(\bar{B})\|_{L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})} + t\,\|T(\bar{\bar{B}})\|_\infty\} \le$$

$$\le \inf_{\bar{B}+\bar{\bar{B}} = B} \{\|\bar{B}\|_{L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})} + t\,\|\bar{\bar{B}}\|_\infty\} = K(t, B) .$$

Предложение доказано.

3. Симметричные пространства на алгебре фон Неймана

Нормированное пространство $\left(E(\mathcal{O}\mathcal{L}), \|\cdot\|_{E(\mathcal{O}\mathcal{L})}\right) \subset L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})$ называется симметричным на алгебре $\mathcal{O}\mathcal{L}$, если из $A \in E(\mathcal{O}\mathcal{L})$, $B \in L_1(\mathcal{O}\mathcal{L})$, $\tilde{B}(t) \le \tilde{A}(t)$ для всех $t \geq 0$ следует $B \in E(\mathcal{O}\mathcal{L})$ и $\|B\|_{E(\mathcal{O}\mathcal{L})} \le \|A\|_{E(\mathcal{O}\mathcal{L})}$ (в этом случае норму $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ называют симметричной). Если $\mathfrak{A} = L_\infty(0,1)$, то пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ будем обозначать как $(E(0,1), \|\cdot\|_{E(0,1)})$.

Каждое симметричное пространство идеально (т.е. из $|B| \le |A|$, $A \in E(\mathfrak{A})$, $B \in S(\mathfrak{A})$ следует $B \in E(\mathfrak{A})$ и $\|B\|_{E(\mathfrak{A})} \le \|A\|_{E(\mathfrak{A})}$). Кроме того, $A^* \in E$ для всех $A \in E(\mathfrak{A})$. Любое симметричное пространство $E(\mathfrak{A})$ содержит алгебру $\mathfrak{A}$ и вложения $\mathfrak{A} \subset E(\mathfrak{A}) \subset L_1(\mathfrak{A})$ - непрерывны [21], при этом $\|ABC\|_{E(\mathfrak{A})} \le \|A\|_\infty \cdot \|C\|_\infty \cdot \|B\|_{E(\mathfrak{A})}$ для $A, C \in \mathfrak{A}$, $B \in E(\mathfrak{A})$.

Если $E(\mathfrak{A})$ - симметричное пространство на $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{B}$ - подалгебра фон Неймана в $\mathfrak{A}$, то пространство $E(\mathcal{B}) = E(\mathfrak{A}) \cap L_1(\mathcal{B})$ в индуцированной из $E(\mathfrak{A})$ норме также является симметричным пространством на алгебре $\mathcal{B}$.

В случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативная и непрерывная, симметричное пространство $E(\mathfrak{A})$ отождествляется с функциональным симметричным пространством $E(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) - непрерывное пространство с конечной мерой. Здесь уместно отметить, что для любой функции $f \in L_1(\Omega, \mu)$, $\mu(\Omega) = 1$ найдется такое сохраняющее меру отображение $\varphi : \Omega \to (0,1)$, что $|f| = \tilde{f} \circ \varphi$ (см. [50]).

Симметричные пространства $E(\mathfrak{A}_1)$ и $E(\mathfrak{A}_2)$ называются

(ρn) - эквивалентными (ср. [13]), если для любых $A_1 \in E(\mathfrak{A}_1)$, $B_2 \in E(\mathfrak{A}_2)$ найдутся операторы $A_2 \in E(\mathfrak{A}_2)$, $B_1 \in E(\mathfrak{A}_1)$ такие, что $\widetilde{A}_1(t) = \widetilde{A}_2(t)$, $\widetilde{B}_2(t) = \widetilde{B}_1(t)$ и

$$\|A_2\|_{E(\mathfrak{A}_2)} = \|A_1\|_{E(\mathfrak{A}_1)}, \ \|B_2\|_{E(\mathfrak{A}_2)} = \|B_1\|_{E(\mathfrak{A}_1)}.$$

Отношение (ρn) - эквивалентности есть отношение эквивалентности на классе всех симметричных пространств.

Т е о р е м а I.I.5. Пусть $\mathfrak{A}$ - непрерывная конечная алгебра фон Неймана и $\mathfrak{B}$ - непрерывная подалгебра в $\mathfrak{A}$, $E(\mathfrak{A})$ - симметричное пространство на $\mathfrak{A}$. Тогда $E(\mathfrak{B}) = E(\mathfrak{A}) \cap L_1(\mathfrak{B})$ есть симметричное пространство на $\mathfrak{B}$ в индуцированной из $E(\mathfrak{A})$ норме, (ρn) - эквивалентное пространству $E(\mathfrak{A})$.

В доказательстве нуждается только следующая импликация: $A \in E(\mathfrak{A})$ влечет существование $B \in E(\mathfrak{B})$ равноизмеримого с A. Рассмотрим перестановку $\widetilde{A}(t)$ оператора A. Пусть $\mathfrak{B}_1$ - максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{B}_1$ - непрерывна, то $E(\mathfrak{B}_1)$ отождествляется с симметричным функциональным пространством $E(\Omega)$ на непрерывном измеримом пространстве Ω и в силу [50] на Ω найдется функция f, перестановка которой равна $\widetilde{A}(t)$. Ясно, что соответствующий этой функции оператор F принадлежит $E(\mathfrak{A})$. Отсюда сразу следует, что $F \in E(\mathfrak{B})$.

Норма $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ симметричного пространства $E(\mathfrak{A})$ называется порядково непрерывной, монотонно полной, порядково полунепрерывной, если в пространстве $E(\mathfrak{A})$ выполнены соответственно условия:

(A) $\{A_n\} \subset E(\mathfrak{A})$, $A_n \downarrow 0$ влечет $\|A_n\|_{E(\mathfrak{A})} \downarrow 0$;

(B) $\{A_n\} \subset E(\mathfrak{A})$, $0 \leq A_n \leq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$,

$\sup\limits_n \{\|A_n\|_{E(\mathfrak{A})}\} < \infty$ влечет существование такого оператора $A \in E(\mathfrak{A})$, что $A_n \uparrow A$.

(C) $A_n, A \in E(\mathfrak{A})$ и $A_n \uparrow A$ влечет

$$\|A_n\|_{E(\mathfrak{A})} \longrightarrow \|A\|_{E(\mathfrak{A})}.$$

Пусть $E_1(\mathfrak{A}) \subset E(\mathfrak{A}) \subset E_0(\mathfrak{A})$ – непрерывно вложенные друг в друга симметричные пространства на алгебре $\mathfrak{A}$. Пространство $E(\mathfrak{A})$ называется интерполяционным в банаховой паре $(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$, если для любого непрерывного оператора T на пространстве $E_0(\mathfrak{A})$, непрерывно действующего на пространстве $E_1(\mathfrak{A})$ выполнено:

$$T(E(\mathfrak{A})) \subset E(\mathfrak{A}) \text{ и } \|T\|_{E(\mathfrak{A}) \to E(\mathfrak{A})} \leq \max\{\|T\|_{E_0(\mathfrak{A}) \to E_0(\mathfrak{A})}, \|T\|_{E_1(\mathfrak{A}) \longrightarrow E_1(\mathfrak{A})}\}.$$

Если $(E_1(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E_1(\mathfrak{A})}) = (\mathfrak{A}, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|\cdot\|_\infty$ – операторная норма в $\mathfrak{A}$, и $(E_0(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E_0(\mathfrak{A})}) = (L_1(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_1)$, то $E(\mathfrak{A})$ называется интерполяционным пространством.

Т е о р е м а I.I.6. [20] $E(\mathfrak{A})$ – интерполяционно в том и только в том случае, когда из $A \in E(\mathfrak{A})$, $B \in L_1(\mathfrak{A})$, $B \prec A$ следует $B \in E(\mathfrak{A})$ и $\|B\|_{E(\mathfrak{A})} \leq \|A\|_{E(\mathfrak{A})}$.

Если выполнение некоторого свойства (P) для какого-нибудь симметричного пространства E влечет его выполнение для всех симметричных пространств, $(\rho\imath)$ - эквивалентных E, то такое свойство (P) будем называть $(\rho\imath)$ - инвариантным.

Свойство интерполяционности симметричного пространства, является $(\rho\imath)$ - инвариантным в классе симметричных пространств на непрерывных конечных алгебрах фон Неймана.

Пусть $\mathfrak{A}$ - конечная непрерывная алгебра фон Неймана, μ точный нормальный след на $\mathfrak{A}$, и $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$. Положим:

$$E(\mathfrak{A})' = \{A' \in S(\mathfrak{A}) : AA' \in L_1(\mathfrak{A}) \text{ для всех } A \in E(\mathfrak{A})$$

и

$$\|A'\|_{E(\mathfrak{A})'} = \sup\{|\mu(AA')| : A \in E(\mathfrak{A}), \|A\|_{E(\mathfrak{A})} \le 1\} < \infty\}.$$

Известно, что $(E(\mathfrak{A})', \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$, (оно называется ассоциированным пространством к $E(\mathfrak{A})$) норма которого монотонно полна и порядково полунепрерывна [83], в частности $(E(\mathfrak{A})', \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})'})$ - банахово. Последнее утверждение вытекает из следующего признака полноты, установленного в [16] :

Симметричное пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ на алгебре $\mathfrak{A}$ полно в том и только в том случае, когда из $T_n \uparrow T$, $T_n \in E(\mathfrak{A}), T \in L_1(\mathfrak{A}), \{T_n\} - \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ - фундаментальна, вытекает $T \in E(\mathfrak{A})$.

Приведем несколько примеров некоммутативных симметричных пространств.

а) Пусть $p \geqslant 1$, $L_p(\mathfrak{A}) = \{A \in S(\mathfrak{A}) : |A|^p \in L_1(\mathfrak{A})\}$. Для каждого $A \in L_p(\mathfrak{A})$ положим $\|A\|_p = \mu(|A|^p)^{1/p}$. Тогда $(L_p(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_p)$ – банахово симметричное пространство на $\mathfrak{A}$ (см. [82]), которое называется некоммутативным L_p – пространством.

б) Пусть $\psi(t)$ – возрастающая вогнутая функция на отрезке $[0,1]$ и $\psi(0)=0$. Положим

$$M_\psi(\mathfrak{A}) = \{A \in S(\mathfrak{A}) : \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} = \sup_{0<s\leq 1} \frac{\int_0^s \tilde{A}(t)\,dt}{\psi(s)} < \infty\},$$

$$\Lambda_\psi(\mathfrak{A}) = \{A \in S(\mathfrak{A}) : \|A\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = \int_0^{\mu(\mathbb{1})} \tilde{A}(t)\,d\psi(t) < \infty\}.$$

Пары $(M_\psi(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})})$ и $(\Lambda_\psi(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})})$ являются банаховыми симметричными пространствами на $\mathfrak{A}$ [21], которые называются соответственно некоммутативными пространствами Марцинкевича и Лоренца. Отметим, что в случае $\mathfrak{A} = L_\infty(0,1)$ имеют место равенства:

$$\Lambda'_\psi(0,1) = M_\psi(0,1) \text{ и } M'_\psi(0,1) = \Lambda_\psi(0,1).$$

В заключение напомним, что норма симметричного пространства $E(0,1)$ называется строго монотонной если из $f \geqslant g \geqslant 0$, $f \neq g$, $f \in E(0,1)$ следует $\|f\|_{E(0,1)} > \|g\|_{E(0,1)}$. В частности норма в пространстве $L_p(0,1)$ является строго монотонной. В случае, когда ψ - строго возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, норма в пространстве $\Lambda_\psi(0,1)$ также строго монотонна.

§ I.2. (ϱn) - метод построения некоммутативных симметричных пространств

В этом параграфе предлагается метод построения некоммутативных симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана.

Пусть $\mathfrak{A}$ - конечная алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный след на $\mathfrak{A}$, такой, что $\mu(\mathbb{1})=1$, где $\mathbb{1}$ - единица алгебры $\mathfrak{A}$. Для банахова симметричного пространства $E(0,1)=(E(0,1),\|\cdot\|_{E(0,1)})$ комплексных функций на отрезке $[0,1]$ определим множество:

$$E(\mathfrak{A})=\{A\in L_1(\mathfrak{A}):\widetilde{A}\in E(0,1)\}$$ и положим

$$\|A\|_{E(\mathfrak{A})}=\|\widetilde{A}\|_{E(0,1)},\quad A\in E(\mathfrak{A}).$$

Легко проверяется (см. ниже предл. I.2.I), что $E(\mathfrak{A})$ - линейное пространство и основной задачей этого параграфа является выяснение условий, когда $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ - симметричная банахова норма на $E(\mathfrak{A})$. Отметим, что случай, когда $\mathfrak{A}$ - конечномерная алгебра или алгебра всех ограниченных операторов в H, рассматривался соответственно в [69] и [74].

П р е д л о ж е н и е I.2.I. $E(\mathfrak{A})$ - линейное пространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойства перестановок операторов, полученные в [19], имеем:

$$(A+B)^{\sim}(t)=(A+B)^{\sim}\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)\le\widetilde{A}\left(\frac{t}{2}\right)+\widetilde{B}\left(\frac{t}{2}\right).$$ Поскольку

оператор сжатия $\widetilde{\tau}_\sigma : L_1(0,1) \longrightarrow L_1(0,1)$; $\tau_\sigma(f(t)) = f(\sigma^{-1}t)$ ограниченно действует в любом симметричном пространстве [II], то $\widetilde{A}(\frac{t}{2}) + B(\frac{t}{2}) \in E(0,1)$, поэтому $(A+B)^{\sim}(t) \in$ $\in E(0,1)$, что означает $A+B \in E(\mathfrak{A})$. Поскольку $(\lambda A)^{\sim} = |\lambda| A^{\sim}$, то из $A \in E(\mathfrak{A})$ вытекает $\lambda A \in E(\mathfrak{A})$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Замечание. Если $A \in E(\mathfrak{A})$, $B \in L_1(\mathfrak{A})$, $\widetilde{B}(t) \le \widetilde{A}(t)$ для всех $t \geqslant 0$, то, очевидно, $B \in E(\mathfrak{A})$ т.е. $E(\mathfrak{A})$ является симметричным по составу подпространством в $L_1(\mathfrak{A})$.

В случае, когда $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ является симметричной нормой на $E(\mathfrak{A})$, будем говорить, что симметричное пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ (єн) - порождается пространством $E(0,1)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\mathfrak{A}$ - непрерывная алгебра. Это обеспечивает нам непрерывность любой максимальной коммутативной подалгебры $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{A}$, и, следовательно, в силу результатов [I3] пространства $E(\mathcal{U}) = \{A \in L_1(\mathcal{U}), \widetilde{A} \in E(0,1)\}$ с нормой $\|A\|_{E(\mathcal{U})} =$ $= \|\widetilde{A}\|_{E(0,1)}$ и $E(0,1)$ (єн) - эквивалентны. Заметим, что $E(\mathcal{U}) = L_1(\mathcal{U}) \cap E(\mathfrak{A})$. В конце этого параграфа будет показано, что все результаты сохраняют силу и для произвольных конечных алгебр.

Теорема I.2.2. Пусть $E(0,1)$ - банахово интерполяционное пространство. Тогда $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ – банахово интерполяционное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Воспользуемся следующим соотношением для s – чисел суммы интегрируемых операторов (см. [19]):

$$\int_0^s (A+B)^{\sim}(t)\,dt \le \int_0^s \tilde{A}(t)\,dt + \int_0^s \tilde{B}(t)\,dt \text{ для всех } s \geq 0 .$$

Тогда для операторов $A, B \in E(\mathfrak{A})$:

$$\int_0^s (A+B)^{\sim}(t)\,dt \le \int_0^s (\tilde{A}(t)+\tilde{B}(t))\,dt = \int_0^s F(t)\,dt, \text{ где}$$

$F(t)=\tilde{A}(t)+\tilde{B}(t) \in E(0,1)$. Ясно, что функция $F(t)$ мажорирует функцию $(A+B)^{\sim}(t)$, а значит, по определению интерполяционного пространства, $\|(A+B)^{\sim}\|_{E(0,1)} \le \|F\|_{E(0,1)}$. Поэтому

$$\|A+B\|_{E(\mathfrak{A})} = \|(A+B)^{\sim}\|_{E(0,1)} \le \|F\|_{E(0,1)} \le \|\tilde{A}\|_{E(0,1)} + \|\tilde{B}\|_{E(0,1)} = \|A\|_{E(\mathfrak{A})} + \|B\|_{E(\mathfrak{A})} .$$

Очевидно, что $\|\lambda A\|_{E(\mathfrak{A})} = |\lambda|\cdot\|A\|_{E(\mathfrak{A})}$ для любого оператора $A \in E(\mathfrak{A})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Если же $\|A\|_{E(\mathfrak{A})} = 0$, то и $\|\tilde{A}\|_{E(0,1)} = 0$, что равносильно $\tilde{A}(t)=0$. Последнее эквивалентно равенству нулю модуля оператора A, а значит и самого оператора A. Таким образом $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ – нормированное пространство.

Докажем, что оно банахово. Для этого достаточно показать (см. § I.I), что из $A_n \in E(\mathfrak{A}), A_n \geq 0, A_n \uparrow A \in$ $\in L_1(\mathfrak{A})$, $\{A_n\}$ $-\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ - фундаментальна, вытекает $A \in E(\mathfrak{A})$. Рассмотрим максимальную коммутативную $*$ - подалгебру $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{A}$, содержащую спектральное семейство оператора A, и $T_{\mathcal{U}}$ - оператор УМО на $L_1(\mathcal{U})$. Ясно, что $T_{\mathcal{U}}(A)=A$ и поскольку $(T_{\mathcal{U}}(B))^{\sim} \prec \widetilde{B}$ (см. предложение I.I.4), то $T_{\mathcal{U}}(A_n) \in E(\mathfrak{A})$ для всех $n \geq 1$. Имеем:

$$\|T_{\mathcal{U}}(A_n - A_m)\|_{E(\mathfrak{A})} = \|(T_{\mathcal{U}}(A_n - A_m))^{\sim}\|_{E(0,1)} \leq$$

$$\leq \|(A_n - A_m)^{\sim}\|_{E(0,1)} = \|A_n - A_m\|_{E(\mathfrak{A})}.$$ Следовательно, последовательность $\{T_{\mathcal{U}}(A_n)\}$ - фундаментальна в $E(\mathfrak{A})$. Кроме того, $T_{\mathcal{U}}(A_n) \in E(\mathcal{U})$, которое в силу [I3] банахово. Поэтому в пространстве $E(\mathcal{U})$ существует оператор B, такой, что $T_{\mathcal{U}}(A_n) \uparrow B$. Но $T_{\mathcal{U}}(A_n) \uparrow T_{\mathcal{U}}(A) = A$, откуда $A = B$, т.е. $A \in E(\mathfrak{A})$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема I.2.2. получена Едоном [83] в случае, когда норма симметричного пространства $E(0,1)$ удовлетворяет свойствам (B) и (C) (хорошо известно, что такие пространства интерполяционны). Приводимая ниже теорема I.2.4. позволяет перенести утверждение теоремы I.2.2. на класс всех симметричных пространств $E(0,1)$ с порядково полунепрерывной нормой. Предварительно докажем лемму, которой часто будем пользоваться и в дальнейшем.

Л е м м а I.2.3. Пусть $E_0(0,1)$ - банахово интерполяционное пространство и $E_1(0,1) \subset E_0(0,1)$ симметричное пространство в индуцированной из $E_0(0,1)$ норме. Тогда, если $E_1(0,1)$ банахово, то и $\left(E_1(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{E_1(\mathfrak{A})}\right)$ также банахово.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что

$$A_n \in E_1(\mathfrak{A}),\ A_n \geqslant 0,\ A_n \uparrow A,\ A \in L_1(\mathfrak{A}) \quad \text{и}$$

$$\|A_n - A_m\|_{E_1(\mathfrak{A})} \longrightarrow 0 \ \text{при}\ n, m \longrightarrow \infty\ .$$

Так как $E_0(\mathfrak{A})$ - банахово, то $A \in E_0(\mathfrak{A})$. Покажем, что A принадлежит $E_1(\mathfrak{A})$. Рассмотрим функции $\widetilde{A} \in E_0(0,1)$, $\widetilde{A}_n \in E_1(0,1)$. Поскольку $A_n \uparrow A$, то $\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{A}$ (см. ниже предложение I.3.I). Пусть $f_n(t) = \widetilde{A}_n\left(\frac{t}{2}\right)$; в силу [II], $f_n \in E_1(0,1)$. Положим

$$P_n = \{t \in [0,1] : f_n(t) \geqslant \widetilde{A}(t)\}.$$

Ясно, что $f_n \cdot \chi_{P_n} \geqslant \widetilde{A} \cdot \chi_{P_n}$ и, следовательно, $\widetilde{A} \cdot \chi_{P_n} \in E_1(0,1)$.

(Здесь χ_{P_n} - характеристическая функция множества P_n).

Далее имеем:

$$\widetilde{A}(t) = (A - A_n + A_n)^{\sim}(t) \leq (A - A_n)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right) + \widetilde{A}_n\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$= (A - A_n)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right) + f_n(t)$. Отсюда $\left(\widetilde{A}(t) - f_n(t)\right)_+ \leq$ $\leq (A - A_n)^{\sim}\left(\frac{t}{2}\right)$. В силу определения множества P_n получаем

$$(\tilde{A}(t)-f_n(t))_+ = \chi_{(0,1)\setminus P_n}\cdot(\tilde{A}(t)-f_n(t)).$$

Поэтому

$$\|\chi_{(0,1)\setminus P_n}\cdot(\tilde{A}(t)-f_n(t))\|_{E_0(0,1)} \le \|(A-A_n)^{\sim}(\tfrac{t}{2})\|_{E_0(0,1)} \le$$

$$\le 2\|(A-A_n)^{\sim}(t)\|_{E_0(0,1)} = 2\|A-A_n\|_{E_0(\mathfrak{A})} \to 0,\ n\to\infty.$$

С другой стороны

$$\|\chi_{(0,1)\setminus P_n}\cdot(\tilde{A}(t)-f_n(t))\|_{E_0(0,1)} =$$

$$= \|\tilde{A}(t)-\tilde{A}\cdot\chi_{P_n}(t)-f_n(t)+f_n\cdot\chi_{P_n}(t)\|_{E_0(0,1)} =$$

$$= \|\tilde{A}(t)-(f_n(t)-f_n\cdot\chi_{P_n}(t)+\tilde{A}\cdot\chi_{P_n}(t))\|_{E_0(0,1)} =$$

$$= \|\tilde{A}(t)-F_n(t)\|_{E_0(0,1)},$$

где $F_n(t)=f_n(t)-f_n\cdot\chi_{P_n}(t)+\tilde{A}\cdot\chi_{P_n}$ – функция из пространства $E_1(0,1)$. Так как пространство $E_1(0,1)$ – банахово, то $\tilde{A}(t)\in E_1(0,1)$. Лемма доказана.

Т е о р е м а I.2.4. Если $E(0,1)$ – банахово симметричное пространство с порядково полунепрерывной нормой, то $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ – банахово симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$ с порядково полунепрерывной нормой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя характеристику свойства (C) нормы банахова идеального пространства, данную в [7], легко показать, что пространство $E(0,1)$ изометрично вложено в пространство $E''(0,1)$. Поскольку $E''(0,1)$ - интерполяционное пространство, то из теоремы I.2.2 и леммы I.2.3 следует, что $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ - банахова норма на $E(\mathfrak{A})$. Полунепрерывность нормы симметричного пространства является (ell) - инвариантным свойством (см. теорему I.3.2).

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы I.2.4 в случае $\mathfrak{A}=B(H)$ получено в [57].

Следующая теорема усиливает теоремы I.2.2 и I.2.4.

Т е о р е м а I.2.5. Пусть $E(0,1)$ - банахово симметричное пространство, такое, что $g \prec f$; $f, g \in E(0,1)$ влечет $\|g\|_{E(0,1)} \leq \|f\|_{E(0,1)}$. Тогда $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - банахово симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство треугольника для $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ доказывается так же, как и в теореме I.2.2. Поэтому, достаточно показать, что существует интерполяционное пространство $E_1(0,1)$, содержащее $E(0,1)$ в качестве симметричного подпространства.

Положим $E_1(0,1)=\{f\in L_1(0,1) : \exists\, g \in E(0,1)$, что $f \prec g\}$.

Проверим, что $E_1(0,1)$ - линейное пространство. Пусть $f_1, f_2 \in E_1(0,1)$ и $g_1, g_2 \in E(0,1)$, такие, что $f_i \prec g_i$ $(i=1,2)$. Тогда

$$\int_0^s (f_1+f_2)^{\sim}(t)\,dt \leq \int_0^s \tilde{f}_1(t)\,dt+\int_0^s \tilde{f}_2(t)\,dt \leq \int_0^s (\tilde{g}_1+\tilde{g}_2)(t)\,dt,$$

Так как $\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \in E(0,1)$, то $f_1+f_2 \in E_1(0,1)$.

Аналогично $\lambda f \in E_1(0,1)$ для любых $f \in E_1(0,1)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Таким образом $E_1(0,1)$ - симметричное по составу пространство. Положим

$$\|f\|_{E_1(0,1)} = \inf_{\substack{g\in E(0,1)\\ f\prec g}} \|g\|_{E(0,1)}$$

и покажем, что $\|\cdot\|_{E_1(0,1)}$ - симметричная норма на $E_1(0,1)$.

1) Пусть $f\in E_1(0,1)$, $f\geqslant 0$ и $\|f\|_{E_1(0,1)}=0$. Если $f\neq 0$, то существует измеримое подмножество $e\subset[0,1)$ с ненулевой мерой и число $\lambda>0$, что $\lambda\chi_e\leq f$. Из определения $\|\cdot\|_{E_1(0,1)}$ следует, что $h\prec g$, $g\in E_1(0,1)$ влечет $h\in E_1(0,1)$ и $\|h\|_{E_1(0,1)}\leq\|g\|_{E_1(0,1)}$.

Поэтому $\|\lambda\chi_e\|_{E_1(0,1)}=0$ и, следовательно, $\|\chi_e\|_{E_1(0,1)}=0$. Так как любая функция h из $E(0,1)$ принадлежит $E_1(0,1)$ и $\|h\|_{E_1(0,1)}=\|h\|_{E(0,1)}$, то $\|\chi_e\|_{E(0,1)}=0$, и поэтому мера множества e равна нулю. Следовательно, $f=0$. Если f - произвольный элемент из $E_1(0,1)$ и $\|f\|_{E_1(0,1)}=0$, то $\|\tilde f\|_{E_1(0,1)}=0$ и в силу доказанного выше $f=0$.

2) Пусть $f_1,f_2\in E_1(0,1)$ и $g_i\in E(0,1)$ таковы, что $f_i\prec g_i$ $(i=1,2)$. Тогда

$$\|f_1+f_2\|_{E_1(0,1)}=\inf_{\substack{f_1+f_2\prec g\\ g\in E(0,1)}}\|g\|_{E(0,1)}\leq\inf_{\substack{\tilde f_1+\tilde f_2\prec g\\ g\in E(0,1)}}\|g\|_{E(0,1)}\leq$$

$$\leq\|\tilde g_1+\tilde g_2\|_{E(0,1)}.$$

По определению $\|\cdot\|_{E_1(0,1)}$ функции g_1, g_2 могут быть выбраны так, что $\|f_i\|_{E_1(0,1)} \geq \|g_i\|_{E(0,1)} - \frac{\varepsilon}{2}$ $(i=1,2)$, где $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда

$$\|f_1+f_2\|_{E_1(0,1)} \leq \|\tilde{g}_1+\tilde{g}_2\|_{E_1(0,1)} \leq \|\tilde{g}_1\|_{E(0,1)} + \|\tilde{g}_2\|_{E(0,1)} \leq$$

$$\leq \|f_1\|_{E_1(0,1)} + \|f_2\|_{E_1(0,1)} - \varepsilon .$$

За счет произвольности ε получаем

$$\|f_1+f_2\|_{E_1(0,1)} \leq \|f_1\|_{E_1(0,1)} + \|f_2\|_{E_1(0,1)} .$$

Установим теперь полноту пространства $E_1(0,1)$. Предварительно заметим, что если $f \in E_1(0,1)$ такова, что $\mathrm{supp}\, f = e$ и $f \prec g$, $g \in E(0,1)$, то $\mathrm{supp}\, \tilde{f} = [0, \mathrm{mes}\, e]$ и $\tilde{g} \cdot \chi_{[0, \mathrm{mes}\, e]} \prec f$ (здесь $\mathrm{mes}\, e$ – лебегова мера множества e). Поскольку $\|\tilde{g}\cdot\chi_{[0,\mathrm{mes}\, e]}\|_{E(0,1)} \leq \|\tilde{g}\|_{E(0,1)}$, то при определении нормы $\|f\|_{E_1(0,1)}$ можно использовать лишь те функции $g \in E(0,1)$ мажорирующие f, носитель которых содержится, либо совпадает с носителем функции f.

Доказательство полноты пространства $E_1(0,1)$ проведем при помощи критерия полноты идеального пространства функций, доказанного в [I].

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1(0,1)$ и $f_i f_j = 0$, $i \neq j$ таковы, что $\sum_1^{\infty} \|f_n\|_{E_1(0,1)} < \infty$. Тогда существует такая последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E(0,1)$, что $f_i \prec g_i$ и $\|f_n\|_{E_1(0,1)} \geqslant \|g_n\|_{E(0,1)} - \frac{1}{2^n}$, $g_i g_j = 0$ при $i \neq j$. В силу полноты пространства $E(0,1)$ существует функция $g \in E(0,1)$ такая, что $\sum_1^{\infty} g_n = g$ почти всюду. Ряд $\sum_1^{\infty} f_n$ также сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L_1(0,1)$. Осталось показать, что $f \prec g$. Для этого достаточно установить, что $\sum_1^m f_n \prec \sum_1^m g_n$ при всех $m = 1, 2, \ldots$. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости получим $f \prec g$. Предположим, что $\operatorname{supp} f_i = e_i = \operatorname{supp} g_i$, $i = \overline{1,m}$. Тогда на $L_1(e_i)$ существует допустимый оператор T_i, такой, что $T_i(g_i) = f_i$ $(i = \overline{1,m})$. Определим оператор T на $L_1(\bigcup_{i=1}^m e_i)$ следующим образом:

$$Tg = \sum_{i=1}^m T_i(g \cdot \chi_{e_i}) \cdot$$

Нетрудно видеть, что T - допустимый оператор на $L_1(\bigcup_{i=1}^m e_i)$ и $T(\sum_{i=1}^m g_i) = \sum_{i=1}^m f_i$. Это равносильно тому, что $\sum_{i=1}^m g_i \succ \sum_{i=1}^m f_i$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что теоремы I.2.2, I.2.4, I.2.5 верны для любых конечных алгебр. Действительно, если $\mathfrak{A}$ - конечная алгебра фон Неймана, то существует конечная непрерывная алгебра фон Неймана $\mathcal{B}$, содержащая $\mathfrak{A}$ в качестве подалгебры фон Неймана (например: $\mathcal{B} = \mathfrak{A} \otimes L_\infty(0,1)$). Пусть $E(0,1)$ - такое же, что и в теореме I.2.5. Очевидно, что

$E(\mathfrak{A}) = E(\mathcal{B}) \cap L_1(\mathfrak{A})$ и потому $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ – норма на $E(\mathfrak{A})$. Если же $A_n \in E(\mathfrak{A})$ и $\{A_n\}$ сходится по норме $\|\cdot\|_{E(\mathcal{B})}$ к некоторому оператору $A \in E(\mathcal{B})$, то $\{A_n\}$ сходится к A также и по норме $\|\cdot\|_1$. Поскольку $L_1(\mathfrak{A})$ – замкнуто в $L_1(\mathcal{B})$, то $A \in L_1(\mathfrak{A})$, а значит $A \in E(\mathfrak{A})$.

Отметим, что каждое симметричное пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ на непрерывной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ (ln) – порождается некоторым симметричным пространством функций на отрезке $[0,1]$. Действительно, если $\mathcal{U}$ – максимальная коммутативная $*$ – подалгебра в $\mathfrak{A}$, то симметричные пространства $E(\mathcal{U}) = L_1(\mathcal{U}) \cap E(\mathfrak{A})$ (с нормой, индуцированной из $E(\mathfrak{A})$ и $E(0,1)$, (ln) – порожденное $E(\mathcal{U})$ будут (ln) – эквивалентны (см. [13]). Поэтому $E(0,1)$ (ln) – порождает пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$.

Всюду в дальнейшем запись $(E(\mathcal{B}), \|\cdot\|_{E(\mathcal{B})})$ означает, что симметричное пространство $E(\mathcal{B})$ на алгебре $\mathcal{B}$ (ln) – порождено симметричным пространством функций $(E(0,1), \|\cdot\|_{E(0,1)})$ на отрезке $[0,1]$ (подразумевается, что след на алгебре $\mathcal{B}$ – нормирован).

В заключение приведем критерий интерполяционности для некоммутативных симметричных пространств, аналогичный критерию А.А.Меклера [13] для функциональных симметричных пространств.

Т е о р е м а I.2.6. Симметричное пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ на конечной непрерывной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ интерполяционно в том и только в том случае, когда $T_{\mathcal{B}}(E(\mathfrak{A})) \subset E(\mathfrak{A})$ и $\|T_{\mathcal{B}}(A)\|_{E(\mathfrak{A})} \leq \|A\|_{E(\mathfrak{A})}$ для каждого $A \in E(\mathfrak{A})$ и любого УМО $T_{\mathcal{B}}$, построенного по коммутативной подалгебре фон Неймана $\mathcal{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - интерполяционно. Так как любой оператор УМО является допустимым, то для каждого $A \in E(\mathfrak{A})$ имеем $T_{\mathcal{B}}(A)^{\sim} \prec A^{\sim}$ (см. предложение I.I.4) и, следовательно, в силу теоремы I.I.6

$$T_{\mathcal{B}}(A) \in E(\mathfrak{A}) \quad \text{и} \quad \|T_{\mathcal{B}}(A)\|_{E(\mathfrak{A})} \leq \|A\|_{E(\mathfrak{A})}.$$

Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольную максимальную коммутативную $*$ - подалгебру $\mathfrak{A}_1$ алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{B}$ - коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}_1$. Из предположения теоремы имеем $T_{\mathcal{B}}(E(\mathfrak{A}_1)) \subset E(\mathfrak{A}_1)$ и $\|T_{\mathcal{B}}(A)\|_{E(\mathfrak{A}_1)} \leq \|A\|_{E(\mathfrak{A}_1)}$ для любого оператора $A \in E(\mathfrak{A}_1)$. Поэтому, в силу критерия А.А.Меклера [I3] пространство $(E(\mathfrak{A}_1), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A}_1)})$ - интерполяционно.

Из (ℓn) - инвариантности свойства интерполяционности следует, что пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - также интерполяционно. Теорема доказана.

§ I.3. (ℓn) - инвариантные свойства симметричных пространств измеримых операторов

Предложенный в § I.2 метод построения некоммутативных симметричных пространств дает инструмент для доказательства различных утверждений о таких пространствах. В этом параграфе изучаются условия, при которых норма некоммутативного симметричного пространства будет удовлетворять какому-либо из условий (A), (B), (C). Приводятся также критерии сепарабельности и рефлективности некоммутативных симметричных пространств.

Предварительно докажем следующее

Предложение I.3.I (ср. [II]). Пусть $T_n, T \in L_1(\mathfrak{A})$ и $\|T_n - T\|_1 \to 0$. Тогда $\tilde{T}_n \to \tilde{T}$ почти всюду.

Доказательство. Известно [2I] , что $(T-T_n)^{\sim} \longrightarrow 0$ почти всюду. Имеем:

$$\tilde{T}(t+\eta) \le \tilde{T}_n(t) + (T-T_n)^{\sim}(\eta),$$

$$\tilde{T}_n(t) \le \tilde{T}(t-\eta) + (T-T_n)^{\sim}(\eta).$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ и $\eta > 0$ $((t-\eta)>0)$ при достаточно больших n выполнено:

$$\tilde{T}(t+\eta) - \delta \le \tilde{T}_n(t) \le \tilde{T}(t-\eta) + \delta .$$

Если в точке t функция $\tilde{T}$ - непрерывна, то отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n} \tilde{T}_n(t) = \tilde{T}(t)$.

Последнее равенство влечет утверждение предложения I.3.I.

Далее мы (если не оговорено противное) предполагаем, что алгебра $\mathfrak{A}$ - непрерывна, а след μ на $\mathfrak{A}$ - нормированный.

Т е о р е м а I.3.2. Норма симметричного пространства $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ обладает каким-либо из свойств (A), (B), (C), в том и только в том случае, если этим свойством обладает норма пространства $(E(0,1), \|\cdot\|_{E(0,1)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что норма $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ пространства $E(\mathfrak{A})$ удовлетворяет какому- нибудь из свойств (A), (B), (C). Ясно, что норма пространства $(E(\mathcal{U}), \|\cdot\|_{E(\mathcal{U})})$, где $\mathcal{U}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$, также обладает этим свойством. (Норма в $E(\mathcal{U})$ индуцируется из $E(\mathfrak{A})$). Тогда в силу [I3] норма пространства $E(0,1)$ обладает тем же свойством.

При доказательстве обратной импликации будем отождествлять $E(\mathcal{U})$ с симметричным пространством функций на непрерывном вероятностном пространстве с мерой (Ω, Σ, μ). Учитывая [I3], нам достаточно доказать, что если норма пространства $E(\mathcal{U})$ обладает одним из свойств (A),(B),(C), то и норма пространства $E(\mathfrak{A})$ обладает этим свойством.

I. Пусть норма в $E(\mathcal{U})$ порядково непрерывна, $T_n \in E(\mathfrak{A})$, $T_n \geqslant 0$, $T_n \downarrow 0$. Тогда $T_n \longrightarrow 0$ по мере (см. [I6]), что равносильно $\widetilde{T}_n(\alpha) \longrightarrow 0$ [2I]. Имеем: $T_n \geqslant T_{n+1}$ влечет $\widetilde{T}_{n+1}(\alpha) \leq \widetilde{T}_n(\alpha)$, и значит $\widetilde{T}_n(\alpha) \downarrow 0$ для $n \geqslant 1$. Выбираем сохраняющее меру отображение $\pi: (\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow (0,1)$ и положим $B_n = \widetilde{T}_n \circ \pi$. Имеем $B_n \geqslant B_{n+1}$, ибо

$B_n(\omega)=\tilde{T}_n(\pi(\omega))\geqslant \tilde{T}_{n+1}(\pi(\omega))=B_{n+1}(\omega),\ \omega\in\Omega$ и поскольку $\tilde{B}_n(\alpha)=\tilde{T}_n(\alpha)\downarrow 0$, то $B_n\longrightarrow 0$ по мере, т.е. $B_n\downarrow 0$. В силу симметричности пространства $E(\mathcal{U})$ операторы $B_n\in E(\mathcal{U})$.

Из предположения о порядковой непрерывности нормы пространства $E(\mathcal{U})$ получаем: $\|T_n\|_{E(\mathfrak{A})}=\|B_n\|_{E(\mathcal{U})}\downarrow 0$, что и означает порядковую непрерывность нормы пространства $E(\mathfrak{A})$.

2. Пусть норма $E(\mathcal{U})$ монотонно полна, и последовательность $T_n\in E(\mathfrak{A})$, такова, что $T_n\geqslant 0$, $T_n\uparrow$, $\sup\limits_n\|T_n\|_{E(\mathfrak{A})}<\infty$. Тогда в силу непрерывности вложения $E(\mathfrak{A})\subset L_1(\mathfrak{A})$ имеем $\sup\limits_n\|T_n\|_1<\infty$, и поскольку норма пространства $L_1(\mathfrak{A})$ монотонно полна [16], то существует $T\in L_1(\mathfrak{A})$ такой, что $T_n\uparrow T$. Покажем, что $T\in E(\mathfrak{A})$. Как и в пункте I полагаем $B_n=\tilde{T}_n\circ\pi$. Ясно, что последовательность $\{B_n\}$ возрастает. Кроме того, $B_n\geqslant 0$, $\|B_n\|_{E(\mathcal{U})}=\|T_n\|_{E(\mathcal{U})}$ и значит, $\sup\limits_n\{\|B_n\|_{E(\mathcal{U})}\}<\infty$. Следовательно существует такое $B\in E(\mathcal{U})$, что $B_n\uparrow B$. Осталось показать, что $\tilde{B}(\alpha)=\tilde{T}(\alpha)$. Имеем $\|T-T_n\|_1=$ $=\|T\|_1-\|T_n\|_1\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, следовательно, $\|T_n\|_1\uparrow\|T\|_1$ или $\int_0^1\tilde{T}_n(\alpha)\,d\alpha\uparrow\int_0^1\tilde{T}(\alpha)\,d\alpha$.

Аналогично $\int_0^1 T_n(\alpha)\,d\alpha \uparrow \int_0^1 \widetilde{T}(\alpha)\,d\alpha$. С другой стороны $\widetilde{B}_n(\alpha)\uparrow$ и $\widetilde{B}_n(\alpha) \le \widetilde{B}(\alpha)$ для любого n. Поэтому последовательность функций $\widetilde{B}_n(\alpha)$ почти всюду сходится к некоторой интегрируемой функции, которую обозначим $f(\alpha)$. Ясно, что $f(\alpha) \le \widetilde{B}(\alpha)$, и $\int_0^1 \widetilde{B}_n(\alpha)d\alpha \uparrow \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$, т.е. $\int_0^1 \widetilde{B}(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$. Поэтому $f(\alpha) = \widetilde{B}(\alpha)$ почти всюду. Аналогично $f(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$ почти всюду. $\widetilde{B}(\alpha)$ и $\widetilde{T}(\alpha)$ – это непрерывные слева функции, поэтому $\widetilde{B}(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0,1)$. Следовательно, $T \in E(\mathfrak{A})$.

3. Пусть норма $E(\mathfrak{A})$ порядково полунепрерывна, $T_n, T \in E(\mathfrak{A})$, $T_n \uparrow T$. В силу порядковой непрерывности нормы $\|\cdot\|_1$ (см. [I6]) легко видеть, что $\|T_n - T\|_1 \longrightarrow 0$ и, значит, в силу предложения I.3.I $\widetilde{T}_n(\alpha) \longrightarrow \widetilde{T}(\alpha)$ почти всюду, следовательно, $\widetilde{T}_n(\alpha)$ сходится к $\widetilde{T}(\alpha)$ по мере, что равносильно $(\widetilde{T} - \widetilde{T}_n)^{\sim}(\beta) \to 0$. Полагаем $B_n = \widetilde{T}_n \circ \mathcal{T}$, $B = \widetilde{T} \circ \mathcal{T}$. Имеем $\widetilde{B}(\alpha) = \widetilde{T}(\alpha)$, $\widetilde{B}_n(\alpha) = \widetilde{T}_n(\alpha)$, следовательно, $B_n, B \in E(\mathcal{U})$ и кроме того, $B_n \le B_{n+1}$, $B_n \le B$ для всех $n \geqslant 1$. Рассматривая разность $B - B_n = \widetilde{T} \circ \mathcal{T} - \widetilde{T}_n \circ \mathcal{T} = (\widetilde{T} - \widetilde{T}_n) \circ \mathcal{T}$ видим, что $(B - B_n)^{\sim}(\alpha) = (\widetilde{T} - \widetilde{T}_n)^{\sim}(\alpha) \downarrow 0$, т.е. B_n сходится к B по мере и потому $B_n \uparrow B$ [I6]. В силу предположения получаем $\|B_n\|_{E(\mathcal{U})} \uparrow \|B\|_{E(\mathcal{U})}$ или $\|T_n\|_{E(\mathfrak{A})} \uparrow \|T\|_{E(\mathfrak{A})}$, что и означает порядковую полунепрерывность нормы пространства $E(\mathfrak{A})$.

Известно, что топология сходимости по мере в кольце $S(\mathfrak{A})$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathfrak{A}$ индуцируется некоторой метрикой ρ (см. [21]) относительно которой $S(\mathfrak{A})$ превращается в полное метрическое пространство $(S(\mathfrak{A}), \rho)$. По аналогии с теорией меры будем называть след μ - сепарабельным, если логика проекторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ всех проекторов $\mathfrak{A}$ является сепарабельным метрическим пространством в индуцированной из $(S(\mathfrak{A}), \rho)$ метрике. Доказательство следующей леммы ничем не отличается от доказательства, приведенного в [7] для кольца измеримых функций.

Л е м м а I.3.3. $(\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}, \rho)$ - сепарабельно тогда и только тогда, когда $(S(\mathfrak{A}), \rho)$ - сепарабельно.

Следующая теорема является аналогом для некоммутативных симметричных пространств известного критерия сепарабельности идеального пространства функций (см. теорему 4.3.3 в [7]).

Т е о р е м а I.3.4. Симметричное пространство $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ сепарабельно в том и только в том случае, если след μ - сепарабелен и в $E(\mathfrak{A})$ выполнено условие (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть след μ - сепарабелен и в $E(\mathfrak{A})$ выполнено условия (A). Ввиду результатов [16] и леммы I.3.3 нам достаточно доказать, что множество $G = \{ \sum_{k=1}^{m} r_k P_k$, $P_k \in \mathcal{P}^{o}_{\mathfrak{A}}$, r_k - рациональные числа, $\mathcal{P}^{o}_{\mathfrak{A}}$ - счетное плотное в метрике ρ множество в $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}} \}$, плотно в множестве

$$\mathfrak{M}=\Big\{T\in L_1(\mathfrak{A}),\ T=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k\ ,\ P_k\in\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}\ ;\ \lambda_k -$$

действительные числа $\Big\}$. Для этого достаточно доказать следующую импликацию: P_k^n сходится почти всюду к P_k влечет $\| P_k^n - P_k \|_{E(\mathfrak{A})} \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

По определению сходимости почти всюду для любой последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ действительных чисел, сходящихся к нулю, существует $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$,что

$\|(P_k^n - P_k)Q_m\|_\infty \longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$ и

$\mu(\mathbb{1}-Q_m)<\varepsilon_m$. Тогда $\|P_k^n - P_k\|_{E(\mathfrak{A})}\le \|(P_k^n-P_k)Q_m\|_{E(\mathfrak{A})}+$

$$+\|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_{E(\mathfrak{A})}\le\|(P_k^n-P_k)Q_m\|_\infty\cdot\|\mathbb{1}\|_{E(\mathfrak{A})}+$$

$$+\|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_{E(\mathfrak{A})}.$$

Далее [21]

$$\|(P_k^n-P_k)(\mathbb{1}-Q_m)\|_{E(\mathfrak{A})}\le$$

$$\le\|P_k^n-P_k\|_\infty\cdot\|\mathbb{1}-Q_m\|_{E(\mathfrak{A})}\le 2\,\|\mathbb{1}-Q_m\|_{E(\mathfrak{A})}\ .$$

Легко видеть, что условие (А) обеспечивает $\|\mathbb{1}-Q_m\|_{E(\mathfrak{A})}\downarrow 0$.

Поэтому $\|P_k^n-P_k\|_{E(\mathfrak{A})}\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$.

Обратно. Пусть симметричное пространство $E(\mathfrak{A})$ - сепарабельно. Очевидно, что тогда след μ - сепарабелен и пространство $(E(\mathfrak{U}),\ \|\cdot\|_{E(\mathfrak{U})})$ есть сепарабельное симметричное функциональное пространство. Тогда, в силу упоминавшегося результата из [7] в $E(\mathcal{U})$ выполнено условие (A), значит, по теореме I.3.2 это условие выполнено в $E(\mathfrak{A})$.

Рассмотрим теперь свойство рефлексивности для некоммутативных симметричных пространств. Предварительно докажем одну лемму, которой будем пользоваться и в дальнейшем.

Л е м м а I.3.5. Пусть $E(0,1)$ - симметричное пространство, $\mathfrak{A}$ - непрерывная алгебра фон Неймана, и $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ - симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда ассоциированное пространство к $E(\mathfrak{A})$ совпадает с симметричным пространством, которое (ℓn) -порождается пространством $E'(0,1)$, ассоциированным к $E(0,1)$, т.е.

$$E(\mathfrak{A})' = E'(\mathfrak{A}) = \{ T \in L_1(\mathfrak{A}) : \tilde{T} \in E'(0,1) \}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующим результатом работы [65] : если (Ω, μ) - непрерывное вероятностное пространство, и $f, g \in L_1(\Omega)$ таковы, что $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \in L_1(0,1)$, то множество значений $\{ \int_\Omega f g' d\mu : g' \sim g \}$ есть замкнутый интервал $\left[\int_0^1 \tilde{f}(t)\tilde{g}(1-t)dt, \int_0^1 \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt \right]$.

Предположим, что $A \in L_1(\mathfrak{A})$ таков, что $\tilde{A}(t) \in E'(0,1)$, тогда (см. [83], [65]):

$$\|A\|_{E(\mathfrak{A})'} = \sup_{\substack{T \in E(\mathfrak{A}) \\ \|T\|_{E(\mathfrak{A})} \le 1}} |\mu(TA)| \le \sup_{\substack{\tilde{T} \in E(0,1) \\ \|\tilde{T}\|_{E(0,1)} \le 1}} \int_0^1 \tilde{T}(t)\tilde{A}(t)dt \le$$

$$\leq \sup_{\substack{F(t)\in E(0,1)\\ \|F\|_{E(0,1)}\leq 1}} \int_0^1 F(t)\tilde{A}(t)dt = \|\tilde{A}\|_{E'(0,1)} .$$

Следовательно, $A\in E(\mathfrak{A})'$ и $\|A\|_{E(\mathfrak{A})'} \leq \|\tilde{A}\|_{E'(0,1)}$.

Обратно, если $A \in E(\mathfrak{A})'$, то

$$\sup_{\substack{F(t)\in E(0,1)\\ \|F\|_{E(0,1)}\leq 1}} \left| \int_0^1 F(t)\tilde{A}(t)dt\right| \leq \sup_{\substack{F(t)\in E(0,1)\\ \|F\|_{E(0,1)}\leq 1}} \int_0^1 \tilde{F}(t)\tilde{A}(t)dt.$$

Используя приведенный результат [65] найдем для каждой $F(t)\in E(0,1)$, $\|F\|_{E(0,1)}\leq 1$ такой оператор T, присоединенный к максимальной коммутативной подалгебре, содержащей спектральное семейство $|A|$, что $\tilde{F}(t) = \tilde{T}(t)$ и

$$\int_0^1 \tilde{F}(t)\tilde{A}(t)\,dt = \mu(T\cdot|A|).$$

Отсюда

$$\sup_{\substack{F(t)\in E(0,1)\\ \|F\|_{E(0,1)}\leq 1}} \int_0^1 \tilde{F}(t)\tilde{A}(t) \leq \sup_{\substack{T\in E(\mathfrak{A})\\ \|T\|_{E(\mathfrak{A})}\leq 1}} |\mu(T\cdot|A|)| =$$

$= \| |A| \|_{E(\mathfrak{A})'} = \|A\|_{E(\mathfrak{A})'}$. Таким образом для $A\in E(\mathfrak{A})'$ функция $\tilde{A}$ принадлежит $E'(0,1)$ и $\|\tilde{A}\|_{E'(0,1)} \leq \|A\|_{E(\mathfrak{A})'}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если пространство $E(0,1)$ интерполяционно, то утверждение леммы I.3.5 сохраняется для любых конечных алгебр фон Неймана.

Действительно, положим $\mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes L_\infty(0,1)$, тогда $\mathcal{B}$ – непрерывная алгебра фон Неймана и в силу леммы I.3.5 $E(\mathcal{B})' = E'(\mathcal{B})$. Покажем, что $E(\mathcal{A})' = E(\mathcal{B})' \cap L_1(\mathcal{A})$ (отсюда сразу следует равенство $E(\mathcal{A})' = E'(\mathcal{A})$).

Очевидно, что $E(\mathcal{A})' \supset E(\mathcal{B})' \cap L_1(\mathcal{A})$.

Пусть $S \in E(\mathcal{A})'$, тогда $TS \in L_1(\mathcal{A})$ для всех $T \in E(\mathcal{A})$ и $\|S\|_{E(\mathcal{A})'} = \sup\limits_{\substack{T \in E(\mathcal{A}) \\ \|T\|_{E(\mathcal{A})} \le 1}} |\mu(TS)| < \infty$

Пусть $T_{\mathcal{A}}$ – УМО из $L_1(\mathcal{B})$ на $L_1(\mathcal{A})$. Так как $E(0,1)$ – интерполяционно, то $E(\mathcal{B})$ – интерполяционно, и поэтому $T_{\mathcal{A}}(E(\mathcal{B})) \subset E(\mathcal{B}) \cap L_1(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A})$.

Следовательно, для всех $T \in E(\mathcal{B})$, $\|T\|_{E(\mathcal{B})} \le 1$ имеем

$$|\mu(TS)| = |\mu(E_{\mathcal{A}}(T)S)| \le \|S\|_{E(\mathcal{A})'}.$$

Таким образом $S \in E(\mathcal{B})' \cap L_1(\mathcal{A})$, т.е. $E(\mathcal{A})' = E(\mathcal{B})' \cap L_1(\mathcal{A})$.

Т е о р е м а I.3.6. Пусть $E(0,1)$ – симметричное пространство, $\mathcal{A}$ – непрерывная алгебра фон Неймана и $(E(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{E(\mathcal{A})})$ – симметричное пространство на $\mathcal{A}$. Тогда $(E(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{E(\mathcal{A})})$ – рефлексивно в том и только с том случае, когда $E(0,1)$ – рефлексивно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что пространство $E(0,1)$ – рефлексивно. Тогда его норма порядково непрерывна (см. [7]), и поэтому, норма $\|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})}$ также порядково непрерывна. В силу [83] последнее означает, что сопряженное к $E(\mathfrak{A})$ пространство $E(\mathfrak{A})^*$ совпадает с ассоциированным $E(\mathfrak{A})'$, причем двойственность задается формулой:

$$\langle A, B \rangle = \mu(AB), \text{ где } A \in E(\mathfrak{A}),\ B \in E(\mathfrak{A})'.$$

Для доказательства рефлексивности пространства $E(\mathfrak{A})$, нам достаточно показать, что каждый непрерывный функционал $f_B(A) = \mu(AB)$ достигает своей нормы на единичной сфере пространства $E(\mathfrak{A})$ (см. [9]). Поскольку $B \in E(\mathfrak{A})' = E'(\mathfrak{A})$, то в силу леммы I.3.5 функция $\widetilde{B}$ принадлежит $E'(0,1)$, причем $\|\widetilde{B}\|_{E'(0,1)} = \|B\|_{E(\mathfrak{A})'}$. Так как $E(0,1)$ – рефлексивно, то найдется функция $G_0(t)$, принадлежащая $E(0,1)$, что $\|G_0(t)\|_{E(0,1)} = 1$ и $\int_0^t \widetilde{B}(t)G_0(t)dt = \|\widetilde{B}\|_{E'(0,1)}$.

Опять применяя результат из [65], найдем такой оператор $F_0 \in E(\mathfrak{A})$, что $\widetilde{G}_0(t) = \widetilde{F}_0(t)$ (и значит $\|F_0\|_{E(\mathfrak{A})} = 1$), принадлежащий максимальной коммутативной $*$ – подалгебре, содержащей спектральное семейство оператора $|B|$, что $\mu(F_0|B|) = \int_0^1 \widetilde{B}(t)G_0(t)dt$. Тогда, полагая $F = F_0 \cdot U^*$, где U – унитарный оператор из полярного разложения $B = U\cdot|B|$, получим:

$$\|F\|_{E(\mathfrak{A})} = \|F_0\|_{E(\mathfrak{A})} = 1 \quad \text{и}$$

$$f_B(F) = \mu(FB) = \mu(F_0U^*B) = \mu(F_0|B|) =$$

$$=\int_0^1 \tilde{B}(t)\tilde{G}_0(t)dt=\|\tilde{B}\|_{E'(0,1)}=\|B\|_{E(\mathfrak{A})'}=\|f_B\|_{E(\mathfrak{A})^*}.$$

Обратная импликация доказывается совершенно аналогично.

Следствие I.3.7. Если $\mathfrak{A}$ – непрерывная алгебра фон Неймана и $E(\mathfrak{A})$ – симметричное пространство на алгебре $\mathfrak{A}$, то $E(\mathfrak{A})$ рефлексивно в том и только в том случае, когда существует хотя бы одна максимальная коммутативная $*$ – подалгебра $\mathcal{U}\subset\mathfrak{A}$, такая что, $E(\mathcal{U})$ – рефлексивно.

Следствие I.3.8. Пусть $E(0,1)$ – симметричное рефлексивное пространство и $\mathfrak{A}$ – конечная алгебра фон Неймана. Тогда $(E(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{E(\mathfrak{A})})$ – рефлексивно.

Доказательство. Если $\mathcal{B}=\mathfrak{A}\otimes L_\infty(0,1)$, то $\mathcal{B}$ – непрерывная конечная алгебра фон Неймана и пространство $E(\mathfrak{A})=E(\mathcal{B})\cap L_1(\mathfrak{A})$ замкнутое подпространство рефлексивного пространства $E(\mathcal{B})$. В силу [9] $E(\mathfrak{A})$ – также рефлексивно.

Теорему I.3.6 можно использовать также и для описания сопряженных пространств. Обозначим через $L_M(0,1)$ и $L_N(0,1)$ пространства Орлича (см. [8]), построенные по взаимно дополнительным N – функциям M и N удовлетворяющим (Δ_2) – условию. В случае $M(u)=u^p$ $(p>1)$, функция $N(u)=u^q$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и пространство Орлича $L_M(0,1)$ изоморфно пространству $L_p(0,1)$.

Следствие I.3.9. Если $\mathfrak{A}$ – конечная алгебра фон Неймана, то $L_p(\mathfrak{A})$, $p>1$ – рефлексивное пространство и сопряженное к нему есть $L_q(\mathfrak{A})$. Пространство $(L_M(\mathfrak{A}),$

$\|\cdot\|_{L_M(\mathfrak{A})})$ – также рефлексивно и

$$\left(L_M(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{L_M(\mathfrak{A})}\right)^* = \left(L_N(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{L_N(\mathfrak{A})}\right).$$

Рассмотрим теперь некоммутативные пространства Лоренца. Известно, что норма в функциональном пространстве Лоренца $\Lambda_\psi(0,1)$ порядково непрерывна [3] и поэтому $\Lambda_\psi(0,1)$ интерполяционно и

$$\Lambda_\psi(0,1)^* = \Lambda'_\psi(0,1) = M_\psi(0,1).$$

В силу замечания к лемме I.3.5 получаем следующее

С л е д с т в и е I.3.10. Если $\mathfrak{A}$ - конечная алгебра фон Неймана, то сопряженным к некоммутативному пространству Лоренца $\left(\Lambda_\psi(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}\right)$ является некоммутативное пространство Марцинкевича $\left(M_\psi(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})}\right)$.

Известно (см. [13]), что в случае, когда $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(t)}{t}=\infty$ пространство Лоренца $\Lambda_\psi(0,1)$ является сопряженным (и ассоциированным) пространством к пространству $\overset{\circ}{M}_\psi(0,1)$ - замыканию $L_\infty(0,1)$ по норме $\|\cdot\|_{M_\psi(0,1)}$. Обозначим через $M_\psi(\mathfrak{A})^\circ$ - замыкание алгебры $\mathfrak{A}$ по норме пространства $\|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})}$ и используя предложение I.3.12 (см. ниже) получаем

С л е д с т в и е I.3.11. Если $\mathfrak{A}$ - конечная алгебра фон Неймана и $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(t)}{t}=\infty$, то пространство $\left(\Lambda_\psi(\mathfrak{A}),\ \|\cdot\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}\right)$ является сопряженным к пространству $M_\psi(\mathfrak{A})^\circ$.

П р е д л о ж е н и е I.3.12. Пространства $\left(M_\psi(\mathfrak{A})^\circ,\ \|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})}\right)$ и $\left(\overset{\circ}{M}_\psi(0,1),\ \|\cdot\|_{M_\psi(0,1)}\right)$ - (ℓn) - эквивалентны.

Доказательство. Обозначим через $M^0_\psi(\mathfrak{A})$ симметричное пространство, построенное по пространству $M^0_\psi(0,1)$. В силу леммы I.2.3. пространство $(M^0_\psi(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})})$ – банахово, и значит, поскольку $\mathfrak{A} \subset M^0_\psi(\mathfrak{A})$, пространство $M_\psi(\mathfrak{A})^0$ вложено в $M^0_\psi(\mathfrak{A})$. С другой стороны для любой максимальной коммутативной $*$ – подалгебры $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{A}$:

$$M^0_\psi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}^{\|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})}} \subset M_\psi(\mathfrak{A})^0 .$$

Поэтому

$$M_\psi(\mathfrak{A})^0 = M^0_\psi(\mathfrak{A}) .$$

Результаты теорем I.3.2, I.3.4 и I.3.6 могут быть сформулированы следующим образом:

Теорема I.3.I3. Свойства (A), (B), (C) и свойство рефлексивности некоммутативного симметричного пространства $(E\mathcal{M})$ – инвариантны. Свойство сепарабельности некоммутативного симметричного пространства $(E\mathcal{M})$ – инвариантно в классе симметричных пространств на алгебрах с сепарабельным следом.

§ I.4. Примеры некоммутативных симметричных пространств

Содержательными примерами некоммутативных симметричных пространств являются некоммутативные L_p – пространства [82], некоммутативные пространства Лоренца и Марцинкевича [2I], [59], некоммутативные пространства Орлича [I5], [I6]. При построении и изучении этих пространств использовались методы, как правило, отличные от наших, однако, как нетрудно видеть, эти пространства совпадают с пространствами, получающимися при применении к соответственно $L_p(0,1)$, $\Lambda_\psi(0,1)$, $M_\psi(0,1)$, $L_M(0,1)$ теоремы I.2.2 (все эти пространства интерполяционны).

В этом параграфе строятся различные примеры некоммутативных симметричных пространств, характеризующих связи между теоремами I.2.2, I.2.4, I.2.5 и приводится пример некоммутативного симметричного пространства не обладающего ни одним из свойств (A), (B), (C) и не обладающего эквивалентной симметричной нормой, удовлетворяющей какому-нибудь из этих свойств. Отметим, что в случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ совпадает с алгеброй всех ограниченных операторов в H аналогичные задачи рассматривались в [I4], [22], где были построены примеры промежуточных и неинтерполяционных идеалов компактных операторов.

Всюду в этом параграфе $\mathfrak{A}$ – конечный непрерывный фактор, μ – нормированный след на $\mathfrak{A}$. В этом случае любое идеальное пространство симметрично по составу (см. ниже предложение I.4.I) и априори не ясно не будет ли всякое симметричное пространство на $\mathfrak{A}$ – интерполяционным.

П р е д л о ж е н и е I.4.I. Всякое идеальное пространство E на $\mathfrak{A}$ симметрично по составу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как E идеально, то достаточно показать, что из $B\sim A$, $A\in E$, $B\in L_1(\mathfrak{A})$ следует $B\in E$ для операторов A и B вида $A=\sum_1^\infty \lambda_i P_i$, $B=\sum_1^\infty \lambda_i Q_i$,

где $P_iP_j=0$, $Q_iQ_j=0$, $i\neq j$, P_i и Q_i – равноизмери-

мые проекторы из $\mathfrak{A}$, $\sum\limits_i P_i = \sum\limits_i Q_i = \mathbb{1}$.
Поскольку $\mathfrak{A}$ — фактор, то существует унитарный оператор U из $\mathfrak{A}$, такой, что $U^* P_i U = Q_i$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Следовательно, $U^* A U = B$. Поскольку E – идеальное пространство, то $\mathfrak{A} E \mathfrak{A} \subset E$ (см. [16]) и поэтому $B \in E$.

I. Пример неинтерполяционного пространства со свойством (C)

В [23], [II] построено банахово симметричное неинтерполяционное пространство $G(0,1)$, которое является симметричным подпространством пространства Марцинкевича $M_\psi(0,1)$ при некоторых дополнительных условиях на функцию $\psi(t)$. В силу теоремы I.2.4 $G(\mathfrak{A})$ – банахово симметричное пространство в индуцированной из $M_\psi(\mathfrak{A})$ норме. Так как свойство интерполяционности симметричного пространства $(\ell\mathcal{N})$ – инвариантно, то $G(\mathfrak{A})$ – неинтерполяционно. Таким образом, $G(\mathfrak{A})$ – банахово симметричное неинтерполяционное пространство на факторе $\mathfrak{A}$. Поскольку $M_\psi(0,1)$ обладает свойством (C), то норма в $G(0,1)$ также обладает свойством (C) и поэтому $G(\mathfrak{A})$ обладает этим свойством (теорема I.2.4).

Прежде чем построить следующий пример, предварительно докажем следующее

П р е д л о ж е н и е I.4.2. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ – симметричное пространство на $\mathfrak{A}$ и F – его замкнутое симметричное подпространство. Для каждого $A \in E$ положим

$$\|A\|_{E/F} = \inf_{B\in F} \|A-B\|_F .$$

Тогда $\|\cdot\|_{E/F}$ - симметричная полунорма на E, причем, если E и F интерполяционны, то

$\|A\|_{E/F} \leq \|B\|_{E/F}$ при $A \prec B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $\|\cdot\|_{E/F}$ - полунорма на E. Покажем ее идеальность и симметричность, т.е. из $|B| \leq |A| \Longrightarrow \|B\|_{E/F} \leq \|A\|_{E/F}$ и из

$$A \sim B \Longrightarrow \|A\|_{E/F} = \|B\|_{E/F} .$$

Пусть $A \in E$, $A = U|A|$, $U \in \mathfrak{A}_U$.

Имеем $\|A\|_{E/F} = \inf_{B\in F} \|A-B\|_E = \inf_{B\in F} \|U^*A - U^*B\|_E =$

$$= \inf_{B\in F} \||A| - U^*B\|_E = \inf_{C\in F} \||A| - C\|_E = \||A|\|_{E/F} .$$

Если $|B| \leq |A|$, $A \in E$, то $|B| = H|A|H^*$, где $H \in \mathfrak{A}$ и $\|H\|_\infty \leq 1$ (см. [81]), и поэтому

$$\|A\|_{E/F} = \||A|\|_{E/F} = \inf_{C\in F} \||A| - C\|_E \geq$$

$$\geq \inf_{C\in F} \|H(|A|-C)H^*\|_E = \inf_{C\in F} \||B| - HCH^*\|_E \geq$$

$$\geq \inf_{D\in F} \||B| - D\|_E = \||B|\|_{E/F} = \|B\|_{E/F} .$$

Пусть теперь $A, B \in E$, $A \sim B$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такие операторы $A_1, B_1 \in E$, что $0 \leq A_1 \leq |A| \leq A_1 + \varepsilon \cdot \mathbb{1}$, $0 \leq B_1 \leq |B| \leq B_1 + \varepsilon \cdot \mathbb{1}$ и

$$A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i , \quad B_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Q_i ,$$

где P_i, Q_i это равноизмеримые проектора из $\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$,

$$P_i P_j = Q_i Q_j = 0, \ i \neq j, \ \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i = \mathbb{1} .$$

Существует такой унитарный оператор $U \in \mathfrak{A}$, что $B_1 = U A_1 U^*$ и следовательно,

$$\|A_1\|_{E/F} = \inf_{C \in F} \|A_1 - C\|_E \geqslant \inf_{C \in F} \|U(A_1 - C)U^*\|_E =$$

$$= \inf_{C \in F} \|B_1 - UCU^*\|_E \geqslant \|B\|_{E/F} .$$ Аналогично показывается, что $\|B_1\|_{E/F} \geqslant \|A_1\|_{E/F}$.

Отсюда $\|A_1\|_{E/F} = \|B_1\|_{E/F}$ и в силу произвольности ε получаем $\|A\|_{E/F} = \|B\|_{E/F}$.

Пусть теперь E и F интерполяционны, $A, B \in E$ и $A \prec B$. Существует $T \in \Sigma$ такой что $A = T(B)$ (см. § I.I). Используя интерполяционность E и F получим

$$\|B\|_{E/F} = \inf_{D \in F} \|B - D\|_E \geqslant \inf_{D \in F} \|T(B - D)\|_E =$$

$$= \inf_{D \in F} \|A - T(D)\|_E \geqslant \inf_{C \in F} \|A - C\|_E = \|A\|_{E/F} .$$

2. Пример интерполяционного некоммутативного симметричного пространства без свойства (C)

Определим на линейном пространстве $E_1 = M_\psi(\mathfrak{A})$ новую норму $\|\cdot\|_{E_1}$ полагая

$$\|A\|_{E_1} = \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} + \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})/M^0_\psi(\mathfrak{A})}, \quad A \in E_1.$$

Предложение I.4.3. $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ является банаховым симметричным пространством на $\mathfrak{A}$, норма которого не удовлетворяет свойству (C).

Доказательство. Ясно, что $\|\cdot\|_{E_1}$ – норма на E_1 и поскольку $\|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} \le \|\cdot\|_{E_1} \le 2\|\cdot\|_{M_\psi(\mathfrak{A})}$, то пространство $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ – банахово. В силу предложения I.4.2 норма $\|\cdot\|_{E_1}$ симметрична на E_1. Покажем, что $\|\cdot\|_{E_1}$ не удовлетворяет свойству (C). Пусть $A \in M_\psi(\mathfrak{A})$, $A \geq 0$ и $A \notin M^0_\psi(\mathfrak{A})$ (напомним, что $M^0_\psi(\mathfrak{A})(en)$ – эквивалентно $M^0_\psi(0,1)$). Выберем такую последовательность положительных операторов $A_n \in \mathfrak{A}$, что $A_n \uparrow A$. Имеем

$$\sup\|A_n\|_{E_1} = \sup_n \|A_n\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} = \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} < \|A\|_{E_1}.$$

Следовательно, $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ не обладает свойством (C). Предложение доказано.

Осталось заметить, что так как $M_\psi(\mathfrak{A})$ и $M^0_\psi(\mathfrak{A})$ – интерполяционные пространства, то $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ также интерполяционное пространство на $\mathfrak{A}$ (см. предложение I.4.2).

3. Пример неинтерполяционного симметричного пространства без свойства (С)

Пусть $G(\mathfrak{A})$ - неинтерполяционное некоммутативное симметричное пространство из примера I. Рассмотрим на линейном пространстве $E_2 = G(\mathfrak{A})$ другую норму:

$$\|A\|_{E_2} = \|A\|_{G(\mathfrak{A})} + \|A\|_{G(\mathfrak{A})/M^0_\psi(\mathfrak{A})}, \quad A \in E_2 .$$

П р е д л о ж е н и е I.4.4. $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ - является неинтерполяционным банаховым симметричным пространством на $\mathfrak{A}$ норма которого не удовлетворяет условию (С).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в предыдущем предложении показывается, что $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ - банахово симметричное пространство, норма которого не удовлетворяет свойству (С). Известно, что $G(0,1)$ неинтерполяционно по составу, т.е. существуют такие $f \in L_1(0,1)$, $g \in G(0,1)$, что $f \prec g$, но $f \notin G(0,1)$ (см. напр. [II]). Поэтому $G(\mathfrak{A})$ также неинтерполяционно по составу и, следовательно, пространство $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ - неинтерполяционно.

З а м е ч а н и е. Поскольку для $A, B \in E_2$, $A \prec B$ следует $\|A\|_{E_2} \le \|B\|_{E_2}$, то функциональное симметричное пространство $(E_2(0,1), \|\cdot\|_{E_2(0,1)})$ на $[0,1]$, (ℓn) - порождающее $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, удовлетворяет требованиям теоремы I.2.5. Поэтому класс симметричных пространств на $[0,1]$, удовлетворяющих условиям теоремы I.2.5, интерполяционное пространство на $\mathfrak{A}$ (см. предложение I.4.2).

3. Пример неинтерполяционного симметричного пространства без свойства (C)

Пусть $G(\mathfrak{A})$ – неинтерполяционное некоммутативное симметричное пространство из примера I. Рассмотрим на линейном пространстве $E_2 = G(\mathfrak{A})$ другую норму:

$$\|A\|_{E_2} = \|A\|_{G(\mathfrak{A})} + \|A\|_{G(\mathfrak{A})/M^\circ_\psi(\mathfrak{A})}, \; A \in E_2 .$$

П р е д л о ж е н и е I.4.4. $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ – является неинтерполяционным банаховым симметричным пространством на $\mathfrak{A}$ норма которого не удовлетворяет условию (C).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в предыдущем предложении показывается, что $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ – банахово симметричное пространство, норма которого не удовлетворяет свойству (C). Известно, что $G(0,1)$ неинтерполяционно по составу, т.е. существуют такие $f \in L_1(0,1)$, $g \in G(0,1)$, что $f \prec g$, но $f \notin G(0,1)$ (см. напр. [II]). Поэтому $G(\mathfrak{A})$ также неинтерполяционно по составу и, следовательно, пространство $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ – неинтерполяционно.

З а м е ч а н и е. Поскольку для $A, B \in E_2$, $A \prec B$ следует $\|A\|_{E_2} \le \|B\|_{E_2}$, то функциональное симметричное пространство $(E_2(0,1), \|\cdot\|_{E_2(0,1)})$ на $[0,1]$, (ℓn) – порождающее $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, удовлетворяет требованиям теоремы I.2.5. Поэтому класс симметричных пространств на $[0,1]$, удовлетворяющих условиям теоремы I.2.5, заведомо шире класса интерполяционных пространств и класса симметричных пространств со свойством (C).

4. Пример некоммутативного симметричного пространства, (ℓи) – порожденного функциональным симметричным пространством на $[0,1]$, не удовлетворяющего условиям теоремы I.2.5.

Рассмотрим линейное пространство $E_3 = M_\psi(\mathfrak{A})$ и положим для $A \in E_3$:

$$\|A\|_{E_3} = \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} + \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})/G(\mathfrak{A})} .$$

Так же, как и в предыдущих примерах устанавливается, что $(E_3, \|\cdot\|_{E_3})$ есть банахово симметричное пространство на $\mathfrak{A}$. Покажем, что $E_3(0,1)$ не удовлетворяет условиям теоремы I.2.5. В силу [II] существуют такие функции

$f \in M_\psi(0,1)$, $\|f\|_{M(0,1)} = 1$, $f \notin G(0,1)$ и $g \in G(0,1)$ $\|g\|_{M_\psi(0,1)} = 1$, что $f \prec g$. Выберем $A, B \in M_\psi(\mathfrak{A})$, так, что $\tilde{A} = \tilde{f}$, $\tilde{B} = \tilde{g}$. Имеем: $A \prec B$, но

$$\|A\|_{E_3} = \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} + \|A\|_{M_\psi(\mathfrak{A})/G(\mathfrak{A})} > 1 ,$$

$$\|B\|_{E_3} = \|B\|_{M_\psi(\mathfrak{A})} + \|B\|_{M_\psi(\mathfrak{A})/G(\mathfrak{A})} = 1 .$$

Следовательно, $\|f\|_{E_3(0,1)} > \|g\|_{E_3(0,1)}$, т.е. пространство $E_3(0,1)$ не удовлетворяет условиям теоремы I.2.5.

В заключение параграфа приведем пример банахова симметричного пространства функций $F(0,1)$, удовлетворяющего требованиям теоремы I.2.5, но не обладающего эквивалентной порядково полунепрерывной нормой. Отметим, что все пространства, построенные в примерах I – 4, обладают эквивалентной порядково полунепрерывной нормой, иначе говоря, нормы этих пространств обладают свойством $(\omega\ell)$. Заметим, также, что свойство $(\omega\ell)$ – $(\ell\kappa)$ – инвариантно, и, если, норма симметричного пространства не обладает свойством $(\omega\ell)$, то в этом пространстве нельзя определить эквивалентную симметричную норму, обладающую свойством (А) или (В). Конструкция пространства $F(0,1)$ предложена автору Ю.А.Седаевым. В построении существенно используются результаты из [4].

Пусть $\psi(t)$ – непрерывная, вогнутая, неубывающая на $[0,1]$ функция, такая, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\psi(t)}=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1$, и кроме того $\varphi=\frac{d\psi}{dt}$ совпадает со своей перестановкой. Положим N_φ – наименьший симметричный идеал, содержащий φ, M_φ – замыкание N_φ в $M_\psi(0,1)$. В доказательстве теоремы 4.I из [4] строится последовательность чисел $\{t_k\}$ убывающая к нулю, такая, что функция

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(t_k-t_{k+1})}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\varphi(s)ds\,\chi_{[t_{k+1},t_k]}$$

не принадлежит M_φ (хотя $f\prec\varphi$). Более того, из доказательства этой теоремы следует, что $\|f-y\|_{M_\psi}\geqslant\frac{1}{4}$ для любой функции $y \in M_\varphi$, причем последнее свойство функции f не изменится, если вместо $\{t_k\}$ взять любую ее подпоследовательность. Положим

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t_{2k+1} - t_{2k+3}} \int_{t_{2k+3}}^{t_{2k+1}} \varphi(s)\,ds\, \chi_{[t_{2k+3}, t_{2k+1}]},$$

$$f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_{2k} - t_{2k+2}} \int_{2k+2}^{t_{2k}} \varphi(s)\,ds\, \chi_{[t_{2k+2}, t_{2k}]}.$$

Благодаря свойствам функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ можно построить последовательность $\{t_k\}$ так, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:

$$\frac{\psi(t_{k+1})}{\psi(t_k)} \longrightarrow 0, \quad \frac{\frac{1}{t_k}\int_0^{t}\varphi(s)\,ds}{\frac{1}{t_{k+1}}\int_0^{t_{k+1}}\varphi(s)\,ds} \longrightarrow 0 \text{ при } k \to \infty.$$

В этом случае, для функций f_1 и f_2 выполняются следующие свойства:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{t_{2k+1}} f_2(s)\,ds}{\psi(t_{2k+1})} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{t_{2k}} f_1(s)\,ds}{\psi(t_{2k})} = 0. \tag{I}$$

Выделим теперь из последовательности $\{t_k\}$ счетное множество непересекающихся подпоследовательностей

$\{\mathcal{J}_k^m\}_{k=1}^{\infty}$, $m = 1, 2, \ldots$, позаботившись о том, чтобы пары соседних элементов из $\{t_k\}$ не встречались в одной и той же последовательности $\{\mathcal{J}_k^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функции

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^m - \xi_{k+1}^m} \int_{\xi_{k+1}^m}^{\xi_k^m} \varphi(s)\,ds\, \chi_{[\xi_{k+1}^m,\, \xi_k^m]},\ \varphi_m = \tilde{\varphi}_m$$ и

симметричные полунормы

$$\rho_m(x) = m \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\int_0^{\xi_k^m} \tilde{x}(\xi)\,d\xi}{\psi(\xi_k^m)} .$$

Из свойств последовательностей $\{\xi_k^m\}$ и (I) следует, что при $n \neq m$, $\rho_n(\varphi_m) = 0$ и $\rho_m(\varphi_m) = m$.

При этом в $M_\psi(0,1)$ все функции φ_m имеют норму равную 1 . Зафиксируем m и рассмотрим

$$F_m(0,1) = \{x \in M_\psi(0,1) : \|x\|_{F_m(0,1)} = \max(\rho_m(x), \|x\|_{M_\psi(0,1)})\}.$$

Очевидно, что $F_m(0,1)$ - это симметричное пространство, с нормой, эквивалентной $\|\cdot\|_{M_\psi(0,1)}$, совпадающее с $M_\psi(0,1)$ по составу элементов, и, следовательно, банаховое.

Положим теперь $F(0,1) = \{ x \in M_\psi(0,1) :$

$$\|x\|_{F(0,1)} = \max(\sup_m \rho_m(x), \|x\|_{M_\psi(0,1)}) < \infty \}.$$

Тогда $(F(0,1),\ \|\cdot\|_{F(0,1)})$ - симметричное пространство, являющееся пересечением банаховых пространств $F_m(0,1)$, $m = 1, 2, \ldots$ и, следовательно [II] тоже банахово.

Покажем, что пространство $F(0,1)$ не обладает свойством (ωC) . Действительно, если бы, существовала порядково полунепрерывная норма $\|\cdot\|^0$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{F(0,1)}$, то пространство $(F(0,1), \|\cdot\|_{F(0,1)})$ было бы изоморфно пространству $(F(0,1), \|\cdot\|_{F''(0,1)})$ (см. [7]). Но, поскольку нормы $\|\cdot\|_{F(0,1)}$ и $\|\cdot\|_{M_\psi(0,1)}$ совпадают на $L_\infty(0,1)$, то $(F''(0,1), \|\cdot\|_{F''(0,1)})$ совпадает с $(M_\psi(0,1), \|\cdot\|_{M_\psi(0,1)})$. В то же время ясно, что нормы $\|\cdot\|_{F(0,1)}$ и $\|\cdot\|_{M_\psi(0,1)}$ - не эквивалентны. В самом деле, $\|\varphi_m\|_{F(0,1)} = m$, а $\|\varphi_m\|_{M_\psi(0,1)} = 1$ для любого $m = 1, 2, \ldots$. Поэтому, пространство $F(0,1)$ не обладает свойством (WC), значит, им не обладает пространство $F(\mathfrak{A})$.

§ I.5. Приложение к теории интерполяции

Цель параграфа - доказательство теоремы I.5.6, описывающей с помощью (en) - метода результат применения первого метода комплексной интерполяции к паре некоммутативных симметричных пространств. В случае алгебры $\mathfrak{A} = B(H)$ аналогичные результаты были получены в [43] .

Всюду в этом параграфе $\mathfrak{A}$ - непрерывная конечная алгебра фон Неймана, $(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$ - пара банаховых интерполяционных пространств на $\mathfrak{A}$ (напомним, что $E_1(\mathfrak{A})$ непрерывно вложено в $E_0(\mathfrak{A})$). Рассмотрим полосу Π - множество точек z на комплексной плоскости, таких, что $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ и множество функций $\mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$, определенных в Π со значениями в $E_0(\mathfrak{A})$ таких, что для $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$ выполнено:

I) $f(z)$ – непрерывна и ограничена по норме $E_0(\mathfrak{A})$ в полосе Π.

2) $f(z)$ – аналитична относительно нормы пространства $E_0(\mathfrak{A})$ внутри Π.

3) $f(i\tau) \in E_0(\mathfrak{A})$, $f(1+i\tau) \in E_1(\mathfrak{A})$ и непрерывны и ограничены по соответствующим нормам.

Полагаем для $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}),\ E_1(\mathfrak{A}))$:

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{A})} = \max\left\{ \sup_\tau \|f(i\tau)\|_{E_0(\mathfrak{A})},\ \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{E_1(\mathfrak{A})} \right\}.$$

Известно [II], что множество всех операторов $A \in E_0(\mathfrak{A})$ таких, что существует $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$, $f(\alpha) = A$ при фиксированном α является банаховым пространством относительно нормы:

$$\|A\|^\alpha_{\mathfrak{A}} = \inf_{f(\alpha)=A} \|f\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{A})},$$

которое мы будем обозначать $[E_0(\mathfrak{A}),\ E_1(\mathfrak{A})]_\alpha$. Отметим, что $[E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]_\alpha$ интерполяционное пространство на $\mathfrak{A}$ и, следовательно, оно симметрично. Пусть $\mathcal{U}$ – максимальная коммутативная $*$ – подалгебра в $\mathfrak{A}$. Следующая теорема показывает, что пространство $[E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$ $(e n)$ – порождается пространством $[E_0(0,1),\ E_1(0,1)]_\alpha$.

Т е о р е м а I.5.I. Предположим, что норма одного из пространств $E_0(\mathcal{U})$, $E_1(\mathcal{U})$ – порядково непрерывна. Тогда пространства $[E_0(\mathcal{U}),\ E_1(\mathcal{U})]_\alpha$ и $[E_0(0,1), E_1(0,1)]$ – $(e n)$ – эквивалентны, при $0 < \alpha < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отождествим $E_0(\mathcal{U})$ и $E_1(\mathcal{U})$ с симметричными пространствами $E_0(\Omega)$ и $E_1(\Omega)$ на непрерывном вероятностном пространстве с мерой (Ω,μ). Известно [II], что при наших предположениях о пространствах $E_0(\Omega)$ и $E_1(\Omega)$, пространство $[E_0(\Omega), E_1(\Omega)]_\alpha$ – изометрически совпадает с пространством

$$E_\alpha(\Omega) = E_0(\Omega)^{1-\alpha} E_1(\Omega)^\alpha \qquad \text{, т.е.}$$

$$E_\alpha(\Omega)=\{x\in L_1(\Omega): |x(\omega)|\le \lambda |x_0(\omega)|^{1-\alpha}\cdot|x_1(\omega)|^\alpha,$$

$$\omega\in\Omega,\ \lambda>0,\ x_0\in E_0(\Omega),\ x_1\in E_1(\Omega),$$

$$\|x_0\|_{E_0(\Omega)}\le 1,\quad \|x_1\|_{E_1(\Omega)}\le 1\}. \qquad (I)$$

Норма элемента x в $E_\alpha(\Omega)$ определяется как инфимум всех λ, для которых возможно представление (I).

Положим $E_\alpha(0,1) = E_0(0,1)^{1-\alpha} E_1(0,1)^\alpha$.

В силу предположений теоремы пространства $E_\alpha(0,1)$ и $[E_0(0,1), E_1(0,1)]_\alpha$ также изометрически совпадают, поэтому для доказательства теоремы нам необходимо показать (ℓn) – эквивалентность пространств $E_\alpha(0,1)$ и $E_\alpha(\Omega)$; что, кстати говоря, будет оправдывать их одинаковое обозначение. Дальнейшее доказательство теоремы дается в леммах I.5.2 – I.5.5.

Л е м м а I.5.2. Если $x, y \in L_1(\Omega)$ таковы, что $\tilde{x}\cdot\tilde{y}\in L_1(0,1)$, то $(xy)^\sim \prec \tilde{x}\cdot\tilde{y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результатов [65] имеем:

$$\int_0^t (xy)^\sim(s)\,ds = \sup_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=t}} \int_\Omega (xy)\chi_E\,d\omega \le \sup_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=t}} \|xy\chi_E\|_1 \le$$

$$\le \sup_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=t}} \int_0^1 \tilde{x}\,(y\chi_E)^\sim dt\,.$$

Однако, при $\alpha \le t$:

$$\int_0^\alpha (y\chi_E)^\sim dt = \sup_{\substack{G\subset\Omega\\ \mu(G)=\alpha}} \int_\Omega y\chi_E\chi_G\,d\omega \le \sup_{\substack{G\subset\Omega\\ \mu(G)=\alpha}} \|y\chi_{E\cap G}\|_1 \le$$

$$\le \sup_{\substack{G\subset\Omega\\ \mu(G)=\alpha}} \int_0^1 \tilde{y}\,\tilde{\chi}_{E\cap G}\,dt \le \int_0^\alpha \tilde{y}\,\tilde{\chi}_E\,dt\,.$$

Последнее означает, что $(y\chi_E)^\sim \prec \tilde{y}\cdot\tilde{\chi}_E$. Тогда

(см. [65]) $\displaystyle\int_0^t (xy)^\sim dt \le \sup_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=t}} \int_0^1 (x)^\sim (y\chi_E)^\sim \le$

$$\le \sup_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=t}} \int_0^1 \tilde{x}\cdot\tilde{y}\cdot\tilde{\chi}_E = \int_0^t \tilde{x}\cdot\tilde{y}\,.$$ Лемма доказана.

Л е м м а I.5.3. Если $x_0 \in E_0(\Omega)$, $x_1 \in E_1(\Omega)$, то $|x_0|^{1-\alpha}\cdot|x_1|^\alpha \in L_1(\Omega)$.

Доказательство леммы сразу следует из неравенства, установленного в [49] :

$$\int_E x_0^{1-\alpha}\cdot x_1^\alpha\,d\omega \le \Big[\int_E x_0\,d\omega\Big]^{1-\alpha}\Big[\int_E x_1\,d\omega\Big]^\alpha,\quad E\in\Omega\,.$$

Л е м м а I.5.4. Пусть $x \in E_\alpha(\Omega)$. Тогда $\tilde{x} \in E_\alpha(0,1)$ и $\|\tilde{x}\|_{E_\alpha(0,1)} \le \|x\|_{E_\alpha(\Omega)}$ (пространства E_0 и E_1 – такие же, как в теореме I.5.I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in E_\alpha(\Omega)$, $|x(\omega)| \le \lambda \cdot |x_0(\omega)|^{1-\alpha} \cdot |x_1(\omega)|^\alpha$. Тогда $\tilde{x}_0 \in E_0(0,1)$, $\tilde{x}_1 \in E_1(0,1)$ и в силу лемм I.5.2 и I.5.3:

$$\tilde{x} \le \lambda(|x_0|^{1-\alpha} \cdot |x_1|^\alpha)^\sim \prec \lambda(|x_0|^{1-\alpha})^\sim (|x_1|^\alpha)^\sim = \\ = \lambda \tilde{x}_0^{1-\alpha} \cdot \tilde{x}_1^\alpha .$$

Из соотношения $\tilde{x} \prec \lambda \tilde{x}_0^{1-\alpha} \cdot \tilde{x}_1^\alpha$ и того факта, что пространство $E_\alpha(0,1)$ – интерполяционное, следует $\tilde{x} \in E_\alpha(0,1)$ и $\|\tilde{x}\|_{E_\alpha(0,1)} \le \|\lambda \tilde{x}_0^{1-\alpha} \cdot \tilde{x}_1^\alpha\|_{E_\alpha(0,1)}$.

Поскольку

$$\|\tilde{x}_0\|_{E_0(0,1)} = \|x_0\|_{E_0(\Omega)} \le 1 \quad \text{и} \quad \|\tilde{x}_1\|_{E_1(0,1)} = \|x_1\|_{E_1(\Omega)} \le 1,$$

то из определения нормы в пространстве $E_\alpha(0,1)$ следует:

$\|\lambda \tilde{x}_0^{1-\alpha} \cdot \tilde{x}_1^\alpha\|_{E_\alpha(0,1)} \le \lambda$. Отсюда и получаем требуемое неравенство: $\|\tilde{x}\|_{E_\alpha(0,1)} \le \|x\|_{E_\alpha(\Omega)}$.

Л е м м а I.5.5. Если $f \in E_\alpha(0,1)$, то существует функция $x \in E_\alpha(\Omega)$, такая, что $\tilde{x} = \tilde{f}$ и $\|x\|_{E_\alpha(\Omega)} \le \|f\|_{E_\alpha(0,1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \le \lambda f_0^{1-\alpha} f_1^\alpha$,

$f_0 \in E_0(0,1)$, $f_1 \in E_1(0,1)$. Рассмотрим $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ - сохраняющее меру отображение, и определим оператор

$T : L_1(0,1) \longrightarrow L_1(\Omega,\mu)$ по формуле

$$(Tg)(\omega) = g(\varphi(\omega)), \omega \in \Omega, \quad g \in L_1(0,1).$$

Покажем, что $x = Tf$ - удовлетворяет условиям леммы. Действительно, x и f - равноизмеримые функции. Далее, поскольку $f \le \lambda f_0^{1-\alpha} f_1^{\alpha}$, то $x(\omega) = f(\varphi(\omega)) \le$

$$\le \lambda f_0(\varphi(\omega))^{1-\alpha} f_1(\varphi(\omega))^{\alpha} = \lambda (Tf_0)^{1-\alpha} \cdot (Tf_1)^{\alpha}$$

и так как Tf_0 и Tf_1, равноизмеримые с функциями f_0 и f_1 соответственно, принадлежат пространствам $E_0(\Omega)$ и $E_1(\Omega)$, то $x \in E_\alpha(\Omega)$. Из определения нормы ясно, что $\|x\|_{E_\alpha(\Omega)} \le \|f\|_{E_\alpha(0,1)}$. Лемма доказана.

Из двух последних лемм и следует утверждение теоремы I.5.I о (ℓn) - эквивалентности пространств $E_\alpha(0,1)$ и $E_\alpha(\Omega)$.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа.

Т е о р е м а I.5.6. Если норма хотя - бы одного из интерполяционных пространств $E_0(\mathfrak{A})$ и $E_1(\mathfrak{A})$ порядково непрерывна, то пространства $[E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]_\alpha$ и $[E_0(0,1), E_1(0,1)]_\alpha$ - (ℓn) - эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы I.5.I нам достаточно доказать (ℓn) - инвариантность пространств

$$[E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]_\alpha \quad \text{и} \quad [E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha ,$$

где $\mathcal{U}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$. Пусть сначала $A \in [E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$ и $f(\alpha) = A$, где $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U}))$. Очевидно, что $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$. Значит оператор $A \in [E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]$ и в силу определения нормы в этом пространстве

$$\|A\|^\alpha_{\mathfrak{A}} \le \|A\|^\alpha_{\mathcal{U}} . \tag{2}$$

Пусть теперь $A \in [E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]$, $A \geqslant 0$, и $A = f(\alpha)$, где $f \in \mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ максимальную коммутативную $*$ - подалгебру в $\mathfrak{A}$, содержащую спектральное семейство оператора A и покажем, что $A \in [E_0(\mathcal{B}), E_1(\mathcal{B})]_\alpha$ и

$$\|A\|^\alpha_{\mathcal{B}} \le \|A\|^\alpha_{\mathfrak{A}} .$$

Рассмотрим $T_{\mathcal{B}}$ - оператор УМО на $L_1(\mathcal{B})$, и определим функцию $T_{\mathcal{B}} f$ в полосе Π следующим образом:

$$(T_{\mathcal{B}} f)(z) = T_{\mathcal{B}}(f(z)) .$$

Поскольку пространство $E_0(\mathfrak{A})$ - интерполяционное, то ясно, что функция $T_{\mathcal{B}} f$ принимает значения в пространстве $E_0(\mathcal{B})$. Кроме того выполнено:

I) $T_{\mathcal{B}} f$ – непрерывна и ограничена по норме $E_0(\mathcal{B})$ в полосе Π.

2) $T_{\mathcal{B}} f$ – аналитична относительно нормы пространства $E_0(\mathcal{B})$ внутри Π.

Действительно, если $\left\| \frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right\|_{E_0(\mathfrak{A})} \longrightarrow 0$,

то $$\left\| \frac{T_{\mathcal{B}} f(z_0+\Delta z)-T_{\mathcal{B}} f(z_0)}{\Delta z} - T_{\mathcal{B}}(f'(z_0)) \right\|_{E_0(\mathcal{B})} \longrightarrow 0,$$

3) $T_{\mathcal{B}} f(i\tau) \in E_0(\mathcal{B})$, $T_{\mathcal{B}} f(1+i\tau) \in E_1(\mathcal{B})$ – непрерывны и ограничены в соответствующих нормах.

Поэтому $T_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{F}(E_0(\mathcal{B}), E_1(\mathcal{B}))$. Очевидно, что

$$T_{\mathcal{B}} f(\alpha) = A \text{ , т.е. } A \in [E_0(\mathcal{B}), E_1(\mathcal{B})]_\alpha .$$

Наконец, $$\| T_{\mathcal{B}} f \|_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} = \max\left(\sup_\tau \| T_{\mathcal{B}} f(i\tau) \|_{E_0(\mathcal{B})}, \sup_\tau \| T_{\mathcal{B}} f(1+i\tau) \|_{E_1(\mathcal{B})}\right) \le \max\left(\sup_\tau \| f(i\tau) \|_{E_0(\mathfrak{A})}, \sup_\tau \| f(1+i\tau) \|_{E_1(\mathfrak{A})}\right) = \| f \|_{\mathcal{F}(\mathfrak{A})}$$ следовательно,

$$\| A \|^\alpha_{\mathcal{B}} \le \inf_{\substack{f(\alpha)=A \\ f\in\mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))}} \| T_{\mathcal{B}} f \|_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \le \inf_{\substack{f(\alpha)=A \\ f\in\mathcal{F}(E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A}))}} \| f \|_{\mathcal{F}(\mathfrak{A})} = \| A \|^\alpha_{\mathfrak{A}} .$$

Из первой части доказательства вытекает, что

$$\|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{A}} = \|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{B}} = \|\tilde{A}\|_{E_\alpha(0,1)} .$$

Поэтому найдется такой $\mathfrak{B} \in [E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$, что $\tilde{\mathfrak{B}} = \tilde{A}$ и $\|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{A}} = \|B\|^{\alpha}_{\mathcal{U}}$. Это означает, что пространства $[E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$ и $[E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]_\alpha$ – – $(e\mathcal{N})$ – эквивалентны.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает известный некоммутативный аналог интерполяционной теоремы для L_p – пространств (см. напр. [62]).

С л е д с т в и е I.5.7. $(L_{p_0}(\mathfrak{A}), L_{p_1}(\mathfrak{A}))_\alpha = L_p(\mathfrak{A})$, где $p_0 \geqslant 1$, $p_1 \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} .$$

§ I.6. Упаковки единичных сфер некоммутативных L_p – пространств

Этот параграф посвящен решению следующей задачи: для непрерывной конечной алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ и $p \in [1, \infty)$ определить число $\Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ такое, что при $r < \Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ существует бесконечное число непересекающихся шаров радиуса r, содержащихся в единичной

Из первой части доказательства вытекает, что

$$\|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{A}} = \|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{B}} = \|\tilde{A}\|_{E_\alpha(0,1)} .$$

Поэтому найдется такой $\mathfrak{B} \in [E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$, что $\tilde{\mathfrak{B}} = \tilde{A}$ и $\|A\|^{\alpha}_{\mathfrak{A}} = \|B\|^{\alpha}_{\mathcal{U}}$. Это означает, что пространства $[E_0(\mathcal{U}), E_1(\mathcal{U})]_\alpha$ и $[E_0(\mathfrak{A}), E_1(\mathfrak{A})]_\alpha$ - - $(e\mathcal{U})$ - эквивалентны.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает известный некоммутативный аналог интерполяционной теоремы для L_p - пространств (см. напр. [62]).

Следствие I.5.7. $(L_{p_0}(\mathfrak{A}), L_{p_1}(\mathfrak{A}))_\alpha = L_p(\mathfrak{A})$, где $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$, $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} .$$

§ I.6. Упаковки единичных сфер некоммутативных L_p - пространств

Этот параграф посвящен решению следующей задачи: для непрерывной конечной алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ и $p \in [1, \infty)$ определить число $\Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ такое, что при $r < \Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ существует бесконечное число непересекающихся шаров радиуса r, содержащихся в единичной сфере пространства $L_p(\mathfrak{A})$, а при $r > \Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ в единичную сферу можно упаковать лишь конечное число непересекающихся шаров радиуса r. Число $\Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$ будем называть коэффициентом упаковки. Коэффициент упаковки $\Lambda(\ell_p)$ вычислен в [48] и равен $[1+2^{1-1/p}]^{-1}$, $1 \le p < \infty$.

Результаты [80] показывают, что коэффициент упаковки $\Lambda(L_p(\Omega,\mu))$, где (Ω,μ) - непрерывное пространство с мерой, такой же, что у пространства ℓ_p при $1 \le p \le 2$, но при $p \geqslant 2$ $\Lambda(L_p(\Omega,\mu)) = [1+2^{1/p}]^{-1}$.

В работе [53] вычислен коэффициент упаковки $\Lambda(L_p(\mathfrak{A}))$, в случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ совпадает с $B(H)$ и $1 \le p \le 2$ (оказывается $\Lambda(L_p(\mathfrak{A})) = \Lambda(\ell_p) = \Lambda(L_p(\Omega,\mu))$) и приведены некоторые неравенства для случая $p \geqslant 2$.

Теорема I.6.3 показывает, что для непрерывных алгебр фон Неймана $\Lambda(L_p(\mathfrak{A})) = \Lambda(L_p(\Omega,\mu))$ для всех $p \geqslant 1$.

Доказательство так же, как в [53] и [80] базируется на некоторых L_p - неравенствах (см. ниже предложение I.6.I).

Как и в [2] обозначим $L_p(E) = L_p(U, d\mu, E)$ - линейное пространство сильно измеримых функций на пространстве с мерой (U,μ), принимающих значения в банаховом пространстве E, таких, что:

$$\int_U \|f(u)\|_E^p \, d\mu < \infty$$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left\{ \int_U \|f(u)\|_E^p \, d\mu \right\}^{1/p}.$$ Известно [2], что

для любых банаховых пространств E_0 и E_1 имеет место следующее равенство:

$$(L_{p_0}(E_0), L_{p_1}(E_1))_\alpha = L_p((E_0, E_1)_\alpha), \text{ где } \frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}.$$

Пусть теперь (U_i, μ_i) $(i=1,2)$ – некоторые пространства с мерой. Обозначим $L_p^i(E) = L_p(U_i, d\mu_i, E)$, $i=1,2$. Тогда в силу теоремы I.2 главы IУ § I [II] и следствия I.5.7 верно следующее

П р е д л о ж е н и е I.6.I. Пусть T – ограниченный линейный оператор из $L^1_{p_0}(L_{p_0}(\mathfrak{A}))$ в $L^2_{p_0}(L_{p_0}(\mathfrak{A}))$ и $L^1_{p_1}(L_{p_1}(\mathfrak{A}))$ в $L^2_{p_1}(L_{p_1}(\mathfrak{A}))$ с нормой M_0 и M_1 – соответственно. Тогда T переводит $L^1_p(L_p(\mathfrak{A}))$ в $L^2_p(L_p(\mathfrak{A}))$ с нормой $M \leq$ $\leq M_0^{1-\alpha} \cdot M_1^\alpha$, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}$, $1 \leq p_0 < \infty$, $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < \alpha < 1$.

Приведем теперь необходимые нам некоммутативные L_p -неравенства. Их доказательство аналогично соответствующим доказательствам из [53] и приводится здесь для полноты изложения.

П р е д л о ж е н и е I.6.2. Пусть $A_i, A_j \in L_p(\mathfrak{A})$ $p' = \frac{p}{p-1}$. Тогда $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i - A_j\|_p^p \leq 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2-p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \|A_i\|_p^p$,

если $1 \leq p \leq 2$, и

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i - A_j\|_p^{p'} \le 2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2-p'} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \|A_i\|_p^{p'} ,$$

если $2 \le p < \infty$.

Доказательство. Пусть пространство (U_i, μ_i) $(i=1,2)$ – это дискретное пространство, состоящее при $i=1$ из n точек, мера каждой из которых равна $\frac{1}{n}$, а при $i=2$ состоящее из n^2 – точек с мерами $\frac{1}{n^2}$. Определим линейное отображение T из пространства $L_1^1(L_1(\mathfrak{A}))$ в пространство $L_1^2(L_1(\mathfrak{A}))$

$$T(A_1 \dots A_n) = (A_i - A_j)_{i,j=1}^{n} .$$

Имеем тогда: $\|T(A_1 \dots A_n)\|_{L_1^2(L_1(\mathfrak{A}))} =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i - A_j\|_{L_1(\mathfrak{A})} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} (\|A_i\|_1 + \|A_j\|_1) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i\|_1 =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\|A_i\|_1 \le 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\|A_i\|_1 =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot \|(A_1 \dots A_n)\|_{L_1^1(L_1(\mathfrak{A}))} .$$

Если же $A_i \in L_2(\mathfrak{A})$, то

$$\|T(A_1, \dots, A_n)\|^2_{L_2^2(L_2(\mathfrak{A}))} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i - A_j\|^2 \le$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\|A_i\|_2^2 = 2\|(A_1,\dots,A_n)\|^2_{L_2^1(L_2(\mathfrak{A}))}.$$

Тогда для $1 \leq p \leq 2$ в силу предыдущего предложения, имеем $\frac{1}{p} = 1 + \frac{\alpha}{2}$, и

$$\|T(A_1\dots A_n)\|^p_{L_p^2(L_p(\mathfrak{A}))} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\|A_i - A_j\|_p^p \leq$$

$$\leq \left(2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{(1-\alpha)p}(\sqrt{2})^{\alpha\cdot p}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)\|A_i\|_p^p \leq$$

$$\leq 2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2-p}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\|A_i\|_p^p .$$

Для $p \geq 2$ утверждение предложения получается аналогичным образом.

Т е о р е м а I.6.3.

$$\Lambda(L_p(\mathfrak{A})) = \left[1 + 2^{1-1/p}\right]^{-1}, \quad 1 \leq p \leq 2;$$

$$\Lambda(L_p(\mathfrak{A})) = \left[1 + 2^{1/p}\right]^{-1}, \quad 2 \leq p < \infty .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что, поскольку, наша алгебра $\mathfrak{A}$ - непрерывная, то в $L_p(\mathfrak{A})$ можно изометрически вложить $L_p(\Omega,\mu)$, где (Ω,μ) - непрерывное вероятностное пространство. Поэтому $\Lambda(L_p(\mathfrak{A})) \geq \Lambda(L_p(\Omega,\mu))$. Обратное неравенство мы получим с помощью предложения I.6.2.

Рассмотрим случай $1 \le p \le 2$ (в случае $2 \le p < \infty$ доказательство аналогичное). Предположим, что n непересекающихся шаров радиуса r с центрами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержатся в единичном шаре $L_p(\mathfrak{A})$. Тогда в силу предложения I.6.2:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \|A_i - A_j\|_p^p \le 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2-p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \|A_i\|_p^p ,$$

откуда: $\frac{1}{n^2} \cdot n \cdot (n-1)(2r)^p \le 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2-p} \cdot (1-r)^p$,

так как расстояние между центрами больше чем $2r$ и $\|A_i\|_p \le 1-r$. Устремляя n к бесконечности, получим $r \le \left[1+2^{1-1/p}\right]^{-1}$. Теорема доказана.

Следствие I.6.4. При $1 \le p_1 < p_2 \le 2$, либо при $1 \le p_1 \le 2 < p_2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ пространство $L_{p_1}(\mathfrak{A})$ неизоморфно никакому подпространству в $L_{p_2}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Подмножество A банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ называется λ - отделенным (см. [61]), если для каждой пары $x, y \in A : \|x-y\|_X \ge \lambda$. Обозначим через $U(X)$ - единичный шар пространства X. Положим (см. [61]) $P(X) = \sup\{\lambda : U(X)$ содержит бесконечное λ - отделенное множество $\}$. Предположим теперь, что при $1 \le p_1 < p_2 \le 2$ в $L_{p_2}(\mathfrak{A})$ существует некоторое подпространство R изоморфное $L_{p_1}(\mathfrak{A})$. В этом случае в R найдется подпространство изоморфное ℓ_{p_1}, что влечет (см. [61]) неравенство: $P(R) \ge 2^{1/p_1}$.

Далее, легко видеть, что если в $U(X)$ существует бесконечное λ - отделенное множество, то возможна бесконечная упаковка единичной сферы пространства X непересекающимися шарами радиуса $\frac{\lambda}{2(1+\frac{\lambda}{2})}$. Поэтому $\Lambda(R) \geq$

$$\geq \frac{2^{\frac{1}{p_1}}}{2\left(1+\frac{2^{1/p_1}}{2}\right)} = \frac{1}{1+2^{1-1/p_1}} = \Lambda(L_{p_1}(\mathfrak{A})).$$

С другой стороны, очевидно, что $\Lambda(L_{p_2}(\mathfrak{A})) \geq \Lambda(R)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{1+2^{1-1/p_2}} = \Lambda(L_{p_2}(\mathfrak{A})) \geq \Lambda(L_{p_1}(\mathfrak{A})) = \frac{1}{1+2^{1-1/p_1}},$$

что противоречит неравенству $p_1 < p_2$. В случае

$1 \leq p_1 \leq 2 < p_2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ доказательство аналогичное.

Т е о р е м а I.6.5. Пространства $L_{p_1}(\mathfrak{A})$ и $L_{p_2}(\mathfrak{A})$ $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, изоморфны в том и только в том случае, когда $p_1 = p_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как пространства $L_1(\mathfrak{A})$ и $L_\infty(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ не рефлексивны, то они не изоморфны никакому $L_p(\mathfrak{A})$, $p \in (1, \infty)$. Из равенства $L_1(\mathfrak{A})^* = \mathfrak{A}$ и не рефлексивности $\mathfrak{A}$ следует также, что $\mathfrak{A}$ не изоморфна $L_1(\mathfrak{A})$. Неизоморфность $L_{p_1}(\mathfrak{A})$ и $L_{p_2}(\mathfrak{A})$ в случае, когда $1 < p_1 < p_2 \leq 2$, либо $1 \leq p_1 \leq 2 < p_2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ вытекает из следствия I.6.4. Остальные случаи сводятся к этим с использованием равенства

$$L_p(\mathfrak{A})^* = L_q(\mathfrak{A}) \ , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ , \quad p \in (1, \infty).$$

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Всюду в этой главе $\mathfrak{A}$ - конечная непрерывная алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный нормированный след на $\mathfrak{A}$, $L_1(\mathfrak{A})$ - банахово пространство интегрируемых операторов, присоединенных к $\mathfrak{A}$.

§ 2.I. Орбиты интегрируемых операторов

Орбитой оператора $A \in L_1(\mathfrak{A})$ называется множество $\Omega(A) = \{T(A) : T \in \Sigma\}$, где Σ - полугруппа всех допустимых операторов на $L_1(\mathfrak{A})$. Очевидно, что $\Omega(A)$ выпуклое подмножество в $L_1(\mathfrak{A})$ для любого $A \in L_1(\mathfrak{A})$. Заметим, также что $\Omega(A) = \{B \in L_1(\mathfrak{A}) : B \prec A\}$ (см. предложение I.I.4), поэтому множество $I(A) = \{B \in L_1(\mathfrak{A}) : B \sim A\}$ содержится в $\Omega(A)$.

В случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ - коммутативна, понятие орбиты оператора $A \in L_1(\mathfrak{A})$ совпадает с известным понятием орбиты интегрируемой функции (см. [7I]). Различные геометрические свойства орбит функций рассматривались в [7I], [72], [3] (см. также [II]). В этом параграфе мы даем описание крайних точек орбит интегрируемых операторов и некоторые аппроксимационные теоремы.

Рассмотрим на $L_1(\mathfrak{A})$ слабую топологию задаваемую семейством полунорм: $p_H(A) = |\mu(AH)|$, $H \in \mathfrak{A}$.

Теорема 2.1.1. (ср. [11], [71]) Орбита оператора $A \in L_1(\mathfrak{A})$ компактна в слабой топологии.

Доказательство. Сопоставим каждому допустимому оператору T на $L_1(\mathfrak{A})$ функцию $\rho_T(A, B) = \mu(B \cdot T(A))$ $A, B \in \mathfrak{A}$. Имеем:

$$\left|\rho_T(A, B)\right| \le \left\|T(A)\right\|_\infty \cdot \|B\|_1 \le \|A\|_\infty \cdot \|B\|_1 .$$

Ясно, что отображение $T \longrightarrow \rho_T$ взаимно однозначно. Введем на Σ топологию, в которой базис окрестностей точки T_0 определяется всевозможными конечными наборами операторов $\{A_i\}, \{B_i\}$ из алгебры $\mathfrak{A}$. Окрестность T_0 состоит из всех $T \in \Sigma$, для которых $|\rho_T(A_i, B_i) - $

$$-\rho_{T_0}(A_i, B_i)| < 1 \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

В такой топологии отображение $T \longrightarrow \rho_T$ есть непрерывное вложение Σ в компакт Q, являющийся тихоновским произведением отрезков $I_{AB} = \{ \alpha : |\alpha| \le \|A\|_\infty \cdot \|B\|_1 \}$. Покажем, что образ Σ при таком отображении замкнут, и следовательно, компактен. Пусть $\tilde\rho(A, B)$ – предельная точка образа Σ. Легко видеть, что $|\tilde\rho(A, B)| \le \|A\|_\infty \cdot \|B\|_1$ и $\tilde\rho(A, B)$ – это билинейный функционал от A и B. Поэтому при фиксированном $A \in \mathfrak{A}$ функционал $\tilde\rho(A, B)$ продолжается до ограниченного функционала в $L_1(\mathfrak{A})$ и, следовательно, так как $L_1(\mathfrak{A})' = \mathfrak{A}$ $\tilde\rho(A, B) = \mu(BG)$, где $G \in \mathfrak{A}$. Положим $\tilde T(A) = G$. Из линейности $\tilde\rho(A, B)$ по A следует линейность оператора $\tilde T$. Поскольку $\tilde\rho(A, B) = \mu(B \cdot \tilde T(A)) \le \|A\|_\infty \cdot \|B\|_1$, то $\|\tilde{T}\|_{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}} \leq 1$. Так как $|\rho_T(A,B)| \leq$ $\leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_\infty$, то $|\tilde{\rho}(A,B)| \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_\infty$, откуда $\|\tilde{T}(A)\|_1 \leq \|A\|_1$ для всех $A \in \mathfrak{A}$. Значит, оператор $\tilde{T}$ линейно продолжается на все $L_1(\mathfrak{A})$, причем $\|\tilde{T}\|_{L_1(\mathfrak{A}) \to L_1(\mathfrak{A})} \leq 1$. Поэтому $\tilde{T} \in \Sigma$ и

$$\tilde{\rho}(A,B) = \rho_{\tilde{T}}(A,B),$$ т.е. образ Σ замкнут в $\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $A \in L_1(\mathfrak{A})$. Для доказательства слабой компактности множества $\Omega(A)$ достаточно показать непрерывность отображения $T \longrightarrow T(A)$ компакта Σ в $L_1(\mathfrak{A})$ в слабой топологии. Предположим, что $T_\alpha \longrightarrow T_0$ в Σ. Тогда

$$\rho_{T_\alpha}(A,B) = \mu(BT_\alpha(A)) \longrightarrow \mu(B \cdot T_0(A)) = \rho_{T_0}(A,B)$$

при всех $A, B \in \mathfrak{A}$. Выберем теперь $A_n \in \mathfrak{A}$, так чтобы $A_n \longrightarrow A$ по норме $\|\cdot\|_1$. Тогда:

$$|\mu(BT_\alpha(A)) - \mu(BT_0(A))| \leq |\mu(B(T_\alpha(A - A_n)))| +$$

$$+ |\mu(BT_0(A - A_n))| + |\mu(B(T_\alpha(A_n) - T_0(A_n)))| \leq$$

$$\leq 2\|A - A_n\|_1 \cdot \|B\|_\infty + |\mu(B(T_\alpha(A_n) - T_0(A_n)))|.$$

Выбирая n достаточно большим, а затем выбирая α, получаем $\mu(BT_\alpha(A)) \longrightarrow \mu(BT_0(A))$ для всех $B \in \mathfrak{A}$. Теорема доказана.

Следующая теорема есть аналог аппроксимационной теоремы Ж.В.Риффа [71].

Т е о р е м а 2.I.2. Выпуклая оболочка множества $I(A)$ плотна в $\Omega(A)$ по норме пространства $L_1(\mathfrak{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\Omega(A)$ – слабо компактно, то $\Omega(A)$ – замкнуто по $\|\cdot\|_1$. Поэтому замыкание выпуклой оболочки $I(A)$ содержится в $\Omega(A)$. Пусть теперь $B \in \Omega(A)$, $\mathcal{B}$ – максимальная коммутативная $*$ – подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая спектральное семейство оператора $|B|$, $B = U \cdot |B|$ – полярное разложение оператора B. Отождествим $L_1(\mathcal{B})$ с $L_1(\Omega, \mu)$ где (Ω, μ) – непрерывное вероятностное пространство. Известно [50], что существует сохраняющее меру отображение $\pi : (\Omega, \mu) \longrightarrow (0, 1)$, такое, что линейный непрерывный оператор $T : L_1(0,1) \longrightarrow L_1(\Omega, \mu)$, определяемый формулой $(Tf)(\omega) = f(\pi(\omega))$, $\omega \in \Omega$ переводит функцию $\widetilde{B}$ в $|B|$ и $(Tf)^{\sim} = f^{\sim}$. Так как выпуклая оболочка множества $I(\widetilde{A})$ плотна по норме пространства $L_1(0,1)$ в $\Omega(\widetilde{A})$, то существует последовательность $F_n(t)$ – выпуклых комбинаций функций из $I(\widetilde{A})$ аппроксимирующих функцию $\widetilde{B}$. Легко видеть, что тогда последовательность операторов $U \cdot T(F_n)$ – есть последовательность выпуклых комбинаций операторов из $I(A)$ и выполнено:

$$\|U \cdot T(F_n) - B\|_1 = \|F_n(t) - \widetilde{B}(t)\|_{L_1(0,1)} \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Теорема доказана.

Заметим, что в силу предложения I.3.I множество $I(A)$ замкнуто по норме $\|\cdot\|_1$.

Перейдем теперь к доказательству основного результата этого параграфа – теоремы 2.I.5, описывающей крайние точки орбиты интегрируемого оператора. Предварительно докажем лемму 2.I.4 устанавливающую факт, который хорошо известен (см. [72], [3]) для действительнозначных функций на отрезке $(0,1)$. Множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{F}$ будем обозначать $\operatorname{extr} \mathcal{F}$.

Л е м м а 2.I.3. Пусть (Ω, Σ, μ) - непрерывное вероятностное пространство. Тогда для любой функции $x \in L_1(\Omega)$ множество $\operatorname{extr} \Omega(x)$ совпадает с $I(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $L_1^h(\Omega)$ линейное пространство вещественных функций из $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и положим $\Omega^h(x) = \Omega(x) \cap L_1^h(\Omega)$. Докажем сначала, что y из $L_1^h(\Omega)$ принадлежит $\operatorname{extr} \Omega^h(x)$ в том и только в том случае, когда $y \sim x$.

Пусть $y \in \operatorname{extr} \Omega^h(x)$ и предположим, что $\tilde{y} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, где $f_i \in \Omega^h(\tilde{x})$, $i = 1, 2$. Выбирая такое сохраняющее меру отображение $\pi : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (0,1)$, что $|y(\omega)| = \tilde{y}(\pi(\omega))$, $\omega \in \Omega$, получим: $|y| = \tilde{y} \circ \pi = \frac{1}{2}(f_1 \circ \pi + f_2 \circ \pi)$. Поскольку $|y|$ также является крайней точкой для $\Omega^h(x)$ (см. ниже начало доказательства теоремы 2.I.4), то $f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi$, и, значит, $f_1 = f_2$, т.е. $\tilde{y} \in \operatorname{extr} \Omega^h(\tilde{x})$, что в силу [72] влечет $\tilde{y} = \tilde{x}$. Обратно, предположим, что $\tilde{x} = \tilde{y}$ и $y(\omega) = \frac{1}{2}(f_1(\omega) + f_2(\omega))$, $f_i(\omega) \in \Omega^h(x)$,

$\omega \in \Omega$, $i = 1,2$. Аналогично [71] получаем:

$\tilde{y}(t) = \tilde{f}_1(t) = \tilde{f}_2(t)$ и повторяя рассуждения [3], заключаем: $y = f_1 = f_2$.

Покажем теперь, что $|y| \in \operatorname{extr} \Omega^h(x)$ в том и только в том случае, когда $|y| \in \operatorname{extr} \Omega(x)$.

Действительно, пусть $|y| \in \operatorname{extr} \Omega^h(x)$ и $|y| = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ $z_i \in \Omega(x)$, $i = 1,2$, тогда $|y| = \frac{1}{2}(Re\, z_1 + Re\, z_2)$, $Im\, z_1 = -Im\, z_2$, где $Re\, z_i$, $Im\, z_i$ – соответственно действительная и мнимая часть функции z_i, $i = 1,2$. Заметим, что $|Re\, z_i| \leq |z_i|$ $i = 1,2$ и, следовательно, $Re\, z_i \in \Omega^h(x)$, откуда, в силу сделанного предположения, $|y| = Re\, z_1 = Re\, z_2$. Если $Im\, z_i \neq 0$, то в этом случае

$$\int_\Omega |z_i(\omega)| d\omega > \int_\Omega |y| d\omega = \int_0^1 \tilde{y}(t)\,dt = \int_0^1 \tilde{x}(t)\,dt,$$

что противоречит тому, что $z_i \in \Omega(x)$. Следовательно, $|y| = z_1 = z_2$, т.е. $|y| \in \operatorname{extr} \Omega(x)$.

Завершим доказательство леммы. Пусть $y \in \operatorname{extr} \Omega(x)$. Тогда $|y| \in \operatorname{extr} \Omega^h(x)$ и в силу доказанного выше $\tilde{x} = \tilde{y}$, т.е. $y \in I(x)$.

Обратно. Пусть $y \in I(x)$. Тогда $|y| \in I(x)$ и, значит, в силу уже доказанного $|y| \in \operatorname{extr} \Omega^h(x)$, что равносильно $y \in \operatorname{extr} \Omega(x)$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2.I.4. Пусть $A \in L_1(\mathfrak{A})$, тогда $\mathcal{E}xtr\ \Omega(A) = I(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что оператор $B \in \mathcal{E}xtr\ \Omega(A)$ в том и только в том случае, когда $|B| \in \mathcal{E}xtr\ \Omega(A)$. Действительно пусть $B = U \cdot |B|$, $U \in \mathfrak{A}_u$ тогда, если $|B| = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$,

$A_1, A_2 \in \Omega(A)$, то $B = \dfrac{U^* A_1 + U^* A_2}{2}$, откуда

$U^* A_1 = U^* A_2$ и, значит, $A_1 = A_2$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Пусть теперь $B \in \mathcal{E}xtr\ \Omega(A)$ и $\mathcal{B}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая спектральное семейство $|B|$. Обозначим $\Omega_{\mathcal{B}}(A) = \Omega(A) \cap L_1(\mathcal{B})$. Ясно, что $|B| \in \mathcal{E}xtr\ \Omega_{\mathcal{B}}(A)$ и импликация $\widetilde{B} = \widetilde{A}$ следует из леммы 2.I.4.

Обратная импликация $T \in I(A) \Longrightarrow T \in \mathcal{E}xtr\ \Omega(A)$ доказывается значительно сложнее. Предположим

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2),\ T_1, T_2 \in \Omega(A).$$

Имеем: $\int_0^s \widetilde{T}(t)dt \le \frac{1}{2}\int_0^s \widetilde{T}_1(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^s \widetilde{T}_2(t)dt$. С другой стороны, так как $T_i \in \Omega(A)$, то

$$\int_0^s \widetilde{T}_i(t)dt \le \int_0^s \widetilde{A}(t)dt = \int_0^s \widetilde{T}(t)dt,\ i=1,2,\ s \ge 0.$$

Отсюда: $\int_0^s \widetilde{T}(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^s (\widetilde{T}_1(t) + \widetilde{T}_2(t))dt$ для всех

$\delta \geq 0$, что обеспечивает: $\widetilde{T}(t) = \frac{1}{2}(\widetilde{T}_1(t) + \widetilde{T}_2(t))$,

а поскольку $\widetilde{T} = \widetilde{A}$, то $T \in extr\ \Omega(\widetilde{A})$ и так как $\widetilde{T}_i \in \Omega(\widetilde{A})$, то $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2 = \widetilde{T}$.

Пусть $e_\tau(|T|), e_\tau(|T_1|), e_\tau(|T_2|)$ – спектральные проектора соответствующих операторов. В силу равноизмеримости операторов T, T_1, T_2 имеем: $\mu(e_\tau^\perp(|T|)|T|) =$

$= \mu(e_\tau^\perp(|T_1|)|T_1|) = \mu(e_\tau^\perp(|T_2|)|T_2|)$, где $e_\tau^\perp = \mathbb{1} - e_\tau$.

Покажем, что если $e \neq e_\tau^\perp(|T|)$ и $\mu(e) = \mu(e_\tau^\perp(|T|))$, то $\mu(e|T|) < \mu(e_\tau^\perp(|T|)|T|)$. При этом используются следующие две леммы.

Л е м м а 2.I.5. Пусть $\mu(e_1) = \mu(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, $e_2 \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – максимальная коммутативная $*$ – подалгебра в $\mathcal{O}\mathcal{l}$. Тогда $T_\mathcal{U}(e_1) \neq e_2$, где $T_\mathcal{U}$ – УМО на подалгебру $\mathcal{U}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $T_\mathcal{U}(e_1) = e_2$. Тогда $e_2 = T_\mathcal{U}(e_1) \cdot T_\mathcal{U}(e_1) = T_\mathcal{U}(e_1 \cdot T_\mathcal{U}(e_1)) = T_\mathcal{U}(e_1 \cdot e_2)$.

Отсюда $T_\mathcal{U}(e_1 - e_1 e_2) = 0$. Полагая $e_3 = \mathbb{1} - e_2$, получаем $T_\mathcal{U}(e_1 e_3) = 0$. Ясно, что тогда $\mu(e_1 e_3) =$

$= \mu(T_\mathcal{U}(e_1 e_3)) = 0$. Поэтому $\mu(e_1 e_3) = \mu(e_1 e_1 e_3) =$

$= \mu(e_1 e_3 e_1) = 0$, и следовательно, $e_1 e_3 e_1 = 0$.

Это означает, что $(e_3 e_1)^*(e_3 e_1) = 0$, откуда

$e_3 e_1 = 0$ и потому $e_1 e_3 = e_1(\mathbb{1} - e_2) = 0$, или $e_1 = e_1 e_2$, что равносильно $e_1 \leq e_2$. Но поскольку мы предполагаем, что $\mu(e_1) = \mu(e_2)$, то у нас должно быть тогда выполнено $e_1 = e_2$ - что противоречит условию леммы. Значит, $T_{\mathcal{U}}(e_1) \neq e_2$.

Л е м м а 2.I.6. Пусть $\mathcal{U}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая спектральное семейство оператора $|T|$ и $F \in L_1(\mathcal{U})$ - такой положительный оператор, что $F \prec e = e_{\frac{1}{\tau}}(|T|)$ и

$\tilde{F}(t) \neq \tilde{e}(t)$. Тогда $F|T| \in L_1(\mathcal{U})$ и

$$\mu(F|T|) < \mu(eT).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [82] ,[65] , что

$$\mu(F|T|) \leq \int_0^1 (\tilde{F}\cdot\tilde{T})(t)dt \leq \int_0^1 \tilde{e}\,\tilde{T}dt = \int_0^{\mu(e)} \tilde{T}(t)dt$$ и

утверждение леммы будет установлено, если мы покажем, что последнее неравенство строгое.

В силу определения перестановки оператора имеем:

$\tilde{T}(t) > \tau$, если $t \in (0, \mu(e))$ и $\tilde{T}(t) \leq \tau$, если $t \in [\mu(e), 1]$.

Докажем сначала следующее неравенство:

$$\int_{\mu(e)}^1 (\tilde{F}\cdot\tilde{T})(t)dt \leq \tau \int_0^{\mu(e)} (1 - \tilde{F})(t)dt . \tag{I}$$

Ясно, что поскольку $\int_0^1 \tilde{F}(t)dt \leq \int_0^1 \tilde{e}(t)dt$,

то $S_{ABF} \leq S_{ABCD}$, где S_{ABF} - это площадь криволинейного треугольника ABF (см. рис. I).

Поэтому

$$S_{BCE} \geqslant S_{DEF} .$$

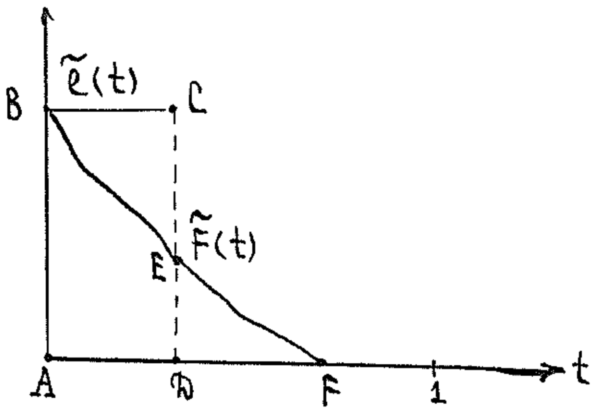

Рис. 1

Имеем:

$$S_{BCE} = \int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\,dt ,$$

$$S_{DEF} = \int_{\mu(e)}^{1} \tilde{F}(t)\,dt .$$

Итак,

$$\int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\,dt \geqslant \int_{\mu(e)}^{1} \tilde{F}(t)\,dt ,$$

откуда:

$$\tau \cdot \int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\,dt \geqslant \tau \cdot \int_{\mu(e)}^{1} \tilde{F}(t)\,dt = \int_{\mu(e)}^{1} \tau \cdot \tilde{F}(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mu(e)}^{1} \tilde{T}(t)\tilde{F}(t)\,dt \quad \text{так как} \quad \tilde{T}(t) \leq \tau \quad \text{при} \quad t \in [\mu(e), 1] .$$

Неравенство (I) доказано. Учитывая это неравенство имеем:

$$\int_0^1 \tilde{F}(t)\tilde{T}(t)\,dt \leq \int_0^{\mu(e)} \tilde{F}(t)\tilde{T}(t)\,dt + \tau \int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\,dt .$$

Нам осталось показать, что:

$$\int_0^{\mu(e)} \tilde{F}(t)\tilde{T}(t)\,dt + \tau \left(\int_0^{\mu(e)} dt - \int_0^{\mu(e)} \tilde{F}(t)\,dt \right) < \int_0^{\mu(e)} \tilde{T}(t)\,dt .$$

Но последнее неравенство сразу вытекает из следующего соотношения:

$$\int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\tilde{T}(t)\,dt > \tau \int_0^{\mu(e)} (1-\tilde{F}(t))\,dt ,$$ которое

истинно, так как $\widetilde{T}(t) > \tau$ при $t \in (0, \mu(e))$ и $1-\widetilde{F}(t) \neq 0$ на $[0, \mu(e)]$ поскольку в противном случае мы имели бы равенство: $\widetilde{F}(t) = \widetilde{e}(t)$, противоречащее условию. Лемма 2.I.6 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.I.4. Если предположить, что $e \neq e_\tau^\perp(|T|)$ и $\mu(e) = \mu(e_\tau^\perp(|T|))$, то в силу леммы 2.I.5 $T_\mathcal{U}(e) \neq e_\tau^\perp(|T|)$ и $(T_\mathcal{U}(e)) \prec e_\tau^\perp(|T|)$, где $T_\mathcal{U}$ - оператор УМО на $*$-подалгебру $\mathcal{U}$ из условия леммы 2.I.6. В силу леммы 2.I.6 получаем: $\mu(e_\tau^\perp |T|) =$

$$= \mu(T_\mathcal{U}(e \cdot |T|)) = \mu(T_\mathcal{U}(e) \cdot |T|) < \mu(e_\tau^\perp(|T|) \cdot |T|).$$

Если бы у нас операторы T_1, T_2, T были бы положительные, то окончание доказательства теоремы было бы такое: пусть $e_\tau^\perp(|T|)$ не равен хотя бы одному из проекторов $e_\tau^\perp(|T_1|)$, $e_\tau^\perp(|T_2|)$. Тогда:

$$\mu(e_\tau^\perp(T)T) = \frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(T)\cdot T_1) + \frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(T)T_2) <$$

$$< \frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(T_1)\cdot T_1) + \frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(T_2)\cdot T_2) = \mu(e_\tau^\perp(T)T)$$

(напомним, что операторы T, T_1, T_2 - равноизмеримые). Поскольку последнее неравенство неверное, мы вправе записать:

$$e_\tau^\perp(T) = e_\tau^\perp(T_1) = e_\tau^\perp(T_2) \quad \text{для любого } \tau \geq 0,$$

откуда следует равенство: $T = T_1 = T_2$.

Пусть $T = u \cdot |T|$, $T_1 = v_1 |T_1|$, $T_2 = v_2 |T_2|$ - полярные разложения этих операторов. Имеем:

$$\mu(e_\tau^\perp(|T|)\cdot|T|)=\frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(|T|)\cdot u^*(T_1+T_2))=$$

$$=\frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(|T|)u^*v_1|T_1|)+\frac{1}{2}\mu(e_\tau^\perp(|T|)u^*v_2|T_2|)=$$

$$=\frac{1}{2}\mu(a\cdot|T_1|)+\frac{1}{2}\mu(b\cdot|T_2|),$$ где

$a=e_\tau^\perp(|T|)u^*v_1$, $b=e_\tau^\perp(|T|)u^*v_2$. Учитывая, что $\mu(e_\tau^\perp(|T|)|T|)$ – число положительное, получаем:

$$\mu(e_\tau^\perp(|T|)|T|)=\frac{1}{2}\mu(\mathrm{Re}\,a|T_1|)+\frac{1}{2}\mu(\mathrm{Re}\,b|T_2|),$$

где $\mathrm{Re}\,a=\frac{a+a^*}{2}$, $\mathrm{Re}\,b=\frac{b+b^*}{2}$. Известно (см. § I.I), что существуют такие унитарные операторы $w_1, w_2\in\mathfrak{A}$, что

$$|\mathrm{Re}\,a|\le\frac{w_1|a|w_1^*+w_2|a^*|w_2^*}{2}.$$ Но, у нас

$w_1|a|w_1^*\sim w_2|a^*|w_2^*\sim|a|\sim e_\tau^\perp(|T|)$ и, значит:

$$\int_0^s(\mathrm{Re}\,a)^\sim(t)dt\le\frac{1}{2}\int_0^s(e_\tau^\perp(|T|)^\sim+e_\tau^\perp(|T|)^\sim)(t)dt=$$

$$=\int_0^s e_\tau^\perp(|T|)^\sim(t)dt.$$

Обозначая $\mathcal{U}_i$ $(i=1,2)$ – максимальную коммутативную $*$ – подалгебру в $\mathfrak{A}$ содержащую спектральное семейство оператора $|T_i|$ и $T_{\mathcal{U}_i}$ – оператор УМО на $\mathcal{U}_i$ имеем:

$$\mu(e_\tau^\perp(|T|)|T|)=\frac{1}{2}\mu(\mathrm{Re}\,a\cdot|T_1|)+\frac{1}{2}\mu(\mathrm{Re}\,b\cdot|T_2|)=$$

$$= \frac{1}{2}\mu(T_{u_1}(\operatorname{Re} a)\cdot|T_1|) + \frac{1}{2}\mu(T_{u_2}(\operatorname{Re} b)\cdot|T_2|).$$

Поскольку $T_{u_1}(\operatorname{Re} a) \prec \operatorname{Re} a \prec e_\tau^\perp(|T|) \sim e_\tau^\perp(|T_1|)$

и $T_{u_2}(\operatorname{Re} b) \prec \operatorname{Re} b \prec e_\tau^\perp(|T|) \sim e_\tau^\perp(|T_2|)$, то

используя лемму 2.I.6 мы как и ранее, в случае положительных T_1, T_2, T придем к противоречию, если не будем предполагать равенства $T_{u_1}(\operatorname{Re} a) = e_\tau^\perp(|T_1|)$ и $T_{u_2}(\operatorname{Re} b) = e_\tau^\perp(|T_2|)$. Считая последние равенства выполненными, получим: $T_{u_1}(a) = e_\tau^\perp(|T_1|) + iT_{u_1}(\operatorname{Im} a)$,

где $\operatorname{Im} a = \dfrac{a - a^*}{2i}$. Поскольку $T_{u_1}(a) \prec a \sim e_\tau^\perp(|T_1|)$,

то $T_{u_1}(\operatorname{Im} a) = 0$, так как иначе $|T_{u_1}(a)|^\sim =$

$$= |e_\tau(|T_1|) + iT_{u_1}\operatorname{Im}(a)|^\sim(t) \geqslant |e_\tau(|T_1|)|^\sim(t),$$

причем последнее неравенство будет строгим на множестве точек отрезка $(0, 1)$ имеющем положительную меру. Поэтому

$T_{u_1}(a) = e_\tau^\perp(|T_1|)$ и, аналогично $T_{u_2}(b) = e_\tau^\perp(|T_2|)$.

Расммотрим последние равенства более подробно.

$T_{u_1}(a) = T_{u_1}(e_\tau^\perp(|T|)u^* v_1) = e_\tau(|T_1|)$ или

полагая $u^* v_1 = w$, $e_\tau^\perp(|T_1|) = e_1$:

$$T_{u_1}(e_\tau^\perp(|T|)w) = e_1.$$

В силу свойств оператора УМО (см. § I.I) мы можем записать:

$$e_1 \cdot e_1 \le T_{u_1}\left(w^* e_\tau^\perp(|T|)\, e_\tau^\perp(|T|)\, w\right).$$

Поскольку $\mu(w^* e_\tau^\perp(|T|) w) = \mu(e_1)$, то применение леммы 2.I.5 дает: $e_1 = w^* e_\tau^\perp(|T|) w$, откуда полагая $e_\tau^\perp(|T|) = e$ получим: $e = w e_1 w^*$.

Но $T_{u_1}(ew) = e_1$, поэтому $T_{u_1}(ew) =$
$= T_{u_1}(w e_1 w^* w) = T_{u_1}(w e_1) = e_1$. Отсюда $T_u(e_1 w^*) = e_1$

и по уже использовавшемуся свойству операторов УМО:

$$e_1 \cdot e_1 \le T_{u_1}(w e_1 \cdot e_1 w^*) = T_u(e),$$

откуда после очередного применения леммы 2.I.5 получаем

$$e = e_1 \quad \text{или} \quad e_\tau^\perp(|T|) = e_\tau^\perp(|T_1|).$$

Аналогично, $e_\tau^\perp(|T|) = e_\tau^\perp(|T_2|)$. Последние равенства обеспечивают совпадение модулей операторов T, T_1, T_2. Докажем, что на самом деле имеет место равенство: $T = T_1 = T_2$. Предположим, что $\xi \in \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(T_1) \cap \cap\, \mathfrak{D}(T_2)$ и $T_1\xi \ne T\xi$. Так как $T\xi = \frac{1}{2}(T_1\xi + T_2\xi)$, то равенства $\|T\xi\| = \|T_1\xi\| = = \|T_2\xi\|$ одновременно не выполнены и, следовательно, либо $\|T\xi\| < \|T_1\xi\|$, либо $\|T\xi\| < \|T_2\xi\|$.

В то же время $\|T\xi\| = \|u^* T\xi\| = \||T|\xi\| =$

$$= \| |T_i| \xi \| = \| U_i^* T_i \xi \| = \| T_i \xi \| ,$$

$i = 1, 2$. Полученное противоречие показывает, что $T = T_1 = T_2$ на сильно плотной области. В силу [75] это означает, что $T = T_1 = T_2$. Теорема полностью доказана.

Отметим, что в случае, когда $A = \mathbb{1}$, $\Omega(\mathbb{1})$ – есть единичный шар алгебры $\mathfrak{A}$. Множество всех операторов равноизмеримых с $\mathbb{1}$ совпадает со всеми унитарными операторами из $\mathfrak{A}$. Поэтому из доказанной теоремы вытекает следующий хорошо известный факт:

С л е д с т в и е 2.I.7. Множество крайних точек единичного шара конечной непрерывной алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ совпадает с $\mathfrak{A}_U$.

§ 2.2. Крайние точки единичных шаров некоммутативных пространств Лоренца и Марцинкевича

В этом параграфе описываются крайние точки единичных шаров пространств $M_\psi(\mathfrak{A})$ и $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ и доказывается отсутствие изометрий между пространствами $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ и $\Lambda_\psi(\Omega, \nu)$ ($M^\circ_\psi(\mathfrak{A})$ и $M^\circ_\psi(\Omega, \nu)$ соответственно), где (Ω, ν) – пространство с конечной мерой.

Отметим, что описание крайних точек единичных шаров симметрично – нормированных идеалов компактных операторов имеется в [45].

Рассмотрим пространство Марцинкевича $M_\psi(0,1)$. Единичный шар этого пространства есть орбита функции $\varphi = \frac{d\psi}{dt}$.

Поэтому единичный шар пространства $M_\psi(\mathfrak{A})$ есть орбита некоторого оператора A, перестановка которого равноизмерима с функцией φ. Из теоремы 2.1.4 сразу вытекает следующее

Предложение 2.2.1. Множество крайних точек единичного шара пространства Марцинкевича $M_\psi(\mathfrak{A})$ совпадает с множеством $I(A)$, где $A \in L_1(\mathfrak{A})$, такой, что $\widetilde{A} = \widetilde{\varphi}$.

Изучим теперь крайние точки единичного шара некоммутативного пространства Лоренца $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$. Всюду в дальнейшем $\psi(t)$ - возрастающая, строго вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, такая, что $\psi(0)=0$. Единичный шар пространства Лоренца на алгебре $\mathfrak{A}$, его самосопряженную и положительную часть будем обозначать соответственно через

$$\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}),\ [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h,\ [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+.$$

Известно [24], [9], что если алгебра $\mathfrak{A}$ - коммутативна, то $\operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h = \{x \in \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}):$

$$x = \frac{e_1 - e_2}{\psi(\mu(e_1+e_2))},\quad \text{где}\quad e_1, e_2 \in \mathfrak{A}_p,\ e_1 \cdot e_2 = 0\}.$$

Лемма 2.2.2. Если алгебра $\mathfrak{A}$ - коммутативная, то $\operatorname{extr}\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}) = \{x \in \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}):$

$$|x| = \frac{e}{\psi(\mu(e))},\quad e \in \mathfrak{A}_p\}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого выпуклого симметричного множества $F \subset L_1(\mathfrak{A})$

$x \in \operatorname{extr} F \Longleftrightarrow |x| \in \operatorname{extr} F$ (это устанавливается так же, как и в теореме 2.I.4). Предположим что $x \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Тогда $|x| \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$, и следовательно,

$|x| \in \operatorname{extr} [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$,откуда $|x| = \dfrac{e}{\psi(\mu(e))}$, $e \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$.

Обратно, пусть $|x| = \dfrac{e}{\psi(\mu(e))}$, $e \in \mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$.

Предположим, что $|x| \notin \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Тогда

$|x| = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + i\,\dfrac{y_1 + y_2}{2}$, где x_j, y_j - вещественные функции, $x_j + i y_j \in \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$ $(j = 1, 2)$. Ясно, что $x_j \in [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$ и $y_1 = -y_2$. Поскольку $|x| \in \operatorname{extr} [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$, то отсюда сразу получаем равенство $x_1 = x_2 = |x|$. Если предположить теперь, что $y_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$, то $|x| \leq \sqrt{|x|^2 + y_j^2} = |x_j + i y_j|$, причем $|x| \neq |x_j + i y_j|$. Поскольку норма в пространстве $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ строго монотонна, то $\|x_j + i y_j\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} > \|x\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = 1$, что невозможно. Поэтому $y_1 = y_2 = 0$ и $|x| \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2.2.3. Пусть $\mathfrak{A}$ - конечная, непрерывная алгебра фон Неймана. Тогда

$$\operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}) = \Big\{ A \in \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}) : A = \frac{v}{\psi(\mu|v|)},\ \text{где}$$

v - частичная изометрия из $\mathfrak{A}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$.

Тогда $|A| \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$ и, очевидно,

$|A| \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра, содержащая спектральное семейство оператора $|A|$. В силу леммы 2.2.2 имеем тогда

$$|A| = \frac{e}{\psi(\mu(e))}, \text{ где } e \in \mathfrak{U}_\mathcal{P}, \text{ или } A = \frac{v}{\mu(|v|)},$$

где $v = Ue$, U - унитарный оператор из полярного разложения $|A|$; в частности v - частичная изометрия.

Предположим теперь, что оператор A имеет вид:

$$A = \frac{v}{\psi(\mu(|v|))} \quad \text{где } v \in \mathfrak{A} \text{ - частичная изометрия.}$$

Пусть $|v| = e \in \mathfrak{A}_\mathcal{P}$. Докажем, что $|A| = \dfrac{e}{\psi(\mu(e))} \in$ $\in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Доказательство базируется на следующих двух леммах:

Л е м м а 2.2.4. Пусть B - некоторый положительный оператор из $\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Тогда $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$ в том и только в том случае, когда $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо доказать, что $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$ влечет $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$, так как обратное - очевидно. Предположим $B = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$,

$B_i \in [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$, $i = 1,2$. Тогда (см. § I.I) найдутся такие операторы $U_i \in \mathfrak{A}_U$, $i = 1,2$, что

$$B \le \frac{u_1|B_1|u_1^* + u_2|B_2|u_2^*}{2} = \frac{A_1+A_2}{2}, \quad A_i \in [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+, \quad i=1,2 .$$

(последнее в силу того, что $A_i \sim B_i$ и значит,

$\|A_i\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = \|B_i\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}$ для $i = 1, 2$).

Покажем, что $B = \dfrac{A_1+A_2}{2}$. Действительно, если бы это было не так, то

$$\tilde{B} \le \left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)^\sim \quad \text{и} \quad \mu(B) < \mu\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right),$$

в частности $\tilde{B} \ne \left(\dfrac{A_1+A_2}{2}\right)^\sim$. Тогда в силу строгой монотонности нормы пространства $\Lambda_\psi(0,1)$ имеем:

$$\|B\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = \|\tilde{B}\|_{\Lambda_\psi(0,1)} < \left\|\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)^\sim\right\|_{\Lambda_\psi(0,1)} = \left\|\frac{A_1+A_2}{2}\right\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} \le 1,$$

что противоречит включению $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$.

Поэтому $B = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ и, следовательно, $B = A_1 = A_2$, т.е. $B = u_1|B_1|u_1^* = u_2|B_2|u_2^*$.

Из последних равенств вытекают следующие соотношения:

$$\mu(B) = \mu(|B_1|) = \mu(B_1^+) + \mu(B_1^-),$$

$$\mu(B) = \mu(|B_2|) = \mu(B_2^+) + \mu(B_2^-),$$ откуда

$\mu(B) = \frac{1}{2}(\mu(B_1^+) + \mu(B_2^+) + \mu(B_1^-) + \mu(B_2^-))$. В то же время, поскольку $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, имеем:

$$\mu(B) = \frac{1}{2}\left(\mu(B_1^+) + \mu(B_2^+) - \mu(B_1^-) - \mu(B_2^-)\right).$$

Таким образом: $\mu(B_1^-) + \mu(B_2^-) = 0$, что в силу точности следа обеспечивает: $B_1^- = B_2^- = 0$, т.е. операторы B_1 и B_2 принадлежат $[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$, и поэтому $B = B_1 = B_2$. Таким образом,

$$B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h.$$

Лемма 2.2.5. Пусть B - положительный, ограниченный оператор из $\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Тогда $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$, если и только если $B \in \operatorname{extr}\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Необходимо доказать только, что из включения $B \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^h$ следует включение $B \in \operatorname{extr}\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Предположим, что

$$B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \text{ или } B = \frac{\operatorname{Re} B_1 + \operatorname{Re} B_2}{2} + i\,\frac{\operatorname{Im} B_1 + \operatorname{Im} B_2}{2}, \text{ где } B_j \in \Lambda^1_\psi(\mathfrak{A}),\ j = 1,2.$$

Ясно, что $\operatorname{Im} B_1 = -\operatorname{Im} B_2$, и в силу нашего предположения, имеем $\operatorname{Re} B_1 = \operatorname{Re} B_2 = B$. Если допустить, что $\operatorname{Im} B_j \neq 0$ $(j = 1,2)$, то тогда $B_1 = B + iA$, где A - некоторый ненулевой самосопряженный оператор. Рассмотрим оператор УМО $T_{\mathcal{U}}$ на максимальную коммутативную $*$ - подалгебру $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{A}$, содержащую спектральное семейство оператора B.

Тогда $\|B_1\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} \geqslant \|T_\mathcal{U}(B_1)\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = \|B + i T_\mathcal{U}(A)\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}$.

Поскольку операторы B и $T_\mathcal{U}(A)$ - коммутирующие,

$|B + i T_\mathcal{U}(A)| = (B^2 + T_\mathcal{U}(A)^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant B$, причем, если

$T_\mathcal{U}(A) \neq 0$, то $|B + i T_\mathcal{U}(A)| \neq B$. Но тогда используя строгую монотонность нормы пространства $\Lambda_\psi(0,1)$ мы как и при доказательстве леммы 2.2.4 можем записать:

$\|B + i T_\mathcal{U}(A)\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} > \|B\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} = 1$ и значит,

$\|B_1\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} > 1$, что невозможно.

Поэтому $T_\mathcal{U}(A) = 0$.

Итак, у нас имеются следующие равенства:

$$B = \operatorname{Re} B_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_1^*), \quad B_1 = B + iA, \quad T_\mathcal{U}(A) = 0 .$$

Выберем такие операторы $U_1, U_2 \in \mathfrak{A}_U$, что

$$B \leq \frac{1}{2}(U_1 |B_1| U_1^* + U_2 |B_1^*| U_2^*) .$$

Как и в лемме 2.2.4 получим равенства:

$B = U_1 |B_1| U_1^* = U_2 |B_1^*| U_2^*$. Так как $B \in \mathfrak{A}$, то B^2 - интегрируем и $\mu(B^2) = \mu(U_1 |B_1|^2 U_1^*) = \mu(|B_1|^2)$. Далее имеем:

$$|B_1|^2 = (B - iA)(B + iA) = B^2 + |A|^2 + iBA - iAB .$$

$$\mu(|B_1|^2) = \mu(B^2) + \mu(|A|^2) + i\mu(BA) - i\mu(AB).$$

Поскольку $\mu(BA) = \mu(BT_{\mathcal{U}}(A)) = 0$,

$\mu(AB) = \mu(T_{\mathcal{U}}(A)B) = 0$, то $\mu(|B_1|^2) = \mu(B^2) + \mu(|A|^2)$,

откуда $\mu(|A|^2) = 0$, т.е. $A = 0$. Поэтому $B = B_1 = B_2$ и лемма 2.2.5 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.2.3. Леммы 2.2.4 и 2.2.5 позволяют нам ограничиться доказательство следующего включения: $|A| = \dfrac{e}{\psi(\mu(e))} \in \operatorname{extr}[\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$.

Предположим, что $\dfrac{e}{\psi(\mu(e))} = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, где

$A_i \in [\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})]^+$, $i = 1,2$. Положим $\psi(\mu(e)) = \lambda$;

тогда $e = \frac{1}{2}(\lambda A_1 + \lambda A_2)$. Ясно, что $e \geqslant \dfrac{\lambda A_1}{2}$,

следовательно, $\left(\dfrac{\lambda A_1}{2}\right)e = e\left(\dfrac{\lambda A_1}{2}\right) = \dfrac{\lambda A_1}{2}$

(см., напр., [73]). Поэтому $A_1 e = e A_1$. Выберем $\mathcal{B}$ – максимальную коммутативную $*$ – подалгебру в $\mathfrak{A}$, содержащую операторы A_1 и e. Рассмотрим $T_{\mathcal{B}}$ – оператор УМО на подалгебру $\mathcal{B}$. Имеем:

$$e = T_{\mathcal{B}} e = \frac{1}{2}(\lambda T_{\mathcal{B}} A_1 + \lambda T_{\mathcal{B}} A_2) =$$

$= \frac{1}{2}(\lambda A_1 + \lambda T_{\mathcal{B}} A_2)$. Но $\frac{1}{\lambda} e \in \operatorname{extr} \Lambda^1_\psi(\mathcal{B})$

и значит, $A_1 = T_{\mathcal{B}} A_2 = \frac{1}{\lambda} e$. Отсюда сразу следует, что $A_2 = \frac{1}{\lambda} e$. Теорема доказана.

Полученное нами описание всех крайних точек единичного шара пространства $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ позволяет установить, что некоммутативное пространство Лоренца действительно некоммутативно, т.е. оно неизометрично функциональному пространству Лоренца. Аналогичное утверждение для пространств L_p получено в [58].

Теорема 2.2.6. Пусть $\mathfrak{A}$ – конечная непрерывная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$, $\psi(t)$ – возрастающая строго вогнутая функция на $[0, \mu(\mathbb{1})]$, $\psi(0)=0$. Если существует изометрия V из $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ на $\Lambda_\psi(\Omega,\nu)$ для некоторого пространства (Ω,ν) с конечной мерой, то алгебра $\mathfrak{A}$ – коммутативная.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mu(\mathbb{1})=\nu(\Omega)=1$, $\psi(1)=1$.

В этом случае $\mathbb{1}\in \operatorname{extr}\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$, т.е.

$$V(\mathbb{1})=\frac{v}{\psi(\nu(G))},\ \text{где}\quad v\in L_\infty(\Omega,\nu),\ |v|=\chi_G,\ \nu(G)\neq 0.$$

Положим $u=\bar{v}+\chi_{\Omega\setminus G}$; тогда $|u|=\chi_\Omega$ и для любого $f\in\Lambda_\psi(\Omega,\nu)$ имеем:

$$\|uf\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)}=\||uf|\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)}=\|f\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)}.$$

Следовательно, отображение $U(T)=uV(T)$ также является изометрией из $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ на $\Lambda_\psi(\Omega,\nu)$, причем

$$U(\mathbb{1})=\frac{1}{\psi(\nu(G))}\chi_G.$$ Покажем, что $\chi_G=\chi_\Omega$.

Пусть $P\in\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$, $0<\mu(P)<\frac{1}{2}$. В силу теоремы 2.2.3

элементы $\dfrac{P}{\psi(\mu(P))}$ и $\dfrac{\mathbb{1}-P}{\psi(\mu(\mathbb{1}-P))}$ есть крайние точки в $\Lambda^1_\psi(\mathfrak{A})$. Поэтому $U(P) = \dfrac{\psi(\mu(P))}{\psi(\nu(A))}a$,

$U(\mathbb{1}-P) = \dfrac{\psi(\mu(\mathbb{1}-P))}{\psi(\nu(B))}b$, где $a, b \in L_\infty(\Omega,\nu)$,

$$|a| = \chi_A, \ |b| = \chi_B, \ \nu(A) > 0, \ \nu(B) > 0.$$

Положим $\alpha = \dfrac{\psi(\nu(G))\psi(\mu(P))}{\psi(\nu(A))}$, $\beta = \dfrac{\psi(\nu(G))\psi(\mu(\mathbb{1}-P))}{\psi(\nu(B))}$

Имеем $\chi_G = \alpha a + \beta b$. Пусть $D = (A \cup B) \setminus G$, тогда

$\alpha a \chi_D = -\beta b \chi_D$ и отсюда $\alpha \chi_D = |\alpha a \chi_D| = \beta \chi_D$.

Если $\nu(D) > 0$, то $\alpha = \beta$, и так как $\psi(\mu(P)) < \psi(\mu(\mathbb{1}-P))$, то $\nu(A) < \nu(B)$, т.е. $\nu(B \setminus A) \neq 0$.

В силу равенства $\chi_{B\setminus A} \cdot \chi_G = \beta b \chi_{B\setminus A}$ имеем $\alpha = \beta = 1$.

Отсюда $|a-b| = \chi_{(A \Delta B)\cap G} + \sqrt{3}\,\chi_{A\cap B\cap G} + 2\chi_D$, и

$$1 = \|U(\mathbb{1})\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)} = \| |P-(\mathbb{1}-P)| \|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})} =$$

$$= \|U(P-(\mathbb{1}-P))\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)} = \frac{1}{\psi(\nu(G))} \| |a-b| \|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)} \underset{(I)}{>} 1.$$

Из полученного противоречия следует, что $\nu(D) = 0$, т.е.

$\operatorname{supp}(U(P)) \leq \chi_G$. Используя аппроксимацию по норме $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}$ самосопряженных элементов из $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ простыми операторами из $\mathfrak{A}$ и представление $T = \operatorname{Re} T + i\,\operatorname{Im} T$, получим, что $\operatorname{supp}(U(T)) \leq \chi_G$ для всех $T \in \Lambda_\psi(\mathfrak{A})$

(здесь используется также тот факт, что сходимость по норме $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)}$ влечет сходимость по мере (см. [7]).

Так как U - биективно, то $\chi_G=\chi_\Omega$ и, следовательно, $U(\mathbb{1})=\chi_\Omega$.

Покажем, теперь, что $U(P)\geqslant 0$ для любого $P\in\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$, $0<P<\mathbb{1}$. Используя предыдущие обозначения, имеем: $\chi_\Omega=\alpha a+\beta b$, $\alpha=\dfrac{\psi(\mu(P))}{\psi(\nu(A))}$,

$\beta=\dfrac{\psi(\mu(\mathbb{1}-P))}{\psi(\nu(B))}$. Положим $x=\operatorname{Re}a$, $y=\operatorname{Im}a$;

тогда

$$\operatorname{Re}b=\frac{1-\alpha x}{\beta},\quad \operatorname{Im}b=-\frac{\alpha y}{\beta},$$

$$(x^2+y^2)\chi_A=\chi_A,\ \left[\frac{(1-\alpha x)^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2\right]\chi_B=\chi_B.$$

Отсюда для почти всех $\omega\in A\cap B$ имеем:

$$y^2(\omega)=1-x^2(\omega),\ \left(\frac{1}{\alpha}-x(\omega)\right)^2+y^2(\omega)=\frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

т.е. $x(\omega)=\dfrac{1+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$, в частности,

$$\operatorname{Re}(\alpha a-\beta b)(\omega)=\alpha^2-\beta^2,\ \operatorname{Im}(\alpha a-\beta b)(\omega)=2\alpha y$$

и

$$|\alpha a-\beta b|^2(\omega)=(\alpha^2-\beta^2)+4\alpha^2y^2=2(\alpha^2+\beta^2)-1.$$

Если $\nu(\Omega\setminus A)\neq 0$, $\nu(\Omega\setminus B)\neq 0$, то $\alpha=\beta=1$ и повторяя цепочку равенств (I), получим, что $\nu(A\cap B)=0$, т.е. $U(P)\,U(\mathbb{1}-P)=0$.

Следовательно, в этом случае $U(P) \geq 0$ (так как $U(P) + U(\mathbb{1} - P) = \chi_{\Omega}$), при этом $U(P) = \chi_A$.

Пусть $\nu(\Omega \setminus A) = 0$; тогда $\alpha = \psi(\mu(P))$. Если $\nu(A \setminus B) \neq 0$, то $\alpha = 1$ и $\mu(P) = 1$, т.е. $P = \mathbb{1}$, что не так. Поэтому $\nu(A \setminus B) = 0$, т.е. $\operatorname{supp} U(P) = \operatorname{supp} U(\mathbb{1} - P) = \Omega$. Аналогично, равенство $\nu(\Omega \setminus B) = 0$ влечет $\operatorname{supp} U(P) = \operatorname{supp} U(\mathbb{1} - P) = \Omega$. В этом случае $1 = \| |\alpha a - \beta b| \|^2_{\Lambda_\psi(\Omega, \nu)} = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} a(\omega) = x(\omega) = \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} = \alpha, \text{ т.е. } a = \alpha + iy,$$

где $y^2 = 1 - \alpha^2 = \beta^2$. Далее:

$$1 + \alpha = 1 + \psi(\mu(P)) = \| \mathbb{1} + P \|_{\Lambda_\psi(\mathcal{M})} = \| U(\mathbb{1} + P) \|_{\Lambda_\psi(\Omega, \nu)} =$$

$$= \| |1 + \alpha a| \|_{\Lambda_\psi(\Omega, \nu)} = \sqrt{(1 + \alpha^2)^2 + \beta^2}.$$

Отсюда $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$, что не так.

Таким образом случаи $\nu(\Omega \setminus A) = 0$ и $\nu(\Omega \setminus B) = 0$ невозможны, и поэтому $U(P) \geq 0$ для всех $P \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Используя аппроксимацию положительных элементов из $\Lambda_\psi(\mathcal{M})$ простыми положительными операторами из $\mathcal{M}$, получим, что $U(T) \geq 0$ для всех положительных операторов T из $\Lambda_\psi(\mathcal{M})$.

Кроме того, для $P \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ получено, что

$U(P)U(\mathbb{1}-P)=0$ и $U(P)=\chi_A$ для некоторого измеримого множества $A\in\Omega$. Поэтому $U(T^2)=U(T)^2$ для любого простого оператора T из $\mathfrak{A}$. Для произвольного $T\in\mathfrak{A}^h$ существует последовательность простых самосопряженных операторов $T_n\in\mathfrak{A}^h$, такая, что $\|T-T_n\|_\infty\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$, в частности $\|T^2-T_n^2\|_\infty\longrightarrow 0$. Так как

$$\|T-T_n\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}\le\|T-T_n\|_\infty\qquad ,\text{ то}$$

$$\|U(T)-U(T_n)\|_{\Lambda_\psi(\Omega,\nu)}=\|T-T_n\|_{\Lambda_\psi(\mathfrak{A})}\longrightarrow 0,$$

при $n\longrightarrow\infty$. Следовательно (см. [7]), $U(T_n)\longrightarrow U(T)$, $U(T_n^2)\longrightarrow U(T^2)$ по мере. Отсюда вытекает, что $U(T^2)=U(T)^2$. Таким образом отображение U - есть инъективный йорданов гомоморфизм из $\mathfrak{A}^h$ в $L_\infty(\Omega,\nu)$. Так как алгебра $L_\infty(\Omega,\nu)$ - коммутативная, то йорданово умножение в $L_\infty(\Omega,\nu)$ и, следовательно в $\mathfrak{A}^h$ обладает свойством ассоциативности, что влечет коммутативность алгебры $\mathfrak{A}$.

С л е д с т в и е 2.2.7. Пусть T изометрия отображающая пространство $M_\psi^0(\mathfrak{A})$ на $M_\psi^0(\Omega,\nu)$, где ψ - возрастающая строго вогнутая на отрезке $[0,1]$ функция, такая, что $\psi(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=\infty$,

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \psi(\varepsilon) = 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ - коммутативная.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.2.6 и того факта, что пространства $\Lambda_\psi(\mathfrak{A})$ и $\Lambda_\psi(\Omega, \nu)$ являются сопряженными к пространствам $M^0_\psi(\mathfrak{A})$ и $M^0_\psi(\Omega, \nu)$ соответственно (см.,напр., [9],[II]).

§ 2.3. Свойства Крейна - Мильмана и строгой нормированности для некоммутативных симметричных пространств

Говорят, что банахово пространство E обладает свойством Крейна - Мильмана, если всякое замкнутое, выпуклое, ограниченное множество в E совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Известно (см. [3]), что симметричное пространство $E(0,1)$,отличное от пространства $L_1(0,1)$ обладает свойством Крейна - Мильмана в том и только в том случае, когда $E(0,1)$ максимально и сепарабельно, т.е. (см. [9]) в том и только в том случае,когда норма пространства $E(0,1)$ порядково непрерывна и монотонно полна.

Следующая теорема устанавливает аналог этого утверждения для произвольных конечных непрерывных алгебр фон Неймана с сепарабельным следом.

Т е о р е м а 2.3.I. Симметричное пространство $E(\mathfrak{A})\ (\neq L_1(\mathfrak{A}))$ на конечной непрерывной алгебре $\mathfrak{A}$ с точным, нормальным,сепарабельным следом μ ,

$\mu(\mathbb{1})=1$ обладает свойством Крейна-Мильмана в том и только в том случае, когда в пространстве $E(\mathfrak{A})$ выполнены условия (A) и (B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что пространство $E(\mathfrak{A})$ обладает свойством Крейна-Мильмана. Очевидно, что пространство $E(\mathfrak{U})^h = E(\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathfrak{U})^h$, где $\mathfrak{U}$ - максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$, в индуцированной из $E(\mathfrak{A})$ норме также обладает свойством Крейна-Мильмана, откуда, дословно повторяя доказательство в [3], получим выполнение условий (A) и (B) в $E(\mathfrak{U})^h$, и следовательно, в $E(\mathfrak{A})$.

При доказательстве обратной импликации нам как и в [3] потребуется следующая теорема, доказанная в [47]:

Т е о р е м а (Бессага - Пельчинский). В любом сепарабельном пространстве, изоморфном сопряженному, всякое ограниченное замкнутое множество является замыканием в нормированной топологии выпуклой оболочки своих крайних точек (т.е. любое такое пространство обладает свойством Крейна-Мильмана).

Пусть $E(\mathfrak{A})$ обладает условиями (A) и (B). Учитывая приведенную теорему и то, что $E(\mathfrak{A}) = E''(\mathfrak{A})$ (см.[83]) нам достаточно доказать следующее равенство: $E''(\mathfrak{A}) = ((E'(\mathfrak{A}))_0)^*$, где $(E'(\mathfrak{A}))_0$ - это замыкание алгебры $\mathfrak{A}$ по норме $\|\cdot\|_{E'(\mathfrak{A})}$. Пусть $\mathfrak{U}$ - некоторая максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$. В силу леммы I.3.5 пространства $E'(\mathfrak{U})$ и $E'(\mathfrak{A})$ (ℓn)-эквивалентны. Аналогично предложению I.3.I2 устанавливается, что в этом случае пространства $(E'(\mathcal{U}))_0$ и $(E'(\mathfrak{A}))_0$ также (ℓn) - эквивалентны.

По той же причине (ℓn) - эквивалентны пространства $(E'(\mathcal{U}))_0$ и $(E'(0,1))_0$. Так как $E(\mathfrak{A}) \neq L_1(\mathfrak{A})$, то $(E'(0,1))_0 \neq L_\infty(0,1)$ и поэтому норма в пространстве $(E'(0,1))_0$ удовлетворяет условию (A) (см. [II]). Следовательно, в $(E'(\mathcal{U}))_0$ также выполнено условие (A). Значит, это условие выполнено и в $(E'(\mathfrak{A}))_0$, поэтому в силу [83] : $((E'(\mathfrak{A}))_0)^* = ((E'(\mathfrak{A}))_0)'$.

Таким образом нам осталось показать, что $E''(\mathfrak{A}) = ((E'(\mathfrak{A}))_0)'$, причем известно, что $E''(\mathcal{U}) = ((E'(\mathcal{U}))_0)'$, для любой максимальной коммутативной $*$ - подалгебры $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{A}$. Но пространства $E''(\mathfrak{A})$ и $E''(\mathcal{U})$, $((E'(\mathfrak{A}))_0)'$ и $((E'(\mathcal{U}))_0)'$ - (ℓn) - эквивалентны. Значит, пространства $E''(\mathfrak{A})$ и $((E'(\mathfrak{A}))_0)'$ - (ℓn) - эквивалентны, и следовательно, совпадают. Теорема доказана.

Следующая теорема выделяет класс некоммутативных симметричных строго нормированных пространств.

Т е о р е м а 2.3.3. Пусть пространство $E(0,1)$ удовлетворяет требованиям теоремы I.2.5. Тогда симметричное пространство $E(\mathfrak{A})$ строго нормировано в том и только в том случае, когда пространство $E(0,1)$ - строго нормированно.

Доказательство. Пусть пространство $E(\mathfrak{A})$ - строго нормированно. Очевидно, что в этом случае пространство $E(\mathfrak{U})$ ($\mathfrak{U}$ - это максимальная коммутативная $*$ - подалгебра в $\mathfrak{A}$), которое мы будем отождествлять с $E(\Omega,\mu)$, (где (Ω,μ) - непрерывное вероятностное пространство с мерой) также строго нормированно. Рассмотрим оператор $T: L_1(0,1) \longrightarrow L_1(\Omega)$,

$(Tf)(\omega) = f(\pi(\omega))$, где π - сохраняющее меру отображение пространства Ω на отрезок $[0,1]$.

Как уже отмечалось функции $f \in L_1(0,1)$ и $Tf \in L_1(\Omega)$ - равноизмеримы, и следовательно, если для функций $f, g \in E(0,1)$ выполнено: $\|f\|_{E(0,1)} = \|g\|_{E(0,1)} = \frac{1}{2}\|f+g\|_{E(0,1)} = 1$, то для функций $Tf, Tg \in E(\Omega,\mu)$ выполнено: $\|Tf\|_{E(\Omega,\mu)} = \|Tg\|_{E(\Omega,\mu)} = \frac{1}{2}\|Tf+Tg\|_{E(\Omega,\mu)} = 1$.

Но пространство $E(\Omega,\mu)$ строго нормированно, и значит $Tf = Tg$; следовательно $f = g$.

Предположим теперь, что пространство $E(0,1)$ является строго нормированным. Пусть

$$A, B \in E(\mathfrak{A}),\ \|A\|_{E(\mathfrak{A})} = \|B\|_{E(\mathfrak{A})} = \frac{1}{2}\|A+B\|_{E(\mathfrak{A})} = 1.$$

Тогда $\|\widetilde{A}\|_{E(0,1)} = \|\widetilde{B}\|_{E(0,1)} = 1$ и поскольку

$(A+B)^{\sim} \prec \widetilde{A} + \widetilde{B}$, то $1 = \frac{1}{2}\|A+B\|_{E(\mathfrak{A})} =$

$$= \frac{1}{2}\,\|(A+B)^{\sim}\|_{E(0,1)} \leq \frac{1}{2}\,\|\widetilde{A}+\widetilde{B}\|_{E(0,1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|\widetilde{A}\|_{E(0,1)} + \frac{1}{2}\,\|\widetilde{B}\|_{E(0,1)} = 1,$$

откуда в силу строгой нормированности пространства $E(0,1)$ следует равенство $\widetilde{A} = \widetilde{B}$. Далее, очевидно, что $(A+B)^{\sim} \prec \frac{1}{2}\left((A+B)^{\sim} + \widetilde{A} + \widetilde{B}\right)$, и следовательно,

$$\|(A+B)^{\sim}\|_{E(0,1)} \leq \frac{1}{2}\,\|(A+B)^{\sim} + \widetilde{A} + \widetilde{B}\|_{E(0,1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|(A+B)^{\sim}\|_{E(0,1)} + \frac{1}{2}\,\|\widetilde{A}+\widetilde{B}\|_{E(0,1)} = 2,$$

откуда, как и ранее, заключаем, что $(A+B)^{\sim} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$. Таким образом, $\left(\frac{A+B}{2}\right)^{\sim} = A^{\sim}$, и, значит, операторы A, B, $\frac{1}{2}(A+B)$ – равноизмеримы, что в силу теоремы 2.I.4. возможно только при совпадении операторов A и B. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 2.3.3 в случае алгебры $\mathfrak{A} = B(H)$ получено в [45].

Так как пространства $L_p(0,1)$ – интерполяционны и строго нормированны при $p > 1$, то пространство $L_p(\mathfrak{A})$, $p > 1$ также строго нормированное. Следует отметить, что последний результат известен и для L_p – пространств, построенных по состоянию [59].

Пространства $L_p(0,1)$ являются частным случаем пространств $E_\alpha(0,1)$, $0 < \alpha < 1$ (см. [I2]), определяемых следующим образом: для симметричного пространства $E(0,1)$ положим

$$E_\alpha(0,1)=\left\{ f\in E(0,1):\ |f|^{\frac{1}{\alpha}}\in E(0,1)\right\}$$ и

$$\|f\|_{E_\alpha(0,1)}=\left\| |f|^{\frac{1}{\alpha}} \right\|^{\alpha}_{E(0,1)}.$$ Очевидно, что

$\left(E_\alpha(0,1),\ \|\cdot\|_{E_\alpha(0,1)}\right)$ – симметричное пространство на $(0,1)$. Если $E(0,1)=L_1(0,1)$, то пространства $E_\alpha(0,1)$ совпадают с пространствами $L_{\frac{1}{\alpha}}(0,1)$. В случае, когда норма пространства $E(0,1)$ строго монотонна, пространство $E_\alpha(0,1)$ – строго нормированное, $0<\alpha<1$ (см. [10]).

П р е д л о ж е н и е 2.3.5. Если пространство $E(0,1)$ удовлетворяет условию теоремы 1.2.5, то пространство $E_\alpha(0,1)$ также удовлетворяет этому условию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0\le f$ $0\le f, g\in E_\alpha(0,1)$ и $f\prec g$. Нам достаточно показать, что $f^p\prec g^p$, где $p=\frac{1}{\alpha}$. Пусть $0\le f_n\uparrow f$, $n\geqslant 1$, f_n – ступенчатые функции из $L_1(0,1)$. Ясно, что если мы докажем, что $f_n^p\prec g^p$, то по теореме Лебега $f^p\prec g^p$. Воспользуемся следующим результатом из [13]:

Л е м м а 2.3.6. Пусть $x=\tilde{x}\in L_1(0,1)$, $y=\tilde{y}\in L_1(0,1)$ и при этом y – элементарная функция. Предположим, что для всякого $t \in (0,1]$

$$\int_0^t y(s)\,ds < \int_0^t x(s)\,ds .$$

Тогда найдется неотрицательная функция $\bar{x} \in L_1(0,1)$ равноизмеримая с функцией x, и такая подалгебра $\mathcal{F}$ алгебры $L_\infty(0,1)$, что $y \le T_{\mathcal{F}}\,\bar{x}$, где $T_{\mathcal{F}}$ – УМО на подалгебру $\mathcal{F}$.

В силу этой леммы для фиксированного $n \geqslant 1$ произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая неотрицательная функция $g_n \in L_1(0,1)$ и такой оператор УМО T в $L_1(0,1)$, что $g_n^p \sim g^p + \varepsilon\cdot\chi_{(0,1)}$ и $T(g_1) \geqslant f_n$. Но тогда (см. [18] стр. 175) $T(g_1^p) \geqslant T(g_1)^p \geqslant f_n^p$, откуда $g^p + \varepsilon\cdot\chi_{(0,1)} \succ f_n^p$. В силу произвольности ε получаем $g^p \succ f_n^p$ для всех $n \geqslant 1$.

С л е д с т в и е 2.3.6. Пусть $E(0,1)$ – симметричное пространство со строго монотонной нормой, удовлетворяющее условиям теоремы I.2.5. Тогда пространство $E_\alpha(\mathfrak{A})$, $0 < \alpha < 1$ строго нормированно.

§ 2.4. Описание замкнутых выпуклых симметричных подмножеств интегрируемых операторов

Этот параграф посвящен решению задачи о выпуклости замкнутого симметричного квазивыпуклого подмножества интегрируемых операторов, присоединенных к конечной непрерывной алгебре фон Неймана (определение квазивыпуклого множества см. ниже). В случае алгебры матриц эта задача (без предположения замкнутости множества) была решена фон Нейманом в [69] .

Пусть, как и ранее, $\mathfrak{A}$ - конечная непрерывная алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный нормированный след на $\mathfrak{A}$. Подмножество $U \subset L_1(\mathfrak{A})$ называется нормальным (вполне симметричным), если $|S| \le |T|$, $T \in U$, $S \in L_1(\mathfrak{A})$ влечет $S \in U$ (если $S \prec T$, $T \in U$, $S \in L_1(\mathfrak{A})$ влечет $S \in U$); в случае, когда из $\tilde{T} = \tilde{S}$, $T \in U$, $S \in L_1(\mathfrak{A})$ следует $S \in U$, множество U называют симметричным. Ясно, что всякое вполне симметричное множество является нормальным и симметричным.

Пусть $U \subset L_1(\mathfrak{A})$, положим

$$\tilde{U} = \{ f \in L_1(0,1) : \tilde{f} = \tilde{T} \text{ для некоторого } T \in U \} .$$

Очевидно, что симметричность множества U влечет симметричность множества $\tilde{U}$.

П р е д л о ж е н и е 2.4.I. Пусть U - симметричное подмножество в $L_1(\mathfrak{A})$ и $\tilde{U}$ - выпукло и вполне симметрично в $L_1(0,1)$. Тогда U – выпуклое и вполне симметричное подмножество в $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вполне симметричность U – очевидна. Если $S,T\in U$; t, $\lambda\in[0,1]$, то в силу [19]:

$$\int_0^t (\lambda T+(1-\lambda)S)^{\sim}(s)\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^t (\lambda \tilde{T}(s)+(1-\lambda)\tilde{S}(s))\,ds .$$

Так как $\tilde{U}$ вполне симметрично и выпукло, то

$$(\lambda T+(1-\lambda)S)^{\sim}\in\tilde{U}, \text{ т.е. } (\lambda T+(1-\lambda)S)^{\sim}=\tilde{T}_0$$

для некоторого $T_0\in U$. Следовательно, $\lambda T+(1-\lambda)S\in U$.

Подмножество $U\subset L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ называется квазивыпуклым, если $U\cap L_1(\mathcal{B})$ – выпуклое для любой максимальной коммутативной $*$ - подалгебры $\mathcal{B}$ в $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. Очевидно, что всякое выпуклое множество является квазивыпуклым.

Т е о р е м а 2.4.2. Пусть U – симметричное подмножество в $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$. Следующие условия эквивалентны:

1. U – выпукло и замкнуто в $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$;
2. U – квазивыпукло и замкнуто в $L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$;
3. Существует максимальная коммутативная $*$ -подалгебра $\mathcal{B}$ в $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, такая, что $U_{\mathcal{B}}=U\cap L_1(\mathcal{B})$ – выпукло и замкнуто в $L_1(\mathcal{B})$.
4. $\tilde{U}$ – выпукло и замкнуто в $L_1(0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликации $1\Longrightarrow 2\Longrightarrow 3$

очевидны. Покажем справедливость импликации $3 \Longrightarrow 4$. Отождествим $L_1(\mathcal{B})$ с $L_1(\Omega,\mu)$. Пусть $\pi:\Omega \longrightarrow [0,1]$ – сохраняющее меру отображение. Тогда, если $f\in\tilde{U}$ и $T=f\circ\pi$, то $T\in L_1(\mathcal{B})$ и $\tilde{T}=\tilde{f}=\tilde{S}$ для некоторого $S\in U$. Поскольку U – симметрично, то $T\in U$. Если $f_n\in\tilde{U}$, $f\in L_1(0,1)$ и $\|f_n-f\|_1 \longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$, то положив $T_n=f_n\circ\pi$, $T=f\circ\pi$ получим, что $T_n\in U_{\mathcal{B}}$, $T\in L_1(\mathcal{B})$ и $\|T_n-T\|_1=\|f_n-f\|_1\longrightarrow 0$. Следовательно, $T\in U_{\mathcal{B}}$, и поэтому $f\in\tilde{U}$, т.е. $\tilde{U}$ – замкнуто в $L_1(0,1)$. Если $f,g\in\tilde{U}$,

$$\lambda\in[0,1],\ T=f\circ\pi,\ S=g\circ\pi,\ \text{то}$$

$$T,S\in U_{\mathcal{B}},\ \lambda T+(1-\lambda)S\in U_{\mathcal{B}},\ (\lambda T+(1-\lambda)S)^{\sim}=(\lambda f+(1-\lambda)g)^{\sim},$$

т.е. $\lambda f+(1-\lambda)g\in\tilde{U}$. Это означает, что $\tilde{U}$ – выпуклое множество.

Осталось установить справедливость импликации $4\Longrightarrow 1$. Из симметричности, выпуклости и замкнутости множества $\tilde{U}$ следует, что орбита $\Omega(f)\subset\tilde{U}$ для всех $f\in\tilde{U}$ (см. [71]), т.е. $\tilde{U}$ – вполне симметрично. В силу предложения 2.4.1. множество U – выпукло. Пусть $T_n\in U$, $T\in L_1(\mathcal{O}\!\iota)$ и $\|T_n-T\|_1\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в силу предложения 1.3.1 $\tilde{T}_n\longrightarrow\tilde{T}$ почти всюду.

Так как $\widetilde{U}$ – нормальное множество и $\widetilde{T}_n \in \widetilde{U}$, то функции $f_n = \inf\limits_{m \geq n} \widetilde{T}_m$ также принадлежат $\widetilde{U}$; при этом $f_n \uparrow \widetilde{T}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - \widetilde{T}\|_1 = 0$. Используя замкнутость $\widetilde{U}$ и симметричность U, получим, что $T \in U$. Таким образом, U – выпуклое замкнутое подмножество в $L_1(\mathfrak{A})$.

Следствие 2.4.3. Пусть ρ – неотрицательная функция на $\mathfrak{A}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\rho(T) = \rho(S)$, при $\widetilde{T} = \widetilde{S}$;

2) $\rho(\lambda T) = \lambda\rho(T)$, $\rho(T+S) \leq \rho(T) + \rho(S)$, если λ – неотрицательное число, $TS = ST$, $T \geq 0$, $S \geq 0$;

3) $\rho(T) = \sup \rho(T_n)$, если $0 \leq T_n \uparrow T$, $T_n T_m = T_m T_n$ для всех $n, m = 1, 2 \ldots$. Тогда

$\rho(\lambda T) = |\lambda| \rho(T)$, $\rho(T+S) \leq \rho(T) + \rho(S)$ для всех $T, S \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел; при этом, если $T_n, T \in \mathfrak{A}$, $0 \leq T_n \uparrow T$, то $\rho(T) = \sup \rho(T_n)$.

Доказательство. Покажем, что симметричное множество $U = \{ T \in \mathfrak{A} : \rho(T) \leq 1 \}$ – выпукло. Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторая максимальная коммутативная $*$ – подалгебра в $\mathfrak{A}$, $U_{\mathfrak{B}} = U \cap \mathfrak{B}$. В силу предположений множество $U_{\mathcal{B}}$ – выпукло, симметрично и нормально в $\mathcal{B}$. Отождествим $L_1(\mathcal{B})$ с $L_1(\Omega, \mu)$, и пусть $\mathfrak{T}$ – сохраняющее меру отображение из Ω в $[0,1]$. Для каждого $f \in \widetilde{U}$ элемент $g = f \circ \mathfrak{T}$ принадлежит $U_{\mathcal{B}}$. Отсюда следует, что $\widetilde{U}$ – симметричное, выпуклое, нормальное подмножество в $L_\infty(0,1)$. Обозначим, через $\mathcal{B}$ замыкание $\widetilde{U}$ в $(L_1(0,1), \|\cdot\|_1)$. Как и в [4] показывается, что B – симметричное, выпуклое, нормальное подмножество в $L_1(0,1)$. Покажем, что $B \cap L_\infty(0,1) = \widetilde{U}$. Достаточно установить, что из $f_n \in \widetilde{U}$, $f_n \geq 0$, $f \in L_\infty(0,1)$ и $\|f_n - f\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$ следует, $f \in \widetilde{U}$. Выбирем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ так, чтобы $g_i = \left(\inf\limits_{k \geq i} f_{n_k}\right) \uparrow f$ (см. [7], стр. 143). Положив $g_i = g_i \circ \mathfrak{T}$,

$g = f \circ \mathfrak{T}$, получим: $g_i \in U_{\mathcal{B}}$, $g_i \uparrow g$.

Следовательно, $\rho(g) = \sup \rho(g_i) \leq 1$, т.е.

$g \in U_{\mathcal{B}}$, и поэтому $f \in \widetilde{U}$.

В силу теоремы 2.4.2. множество $V = \{T \in L_1(\mathfrak{A}) : \widetilde{T} \in B\}$ – выпукло. Ясно, что $U \subset V \cap \mathfrak{A}$.

С другой стороны, если $T \in V \cap \mathfrak{A}$, то

$\widetilde{T} \in B \cap L_\infty(0,1) = \widetilde{U}$ и, следовательно, $\widetilde{T} = \widetilde{g}$ для некоторого $g \in U_{\mathcal{B}}$, что влечет $\rho(T) \leq 1$, т.е. $T \in U$. Таким образом $U = V \cap \mathfrak{A}$ и, поэтому U - выпуклое множество.

Пусть $T \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $S = \widetilde{T} \circ \pi$. Тогда $S \in \mathcal{B}$, $(\lambda T)^{\sim} = (|\lambda| |S|)^{\sim}$ и

$$p(\lambda T) = p(|\lambda| |S|) = |\lambda| p(|S|) = |\lambda| p(T).$$

Используя эти равенства и выпуклость U - получим, что

$$p(T+S) \leq p(T) + p(S) \quad \text{для всех } T, S \in \mathfrak{A}.$$

Осталось показать, что из $0 \leq T_n \uparrow T$; $T_n, T \in \mathfrak{A}$ следует $p(T) = \sup p(T_n)$.

Положим $S_n = \widetilde{T}_n \circ \pi$, $S = \widetilde{T}_0 \circ \pi$. Так как $\|T_n - T\|_1 \longrightarrow 0$, то $\widetilde{T}_n \uparrow \widetilde{T}$ (см. предложение I.3.I), поэтому $S_n \uparrow S$ и $p(T) = p(S) =$

$$= \sup p(S_n) = \sup p(T_n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Ю.А. Некоторые теоремы о нормированных структурах. - Вестник ЛГУ, 1971, № 13, с. 5-11.

2. Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. М.,"Мир", 1980, 264 с.

3. Браверман М.Ш. О геометрических свойствах симметричных пространств. - Сиб. мат.журн., 1974, Т.15, № 3, с. 675-679.

4. Браверман М.Ш., Меклер А.А. О свойстве Харди-Литтлвуда для симметричных пространств. - Сиб. мат.журн., 1977, Т.18, № 3, с. 522-540.

5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., "Наука", 1965, 448 с.

6. Кальдерон А.П. Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. - Сб. переводов "Математика", 1965, Т.9, № 3, с. 56-129.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., "Наука", 1977, 743 с.

8. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., "Физматгиз", 1958, 271 с.

9. Крейн С.Г. (редактор). Функциональный анализ. СМБ, М.,"Наука", 1972, 544 с.

10. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Шкалы банаховых структур измеримых функций. - Труды ММО, 1967, Т.17, с.293-322.

II. К р е й н С.Г., П е т у н и н Ю.И., С е м е н о в Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., "Наука, I978, 400 с.

I2. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О топологически рефлексивных КВ - пространствах. Доклады АН СССР, I964, Т.I58, № 3, с. 5I6-5I9.

I3. М е к л е р А.А. Операторы усреднения по σ -подалгебрам в идеалах пространства $L_1(\mu)$. Дисс. канд. физ.-мат.наук, Ленинград, ЛИАП, I977, 96 с.

I4. М и т я г и н Б.С. Нормированные идеалы промежуточного типа. - ИАН СССР, I964, Т.28, № 4, с.8I9-832.

I5. М у р а т о в М.А. Некоммутативные пространства Орлича. - Доклады АН УзССР, I978, № 6, с. II-I3.

I6. М у р а т о в М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов. Дисс. канд. физ.-мат.наук, Ташкент, ТашГУ, I979, I33 с.

I7. Н а й м а р к М.А. Нормированные кольца. М., "Наука", I968, 664 с.

I8. Н е в ё Ж. Математические основы теории вероятностей. М., "Мир", I969, 309 с.

I9. О в ч и н н и к о в В.И. О S - числах измеримых операторов. - Функц. анализ, I970, Т.4, вып.3, с.78-85.

20. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов. Доклады АН СССР, I970, Т.I9I, № 4, с. 769-77I.

2I. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов. - Тр. НИИ матем. ВГУ, I97I, вып.3, с. 88-I07.

22. Р у с с у Г.И. О промежуточных симметрично-нормированных идеалах. - Функц. анализ, 1969, Т.3, вып.2,с.94-95.

23. Р у с с у Г.И. Симметричные пространства функций, не обладающих свойством мажорантности.-Матем. исследования, 1969, Т.4, с.82-93.

24. С е м ё н о в Е.М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докт. дисс. Воронеж, ВГУ, 1968, 170 с.

25. С у к о ч е в Ф.А. Интерполяционная теорема для некоммутативных симметричных пространств. В кн.: "Математический анализ и теория вероятностей". Сб. науч. трудов ТашГУ, 1984, с.97-100. Деп. УзНИИНТИ,16.07.84, № 197, Уз-84 Деп. (РЖмат., 1985, 1Б1141).

26. С у к о ч е в Ф.А. Порядковые свойства норм симметричных пространств измеримых операторов. В кн.: "Математический анализ и теория вероятностей". Сб. науч. трудов ТашГУ, 1985, с. 49-54.

27. С у к о ч е в Ф.А. Построение некоммутативных симметричных интерполяционных пространств. Мат-лы науч. конф. мол. уч. ин-та математики АН УзССР, Ташкент, 1984, ДЕП ВИНИТИ 19.12.85, № 8756-В, с.43-45. (РЖмат. 1985, 4Б1041 ДЕП).

28. С у к о ч е в Ф.А. (en) - инвариантные свойства симметричных пространств измеримых операторов. - Доклады АН УзССР, 1985, № 7, с. 6-8.

29. С у к о ч е в Ф.А. Построение некоммутативных симметричных пространств. Доклады АН УзССР, 1986, № 8, с. 4-6.

30. С у к о ч е в Ф.А., Ч и л и н В.И. Описание замкнутых выпуклых симметричных подмножеств в некоммутативных L_p - пространствах. Тезисы XI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах, 1986, Челябинск, с. 95.

31. Т и х о н о в О.Е. Интегрируемые билинейные формы и интеграл по операторнозначной мере. - Изв. Вузов. Мат., 1982, № 3, с.76-80.

32. Т и х о н о в О.Е. Пространства L_p относительно веса на алгебре Неймана. - Изв. Вузов. Мат., 1982, № 8, с. 76-78.

33. Т р у н о в Н.В. О некоммутативном аналоге пространства L_p. - Изв. Вузов. Мат., 1979, № 11, с. 69-77.

34. Т р у н о в Н.В. Пространства L_p, ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана. В сб.: "Конструктивная теория функций и функц. анализ", Казань, 1981, № 3, с. 88-92.

35. Т р у н о в Н.В. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I. - Изв. Вузов. Мат., 1978, № 7, с. 79-88.

36. Т р у н о в Н.В. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, II. - Изв. Вузов. Мат., 1978, № 12, с. 88-98.

37. Ч и л и н В.И. Порядковая характеризация некоммутативных L_p - пространств. В кн.: "Теория функций и ее приложение". Сб. научных трудов, Кемерово, 1985, с. 19-23.

38. Ч и л и н В.И. Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов. В сб. "Мат. анализ и алгебра". Труды ТашГУ, 1986, с. 76-80.

39. Ш е р с т н ё в А.Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана. - Функц. анализ и его прил., 1974, Т.8, № 3, с. 89-90.

40. Ш е р с т н ё в А.Н. Каждый гладкий вес является ℓ - весом. - Изв. Вузов. Мат., 1977, № 8, с.88-91.

41. A k e m a n n C.A., A n d e r s e n T., P e d e r s e n G.K. Triangle inequalities in an operator algebras. - Linear and Multilinear Algebra, 1982, v.11, No 2, p. 167-178.

42. A r a k i H., M a s u d a T. Positive cones and L_p - spaces for von Neumann algebras. - Publ. Res. Inst.Math. Sci., 1982, v.18, No 2, p.339-411.

43. A r a z y J. Some remarks on interpolation theorems and the Boundedness of the Triangular Projection in unitary matrix spaces. Integral Equations and Operator Theory, 1978, v. 1, No 4, p. 453-495.

44. A r a z y Y. Basic Sequence, Embeddings and the Uniqueness of the Symmetric Structure in Unitary Matrix Spaces. J.Funct. Anal., 1981, v.40, No 3, p.302-340.

45. A r a z y J. On the geometry of the unit ball of unitary matrix spaces. Integral Equations and Operator Theory, 1981, v.4, No 2, p. 151-171.

46. A r a z y J., Lindenstrauss J. Some linear topological properties of the spaces Cp of operators on Hilbert space. - Compos. Math., 1975, v.30, No 1, p. 81-111.

47. Bessaga C., Pelczynski A. On extreme points in separable conjugate spaces. Isr. J.Math., 1966, v.4, No 4, p. 262-264.

48. Burlack J.A.A., Rankin R.A., Robertson A.P. The packing of spheres in the space ℓ_p. - Proc. Glasgow M.A., 1958, v.4, p. 145-146.

49. Calderon A.P. Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewisz. - Studia Math., 1966, v. 26, p. 273-299.

50. Chong K.H., Rice N.M. Equimeasurable rearrangement of functions, - Queen's papers pure and appl. math., 1971, v.28, 177 p.

51. Connes A. On the spatial theory of von Neumann algebras. - J. Funct. Anal., 1980, v.35, No 2, p. 153-164.

52. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertian (algebres de von Neumann). Paris, "Gauthuer - Villars ed,", 1969, 367 p.

53. Giel C., Cleaver C. Packing spheres in Cp - spaces. - Studia Math., 1982, v.72, No 1, p.1-8.

54. Gordon Y., Lewis D.R. Absolutely summing operators and local unconditional structure. - Acta Math., 1974, v.133, No 1-2, p. 27-48.

55. Haagerup U. L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra. - Colloq. int. CNRS, 1979, No 274, p. 175-184.

56. Hilsum M. Les espaces L^p d'une algebre de von Neumann definies par la derivee spatiale. - J.Funct. Anal. 1981, v.40, No 2, p. 151-169.

57. H o l u b J.R. A Characterization of the Norm Ideals of Compact Operators on Hilbert Space. J.Math. Anal. Appl., 1975, v.50, No 3, p.596-606.

58. K a t a v o l o s A. Are non-commutative L_p -spaces really non-commutative. - Can. J.Math., 1981, v.33, No 6, p. 1319-1327.

59. K o s a k i H. Non-commutative Lorentz spaces associated with a semifinite von Neumann algebras and applications. - Proc. Japan. Acad., 1981, v. 57, ser. A., No 6, p. 303-306.

60. K o s a k i H. Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra : non-commutative L^p - spaces. - J. Fuct. Anal., 1984, v.56, No 1, p. 25-79.

61. K o t t m a n A. Subsets of the unit balls that are separeted by more then one. - Studia Math., 1975., v. 53, No 1, p. 15-27.

62. K u n z e R.A. L^p - Fourier transforms on locally compact unimodular groups. - Trans. Amer. Math. Soc., 1958, v. 89, p. 519-540.

63. K w a p i e n S., P e l c z y n s k i A. The main triangle projection in matrix spaces and its applications. - Studia Math., 1970, v.34, No 1, p.43-68.

64. L e w i s D.R. An isomorphic characterization of the Schmidt class. - Compos. Math., 1975, v.30, No 4, p. 293-297.

65. L u x e m b u r g W.A.I. Rearrengement invariant Banach functions spaces. - Queen's papers in pure and appl. math., 1967, v. 10, p. 83-144.

66. M u r r a y F.J., v o n N e u m a n n J. On rings of operators, I. – Ann. Math., 1936, v.41, p.116-229.

67. M u r r a y F.J., v o n N e u m a n n J. On rings of operators, II. – Trans. Amer.Math. Soc., 1937, v.41. p. 208-248.

68. M u r r a y F.J., v o n N e u m a n n J. On rings of operators, IV. – Ann. Math.,1943, v. 44, p.716-808.

69. V o n N e u m a n n J. Some matrix – inequalities and metrization of matric – space. – Изв.ин-та мат. и мех. Томского ун-та, I937, т.I, вып.3, с.286-300.

70. V o n N e u m a n n J. On rings of operators, III. – Ann. Math., 1940, v.41, p. 94-161.

71. R y f f J.V. Orbits of L^1 – functions under doubly stochastic transformations. – Trans. Amer. Math.Soc., 1965, v. 117, p. 92-100.

72. R y f f J.V. Exteme points of some convex subsets of $L_1(0,1)$ – Proc. Amer. Math. Soc., 1967, v.18, No 6, p. 1026-1034.

73. S a k a i S. C^* – algebras and W^* -algebras. Berlin, "Springer – Verlag", 1971, 256 p.

74. S c h a t t e n R. Norm ideals of completely continious operators. Berlin, "Springer – Verlag", 1960, 81 p.

75. S e g a l I.E. A non-commutative extension of abstract integration. – Ann. Math., 1953, v.57, p.401-457.

76. S t i n e s p r i n g W.F. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. – Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 90, No 1, p.15-56.

77. S t r a t i l a S., Z s i d o L. Lectures on von Neumann Algebras. England, "Abacus Press", 477 p.

78. T a k e s a k i M. Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Lect. Notes Math., 1970, v. 128, 123 p.

79. U m e g a k i H. Conditional expectation in an operator algebra. - Tohoku Math. J., 1954, v.6., p. 177-181.

80. W e l l s J.H., W i l l i a m s L.R. Embedding and Extension in Analysis. Berlin, "Springer-Verlag", 1975, 110 p.

81. Y e a d o n F.J. Convergence of measurable operators. - Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1973, v.74, p.257-268.

82. Y e a d o n F.J. Non-commutative L_p - spaces, - Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v.77, p. 91-102.

83. Y e a d o n F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras, II,- Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1980, v. 88, p. 135-147.

84. Y e a d o n F.J. Isometries of non-commutative L^p - spaces. - Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1981, v. 90, p. 41-50.