Интерпретация релевантной логики в топосах

В.Л.Васюков

В статье предлагается теоретико-категорная семантика для релевантной логики основывающаяся на конструкции топоса функторов из релевантной алгебры (рассматриваемой как категория предпорядка, снабженной специальными функторами) в категорию множеств Set. Доказана полнота системы релевантной логики R относительно предложенной семантики.

1. Введение

1.1. Хорошо известно, что в релевантной логике не имеет места схема аксиом $A\to(\neg A\to B)$ и правило $A,\neg A\vdash B$(см. [8]). Следовательно, она может быть естественным образом использована в качестве базиса для противоречивых, но нетривиальных теорий, т.е. паранепротиворечивых теорий. В этой связи представляет интерес изучение смысла паранепротиворечивости, проявляющееся в моделях релевантных систем.

1.2. В.И.Шалак в [4] предложил конструкцию так называемой релевантной логической категории, служащей в качестве модели для релевантной первопорядковой системы *RQ*. В отличие от данной конструкции, предлагаемая версия категорной семантики основывается на переформулировке релевантной алгебры как категории предпорядка, снабженной функторами, призванными передать свойства релевантного отрицания и импликации – так называемой *RN*–категории (см. [1]). Идея подобного подхода восходит к А.Рискосу и М.Л.Лайте [7], применившим подобную процедуру к булевой алгебре, что привело к конструкции так называемых *N*–категорий. В свою очередь, в русле подобного подхода лежит и результат автора [10] о переформулировке алгебры да Косты как категории предпорядка, снабженной функтором отрицания и резидуалом, моделирующими свойства импликации (*CN*-категории).

1.3. Модификация *N*–категорий в *RN*–категории, необходимая для передачи свойств релевантных алгебр, позволяет предложить вторую версию категорной семантики для релевантной логики, основывающуюся на конструкции категории функторов из малой категории (в нашем случае - *RN*-категории) в категорию множеств. Р.Гольдблатт [2] применил подобную конструкцию для получения категорной семантики интуиционистской логики, когда алгебра Гейтинга играет роль малой категории. Кроме того, автор в [10] использовал подобную конструкцию для получения категорной семантики паранепротиворечивой логики да Косты, основанной на категории функторов из *CN*–категории в категории множеств. Подобная конструкция будет представлять собой топос, а полнота логики да Косты доказывалась по отношению к подобной разновидности топосов.

1.4. Следует отметить, что существует альтернативная семантика паранепротиворечивых логик, основывающиеся на ко-гейтинговых алгебрах, разработанная Мортенсеном-Лейверсом-Джемсом [5, главы 11 и 12]. Еще один подход можно найти в работе [6]. В то же время, в обоих подходах отрицание трактуется как импликация в некую константу ($\perp$), что ведет к невозможности расширения этой техники на случай других неклассических отрицаний.

1.5. Наша теоретико-категорная конструкция будет существенно основываться на алгебрах, отвечающих релевантной логике, и теории двойственности для них. Согласно Уркхарту [9, p.264][1] релевантная алгебра представляет собой алгебру вида $\langle L,\wedge,\vee,\odot,\to,\neg,1,\top,\perp\rangle$, где

1. $\langle L,\wedge,\vee,,\perp\rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка;

2. $a\odot(b\vee c) = (a\odot b)\vee(a\odot c)$;

[1] Подобный алгебраический анализ можно найти в [3].

3. $(b\vee c)\odot a = (b\odot a)\vee(c\odot a)$;
4. $\neg(a\vee b) = \neg a\wedge\neg b$;
5. $\neg(a\wedge b) = \neg a\vee\neg b$;
6. $\neg\top = \bot$ and $\neg\bot = \top$;
7. $a\odot\bot = \bot\odot a = \bot$;
8. $1\odot a = a$;
9. $a\odot b \leq$ c iff $a \leq b\rightarrow c$.

Другими словами, релевантная алгебра является дистрибутивным решеточно-упорядоченным группоидом, в котором 1 представляет собой левую группоидную единицу, $\neg$ есть двойственный решеточный гомоморфизм, а $a\rightarrow b$ является левым резидуалом[2] из a в b.

Важным случаем релевантной алгебры является *моноид Де Моргана*, введенный Дж.Данном, который представляет собой алгебраический эквивалент логики R. Его можно описать как релевантную алгебру, в которой $\odot$ ассоциативна и коммутативна, и удовлетворяет неравенству $a \leq a\odot a$; кроме того моноид Д Моргана удовлетворяет постулатам двойного отрицания и контрапозиции, $\neg\neg a = a$ и $a\odot b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a\odot\neg c \leq \neg b$.

1.6. Релевантная алгебра определяется соответствующую логику в языке $\mathscr{L}$ со связками $\&,\vee,\circ,\supset,\neg,t,T,F$ следующим образом [9, p.265]. Если $\mathcal{R}$ является релевантной алгеброй, тогда интерпретация I языка $\mathscr{L}$ в $\mathcal{R}$ определяется как отображение из $\mathscr{L}$ в $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условиям:

$I(A\&B) = I(A)\wedge I(B)$;
$I(A\vee B) = I(A)\vee I(B)$;
$I(A\circ B) = I(A)\odot I(B)$;
$I(A\supset B) = I(A)\rightarrow I(B)$;
$I(\neg A) = \neg I(A)$;
$I(t) = 1$;
$I(T) = \top$;
$I(F) = \bot$.

Формула A значима в $\mathcal{R}$ если $1 \leq I(A)$ для любой интерпретации I языка $\mathscr{L}$ в $\mathcal{R}$; логика, определяемая $\mathcal{R}$ представляет собой множество всех формул, значимых в $\mathcal{R}$. Если Γ является классом алгебр, тогда логика, определяемая Γ представляет собой множество формул, значимых во всех алгебрах из Γ.

Класс релевантных алгебр, определяет логику RL, которая может быть аксиоматизирована с помощью следующих схем аксиом и правил вывода:

A1. $(A\&B) \supset A$
A2. $(A\&B) \supset B$
A3. $(A \supset B)\&(A \supset C) \supset (A\supset B\&C)$
A4. $A \supset A\vee B$
A5. $B \supset A\vee B$
A6. $(A \supset C)\&(B \supset C) \supset (A\vee B \supset C)$
A7. $A\&(B\vee C) \supset (A\&B)\vee(A\&C)$

[2] Обычно для данной алгебраической структуры $(S,\leq,\otimes)$, где $\leq$ есть частичное упорядочение на S, а $\otimes$ является бинарной операцией на S, бинарная операция $\Rightarrow$ есть (левый) *резидуал*, если справедливо следующее тождество:
$x\otimes y\leq z$ тогда и только тогда, когда $y\leq x\Rightarrow z$ (*резидуальность*).

A8. $\neg A \& \neg B \supset \neg(A \vee B)$
A9. $\neg(A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$
A10. $t \& (t \supset (A \supset A))$
A11. $(A \supset T) \& (\neg T \supset A)$
A12. $(F \supset A) \& (A \supset \neg F)$
R1. $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$
R2. $\dfrac{A,\ B}{A \& B}$
R3. $\dfrac{A \supset B}{(B \supset C) \supset (A \supset C)}$
R4. $\dfrac{B \supset C}{(A \supset B) \supset (A \supset C)}$
R5. $\dfrac{(A \circ B) \supset \mathrm{C}}{A \supset (B \supset C)}$
R6. $\dfrac{A \supset B}{(\neg B \supset \neg A)}$

В частности, базисная логика B Мейера и Роутли получается путем добавления аксиом
A13. $A \vee \neg A$
A14. $\neg\neg A \supset A$

2. *RN*-категории

2.1. ***Определение.*** R-категория $\mathcal{C}$ представляет собой (группоидальную) категорию предпорядка, снабженную ковариантным бифунктором $\otimes$: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, таким, что

(i) в $\mathcal{C}$ имеются конечные произведения $\langle$-,-$\rangle$, копроизведения [-,-] и $\mathcal{C}$ дистрибутивна по отношению к ним, т.е. $\langle [a,b],[a,c] \rangle \cong [a, \langle b,c \rangle]$ для любых объектов a,b,c из $\mathcal{C}$;

(ii) для любых объектов a,b,c из $\mathcal{C}$ существуют следующие естественные изоморфизмы:

$a \otimes [b,c] \cong [a \otimes b, a \otimes c]$,

$[b,c] \otimes a \cong [b \otimes a, c \otimes a]$,

т.е. бифунктор сохраняет копроизведения.

(iii) $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование относительно $\otimes$, т.е. следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
(a \Rightarrow b) \otimes a \arrow[r, "ev"] & b \\
c \otimes a \arrow[u, "\hat{g} \otimes 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\Rightarrow$ есть экспоненциал;

(iv) выполняются следующие функторные уравнения:

(a) $(g_1 f_1) \otimes (g_2 f_2) = (g_1 \otimes g_2)(f_1 \otimes f_2)$;

(b) $1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$.

2.2. Легко видеть, что если экспоненциал $\Rightarrow$ в N-категориях играет роль относительного псевдодополнения [7, p.507] в том смысле, что псевдодополнение является резидуалом по отношению к произведениям $\langle$-,-$\rangle$, то в RN–категориях $\Rightarrow$ представляет собой резидуал по отношению к $\otimes$. То есть, стрелка $c \to a \Rightarrow b$ существует всякий раз, когда имеется стрелка $c \otimes a \to b$ и наоборот.

2.3. R-категория *моноидальна*, если:

(v) в $\mathcal{C}$ имеется объект 1, такой, что $1\otimes a \cong a$, и имеется стрелка $a\to a\otimes 1$ для всех a из $\mathcal{C}$;
(vi) для любых объектов a,b,c из $\mathcal{C}$ $a\otimes(b\otimes c) \cong (a\otimes b)\otimes c$.

2.4. Моноидальная *R*-категория является симметрической *моноидальной*, если:
(vii) для любых объектов a,b в $\mathcal{C}$ имеется трелка $a\otimes b \to b\otimes a$.

2.5. Симметрическая моноидальная *R*-категория будет релевантной, если:
(viii) для любого объекта a в $\mathcal{C}$ существует стрелка $a \to a\otimes a$.

2.6. ***Определения.*** *RN*-категория $\mathcal{C}$ представляет собой *R*-категорию, снабженную контравариантных функтором $\mathcal{N}$: $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, таким, что
(ix) $\mathcal{N}^2 a \cong a$ для любого a в $\mathcal{C}$;
(x) Для любой стрелки $a\otimes b\to c$ в $\mathcal{C}$ имеется стрелка $a\otimes\mathcal{N}c\to\mathcal{N}b$.

2.7. Легко убедиться, что любая *RN*-категория обладает следующими свойствами:

2.7.1. $\mathcal{N}\langle a,b\rangle \cong [\mathcal{N}a,\mathcal{N}b]$.

2.7.2. $\mathcal{N}[a,b] \cong \langle\mathcal{N}a,\mathcal{N}b\rangle$.

2.7.3. В *RN*-категории $\mathcal{C}$ (основанной на симметричной моноидальной *R*-категории) $\mathcal{N}(a\otimes\mathcal{N}b)$ будет экспоненциалом с точностью до изоморфизма.

3. Интерпретация в *RN*-категориях

3.1. Интерпретация релевантной логики в *RN*-категориях основывается на следующем словаре перевода:

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$	$\neg A$	$A \supset B$
a	b	$[a,b]$	$\langle a,b\rangle$	$\mathcal{N}a$	$a \Rightarrow b$

Процесс интерпретации аксиом и правил очевиден. Например, интерпретацией

$(A \supset B)\&(A \supset C) \supset (A\supset B\&C)$

будет

$\langle a \Rightarrow b, a \Rightarrow c\rangle \Rightarrow (a \Rightarrow\langle b,c\rangle)$

Но утверждение, что это аксиома, означает что

$1 \to \langle a \Rightarrow b, a \Rightarrow c\rangle \Rightarrow (a \Rightarrow\langle b,c\rangle)$

представляет собой стрелку *RN*-категории. По определению резидуала это дает нам стрелку

$1\otimes\langle a \Rightarrow b, a \Rightarrow c\rangle \to (a \Rightarrow\langle b,c\rangle)$.

Поскольку $1\otimes a \cong a$, то мы получаем стрелку

$\langle a \Rightarrow b, a \Rightarrow c\rangle \to (a \Rightarrow\langle b,c\rangle)$.

Точно таким же образом мы интерпретируем правила вывода. Например, интерпретация R1 вначале дает нам стрелки $1\to a$ и $1\to a \Rightarrow b$. Но последняя стрелка дает нам $a\to b$ и затем мы получаем стрелку $1\to b$.

3.2. Легко убедиться, что подобная интерпретация аксиом и правил *RL* с помощью нашего словаря перевода, не приводит ни к каким новым условиям для *RN*-категорий. Действительно, если мы примем во внимание, что для любой стрелки $a\to b$ мы имеем $\langle a,b\rangle \cong a$, $[a,b] \cong b$ и наоборот, то тогда нетрудно перенести соответствующие алгебраические результаты в *RN*-категории. Например, поскольку $a\to b$ влечет $[a,b] \cong b$, то $[(a\otimes c),(b\otimes c)] \cong [a,b]\otimes c \cong b\otimes c$, т.е. мы имеем стрелку $a\otimes c \to b\otimes c$. Но не составляет труда убедиться, что это фактически дает нам интерпретацию R4.

3.3. ***Определение.*** Пусть $\mathcal{C}_{RN}$ и $\mathcal{C}'_{RN}$, будут две *RN*-категории (с функторами $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ и бифункторами $\otimes$ и $\otimes'$ соответственно). *RN*-функтор $\mathcal{F}$:$\mathcal{C}_{RN} \to \mathcal{C}'_{RN}$ представляет собой функтор со следующими свойствами (для $a,b,1$ в $\mathcal{C}_{RN}$ и $1'$ в $\mathcal{C}'_{RN}$):

(i) $\mathcal{F}1 \cong 1'$;

(ii) $\mathcal{F}[a,b] \cong [\mathcal{F}a, \mathcal{F}b]$;

(iii) $\mathcal{F}\langle a,b\rangle \cong \langle \mathcal{F}a, \mathcal{F}b\rangle$;

(iv) $\mathcal{F}(a\otimes b) \cong \mathcal{F}a\otimes' \mathcal{F}b$;

(v) $\mathcal{F}\,\mathcal{N} \cong \mathcal{N}'\mathcal{F}$.

Следующие результаты получаются путем RN-категорной модификации понятий релевантной алгебры множеств и фильтров в релевантных алгебрах (см. [9, p.268], [3, c.464], [1]).

3.4. ***Предложение***. *Каждая RN-категория имеет полное расширение.* (полнота означает здесь существование бесконечных произведений и копроизведений).

3.5. ***Предложение***. *Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ будут RN-категориями, где $\mathcal{B}$ является расширением $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ полна. Любой RN-функтор $\mathcal{F}$: $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ может быть продолжен до RN-функтора $\mathcal{H}$: $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$.*

Все дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в [1].

4. Топосы для релевантной логики

4.1. Развивая наш подход, мы получаем еще одну категорную семантику релевантной логики, основывающейся на конструкции категории $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$-функторов из *RN*-категории $\mathcal{A}$ в категорию множеств $\mathcal{S}et$. Известно [2], что для любой малой категории $\mathcal{C}$ категория $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ всегда будет топосом. Именно это положение и служит отправным моментом при получении категорной семантики для интуиционистской логики путем трансформации алгебры Гейтинга в малую категорию.

4.2. Принимая *RN*-категории в качестве исходного пункта для подобного конструирования в случае релевантной логики, можно попытаться адаптировать топос $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ в качестве модели релевантной логики. С этой целью мы начнем со следующих определений и фактов.

Известно, что для ограниченной дистрибутивной решетки L дуальное (двойственное) пространство L, $S(L)$ будет упорядоченным топологическим пространством, в котором множество точек S является семейством всех простых фильтров на L, упорядоченных по включению. *Релевантное пространство* является структурой $\mathcal{R} = \langle S,R,*,t\rangle$, где S есть наше семейство всех простых фильтров. R есть тернарное отношение на S, * - унарная функция на S, $t \subseteq S$. Для $A,B \subseteq S$ пусть $A\circ B$ будет $\{z\colon \exists xy(Rxyz \;\&\; x\in A \;\&\; y\in B\}$, и пусть $A\to B$ будет $\{x\colon \forall yz((Rxyz \;\&\; y\in A)$ влечет $z\in B\}$. Выполняются следующие условия:

1. Если $A,B\in L(S)$, то $A\circ B$ и $A \to B$ являются клопенами;
2. $(Rxyz \;\&\; x'\leq x \;\&\; y'\leq y \;\&\; z'\leq z)$ влечет $Rx'y'z'$;
3. $\forall xyz(\neg Rxyz$ влечет $\exists A,B\in L(S)(x\in A \;\&\; y\in B \;\&\; z\notin A\circ B)$;
4. Функция $x \mapsto x^*$ является непрерывным убывающим отображением на S;
5. t принадлежит $L(S)$ и удовлетворяет условию: $\forall yz(y\leq z$ эквивалентно $\exists x(x\in t \;\&\; Rxyz))$,

где $L(S)$ есть двойственная к S решетка.

Двойственная к $\mathcal{R}$ алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ определяется на решетке $L(S)$ путем добавления операций $A\circ B$, $A\to B$, $\neg A = \{z\colon z^*\notin A\}$ и определения константы 1 как t. Для релевантной алгебры L двойственное пространство L, $\mathcal{R}(L)$, определяется путем добавления к решетке всех простых фильтров ограниченной дистрибутивной решетки тернарного отношения $x\cdot y \subseteq z$, определяя x^* для $x\in \mathcal{R}(L)$ как $\{a\colon \neg a\notin x\}$, и полагая $t = \{x\in S(L)\colon 1 \subseteq x\}$. Справедливо следующее утверждение [9, p.268]:

(1) Алгебра, двойственная к релевантному пространству, является релевантной алгеброй;

(2) Пространство, двойственное к релевантной алгебре, представляет собой релевантное пространство.

Более того:

(3) Если $\mathcal{A}$ является релевантной алгеброй, то $\mathcal{A}$ изоморфна ее второму дуалу, $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L}))$, что дается отображением $\eta(a) = \{x\in \mathcal{R}(\mathcal{L}): a\in x\}$;

(4) Если $\mathcal{R}$ является релевантным пространством, то $\mathcal{R}$ r-гомеоморфно (т.е. упорядоченно гомеоморфно и изоморфно по отношению к тернарному отношению, *-операции и единице) второму дуалу $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{R}))$, при отображении $\theta(x) = \{B\in \mathcal{A}(\mathcal{R}): x\in \mathcal{R}\}$.

4.3. Для наших целей удобно использовать следующие понятия [9, p.273]. Если x,y являются элементами релевантного пространства $\mathcal{R}$, то определим $x\circledcirc y$ как множество $\{z\in \mathcal{R}: Rxyz\}$, $x\twoheadrightarrow y$ будет множеством $\{z\in \mathcal{R}: Rzxy\}$ и $\neg\, x = \{z: z\notin x^*\}$; для X,Y – подмножеств пространства $\mathcal{R}$ – определяем $X\circledcirc Y$ как множество $\bigcup\{x\circledcirc y: x\in X, y\in Y\}$, $X\twoheadrightarrow Y$ будет множеством $\bigcap\{x\twoheadrightarrow y: x\in X, y\in Y\}$ и $\neg\, X = \{\neg\, x: x\in X\}$. Элементы релевантного пространства $\mathcal{R}$ можно фактически отождествить с главными фильтрами, т.е. $x\in \mathcal{R}$ можно отождествить с $[x) = \{y: x \le y\}$. В этом случае множество $x\circledcirc y$ совпадает с множеством $[x)\circledcirc[y)$, $x\twoheadrightarrow y$ совпадает с множеством $[x)\twoheadrightarrow[y)$ и $\neg\, x = \neg\, [x)$.

4.4. Теперь мы приступим к непосредственному построению топоса $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$. Рассмотрим вначале функтор Ω: $\mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ (гдее $\mathcal{A}$ есть RN-категория), который будет представлять собой классифицирующий объект в топосе $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$. Как и в интуиционистской логике [2] для любого функтора $\mathcal{F}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ определим как $\mathcal{F}_p$ значение $\mathcal{F}(p)$ функтора $\mathcal{F}$ для объекта p из $\mathcal{A}$. Для произвольных q и p, таких, что $p \le q$, функтор $\mathcal{F}$ определяет функцию из $\mathcal{F}_p$ в $\mathcal{F}_q$, которую мы обозначим как $\mathcal{F}_{pq}$. Функтор $\mathcal{F}$ будет рассматриваться как совокупность $\{\mathcal{F}_p: p\in \mathcal{A}\}$ множеств, индексированных элементами множества объектов $\mathcal{A}$ и снабженной отображением перехода $\mathcal{F}_{pq}$: $\mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_q$ по $p \le q$ (в частности, $\mathcal{F}_{pp}$ будет представлять собой функцию тождества на $\mathcal{F}_p$).

Продолжим подобным образом, полагая $\Omega_p = [p)^+$ (т.е. равной релевантной алгебре всех главных фильтров в $[p)$), и определяя для p и q, таких, что $p \le q$, функцию Ω_{pq}: $\Omega_p \to \Omega_q$, отображающую каждый $S\in [p)^+$ в $S\cap[q)\in [q)^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

4.5. Постоянный функтор 1: $\mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ может быть определен с помощью условий $1_p= \{[1)\}$ для $p\in \mathcal{A}$ и $1_{pq} = id_{\{[1)\}}$ при $p \le q$. Классификатор подобъектов $true$: $1 \to \Omega$ представляет собой естественное преобразование, чья p-я компонента $true_p$: $\{[1)\} \to \Omega_p$ будет определяться равенством $true_p$ $([1)) = [p)$. Таким образом, функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой релевантной алгебры $[p)^+$–типа.

4.6. Пусть τ: $F \rightarrowtail G$ будет произвольным подобъектом $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$–объекта G. Каждая компонента τ_p является инъективной и может рассматриваться как функция включения $F_p \hookrightarrow G_p$. p-я компонента $(\chi_\tau)_p$: $G_p \to [p)^+$ характеристической стрелки χ_τ: $G \to \Omega$ будет идентифицироваться с помощью равенства

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q: p \le q \text{ и } G_{pq}(x)\in F_q\}$$

для каждого $x\in G_p$.

Легко убедиться, что Ω-аксиома выполняется в категории (топосе) $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ поскольку доказательство этого факта требует использование свойств главных фильтров в точности как в [2] для случая интуиционистской логики.

5. Интерпретация релевантной логики в топосе $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$

5.1. Вначале мы сконструируем истинностные стрелки в топосе $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$. Конъюнкция и дизъюнкция будут определяться так же как и в случае $\mathcal{S}et^{\mathcal{P}}$, где есть алгебра Гейтинга из [2], т.е. нам, в сущности, нужны для $\cap$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ и $\cup$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ определения их p-х компонент в виде

$\cap_p(\langle S,T\rangle) = S\cap T$;

$\cup_p(\langle S,T\rangle) = S\cup T$.

5.2. Стрелка *false*:$1 \to \Omega$ может быть определена как естественное преобразование, чья p-я компонента $false_p$: $\{\neg [1]\} \to \Omega_p$ будет определяться равенством $false_p([1]) = \neg [p)$. Таким образом, функция *false* выбирает наибольший элемент из каждой релевантной алгебры $(\neg [p))^+$–типа.

Для отрицания $\neg$: $\Omega \dot{\to} \Omega$ мы определяем p-ю компоненту $\neg_p$: $\Omega_p \to \Omega_p$ как

$\neg_p(S) = (\neg S)_p$.

Импликация $\supset$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ получается при определении ее p-ой компоненты как

$\supset_p(\langle S,T\rangle) = (S \twoheadrightarrow T)_p$.

5.3. Отметим, что истинностными стрелками в $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ являются естественные преобразования, компоненты которых совпадают с соответствующими связками (операциями) на релевантных алгебрах в $\mathcal{A}$. Однако истинностные стрелки получались и в случае $\mathcal{S}et^{\mathcal{P}}$ из категорного описания интуиционистских истинностных функций в $\mathcal{S}et$ [2]. Нетрудно прийти к выводу, что общая структура, отражаемая в топосах $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{S}et^{\mathcal{P}}$ вызвана тем обстоятельством, что и релевантные алгебры и алгебры Гейтинга содержат в себе дистрибутивные ограниченные решетки. По сути дела, то обстоятельство, что $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ есть топос, означает обязательное существование в нем еще и экспоненциала, обусловленного резидуальностью интуиционистской импликации относительно решеточного пересечения, т.е. релевантная структура здесь наложена на интуиционистскую, представляющую собой некоторый базисный фон.

5.4. Будем называть $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$-оценкой функцию V: $\Phi_0 \to \mathcal{S}et^{\mathcal{A}}(1,\Omega)$, назначающую каждой пропозициональной букве π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i) = 1 \dot{\to} \Omega$. Эта функция может быть продолжена на множестве всех формул Φ следующим способом:

(a) $V(\neg\alpha) = \neg\circ V(\alpha)$

(b) $V(\alpha\wedge\beta) = \cap\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$

(c) $V(\alpha\vee\beta) = \cup\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$

(d) $V(\alpha \supset \beta) = \supset\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$

Мы говорим, что формула α $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$-общезначима (что записываем как $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}\vDash\alpha$), если $V(\alpha) = true{:}1\to\Omega$ для всех $\mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$-оценок V.

5.4. Напомним, что если $\mathcal{R}$ является релевантной алгеброй, то мы можем определить оценку V' как отображение из Φ в $\mathcal{R}$, а формула A общезначима в $\mathcal{R}$, если $1 \leq V'(A)$ для любой оценки V формул из Φ в $\mathcal{R}$; логика, определяемая $\mathcal{R}$, будет представлять собой множество всех формул, общезначимых в $\mathcal{R}$.

По V мы определяем оценку V', положив

$$(*)V(\pi_i) = \begin{cases} true, & 1\leq V'(\pi_i) \\ false, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

5.5. ***Лемма***. $V(\alpha) =$ *true* тогда и только тогда, когда $1 \leq V'(\alpha)$.

Доказательство. Для $\alpha = \pi_i$ лемма справедлива в силу определения. Далее мы применяем индукцию по построению формулы. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и $V(\beta) = false$, тогда

$$V(\neg\beta)_p = (\neg\circ V(\beta))_p = \neg_p\circ V(\beta)_p.$$

Следовательно, $V(\alpha)_p([1]) = \neg_p(V(\beta)_p([1]) = \neg_p(false_p([1]))) =$ (по индуктивному определению) $= \neg_p(\neg\!\!\!\!\!\mid\ [p)) = [p) = true_p([1])$. Таким образом, $V(\alpha) =$ *true* and $1 \leq V'(\alpha)$. Остальное доказывается обычным образом. ■.

5.6. ***Теорема***. *Для любого топоса* $\mathcal{S}et^{A}$, $\mathcal{S}et^{A} \models \alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_R \alpha$ *(т.е.* α *доказуема в* R).

Доказательство. Поскольку по лемме 5.4 мы выбираем оценку V абсолютно произвольно и для V' полнота уже доказана, то мы приходим к требуемому заключению. ■.

Литература

1. *Васюков В.Л.* RN-категории для релевантной логики // Логические исследования, вып.1, Москва, 1993. С.124-132. .
2. *Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.* Москва, 1983.
3. *Максимова Л.Л.* Структуры с импликацией // Алгебра и логика 12, № 4. 1973. С..445-467.
4. *Шалак В.И.* На пути к категорной характеризации релевантной логики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик / В.А.Смирнов. Москва. 1989. С.112-119.
5. *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
6. *Patterson A. Costello T.* Exponentials as Projections from Paraconsistent Logics // Frontiers of Paraconsistent Logic, D. Batens, C.Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000, pp.209-222.
7. *Riscos A., Laita L.M. N*-categories in logic // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd. 33 (1987). S.507-516.
8. *Routley R., Meyer R.K., Plumwood M., Brady R.* Relevant Logic and Their Rivals. Ridgeway, 1983.
9. *Urquhart A*. Duality for Algebras of Relevant Logics // Studia Logica 56, No 1-2. pp 263-276.
10. *Vasyukov V.L.* Paraconsistency in Categories // Frontiers of Paraconsistent Logic / D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000, pp. 263-278.