理学硕士学位论文

赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间的若干几何性质

王迪

哈尔滨理工大学

2023 年 3 月

国内图书分类号：O177.3

理学硕士学位论文

赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间的若干几何性质

硕 士 研究生：王迪

导 师：崔云安

申请学位级别：理学硕士

学 科、专 业：数学

所 在 单 位：理学院

答 辩 日 期：2023 年 3 月

授予学位单位：哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.3

Dissertation for the Master Degree in Science

Some Geometric Properties of Orlicz-Lorentz Spaces Equipped with the Orlicz norm

Candidate:	Wang Di
Supervisor:	Cui Yunan
Academic Degree Applied for:	Master of Science
Speciality:	Mathematics
Date of Oral Examination:	March, 2023
University:	Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间的若干几何性质》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：王迪　　　　日期：　2023　年 3　月 30　日

哈尔滨理工大学学位论文使用授权书

《赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间的若干几何性质》系本人在哈尔滨理工大学攻读学位期间在导师指导下完成的学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保密 □，在　　年解密后适用授权书。

不保密 ☑ 。

(请在以上相应方框内打√)

作者签名：王迪　　　　日期：　2023　年　3　月　30　日

导师签名：　　　　日期：　2023　年　3　月　30　日

赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间的若干几何性质

摘　要

本文研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的一致 Kadec-Klee 性质，(紧)局部一致凸性，(k)一致凸性与中点局部一致凸性，以及单位球面上端点，强端点的描述。

第一章，主要介绍了 Orlicz-Lorentz 空间的发展，Orlicz-Lorentz 空间几何性质的研究背景和现状，概括性地介绍了本文的主要研究内容。同时介绍了 Orlicz-Lorentz 函数空间与序列空间的基本结构，以及一些基础性的结论。

第二章，由一般Orlicz函数生成的赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz序列空间具有一致Kadec-Klee性质的充要条件将会在本章给出。在证明过程中根据Orlicz范数表达式不同，将证明过程分为若干种情况。

第三章，得到了该空间具有局部一致凸性的充要条件。该结果的证明过程具有一定的难度，其中一个原因是Orlicz-Lorentz空间的对偶空间至今仍然没有被完全地刻画出来。于是在本章我们给出了Luxemburg范数的新的表达式，通过该范数表达式，找到了一个类似支撑泛函的函数，以便在对偶空间未知的条件下解决问题。值得一提的是，在解决Orlicz函数严格凸的必要性时，给出了一个重要反例。在涉及到Orlicz函数的严格凸性时，该反例是解决此类问题的有力工具。

第四章，给出了 N 函数生成的赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间具有一致凸性的充要条件。

第五章，给出了由 N 函数生成的赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间强端点的描述以及具有中点局部一致凸性的充要条件，同时给出了一般 Orlicz 函数生成 Orlicz-Lorentz 函数空间端点的刻画，同时得到了 Orlicz 范数的表达式。

关键词　Orlicz 空间；Orlicz-Lorentz 空间；一致 Kadec-Klee 性质；局部一致凸；强端点

Some Geometric Properties of Orlicz-Lorentz Spaces Equipped with the Orlicz Norm

Abstract

In this paper, we explore some geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm. It includes the uniform Kadec-Klee property, (compactly) local uniform convexity (k-)uniform convexity, midpoint local uniform convexity, and the characterization of extreme points and strong extreme points.

In the first chapter, we give the description of the development of Orlicz-Lorentz space, the research background and status quo of geometric properties of this space are given collectively. As well as the main research contents of this paper in this. At the same time, some basic structures of this space are presented, together with some basic conclusions of this space.

In chapter 2, the necessary and sufficient conditions for Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped the Orlicz norms generated by general Orlicz function to possess uniform Kadec-Klee properties will be given in this chapter. According to the differences Orlicz norm expressions, the proof process will be divided into several cases. This method can also provide a new way to explore the Orlicz-Lorentz space generated by general Orlicz functions.

In chapter 3, we give the necessary and sufficient conditions for the Orlicz-Lorentz function space equipped with Orlicz norm to process compactly local uniform convexity and local uniform convexity. The difficulty in proof process is that the dual space of the space has not been fully characterized yet. In this chapter, we give a new expression of Luxemburg norm, through which we can solve the problem under the condition that its dual space is still unknown. When we solve the necessity of strict convexity of functions, we give an important counterexample. At the same time, when it comes to the strict convexity of Orlicz functions, this counterexample proved to be a very useful tool in solving this such problems.

In chapter 4, the necessary and sufficient conditions for Orlicz-Lorentz function spaces with Orlicz norms to have k-uniform convexity and uniform convexity are given in this chapter.

In chapter 5, we characterize the strongly extreme points of Orlicz-Lorentz function spaces with Orlicz norms generated by N functions. Just like the chapter above, the necessary and sufficient conditions for the spaces to process the midpoint local uniform convexity are given. At the same time, we give the expressions of Orlicz norm and characterize the extreme points in Orlicz-Lorentz functions spaces generated by general Orlicz functions.

Keywords Orlicz space; Orlicz-Lorentz space; uniform Kadec-Klee property; Locally uniform convexity; strongly extreme points

目　录

第 1 章 绪　论

1.1　课题背景及研究的目的和意义

1.1.1 课题来源

本课题来源于指导教师的国家自然科学基金项目（项目编号：11871181）。

1.1.2 研究目的及意义

19 世纪 30 年代，著名数学家 Clarkson J A 将一致凸空间的定义引入其研究[1]，具有该性质的空间 X 是一种非常理想的空间，这是因为具有一致凸性质的 Banach 空间同时也具有很多特殊的其他性质，如一致凸空间是自反的。但是在应用中发现此类空间的情况较难满足，于是一些较弱的凸性概念也逐渐被提出，如局部一致凸性。这些概念的提出也丰富了 Banach 空间几何理论。更多 Banach 空间的其他内容请参考[2-3]。

Orlicz-Lorentz 空间是 Orlicz 空间和 Lorentz 空间的自然结合。是经典 Orlicz 空间的推广，是重排不变空间的重要内容，也是调和分析中的重要研究内容。早在 1990 年，Kamińska A 开始研究研究一种广义的 Lorentz 空间[4]，后被称为 Orlicz-Lorentz 空间，并给出关于该空间的一些基础性的结论。在此之后，Orlicz-Lorentz 空间的几何性质一直是该方向研究的主要内容。由于 Orlicz-Lorentz 空间中，Orlicz 函数以及权函数具有不同的性质，Orlicz-Lorentz 空间也展现出了不同的性质。

我们对 Orlicz-Lorentz 空间中几何性质的研究，可以更好刻画该空间的结构，复杂的 Orlicz-Lorentz 空间通过这些几何性质可以更清晰地展现出来。本文的研究也有利于 Orlicz-Lorentz 空间的应用，有利于 Orlicz-Lorentz 空间中插值理论，算子理论，等理论的研究。

1.2 国内外研究现状

1931 年，波兰数学家 Orlicz W 引入 Orlicz 函数类，Orlicz 空间由此发展。Orlicz 空间是 $L^p(0<p<1)$ 空间的推广，关于 Orlicz 空间的更多知识，请参考[5-16]。

1950 年， Lorentz G 引入 Lorentz 空间，Lorentz 空间也是 L^p 空间的推广。Lorentz 空间在算子内插理论中有重要作用。关于 Lorentz 空间中的一些重要几何性质，请参考[7]。

1990 年， Kamińska A 开始研究一种推广的 Lorentz 空间，随后将其命名为 Orlicz- Lorentz 空间[4]。在 Orlicz-Lorentz 空间中引入了 Luxemburg 范数，给出了该空间可分，具有序连续性，严格凸性的充分必要条件。同时也给出了一些基础性的结论，如模与系数的关系等。

1995 年，Lin P K 与 Sun H 研究了赋 Luxemburg 范数的Orlicz-Lorentz 空间 k 一致凸的充要条件，给出了 Orlicz - Lorentz空间具有全K凸性与弱一致凸性的充要条件，同时给出了一种处理重排问题的一般方法[8-9]。

1999 年，Wu C X 和 Ren L W 将 Orlicz 范数引入Orlicz-Lorentz 函数空间。证明了赋Orlicz 范数的Orlicz-Lorentz 函数空间是Banach 空间。给出了赋Orlicz 范数的Orlicz-Lorentz 函数空间具有严格凸性的充分必要条件。同时也给出了在 Orlicz-Lorentz 函数空间中处理Orlicz 范数的思想方法[20]。此后赋Orlicz 范数的 Orlicz- Lorentz 函数空间中的几何性质成为该领域的重要研究内容。

2013 年，Foralewski P，Hudzik H 与 Kolwicz P 等人给出了 Orlicz-Lorentz 空间具有非方性质的描述[20]。非方问题具有一定的难度，关于 Orlicz-Lorentz空间中的非方性质的更多结果也在近几年涌现[21-23]。

2013 年，Foralewski P研究了广义的 Orlicz-Lorentz 空间，给出了该空间中局部一致单调性，非方性，Kadec-Klee 性质等几何性质的判据[24]，广义的 Orlicz-Lorentz 空间也是一个重要的研究领域。

2014 年，Kamińska A，Lesnik K，Raynaud Y 给出了该空间的 Köthe 对偶空间的刻画[25]。并强调了权函数满足正则性在证明过程中所起的重要作用。但是至今 Orlicz-Lorentz 空间的对偶空间仍然没有被完整地描述出来，这成为该空间几何性质研究中的难点。

2016 年 Gong W 与 Zhang D 给出了赋Orlicz 范数的Orlicz-Lorentz 序列空间的单调性的刻画[26]。

2019 年，Cui Y, Foralewski P, Hudzik H 研究了 Orlicz-Lorentz 空间的 M 常数[27]。

2021 年， Cui Y, Foralewski P, Hudzik H 等人给出了赋 Orlicz范数的 Orlicz-Lorentz数列空间具有 Kadec-Klee 性质的充要条件是 $\varphi \in \Delta_2$

且$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$，且在证明过程中，跟据Orlicz范数表达式不同进行分类讨论[28]。这种讨论方法为解决由一般Orlicz函数生成的Orlicz-Lorentz空间中相关问题提供了范例。

2022年，崔云安, Foralewski P与Kończak J 研究了由任意Orlicz函数φ与任意权函数ω生成的Orlicz-Lorentz函数空间，证明了Orlicz范数与Amemiya范数等价，给出了Orlicz范数的一些重要的性质，给出了赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz序列空间的序连续性与单调性的判定准则[29]。

关于Orlicz-Lorentz空间中的更多研究成果，请参考[30-35]。

1.3 主要研究内容

本文中，我们主要研究赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz序列空间与函数空间中的若干几何性质。文章的主要结构如下：

第二章，我们介绍了Orlicz -Lorentz序列空间中的一致Kadec-Klee性质。由于不同Orlicz函数生成的Orlicz范数的表达式不同，不同的元素x的Orlicz范数表达式也有所区别，我们将跟据这些差异，分若干种情况来分别证明相关结果。

第三章，得到了$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$具有局部一致凸性的充要条件,值得一提的是，由于至今为止，Orlicz-Lorentz函数空间的对偶空间仍然没有被完整地刻画，我们通过找到Luxemburg范数的新的表达式，创新性地提出一种新的方法，在不涉及对偶空间地情况下，来刻画空间的一致凸性与紧局部一致凸性。同时，我们创造性地构造出了Orlicz-Lorentz函数空间中的一个重要的反例，该反例的构造具有一定的难度，在解决Orlicz函数严格凸的必要性中发挥了重要作用。

第四章，我们将给出Orlicz-Lorentz函数空间具有一致凸性与k一致凸性的充要条件，同样也是在不涉及对偶空间的条件下解决问题，证明方法具有一定的创新性。

第五章，我们给出了一般Orlicz函数生成的Orlicz-Lorentz函数空间的端点的刻画，给出了N函数生成的Orlicz-Lorentz函数空间$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$中强端点的刻画，给出了$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$具有中点局部一致凸性的充分必要条件。在证明过程中，作为辅助性的结果，我们也给出了Orlicz范数的表达式。

1.4 预备知识

下面将陈述后几章中需要的Orlicz- Lorentz 空间中的相关概念及符号表示。

1.4.1 Orlicz-Lorentz 空间

文章中$\mathbb{N}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}_+$分别代表自然数集，实数集，非负实数集。X代表Banach 空间。$S(X)$代表X的单位球面，$B(X)$代表X的单位球。l_0代表所有实序列全体。$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$代表$l_0$中的实数序列。$L_0$代表所有 Lebesgue 可测函数集合。$f$代表$L_0$上的实可测函数。$supp\ x$与$supp\ f$分别代表$x$与$f$的支撑集，即$supp\ x=\{i\in\mathbb{N}:x(i)\neq 0\}$，$supp\ f=\{t\in\mathbb{R}^+:f(t)\neq 0\}$。在往后的篇幅中，用$\Lambda_{\varphi,\omega}^{O}$表示赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间，用$\lambda_{\varphi,\omega}^{o}$表示赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间，用$\lambda_{\varphi,\omega}$表示赋Luxemburg 范数的Orlicz -Lorentz 函数空间。φ代表Orlicz 函数。任意Orlicz 函数φ，定义

$$S=\{0\}\cup\left\{u\in R^+:\forall 0\le v_1<v_2,\ u=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow \varphi(u)<\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right\}。$$

定义$R'=R^+\setminus S$。

用σ代表保测度变换[36]。

下面将介绍 Orlicz-Lorentz 空间，先从分布函数的概念说起。

定义 1.4.1[28] 对任意$x\in\ell^0$，我们定义任意序列x的分布函数μ_x如下：

$$\mu_x(\lambda)=m(\{i\in\mathbb{N}:|x(i)|>\lambda\})$$

其中：$\lambda\ge 0$，m为可数测度。

有了分布函数的定义之后，可以定义非增重排。

定义 1.4.2[28] x的非增重排$x^*=\{x^*(i)\}_{i=1}^{\infty}$定义如下：

$$x^*(i)=\inf\{\lambda\ge 0:\mu_x(\lambda)<i\}。$$

定义 1.4.3[4] 若$\varphi:[-\infty,\infty]\to[0,\infty]$满足$\varphi$是凸的，偶的，仅在 0 点为 0，则称$\varphi$为Orlicz 函数。

对于任意Orlicz函数φ，定义以下两个常数a_φ, b_φ：

$$a_\varphi = \sup\left\{u \geq 0 : \varphi(u) = 0\right\},\ b_\varphi = \sup\left\{u \geq 0 : \varphi(u) < \infty\right\}。$$

值得注意的是，φ在$(0,\infty)$上左连续与$\lim\limits_{u\to b_\varphi}\varphi(u) = \varphi(b_\varphi)$等价。

定义 1.4.4[6] 若$\exists K > 0$，使$\forall u > 0$，有$\varphi(2u) \leq K\varphi(u)$。则称$\varphi$满足$\Delta_2$条件($\varphi \in \Delta_2$)。

定义 1.4.5[4]任意φ，定义φ的在Young意义下的余函数ψ：

$$\psi(u) = \sup\left\{|u|\, v - \varphi(v)\right\}。$$

下面介绍权函数的概念。

定义 1.4.6[4]若$\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$是非增的，称$\{\omega(i)\}_{i=1}^{\infty}$为权函数列。在整篇文章中我们假设$\omega(1) > 0$。

在有了Orlicz函数和权函数的定义之后，可以定义以下模：

定义 1.4.7[28] 任意φ，任意权序列$\{\omega(i)\}_{n\in\mathbb{N}}$，定义序列空间中的模如下：

$$I_{\varphi,\omega}(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i)。$$

定义 1.4.8[28] 任意φ，任意权函数列$\{\omega(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$，定义Orlicz-Lorentz序列空间$\Lambda_{\varphi,\omega}$如下：

$$\Lambda_{\varphi,\omega} = \left\{x \in l^0 : \exists \beta > 0, I_{\varphi,\omega}(\beta x) < \infty\right\}。$$

定义 1.4.9[28]定义Orlicz-Lorentz序列空间$\Lambda_{\varphi,\omega}$中的Luxemburg范数：

$$\|x\|_{\varphi,\omega} = \inf\left\{\lambda > 0 : I_{\varphi,\omega}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}。$$

Luxemburg范数还有另一种形式：

定义 1.4.10[28] Orlicz-Lorentz序列空间$\Lambda_{\varphi,\omega}$中的Orlicz范数表达式如下

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i) : I_{\psi,\omega}(y) \leq 1\right\}。$$

定义 1.4.1 [29] Orlicz- Lorentz序列空间中的Amemmiya范数如下所示：

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{A}=\inf \frac{1}{k}\left\{1+I_{\varphi,\omega}(kx)\right\}。\tag{1-1}$$

定理 1.4.12[29] 对于任意 Orlicz 函数 φ 与任意权函数列 $\{\omega(i)\}_{n\in\mathbb{N}}$， Orlicz 范数与 Amemmiya 范数相等，即

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O}=\| x\|_{\varphi,\omega}^{A}。$$

关于 Orlicz 范数与 Luxenburg 范数的关系，有以下结果。

定理 1.4.13[29] 对于任意 $x\in\Lambda_{\varphi,\omega}$，Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价. 有以下等式成立：

$$\| x\|_{\varphi,\omega}\le \| x\|_{\varphi,\omega}^{O}\le 2\| x\|_{\varphi,\omega}。$$

定义 1.4.14 [28] 设 $(E,\le,\|\cdot\|_E)$ 是一个 Banach 格空间，若对于 E_+ 中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$x_n \le |x|$ $(n\in\mathbb{N})$，且依坐标满足 $x_n\to 0$，我们能够得到 $\| x\|_E\to 0$ $(n\to\infty)$，则称 $x\in E$ 具有绝对连续范数。

定义 E_a 为 E 的所有具有绝对连续范数的元素的集合， E_a 是 E 的子空间。

定理 1.4.15[4] 空间 $(\lambda_{\varphi,\omega},\| x\|_{\varphi,\omega}^{O})$ 是序连续的，当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$ 且 $\varphi\in\Delta_2$。

证明：由于[4]中的定理 2.4 已经证明了空间 $(\lambda_{\varphi,\omega},\|\cdot\|_{\varphi,\omega})$ 是序连续的当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$ 且 $\varphi\in\Delta_2$，在接下来的步骤中，我们可以利用 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数的等价性，即本文定理 1.4.14，完成剩余的证明过程。

引理 1.4.16（[28]引理 2.4，[4]定理 2.5）设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$， $x_n\in\lambda_{\varphi,\omega}$. 以下性质成立：

(1)若 $\lim_{n\to\infty}\| x_n\|_{\varphi,\omega}^{O}=0$，则 $\lim_{n\to\infty}I_{\varphi,\omega}(x_n)=0$。

(2)当 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$ 时， $\lim_{n\to\infty}I_{\varphi,\omega}(x_n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\| x_n\|_{\varphi,\omega}{}^{O}=0$ 当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$。

(3)当$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)<\infty$时，$\lim_{n\to\infty}I_{\varphi,\omega}(x_n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\varphi,\omega}{}^{O}=0$当且仅当$a_\varphi=0$。

下面介绍Orlicz-Lorentz函数空间中的相关情况.

定义 1.4.16[4] 若函数$\omega:(0,\infty)\to(0,\infty)$是单调非增的，局部可积的，且

$$\int_0^{\infty}\omega(t)dt=\infty\text{。}$$

则称函数为权函数。另外，我们定义函数$W(t)$：

$$W(t)=\int_0^t\omega(s)ds\text{。}$$

定义 1.4.17[4,20] 对于任意Orlicz函数$\varphi(t)$与任意权函数$\omega(t)$，我们定义模函数

$$\rho_{\varphi,\omega}(f)=\int_0^{\infty}\varphi(f^*(t))\omega(t)dt\text{。}$$

定义 1.4.18[4] Orlicz-Lorentz函数空间的定义如下

$$\lambda_{\varphi,\omega}=\left\{f\in L_0:\exists\lambda>0,\rho_{\varphi,\omega}(\lambda f)=\int_0^{\infty}\varphi(\lambda f^*(t))\omega(t)dt<\infty\right\}\text{。}$$

定义 1.4.19[4] Orlicz-Lorentz 函数空间中的 Luxemburg 范数：

$$\|f\|=\|f\|_{\varphi,\omega}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{\varphi,\omega}(\frac{f}{\lambda})\le 1\right\}\text{。}$$

定义 1.4.20[20] 任意$f\in\lambda_{\varphi,\omega}$，其Orlicz范数定义为：

$$\|f\|^{O}=\|f\|^{O}_{\varphi,\omega}=\sup_{\rho_{\psi,\omega}(g)\le 1}\int_0^{\infty}f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt\text{。}$$

定理 1.4.21[20] 对于任意Orlicz函数φ与任意非增权函数ω，有

$$\|f\|^{O}_{\varphi,\omega}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left\{1+\rho_{\varphi,\omega}(kf)\right\}\text{。}\tag{1-2}$$

第 2 章 赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的一致 Kadec-Klee 性质

2.1 引言

定义 2.1.1[2]若对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta(\varepsilon) > 0$，使得对 X 中的任意$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，若x_n满足：$\|x_n\|=1$，$sep(x_n)=\inf\limits_{m\neq n}\|x_n-x_m\|\geq\varepsilon$，$x_n$弱收敛于$x$。能够得到$\|x\|\leq 1-\delta(\varepsilon)$，则称Banach 空间具有一致Kadec-Klee 性质.

一致 Kadec-Klee 性质是 Banach 空间几何理论中的重要内容。由一致 Kadec-Klee 性质可以得到Kadec-Klee 性质. Kadec-Klee 性质最早由 Radon 在[37]中提出，后来被 Riesz 在[28-29]中研究. 2021 年，崔云安，Foralewski P，Hudzik H 等人研究了赋Orlicz 范数的Orlicz - Lorentz 序列空间的Kadec-Klee 性质[29].

近几年，一些弱化的 Kadec-Klee 性质，如局部的Kadec-Klee 性质，依测度收敛Kadec-Klee 性质，也是具有相当高的研究价值。有关于对称 Banach 空间中的Kadec-Klee 性质的几个好的结果已在[14,30]给出。在[41]中，Cerdὰ J，Hudzik H，Kamińska A 给出了 Banach 空间具有点点收敛意义下的Kadec-Klee 性质的充要条件。Raymond J S 在他的文章[42]中证明了，若自反的Banach 空间 X 不具有 Kadec-Klee 性质，则存在一个从B_X到X^*的紧映射f，满足$\inf\limits_{x\in B_X}\|f(x)\|>0$且对于任意$x\in B_X$，$<f(x),x><\|f(x)\|$. 关于Kadec-Klee性质的更多结果，请参考[40-46].

2.2 一般 Orlicz 函数生成的 Orlicz-Lorentz 序列空间中 Orlicz 范数的表达式

定义 2.2.1[28] 我们定义以下几个常数：

$$\lambda_\infty = \lambda_\infty(x) = \sup\left\{\lambda > 0 : I_{\varphi,\omega}(\lambda_{\varphi,\omega} < \infty)\right\},$$
$$k^* = k^*(x) = \inf\left\{k > 0 : I_{\psi,\omega}(p(kx^*)) \ge 1\right\},$$
$$k^{**} = k^{**} = \sup\left\{k > 0 : I_{\psi,\omega}(p(kx^*)) \le 1\right\}。$$

其中： p 是 φ 的右导数。上述三个常数显然有以下关系：

$$0 < k^* \le k^{**} \le \lambda_\infty \le \infty 。$$

现在我们考察（1-1）中的确界可达性问题，即何时有：

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} = \| x\|_{\varphi,\omega}^{A} = \frac{1}{k}\left\{1 + I_{\varphi,\omega}(kx)\right\} 。$$

先在 $x \in (0,\infty)$ 上定义 f ：

$$f(k) = f_x(k) = \frac{1}{k}(1 + I_{\varphi,\omega}(kx)) ,$$

显然 f 连续。当 $\lambda_\infty < \infty$ 时，f 在 λ_∞ 处左连续。由[17]的引理 2.6 所示，f 在区间 $(0,k^*)$ 上严格单调减，在 (k^*,λ_∞) 上严格单调增。

定义 2.2.2 定义集合 $K(x) = [k^*, k^{**}]$ 。若 $k^* = k^{**} = \infty$ ，则 $K(x) = \varnothing$ 。若 $k^* < \infty$ ，则 $K(x) \ne \varnothing$ 。

引理 2.2.3[20] (1) 当 $k^{**} < \infty$ 时，存在 $k \in K(x)$ ，使得 $\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} = \dfrac{1}{k}\left\{1 + I_{\varphi,\omega(kx)}\right\}$ ，

(2)当 $k^{**} = \infty$ 时，$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\left\{1 + I_{\varphi,\omega}(kx)\right\}$ 。

引理 2.2.4 (1)若 $b_\varphi < \infty$ ，则 $k^{**} < \infty$ ，

(2)若 $b_\varphi = \infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u} = \infty$ ，则有 $k^{**} < \infty$ ，

(3)若 $b_\varphi = \infty$ ，$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u} = B < \infty$ ，且 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\, x)}\omega(i) > 1$ ，则有 $k^{**} < \infty$ ，

(4)若 $b_\varphi = \infty$ 且 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i) < 1$ ，或 $b_\varphi = \infty$ 且存在 u_0 使得从 u_0 开始有 $p(u) = B$ ，则有 $k^{**} < \infty$ 。

证明：

若 $b_\varphi < \infty$ ，则对于任意 $x \in \lambda_{\varphi,\omega}$ ，我们有 $k^{**} < \lambda_\infty \le \dfrac{b_\varphi}{x^*(1)}$ ，故 $k^{**} < \infty$ 。

若 $b_\varphi=\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{1}{u}\int_0^\infty p(s)ds=\lim\limits_{u\to\infty}p(u)=\infty$，取 k_x 使得 $\psi(p(k_x x^*(1)))\omega(1)>1$，我们因此得到 $k^{**}\le k_x<\infty$。若 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$，且 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\ x)}\omega(i)>1$。取 $n_x\in\mathbb{N}$ 满足

$$\psi(B)\sum_{i=1}^{n_x}\omega(i)>1。$$

若 $m(\text{supp}\ x)<\infty$，我们只需要取 $n_x=m(supp\ x)$ 即可。若 $m(supp\ x)=\infty$，上述 n_x 也是存在的。由于 $\lim\limits_{u\to\infty}p(u)=B$，存在常数 $u_x>0$，使得 $\psi(u_x)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\ x)}\omega(i)>1$。定义 $k_x=\dfrac{u_x}{x^*(n_x)}$，可以得到 $I_{\psi,\omega}p(k(x^*))>1$，故 $k^{**}\le k_x<\infty$。

若 $b_\varphi=\infty$ 且 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\ x)}\omega(i)=1$， $p(u)=B,\ u_0>0$。若 $m(supp\ x)<\infty$，则 $k^*\le\dfrac{u_0}{x^*(n_x)}$，其中 $n_x=m(supp\ x)$。现在考察 $m(supp\ x)=\infty$ 的情况，取 $i_0=\sup\{i\in\mathbb{N}:\omega(i)>0\}<\infty$，可以得到 $k^*\le\dfrac{u_0}{x^*(i_0)}<k^{**}=\infty$，假设 $\omega(i)>0$ 对于任意的 $i\in\mathbb{N}$ 成立，取 $x^*(\infty)=\lim\limits_{i=\infty}x^*(i)>0$，我们有 $k^*\le\dfrac{u_0}{x^*(\infty)}<k^*=\infty$。

其他情况下用类似的思路，可以得到 $k^*=\infty$。

引理 2.2.5[28] 设 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$， $x\in\lambda_{\varphi,\omega}$。若 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\ x)}\omega(i)\le1$，则

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}=B\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)\omega(i)。$$

另外，若 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i)>1$，则 $m(supp\ x)<\infty$。

证明：

由于 $\psi(B)<\infty$，且 $u>B$ 时 $\psi(u)=\infty$，故对于任意的 $y\in\lambda_{\psi,\omega}$，若 y 满足

$I_{\varphi,\omega}(y)\le 1$，我们显然可以得到$\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)y^*(i)\omega(i)\le B\sum_{i=1}^{\infty}x^*\omega(i)$。再定义

$$z=(\overbrace{B,B,...,B}^{m(supp\,x)个},0,0,...)，$$

可得$I_{\psi,\omega}(z)=\sum_{i=1}^{m(supp\,x)}x^*(i)\omega(i)\le 1$，且有以下等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)z^*(i)\omega(i)=B\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)\omega(i)=B\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)\omega(i)，$$

由此可得：

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}=B\sum_{i=1}^{\infty}x^*(i)\omega(i)。$$

若 $\psi(B)\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)>1$，故 $a_\psi<b_\psi=B$ 且 $0<\psi(B)<\infty$，取 $n_0\in N$ 使得 $\psi(B)\sum_{i=1}^{n_0}\omega(i)>1$，我们容易得到$m(supp\,x)<n_0$。

2.3 赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 序列空间的一致 Kadec-Klee 性质

定理 2.3.1 以下条件等价：

(1) Orlicz-Lorentz 序列空间$\Lambda_{\varphi,\omega}^{O}$具有依坐标收敛意义下的一致Kadec-Klee 性质，

(2) Orlicz-Lorentz 序列空间$\Lambda_{\varphi,\omega}^{O}$具有一致Kadec-Klee 性质，

(3) $\varphi\in\Delta_2$且$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$。

证明：显然$(1)\Rightarrow(2)$。由于Kadec-Klee 性质可以推出空间的序连续性([16]定义2.1)，我们得到$(2)\Rightarrow(3)$，现在我们只需证明$(3)\Rightarrow(1)$。

第一种情况：$b_\varphi<\infty$或$b_\varphi=\infty$且$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}=\infty$。

取$x\in S(\lambda_{\varphi,\omega})$使得$x_n$依坐标收敛于$x$。由于$x$是$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的弱极限，由范数弱

下半连续性，$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O} \le 1$。由于此情况下范数表达式中确界可达，故存在 $k_n \in K(x_n)$ 使得：

$$1 = \|x_n\|_{\varphi,\omega}^{O} = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\varphi,\omega}(k_n x_n))\text{。}$$

我们先来证明数列$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有界的。定义常数m_1如下所示：

$$m_1 = \max\{i \in N : x^*(i) = x^*(1)\}\text{。}$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i) = \infty$，且 $I_{\varphi,\omega}(x) < \infty$，可得 $m_1 < \infty$，再由 m_1 的定义，显然 $x^*(m_1+1) < x^*(1)$，故由重排的定义，存在$i_1, i_2, i_3 \cdots i_m$使得：

$$|x(i_1)| = |x(i_2)| = \cdots = |x(i_{m_1})| = x^*(1)$$

且$|x(i)| \le x^*(m_1+1)$对任意$n \in \mathbb{N} \setminus \{\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots \mathrm{i}_{m_1}\}$成立。 由于$x_n$依坐标收敛于$x$，存在$n_0 \in \mathbb{N}$使得对任意的$j = 1, 2, \ldots m_1$，对任意的$n \ge n_0$，有以下不等式成立：

$$x_n(i_j) \ge b := \frac{x^*(1) + x^*(m_1+1)}{2},$$

于是，$x^*(i) \ge b$对任意$j = 1, 2, \ldots m_1$与$n \ge n_0$成立。因此，若$b_\varphi < \infty$，可以得到当$n \ge n_0$，$k_n \le \frac{b_\varphi}{b}$，此时数列$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有界。

现在考虑$b_\varphi = \infty$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u} = \infty$的情况。若数列$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$无界，我们不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$，有以下不等式成立：

$$1 = \frac{1}{k_n}(1 + I_{\Phi,\omega}(k_n x_n)) \ge \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(k_n x_n^*(i))\omega(i) \ge b\,\frac{\varphi(bk_n)}{bk_n}\sum_{i=1}^{m_1}\omega(i) > 1,$$

显然上式是矛盾的，故在此情况下我们得到了$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有界，取$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的收敛子列，不妨仍然记作$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$k_n \to k_0\ (n\to\infty)$。

先来看$m(supp\ x)=\infty$的情形，此时我们定义$\{m_l\}_{n=1}^{\infty}$：

$$m_l=\max\left\{i\in\mathbb{N}: x^*(i)=x^*(m_{l-1}+1)\right\},$$

其中$l=2,3,4...$，m_1如前文定义所示，显然当$m(supp\ x)=\infty$时，$\lim\limits_{l\to\infty}m_l=\infty$。定义$N_l=\{i\in N:|x(i)|\ge x^*(m_l)\}$，有$m(N_l)=m_l$，由于$k_nx_n$依坐标收敛于$k_0x$，且$N_l$只有有限个元素，可得$k_nx_n\chi_{N_l}\xrightarrow{u.c}k_0x\chi_{N_l}$，因此对于任意$l$，有以下关系成立：

$$\sum_{i=1}^{m_l}\varphi(k_nx_n^*(i))\omega(i)\to\sum_{i=1}^{m_l}\varphi(k_0x^*(i))\omega(i)\text{ 。}$$

取$x_{n_1}\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\|x_{n_1}\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$，由于$\varphi\in\Delta_2$，存在$l_1$使得$\|x_{n_1}\chi_{N\setminus N_{l_1}}\|_{\Phi,\omega}^{O}<\dfrac{\varepsilon}{4}$。由于$x_n$依坐标收敛于$x$，故存在$n_2$，使得$\|(x_{n_2}-x_{n_1})\chi_{n_{j1}}\|_{\varphi,\omega}^{O}<\dfrac{\varepsilon}{4}$，由假设$\|x_{n_2}\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$，可知存在$l_2>l_1$使得$\|x_{n_2}\chi_{N\setminus N_{l_2}}\|_{\Phi,\omega}^{O}<\dfrac{\varepsilon}{4}$，定义$G_2=N_{l_2}\setminus N_{l_1}$，由于$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\varepsilon$可分序列，即$sep(x_n)>\varepsilon$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}\varepsilon<\|x_{n_1}-x_{n_2}\|_{\varphi,\omega}^{O}&\le\|(x_{n_1}-x_{n_2})\chi_{M_{l_1}}\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|x_{N\setminus N_{l_1}}\|_{\varphi,\omega}^{O}\\&\quad+\|x_{n_2}\chi_{N\setminus N_{l_2}}\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|x_{n_2}\chi_{G_2}\|_{\varphi,\omega}^{O}\\&<\frac{3}{4}\varepsilon+\|x_{n_2}\chi_{G_2}\|_{\varphi,\omega}^{O}\text{ 。}\end{aligned}$$

由上式可得$\|x_{n_2}\chi_{G_2}\|>\dfrac{\varepsilon}{4}$，我们再用相同的方法寻找下一项。存在$x_{n_3}$使得$\|(x_{n_3}-x_{n_2})\chi_{N_{l_2}}\|_{\Phi,\omega}^{O}<\dfrac{\varepsilon}{4}$。由于$\|x_{n_3}\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$，存在$m_{l_3}>m_{l_2}$使得$\|x_{n_3}\chi_{N\setminus N_{l3}}\|_{\Phi,\omega}^{O}<\dfrac{\varepsilon}{4}$，

定义$G_3 = N_{l_3} \setminus N_{l_2}$，由于$sep(x_n) > \varepsilon$，故以下不等式成立：

$$\begin{aligned}\varepsilon < \| x_{n_2} - x_{n_3} \|_{\varphi,\omega}^{O} &\le \|(x_{n_2} - x_{n_3})\chi_{M_{l_2}}\|_{\varphi,\omega}^{O} + \| x_{N\setminus N_{l_2}} \|_{\varphi,\omega}^{O} \\ &+ \| x_{n_3}\chi_{N\setminus N_{l_3}} \|_{\varphi,\omega}^{O} + \| x_{n_3}\chi_{G_3} \|_{\varphi,\omega}^{O} \\ &< \frac{3}{4}\varepsilon + \| x_{n_3}\chi_{G_3} \|_{\varphi,\omega}^{O} ,\end{aligned}$$

由此得到$\| x_{n_3}\chi_{G_3} \|_{\Phi,\omega}^{O} > \dfrac{\varepsilon}{4}$。重复上述步骤，我们可以得到$\{x_n\}_{n\in N}$的子列$\{x_{n_k}\}_{k=2}^{\infty}$，该子列具有以下特征：

$$x_{n_k}^{*} = (\underbrace{x_{n_k}^{*}(1),...,x_{n_k}^{*}(m_{l_{k-1}})}_{\|(x_{n_{k-1}}-x_{n_k})\chi_{N_{l_{k-1}}}\|_{\varphi,\omega}^{O}<\frac{\varepsilon}{4}}, \underbrace{x_{n_k}^{*}(m_{l_{k-1}}+1),\cdots,x_{n_k}^{*}(m_{l_k})}_{\|x_{n_k}\chi_{G_k}\|_{\varphi,\omega}^{O}>\frac{\varepsilon}{4}}, \underbrace{x_{n_k}^{*}(m_{l_k}+1),\cdots)}_{\|x_{n_k}\chi_{N\setminus N_{l_k}}\|_{\varphi,\omega}^{O}<\frac{\varepsilon}{4}} 。$$

且对于任意$x_{n_k} \in \{x_{n_k}\}_{n=2}^{\infty}$，$\| x_{n_k}\chi_{G_k} \|_{\varphi,\omega}^{O} > \dfrac{\varepsilon}{4}$。容易发现$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} < \infty$，故$I_{\Phi,\omega}(x) < \infty$，由此对于任意$\eta > 0$，存在$m_{l_x} \in \{m_l\}_{l=1}^{\infty}$，使得

$$|\frac{1}{k_0}\sum_{i=m_{l_x}+1}^{\infty}\varphi(k_0 x^{*}(i))\omega(i)| < \frac{\eta}{2} 。\tag{2-2}$$

由于$x_{n_k}^{*}(i)$在$i \in N_l$上，依坐标收敛于$x^{*}(i)$，且$k_n \to k_0$，$\| x_{n_k}\chi_{G_k} \| > \dfrac{\varepsilon}{4}$，故存在

$m_{l_j} \in \{m_l\}_{i=1}^{\infty}$，$m_{l_j} > m_{l_x}$使得

$$|\frac{1}{k_0}\{1+\sum_{i=1}^{m_{l_x}}\varphi(kx^{*}(i))\omega(i)\} - \frac{1}{k_{n_j}}\{1+\sum_{i=1}^{m_{l_x}}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^{*}(i))\omega(i)\}| < \frac{\eta}{2} 。\tag{2-3}$$

且

$$\| x_{n_j}\chi_{N\setminus N_{l_x}} \|_{\varphi,\omega}^{O} > \frac{\varepsilon}{4} 。\tag{2-4}$$

所以对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得

$$|\frac{1}{k_{n_j}}\sum_{i=m_{l_x}+1}^{\infty}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}(i))|>2\delta, \tag{2-5}$$

由(2-3)(2-4)(2-5)：

$$\begin{aligned}\|x\|_{\varphi,\omega}^{O} &\le \frac{1}{k_0}(1+I_{\varphi,\omega}(k_0x))=\frac{1}{k_0}(1+\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(k_0x^*(i)\omega(i)))\\ &\le|\frac{1}{k_0}(1+\sum_{i=1}^{m_{l_x}}\varphi(kx^*(i))\omega(i))-\frac{1}{k_{n_j}}(1+\sum_{i=1}^{m_{l_x}}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*(i))\omega(i))|\\ &+\frac{1}{k_{n_j}}(1+\sum_{i=1}^{m_{l_x}}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*(i))\omega(i))+\frac{1}{k_{n_j}}\sum_{i=m_{l_x}+1}^{\infty}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*i\omega(i))\\ &-\frac{1}{k_{n_j}}\sum_{i=m_{l_x}+1}^{\infty}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*(i)\omega(i))+\frac{1}{k_0}\sum_{i=m_{l_x}+1}^{\infty}\varphi(k_0x^*(i)\omega(i))\\ &\le\frac{\eta}{2}+1-2\delta+\frac{\eta}{2}\\ &=1+\eta-2\delta,\end{aligned} \tag{2-6}$$

不失一般性，取$\eta=\delta$，可得：

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}\le 1-\delta\text{。}$$

再来看$m(supp\ x)<\infty$的情形。由于$x^*(i)$在$i\in supp\ x$上，依坐标收敛于$x^*(i)$，对于任意$\eta>0$，存在n_0，使得$\|(x_n-x)\chi_{supp\ x}\|_{\Phi,\omega}^{O}<\frac{\varepsilon}{4}$，并且当$n>n_0$时有以下不等式：

$$\frac{1}{k_0}(1+\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(k_0x^*(i)))\omega(i)-\frac{1}{k_n}(1+\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(k_nx_n^*(i))\omega(i)|\le\eta,. \tag{2-7}$$

由此得到：

$$\begin{aligned}\varepsilon \le \| x_{n_0+1} - x_{n_0+2} \|_{\varphi,\omega}^{O} &\le \|(x_{n_0+1} - x)\chi_{\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} + \|(x_{n_0+2} - x)\chi_{\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} \\ &+ \| x_{n_0+1}\chi_{\mathbb{N}\backslash\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} + \| x_{n_0+2}\chi_{\mathbb{N}\backslash\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \| x_{n_0+1}\chi_{\mathbb{N}\backslash\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} + \| x_{n_0+1}\chi_{\mathbb{N}\backslash\text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O},\end{aligned} \tag{2-8}$$

不失一般性，假设$\| x_{n_0+1}\chi_{\mathbb{N}\backslash supp\, x}\|_{\varphi,\omega} > \frac{\varepsilon}{4}$，显然存在$\delta > 0$使得：

$$\left|\frac{1}{k_{n_0+1}}\sum_{i=m(supp\, x)+1}^{\infty}\varphi(k_{n_0+1}x_{n_0+1}^{*}(i))\omega(i)\right| > 2\delta , \tag{2-9}$$

由（2-7）（2-8）可知

$$\begin{aligned}\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} &\le \frac{1}{k_0}(1 + I_{\varphi,\omega}(k_0 x)) \\ &= \frac{1}{k_0}(1 + \sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\varphi(k_0 x^{*}(i)\omega(i))) \\ &\le \left|\frac{1}{k_0}(1 + \sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\varphi(k_0 x^{*}(i))\omega(i)) - \frac{1}{k_{n_0+1}}(1 + \sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\varphi(k_{n_0+1}x_{n+1}^{*}(i))\omega(i))\right| \\ &+ \frac{1}{k_{n_0+1}}(1 + \sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\varphi(k_{n_0+1}x_{n_0+1}^{*}(i))\omega(i)| \\ &+ \frac{1}{k_{n_0+1}}\sum_{i=m(\text{supp x})+1}^{\infty}\varphi(k_{n_0+1}x_{n_0+1}^{*}(i)\omega(i)) - \frac{1}{k_{n_0+1}}\sum_{i=m(\text{supp x})+1}^{\infty}\varphi(k_{n_0+1}x_{n_0+1}^{*}(i)\omega(i)) \\ &\le 1 + \eta - 2\delta,\end{aligned}$$

取$\eta = \delta$，我们有：

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} \le 1 - \delta 。$$

第二种情况：$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u} = B < \infty$.

先考虑$\psi(B)\sum_{i=1}^{m(supp\, x)}\omega(i) > 1$，或$\psi(B)\sum_{i=1}^{m(supp\, x)}\omega(i) = 1$，且从某个$u_0$开始有$p(u) = B$的情况。若$\psi(B)\sum_{i=1}^{m(supp\, x)}\omega(i) > 1$，取$j_x$使得：$x^{*}(j_x) > x^{*}(j_x + 1)$．令

$N_x=\{i\in\mathbb{N}:|x(i)|\geq x^*(j_x)$，有 $m(N_x)=j_x$，由于 x_n 依坐标收敛于 x，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于任意 $i\in N_x$ 与任意 $n\geq n_0$，有：$|x_n(i)|\geq\dfrac{x^*(j_x)+x^*(j_x)}{2}$。取 $k_1=\dfrac{2}{x^*(j_x)+x^*(j_x+1)}$，由于当 $n>n_0$ 时，$I_{\psi,\omega}(p(k_1x_n^*))\geq 1$，故有 $k_n^{**}:=k^{**}(x_n)\leq k_1$。即在此种情况下，$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，不妨设 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。此时只需用与情况 1 相同的步骤来证明 $\|x\|_{\varphi,\omega}^O\leq 1-\delta$ 即可。

若 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$，$\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\,x)}\omega(i)=1$，且从某个 $u>u_0$ 开始，有 $p(u)=B$。

我们还是先来证明 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。取 $j_x=m(supp\,x)$，由于 x_n 依坐标收敛于 x，且 $m(supp\,x)<\infty$，故存在 $n_0>0$，使得对任意的 $n\geq n_0$，任意的 $i\in supp\,x$，有 $|x_n(i)|\geq\dfrac{1}{2}x^*(j_x)$ 成立．不妨取 $k_1=\dfrac{2u_0}{x^*(j_x)}$，对任意的 $n\geq n_0$，我们有 $I_{\psi,\omega}(p(k_1x_n^*))\geq\psi(p(u_0))\sum\limits_{i=1}^{m(supp\,x)}\omega(i)=1$．这就说明当 $n\geq n_0$ 时，有 $k_n<k_1$，即 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界序列。接下来可以利用与第一种情况，即 $b_\varphi<\infty$ 或 $b_\varphi=\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\infty$ 相似的步骤，得到 $\|x\|_{\varphi,\omega}^O\leq 1-\delta$。

第三种情况：$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$，$\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\,x)}\omega(i)<1$ 或 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\,x)}\omega(i)=1$，且对任意 $u>0$，有 $p(u)<B$．在这种情况下，$m(supp\,x)<\infty$ 且 $K(x)=\varnothing$。

若 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{m(supp\,x_n)}\omega(i)\leq 1$，此时 x_n 的 Orlicz 范数表达式为：

$$\|x_n\|_{\varphi,\omega}^O=B\sum_{i=1}^{m(supp\,x)}x^*(i)\omega(i)=1,$$

由于 x_n 依坐标收敛于 x，故存在 $x_{n_0}\in\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得对任意 $\eta>0$，任意 $\delta>0$，使得

$$|B\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}x^*(i)\omega(i)-B\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}x_{n_0}^*(i)\omega(i)|<\eta 。\tag{2-10}$$

且

$$|B\sum_{i=m(supp\ x)+1}^{\infty}x_{n_0}^*(i)\omega(i)|>2\delta 。\tag{2-11}$$

由(2-10)(2-11)

$$\begin{aligned}\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}&=B\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}x^*(i)\omega(i)\\&\le|B\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}x^*(i)\omega(i)-B\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}x_{n_0}(i)\omega(i)|\\&+B\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}x_{n_0}^*(i)\omega(i)+B\sum_{i=m(\text{supp x})+1}^{\infty}x_{n_0}^*(i)\omega(i)-B\sum_{i=m(\text{supp x})+1}^{\infty}x_{n_0}^*(i)\omega(i)\\&\le1+\eta-2\delta,\end{aligned}\tag{2-12}$$

不失一般性，仍取$\eta=\delta$，我们得到：

$$\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}\le1-\delta 。\tag{2-13}$$

若$\psi(B)\sum_{i=1}^{m(supp\ x_n)}\omega(i)>1$，则存在$k_n$使得$\|x_n\|_{\varphi,\omega}^{O}=\frac{1}{k_n}\{1+\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(k_nx^*(i))\omega(i)\}$。下面将分$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有界与$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$无界两种情况来讨论$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的范数. 若$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$无界，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=\infty$。由于

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_{n_j}}\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*(i))\omega(i)&=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\frac{\varphi(k_{n_j}x_{n_j}^*(i))}{k_{n_j}x_{n_j}^*(i)}x_{n_j}^*(i)\omega(i)\\&=B\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}x^*(i)\omega(i)\\&=\|x\|_{\varphi,\omega}^{O},\end{aligned}\tag{2-14}$$

对于任意η_1，存在$n_m\in\{n_j\}$使得

$$|\frac{1}{k_{n_m}}\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(k_{n_m}x_{n_m}^*(i))\omega(i)-\|x\|_{\varphi,\omega}^{O}|<\eta_1,\tag{2-15}$$

同时存在δ_1使得：

$$\| x_{n_m}\chi_{\mathbb{N}\setminus \operatorname{supp} x}\|_{\varphi,\omega}^{O} > 2\delta_1 \text{。} \tag{2-16}$$

由公式(2-15)(2-16):

$$\begin{aligned}
1=\| x_{n_m}\|_{\varphi,\omega}^{O} &= \frac{1}{k_{n_m}}(1+\sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\varphi(k_{n_m}x_{n_j}^{*}(i)\omega(i)) + \sum_{i=m(\text{supp } x)+1}^{\infty}\varphi(k_{n_m}x_{n_m}^{*}(i)\omega(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m(\text{supp x})}\frac{\varphi(k_{n_m}x_{n_m}^{*}(i))}{k_{n_m}x_{n_m}^{*}(i)}x_{n_m}^{*}(i)\omega(i)+\frac{1}{k_{n_m}}(1+\sum_{m(\text{supp x})+1}^{\infty}\varphi(k_{n_m}x_{n_m}^{*}(i)\omega(i))) \\
&\geq \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_1 + \| x_{n_m}\chi_{\mathbb{N}\setminus \text{supp x}}\|_{\varphi,\omega}^{O} \\
&\geq \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_1 + 2\delta_1,
\end{aligned}$$

故有

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} \leq 1-2\delta_1+\eta_1 \text{，}$$

取$\eta_1=\delta_1$，有$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} \leq 1-\delta_1$。

再来讨论$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有界的情况，我们可以取其收敛子列$\{k_{n_l}\}\subset\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，设$\lim\limits_{l\to\infty}k_{n_l}=k_a$。由于

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{k_{n_{l_0}}}\{1+\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(k_{n_{l_0}}x_{n_{l_0}}^{*}(i))\omega(i)\} > \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_2 \text{，}$$

对于任意η_2，取l_0使得$k_{n_{l_0}}>1$，且满足：

$$\frac{1}{k_{n_{l_0}}}\{1+\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(k_{n_{l_0}}x_{n_{l_0}}^{*}(i)\omega(i)\} > \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_2 \text{，} \tag{2-17}$$

不失一般性，我们假设$\| x_{n_0}\chi_{\mathbb{N}\setminus \text{supp}\, x}\|_{\varphi,\omega}^{O} > \eta_2$，即存在$\delta_2>0$使得

$$\sum_{i=1}^{m(supp\ x)}\varphi(x_{n_{l_0}}^{*}(i))\omega(i) > 2\delta_2 \text{，} \tag{2-18}$$

故

$$
\begin{aligned}
\| x_{n_{l_0}} \|_{\varphi,\omega}^{O} &= \frac{1}{k_{n_{l_0}}}(1+\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(k_{n_{l_0}} x_{n_{l_0}}^{*}(i)))\omega(i) \\
&= \frac{1}{k_{n_{l_0}}}(1+\sum_{i=1}^{m(\mathrm{supp\ x})}\varphi(k_{n_{l_0}} x_{n_{l_0}}^{*}(i))\omega(i)) + \frac{1}{k_{n_{l_0}}}(\sum_{m(\mathrm{supp\ x})+1}^{\infty}\varphi(k_{n_{l_0}} x_{n_{l_0}}^{*}(i))\omega(i)) \\
&\geq \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_2 + \sum_{m(\mathrm{supp\ x})+1}^{\infty}\varphi(x_{n_{l_0}}^{*}(i))\omega(i) \geq \| x\|_{\varphi,\omega}^{O} - \eta_2 + 2\delta_2 ,
\end{aligned}
$$

上式等价于

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} \leq 1+\eta_2 - 2\delta_2 ,$$

取$\eta_2 = \delta_2$，最终得到

$$\| x\|_{\varphi,\omega}^{O} \leq 1-\delta_2 。$$

至此我们完成了定理 2.4.1 的证明过程。

定理 2.3.2 设 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$，则 $((\lambda_{\varphi,\omega})_a ,\| x\|_{\varphi,\omega}^{O})$ 具有依坐标意义下的一致 Kadec-Klee 性质当且仅当$\varphi\in\Delta_2$。

证明：

充分性：由于$\varphi\in\Delta_2$且$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$，有$(\lambda_{\varphi,\omega})_a=\lambda_{\varphi,\omega}$。应用定理 2.4.1，我们得到$((\lambda_{\varphi,\omega})_a ,\|\cdot\|_{\varphi,\omega}^{O})$具有依坐标收敛意义下的一致 Kadec-Klee 性质。

必要性：应用反证法。假设$\varphi\notin\Delta_2$，若$a_\varphi>0$，存在$j\in\mathbb{N}$，使得$K(x_j)\neq 0$，其中$x^j=(\underbrace{1,1,...,1}_{j\text{个}},0,0,...)$。当$b_\varphi<\infty$，或$b_\varphi=\infty$且$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}=\infty$，此时我们取$j=1$.

当$B=\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}<\infty$，我们得到$\psi(B)>0$。 若$\psi(B)=0$，我们有$\varphi(B)=Bu$。但

是此时$\varphi \in \Delta_2$。此时由于$\sum_{i=1}^{\infty}\omega(i)=\infty$，取$j\in\mathbb{N}$使得$\psi(B)\sum_{i=1}^{j}\omega(i)>1$，即$K(x^j)\neq\varnothing$。取$h\in K(x^j)$，其中$x_n^j$定义如下：

$$x_n^j=\sum_{i=1}^{j}e_i+min(1,\frac{a_\varphi}{h})e_n,$$

故对于任意$n\geq j+1$：

$$\| x^j\|_{\varphi,\omega}^O\leq\| x_n^j\|_{\varphi,\omega}^O,$$

对于任意$n\geq j+1$，又有

$$\| x^j\|_{\varphi,\omega}^O=\frac{1}{h}(1+I_{\varphi,\omega}(hx_n^j))\geq\| x_n^j\|_{\varphi,\omega}^O,$$

我们得到$\| x^j\|_{\varphi,\omega}^O=\| x_n^j\|_{\varphi,\omega}^O$，且$x_n^j$依坐标收敛于$x^j$，取$\varepsilon:=\|\min(1,\frac{a_\varphi}{h})\|_{\varphi,\omega}^O$，我们得到$\| x_n^j-x_m^j\|_{\varphi,\omega}^O>\varepsilon$，即$sep(x_n^j)_{n=1}^{\infty}>\varepsilon$。最终，我们得到了$((\lambda_{\varphi,\omega})_a,\|\cdot\|_{\varphi,\omega}^O)$不具有依坐标下的一致 Kadec-Klee 性质，矛盾。

考虑$a_\varphi=0$的情况，假设$\varphi\notin\Delta_2$，存在$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，其通项满足：

$$\frac{u_1}{h}<1,\quad \varphi(2u_n)>2^{n+1}\varphi(u_n),\quad \varphi(u_n)\omega(1)\leq\frac{1}{2^n}。$$

取j_n满足：

$$\frac{1}{2^{n+1}}<\varphi(u_n)\sum_{i=1}^{j_n}\omega(i)\leq\frac{1}{2^n},$$

定义

$$x_n^j=\sum_{i=1}^{j}e_i+\sum_{i=j+1}^{j+j_n}\frac{u_n}{h}e_i,$$

有：

$$\| x^j\|_{\varphi,\omega}^O\leq\| x_n^j\|_{\varphi,\omega}^O\leq\frac{1}{h}(1+I_{\varphi,\omega}(hx^j))+\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{j_n}\varphi(u_n)\omega(i)\leq\| x^j\|_{\varphi,\omega}^O+\frac{1}{h2^n},$$

即

$$\| x_n^j \|_{\varphi,\omega}^O \to \| x^j \|_{\varphi,\omega}^O ,$$

当 $n > m$ 时，

$$\begin{aligned} I_{\varphi,\omega}(2h(x_n^j - x_m^j)) &= \sum_{i=1}^{j_m} \varphi(2(u_n - u_m))\omega(i) + \sum_{j_m+1}^{j_n} \varphi(2u_n)\omega(i) \\ &= \sum_{i=1}^{j_m} \varphi(2(u_n - u_m))\omega(i) + \sum_{i=1}^{j_n} \varphi(2u_n)\omega(i) - \sum_{i=1}^{j_m} \varphi(2u_n)\omega(i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{j_m} \varphi(2u_m)\omega(i) + \sum_{i=1}^{j_n} \varphi(2u_n)\omega(i) \\ &\geq 2^{m+1} \sum_{i=1}^{j_m} \varphi(u_m)\omega(i) + 2^{n+1} \sum_{i=1}^{j_n} \varphi(u_n)\omega(i) \\ &\geq 2, \end{aligned}$$

因此，$\| x_n^j - x_m^j \|_{\varphi,\omega}^O \geq \| x_n^j - x_m^j \|_{\varphi,\omega} \geq \dfrac{1}{2h}$，$sep(x_n^j) \geq \dfrac{1}{2h}$. 因此 $((\lambda_{\varphi,\omega})_a, \|\cdot\|_{\varphi,\omega}^O)$ 不具有依坐标收敛意义下的一致 Kadec-Klee 性质.

2.4 本章小结

本章对 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 的一致 Kadec-Klee 性质进行了研究。跟据 Orlicz 范数表达式中确界是否可达，将情况分为几类：(1) 若 $b_\varphi < \infty$，(2) 若 $b_\varphi = \infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = \infty$，(3) $b_\varphi = \infty$，$\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = B < \infty$ 且 $\psi(B) \sum\limits_{i=1}^{m(supp\, x)} \omega(i) > 1$，(4) 若 $b_\varphi = \infty$ 且 $\psi(B)\sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega(i) < 1$，或 $b_\varphi = \infty$ 且存在 u_0 使得从 u_0 开始有 $p(u) = B$. 前三种情况下，有 $k^{**} < \infty$，确界可达。第四种情况下，有 $k^{**} = \infty$，确界不可达。

第 3 章 赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的(紧)局部一致凸性

3.1 引言

设 X 为 Banach 空间，

定义 3.1.1[2] 若 $f\in S(X)$，$f_n\in S(X)$，$\|f_n+f\|\to 2$，能够得到$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$S(X)$上是紧集。则称 X 为紧局部一致凸的 Banach 空间。

定义 3.1.2[2] 若对于任意 $f\in S(X)$，$f_n\in S(X)$，若 f 与 f_n 满足 $\|f_n+f\|\to(n\to\infty)$，可以得到$\|f-f_n\|\to 0(n\to\infty)$，则称 X 为局部一致凸的 Banach 空间。

定义 3.1.3[2] 设 X 为 Banach 空间，若对于任意 $f\in S(X)$，$g\in S(X)$，$f\neq g$，可以得到$\|\dfrac{f+g}{2}\|<1$，则称 X 为严格凸的 Banach 空间。

Orlicz-Lorentz空间中的凸性是Orlicz-Lorentz空间研究的一部分重要内容，关于Orlicz-Lorentz中凸性的研究，请参考[37-43]。

用L_0表示所有勒贝格可测函数及其等价类的集合. m代表R_+上的勒贝格测度。

定义 3.1.4[45] 若对于任意的f，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$|f_n|\le|f|$，$|f_n|\to 0\ (n\to\infty)$，能够得到$\|f_n\|_X\to 0(n\to\infty)$，则称$f$具有绝对连续范数。若 X 中的任意元素具有绝对连续范数，则称 Banach 函数空间X称为序连续的。

3.2 Orlicz 范数表达式中确界可达的充要条件

引理 3.2.1 若φ是一个N函数，则对任意$f\in\lambda^{O}_{\varphi,\omega}$，有$k^{**}<\infty$。

证明：反证，若$k^{**}=\infty$，存在一个非负序列$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$k_n\uparrow\infty$，且$\int_0^\infty\psi(p(k_nf)^*)\omega\le 1$.

取$t_0=m\{t:f^*(t)>1\}<\infty$，有：

$$\psi\left(p\left(k_n\right)\right)W\left(t_0\right)=\int_0^{t_0}\psi\left(p\left(k_n\right)\right)\omega(t)=\int_0^{m\left\{t:f^*>1\right\}}\psi\left(p\left(k_n\right)\right)\omega\le\int_0^\infty\psi\left(p\left(k_nf^*\right)\right)\omega\le 1,$$

上式同除$W(t_0)p(k_n)$，可得，$\dfrac{\psi(p(k_n))}{p(k_n)}\le\dfrac{1}{W(t_0)p(k_n)}$。由于$\varphi$是$N$函数，故$\psi$是$N$函数，令$n\to\infty$，$\dfrac{\psi(p(k_n))}{p(k_n)}\to\infty\,(n\to\infty)$，然而$\dfrac{1}{W(t_0)p(k_n)}\to 0\,(n\to\infty)$，矛盾。

定义集合$K(f):=[k^*,k^{**}]$，有以下结果：

定理 3.2.2[20,51,52] 以下结论成立：

(1) 若存在$k>0$，使得$\rho_{\psi,\omega}(p(kf))=1$，则$\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=\dfrac{1}{k}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(kf)\}$。

(2) $k\in K(f)$当且仅当$\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=\dfrac{1}{k}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(kf)\}$。

定理 3.2.3[5,6] 以下结论成立：

(1) $\inf\{k:k\in K(f),\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=1\}>1$当且仅当$\varphi\in\Delta_2$。

(2) 集合$Q=\cup\{K(f):a\le\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}\le b\}$对任何$b\ge a>0$是有界的当且仅当$\varphi\in\nabla_2$。

证明：该结论是Orlicz空间中相关结论的自然推广，其证明过程请参考[4]。

引理 3.2.4[4] 对任意 Orlicz-Lorentz 函数空间$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$，以下条件等价：

(1) $\varphi\in\Delta_2$。

(2) $\rho_{\varphi,\omega}(f)=1$当且仅当$\|f\|_{\varphi,\omega}=1$。

(3) 对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\|f\|_{\varphi,\omega}\ge 1-\delta$时，$\rho_{\varphi,\omega}(f)\ge 1-\varepsilon$。

(4) $\rho_{\varphi,\omega}(f_n)\to 0$当且仅当对任意$\lambda>0$，$\rho_{\varphi,\omega}(\lambda f_n)\to 0$。

引理 3.2.5 设 $f \in \lambda_{\varphi,\omega}$，且 $\|f\|_{\varphi,\omega} \le 1$,则 $\rho_{\varphi,\omega}(f) \le \|f\|_{\varphi,\omega}$ 。

证明：证明过程可以参考[5]中定理 1.38。

3.3 Luxemburg 范数的新表达式

定理 3.3.1 对任意 $f \in \lambda_{\varphi,\omega}$，有以下：

$$\|f\|_{\psi,\omega} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\psi,\omega}(\frac{f}{\lambda}) \le 1\} = \sup\{\int_0^\infty f^*(t) g^*(t)\omega(t) : \|g\|_{\varphi,\omega}^O \le 1\}$$ 。

证明：设 $\|f\|_{\psi,\omega} = 1$，故 $\rho_{\psi,\omega}(f) = \int_0^\infty \psi(f^*(t))\omega(t)dt \le \|f\|_{\varphi,\omega} = 1$，接下来要证明：

$\sup\{\int_0^\infty f^*(t) g^*(t)\omega(t)dt : \|g\|_{\varphi,\omega}^O \le 1\} = 1$ 。

由于 $\rho_{\psi,\omega}(f) = 1$，我们有：

$$\int_0^\infty f^*(t) g^*(t)\omega(t)dt \le \|g\|_{\varphi,\omega}^O \le 1$$ 。

为了得到另一个方向的不等式，我们定义 $f_n(t) = f^*(t)\chi_{[0,n]}$ 。由于 $\int_0^\infty \psi(f^*(t))\omega(t)dt = 1 < \infty$，我们得到：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \psi(f_n^*(t))\omega(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \psi(f^*(t))\omega(t)dt = 1, \tag{3-1}$$

故对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in N$ 使得 $n > n_0$ 时：

$$\rho_{\psi,\omega}((1+\varepsilon)f_n) \ge (1+\varepsilon)\rho_{\psi,\omega}(f_n) > 1 。\tag{3-2}$$

取 $g_n = \dfrac{q(1+\varepsilon)f_n}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varepsilon)f_n)}$，$\|g_n\|_{\varphi,\omega}^O = \dfrac{\|q(1+\varepsilon)f_n\|_{\varphi,\omega}^O}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varepsilon)f_n)} \le 1$，故

$$\begin{aligned}\sup\{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\omega(t):\|g\|_{\varphi,\omega}^O\le 1\}&\ge\int_0^\infty f_n^* g_n^*\omega(t)dt\\&=\frac{1}{1+\varepsilon}\int_0^\infty\frac{(1+\varepsilon)f_n(t)q(1+\varepsilon)f_n}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varphi))f_n}\omega(t)dt\\&=\frac{1}{1+\varepsilon}\int_0^\infty\frac{\psi(1+\varepsilon)f_n(t)+\varphi(q(1+\varepsilon)f_n)}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varepsilon)f_n)}\omega(t)dt\\&=\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\rho_{\psi,\omega}((1+\varepsilon)f_n(t))+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varepsilon)f_n(t))}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(1+\varepsilon)f_n)}\\&\ge\frac{1}{1+\varepsilon},\end{aligned}$$

由ε的任意性，我们得到：

$$\sup\{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\omega(t):\|g\|_{\varphi,\omega}^O\le 1\}\ge 1, \tag{3-3}$$

最终得到

$$\sup\{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\omega(t):\|g\|_{\varphi,\omega}^O\le 1\}=\|f\|_{\psi,\omega}=1\ 。$$

定理 3.3.2 若φ是一个N函数，则对于$\lambda_{\psi,\omega}$中的任意f，存在$g\in\lambda_{\varphi,\omega}^O$，$\|g\|_{\varphi,\omega}^O\le 1$，使得$\|f\|_{\varphi,\omega}^O=\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt$ 。

证明：

若$f=0$，证明过程是显然的。

若$f\ne 0$， 不失一般性，假设$\rho_{\psi,\omega}(f)=1$，现在将证明$g(t)=\dfrac{q(f)}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}$.

首先，$\|g(t)\|_{\varphi,\omega}^O=\dfrac{\|q(t)\|_{\varphi,\omega}^O}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}\le 1$，随即有：

$$1 \geq \int_0^\infty f^* g^* \omega(t)dt = \int_0^\infty f^* \frac{q(f^*)}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}\omega(t)dt = \int_0^\infty \frac{\psi(f^*)+\varphi(q(f^*))}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}\omega(t)dt$$

$$= \frac{\rho_{\varphi,\omega}(f)+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))} = \frac{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))} = 1\text{。}$$

3.4 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 的(紧)局部一致凸性

引理 3.4.1[49, 51-52] 设$\varphi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$，$\varphi$严格凸。取$f_n$，$f \in \lambda_{\varphi,\omega}^O$，$\|f_n\|_{\varphi,\omega}^O = \|f\|_{\varphi,\omega}^O = 1$，且$\|f_n + f\|_{\varphi,\omega}^O \to 2$。则$k_n f_n$依测度收敛于$kf$，其中$k_n \in K(f_n)$，$k \in K(f)$。

证明：我们需要证明，对任意$\varepsilon > 0$，存在$n_0 \in \mathbb{N}$使得当$n \geq n_0$时：

$$m\{t : |kf(t) - k_n f_n(t)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon \text{。}$$

由于$\varphi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$，则存在$d > 1$使得：

$$1 < \sup\{k_n, k : k_n \in K(f_n), k \in K(f)\} = d < \infty \text{。}$$

对上述$\varepsilon > 0$，存在$\gamma > 0$，使得

$$\varphi(\gamma)\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} \omega(t)dt \geq d \text{。}$$

定义以下三个集合：

$$A = \left\{t : |kf(t)| \geq \gamma\right\}, B_n = \left\{t : |k_n f_n(t)| \geq \gamma\right\},$$
$$E_n = \left\{t : |kf(t) - k_n f_n(t)| \geq \varepsilon, |kf(t)| < \gamma, |k_n f_n(t)| < \gamma\right\},$$

由于$\rho_{\varphi,\omega}(kf) = k - 1 \leq d$，$\rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n) = k_n - 1 \leq d$，故存在$n_1$使得$n \geq n_1$时

$$mA \leq \frac{\varepsilon}{4}, mB_n \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{。}$$

若存在n_2使得$n_2 \geq n_1$时，$mE_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$，我们得到$n \geq n_2$时，

$$m\{t:|kf(t)-k_nf_n(t)|\geq\varepsilon\}\leq mA+mB_n+mE_n<\varepsilon,$$

由于φ是严格凸的，存在$0<\lambda<1$使得对任意$0<u,v\leq\gamma$，$|u-v|\geq\varepsilon$，有

$$\varphi(\alpha u+\beta v)\leq(1-\lambda)[\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)],$$

其中：$\alpha+\beta=1$，$\alpha,\beta\in[\frac{1}{1+d},\frac{d}{1+d}]\subset(0,1)$。任意$n\in\mathbb{N}$，存在保测度变换$\sigma_n$使得

$$\int_0^\infty\varphi(f_n(t)+f(t))\circ\sigma_n(t)=\int_0^\infty\varphi(f_n(t)+f(t))^*\omega(t)dt,$$

且当s与t满足$|f_n(t)+f(t)|<|f_n(s)+f(s)|$时，有：

$$\sigma_n(t)\geq\sigma_n(s)。$$

定义p_n与G_n：

$$\frac{\varphi}{8}\int_0^{p_n}\omega(t)dt=2\frac{k_nk}{k_n+k}-1,$$

$$G_n=E_n\cap\{t:\omega^\circ\sigma_n(t)\geq\omega(p_n+\varepsilon)\},$$

由于$\int_0^\infty\omega(t)dt=\infty$，故$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有界的。于时存在$p_M>0$，使得$n\in\mathbb{N}$时，$p_n<p_M$。此时，有以下不等式

$$
\begin{aligned}
\| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O} &\le \frac{k_n+k}{k_nk}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(\frac{k_nk}{k_n+k}(f_n+f))\} \\
&=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k}+\frac{k_n+k}{k_nk}\int_0^\infty \varphi(\frac{k_n}{k_n+k}kf+\frac{k}{k_n+k}k_nf_n)^*\omega(t)dt \\
&=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}+\frac{k_n+k}{k_nk}\int_{[0,\infty)\setminus G_n}\varphi(\frac{k_n}{k_n+k}kf+\frac{k}{k_n+k}k_nf_n)^*\omega(t)dt, \\
&+\frac{k_n+k}{k_nk}\int_{G_n}\{\varphi(\frac{k_n}{k_n+k}kf+\frac{k}{k_n+k}k_nf_n)^*\}\omega(t)dt \\
&\le\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k}+\frac{k_n+k}{k_nk}\int_{[0,\infty)\setminus G_n}(\frac{k_n}{k_n+k}\varphi(k_nf_n)^*+\frac{k}{k_n+k}\varphi(kf)^*)\omega(t)dt \quad (3\text{-}4) \\
&+\frac{k_n+k}{k_nk}(1-\lambda)\int_{G_n}(\frac{k}{k_n+k}\varphi(k_nf_n)^*+\frac{k_n}{k_n+k}\varphi(kf)^*)\omega(t)dt \\
&=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k_n}\int_0^\infty\varphi(k_nf_n)^*\omega(t)dt+\frac{1}{k}\int_0^\infty\varphi(kf)^*\omega(t)dt \\
&-\lambda\int_{G_n}\left[\frac{1}{k_n}\varphi(k_nf_n)^*+\frac{1}{k}\varphi(kf)^*\right]\omega(t)dt \\
&=2-\lambda\int_{G_n}\left[\frac{1}{k_n}\varphi(k_nf_n)^*+\frac{1}{k}\varphi(kf)^*\right]\omega(t)dt
\end{aligned}
$$

成立。由于$t\in G_n$时，$|k_nf_n-kf|>\varepsilon$，故对任意$n\in\mathbb{N}$，有以下关系：

$$\max\{|k_nf_n|,|kf|\}>\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

为了完成证明，下面我们将分成以下两种情况：

情况 1：$mG_n\ge\dfrac{\varepsilon}{4}$。此时对任意$n\in\mathbb{N}$，我们有：

$$\| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O}\le 2-\frac{\lambda a\varphi(\frac{\varepsilon}{2})\omega(\frac{d^2}{2}+\varepsilon)\varepsilon}{4},$$

由于$\| f_n-f\|_{\varphi,\omega}^{O}\to 2$，存在$n_0$，使得

$$\| f_{n_0} + f \|_{\varphi,\omega}^{o} \geq 2 - \frac{\lambda a \varphi(\frac{\varepsilon}{2}) \omega(\frac{d^2}{2} + \varepsilon)\varepsilon}{8},$$

矛盾。

情况 2：存在G_n的子列，不妨仍记作G_n，$mG_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$。下面将证明从某一项开始存在$mE_n > \dfrac{\varepsilon}{2}$。若$mE_n \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$，且$mG_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$，存在$G_n^1 \subset G_n$，使得

$$m(E_n \setminus G_n^*) = \frac{\varepsilon}{4}。$$

定义：

$$H_n^1 = \sigma^{-1}(0, p_n),$$
$$H_n^2 = \sigma^{-1}(p_n + \frac{\varepsilon}{4}) \setminus (E_n \setminus G_n^1)。$$

由于：

(1) 若$t \in E_n \setminus G_n^1 \subset E_n \setminus G_n$，则$\omega \circ \sigma < \omega(p_n + \dfrac{\varepsilon}{4})$ 且$t \notin H_n^1$，

(2) 若$(0,\infty) \setminus H_n^1 \setminus H_n^2 = \sigma^{-1}(p_n, p_n + \dfrac{\varepsilon}{4}) \cup (E_n \setminus G_n^1)$，则$| l_n(f_n(t) + f(t)) | \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$，

(3) 若$t \in H_n^1$，则$| l_n(f_n + f(t)) | \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$，

证明：(1)(2)是显然的。(3)的证明：若(3)不成立，则存在$t_0 \notin H_n^1$，使得$| l_n(f_n(t_0) + f(t)) | > \varepsilon$，则$| l_n(f(t) + g(t)) | > \dfrac{\varepsilon}{8}$ $(t \in H_n^1)$。由

$$\begin{aligned}
2 &= \| f_n \|_{\varphi,\omega}^{o} + \| f \| \\
&\geq \frac{1}{k_n}\{1 + \rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n)\} + \frac{1}{k}\{1 + \rho_{\varphi,\omega}(kf)\} \\
&\geq \frac{k_n + k}{k_n k}\{1 + \frac{k_n}{k_n + k}\rho_{\varphi,\omega}(kf) + \frac{k}{k_n + k}\rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n)\} \\
&\geq \frac{1}{l_n}\{1 + \rho_{\varphi,\omega}(l_n(f_n + f))\},
\end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
2l_n-1 &\geq \rho_{\varphi,\omega}(l_n(f_n+f)) \\
&= \int_0^{\infty} \varphi(l_n(f_n+f))(t)\omega^{\circ}\sigma_n(t) \\
&> \int_{H_n^1} \varphi(l_n(f_n+f))(t)\omega^{\circ}\sigma_n(t)dt \\
&> \varphi(\frac{\varepsilon}{8})\int_0^{p_n} \omega(t)dt \\
&= 2l_n-1,
\end{aligned}
$$

矛盾。故(3)成立。由于不等式

$$
\begin{aligned}
2 &= \| f_n\|_{\varphi,\omega}^{O} + \| f\|_{\varphi,\omega}^{O} \geq \frac{1}{l_n}[1+\rho_{\varphi,\omega}(l_n(|f_n|+|f|))] \\
&= \frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_n}[\int_{H_n^1\cup H_n^2} \rho_{\varphi,\omega}(l_n|f_n+f|)\omega^{\circ}\sigma(t)dt+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(l_n(|f_n|+|f|)\chi_{E_n\backslash G_n^1})^{*}(t)\omega(t+p_n)] \\
&= \frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_n}[\int_0^{\infty} \rho_{\varphi,\omega}(l_n|f_n+f|)(t)\omega^{\circ}\sigma(t)dt+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(l_n(|f_n|+|f|)\chi_{E_n\backslash G_n^1})^{*}(t)\omega(t+p_n)dt \\
&\quad -\int_{(0,\infty)\backslash H_n^1\backslash H_n^2} \rho_{\varphi,\omega}(l_n|f_n+f|)(t)\omega^{\circ}\sigma(t)] \\
&\geq \frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_n}\rho_{\varphi,\omega}(l_n(f_n+f))+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(\varepsilon)\omega(t+p_n)dt \\
&\quad -\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(\frac{\varepsilon}{8})\omega(t+p_n)dt \\
&\geq \| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O}+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(\frac{\varepsilon}{2})\omega(t+p_n)dt-2\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)\omega(t+p_n)dt \\
&\geq \| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\omega(t+p_n)dt \\
&\geq \| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O}+\frac{\varepsilon}{8}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\left(p_M+\frac{\varepsilon}{4}\right)
\end{aligned}
$$

成立，由于$\| f_n+f\|_{\varphi,\omega}^{O}\to 2\ (n\to\infty)$，于是存在$n_0\in\mathbb{N}$使得：

$$
\| f_{n_0}+f\|_{\varphi,\omega}^{O} > 2-\frac{\varepsilon}{16}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\left(p_M+\frac{\varepsilon}{4}\right),
$$

则

$$
2 \geq 2+\frac{\varepsilon}{16}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\left(p_M+\frac{\varepsilon}{4}\right),
$$

矛盾，所以$mE_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$。

定理 3.4.2：设φ是一个N函数，$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$是紧局部一致凸的当且仅当$\varphi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$且$\varphi$严格凸。

证明：

先来证明充分性。取f_n，$f \in S(X)$，$\| f_n + f \|_{\varphi,\omega}^{O} \to 2$。接下来要证明$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$S(X)$上是紧的。取$k_n \in K(f_n)$，$k \in K(f)$，则$k_n$必存在一个柯西列。由于

$$| k_n - k_m | = | k_n \| f_n \|_{\varphi,\omega}^{O} - k_m \| f_m \|_{\varphi,\omega}^{O} | \le \| k_n f_n - k_m f_m \|_{\varphi,\omega}^{O},$$

只需证明

$$\lim_{m,n\to\infty} \| k_n f_n - k_m f_m \|_{\varphi,\omega}^{O} = 0 \text{。}$$

任意$\varepsilon > 0$，存在$M > 0$，$n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\| f_n \chi_{\{t : | f_n(t) | \le \frac{1}{M}\}} \|_{\varphi,\omega}^{O} \le \varepsilon \text{。}$$

由于$\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$，故存在$\eta > 0$，使得对任意$\| z \|_{\varphi,\omega}^{O} \le 1$，存在

$$m\{t : | z(t) | > \frac{1}{M}\} \le \eta \text{。}$$

取$\theta \in (0, \dfrac{1}{2M})$，$\theta$满足

$$\| \theta \chi_{(0,2\eta)} \|_{\varphi,\omega}^{O} < \varepsilon,\quad \| 2M \chi_{(0,2\theta)} \|_{\varphi,\omega}^{O} < \varepsilon,$$

由引理 3.4.1，存在$N_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$m\{t : | k_n f_n - k_m f_m | \ge \theta\} < \theta \text{。}$$

对于任意$m, n > N_1$，定义：

$$
\begin{aligned}
&A=\{t:|f_n|>M\},\\
&B=\{t:|f_m|>M\},\\
&C=\{t:|f_n|<\frac{1}{M}\},\\
&D=\{t:|f_m|<\frac{1}{M}\},\\
&E=\{t:|k_nf_n-k_mf_m|\le\theta\},\\
&F=\{t:|k_nf_n-k_mf_m|\le\theta\}。
\end{aligned}
$$

显然成立以下关系

$$
\begin{aligned}
(0,\infty)&=A\cup C\cup((F\cap B)\setminus A\setminus C)\cup((D\cap E)\cap A\cap C)\cup(E\setminus C\setminus D)\cup(F\setminus A\setminus B)\\
&=B\cup D\cup((F\cap A)\setminus B\setminus D)\cup((C\cap E)\cap B\cap D)\cup(E\setminus C\setminus D)\cup(F\setminus A\setminus B),
\end{aligned}
$$

且当$t\in(D\cap E)\setminus C$时，$|x_m(t)|\ge\frac{1}{2M}$，$|x_n(t)|<\frac{3}{2M}$，故对于任意$m,n>n_0$，有：

$$
\begin{aligned}
\|k_nf_n-k_mf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}\le{}&\|k_nf_n\chi_A\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|k_mf_m\chi_B\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|k_nf_n\chi_C\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|k_mf_m\chi_D\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|(k_nf_n-k_mf_m)\chi\\
&+\|k_nf_n\chi_{(F\cap B)\setminus A\setminus C}-k_mf_m\chi_{(F\cap A)\setminus B\setminus D}\|_{\varphi,\omega}^{O}\\
&+\|(f_n-f_m)\chi_{F\setminus A\setminus B}\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|k_nf_n\chi_{(D\cap E)\setminus A\setminus C}-k_mf_m\chi_{(C\cap E)\setminus B\setminus D}\|_{\varphi,\omega}^{O}\\
\le{}&4d\varepsilon+\|\theta\chi_{R\setminus(C\cap D)}\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|2M\chi_{(0,2\theta)}\|_{\varphi,\omega}^{O}+3d\|f_m\chi_D\|_{\varphi,\omega}^{O}+3d\|f_n\chi_C\|_{\varphi,\omega}^{O}\\
\le{}&(12d+1)\varepsilon,
\end{aligned}
$$

由此得到$\lim\limits_{m,n\to\infty}\|k_nf_n-k_mf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}$，故

$$
|k_n-k_m|=|k_n\|f_n\|_{\varphi,\omega}^{O}-k_m\|f_m\|_{\varphi,\omega}^{O}|\le\|k_nf_n-k_mf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}\to 0\quad(m,n\to\infty)
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\|f_n-f_m\|_{\varphi,\omega}^{O}&=\frac{1}{k_n}\|k_nf_n-k_nf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}\\
&\le\frac{1}{k_n}\|k_nf_n-k_mf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}+\frac{1}{k_n}\|k_mf_m-k_nf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}\\
&=\frac{1}{k_n}\|k_nf_n-k_mf_m\|_{\varphi,\omega}^{O}+\frac{|k_n-k_m|}{k_n}\|f_m\|_{\varphi,\omega}^{O},
\end{aligned}
$$

即 $\lim_{m,n\to\infty}\|f_n - f_m\|_{\varphi,\omega}^O = 0$，因此$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$S(X)$中是紧集。

必要性：首先证明$\varphi\in\Delta_2$。若$\varphi\notin\Delta_2$，由[4]中的定理 2.3，存在递减函数f

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}u_k\chi_{[t_{k-1},t_k]}=f^*,$$

且$\rho_{\varphi,\omega}(f)\le\frac{1}{2}$，当$\lambda>1$时，$\rho_{\varphi,\omega}(\lambda f)=\infty$，$\|f\|_{\varphi,\omega}^O>\|f\|_{\varphi,\omega}=1$。取$g=\frac{f}{\|f\|_{\varphi,\omega}^O}$，$g_n=\frac{1}{\|f\|^O}\sum_{k=1}^{n}u_k\chi_{[t_{k-1},t_k]}$，故对于任意$\alpha\le\|f\|_{\varphi,\omega}^O$，$\rho_{\varphi,\omega}(\alpha g_n)\to\rho_{\varphi,\omega}(\alpha g)$，对于任意$\beta>\|f\|_{\varphi,\omega}^O$，$\rho_{\varphi,\omega}(\beta g_n)\to\infty$，因此：

$$1\ge\|g_n\|_{\varphi,\omega}^O=\inf_{k>0}\frac{1}{k}[1+\rho_{\varphi,\omega}(kg_n)]\to\inf_{k>0}\frac{1}{k}[1+\rho_{\varphi,\omega}(kg)]=\|g\|_{\varphi,\omega}^O=1,$$

此时$\|\frac{g_n+g}{2}\|^O\ge\|g_n\|^O\to1$。由于$\rho_{\varphi,\omega}(\frac{g-g_n}{\frac{1}{\|f\|_{\varphi,\omega}^O}})\le1$，$\rho_{\varphi,\omega}(\lambda\frac{g-g_n}{\frac{1}{\|f\|_{\varphi,\omega}^O}})=\infty$ ($\lambda>1$)，故$\|g-g_n\|_{\varphi,\omega}=\frac{1}{\|f\|_{\varphi,\omega}^O}$，有$\|g-g_n\|_{\varphi,\omega}^O>\|g-g_n\|_{\varphi,\omega}=\frac{1}{\|f\|_{\varphi,\omega}^O}$，矛盾。

再来证明$\varphi\in\nabla_2$的必要性。若$\varphi\notin\nabla_2$，即$\psi\notin\Delta_2$，存在$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，u_n是单调递增的，$\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$，且满足：

$$\psi[(1+\frac{1}{k})u_k]>2^k\psi(u_k),$$

再定义t_k如下：

$$\int_0^{t_k}\psi(u_k)\omega(t)dt=\psi(u_k)W(t_k)=\frac{1}{2^k},$$

显然t_k是单调递减的，取f_n：

$$f_n=u_k\int_{t_{n-1}}^{t_n}\omega(t)dt,$$

其中$l_n := \sum_{i=1}^{n} t_k$，$l_0 = 0$，$f_n$的重排$f_n^*$如下所示：

$$f_n^* = u_k \int_0^{t_k} \omega(t)dt \text{ ,}$$

因此

$$\rho_{\psi,\omega}(f_n^*) = \psi(u_n)W(t_n) = \frac{1}{2^n} \to 0\ (n \to \infty) \text{ ,} \tag{3-5}$$

但是

$$\rho_{\psi,\omega}((1+\frac{1}{n})f_n^*) = \psi((1+\frac{1}{n})u_n)W(t_n) > 1 \text{ ,}$$

除此之外，$m \neq n$时，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是互不相交的。取$g_n = \dfrac{q(f_n)}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f_n))}$使得

$$\| f_n \|_{\psi,\omega} = \int_0^{\infty} f_n^* g_n^* \omega(t)dt \text{ ,}$$

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$也是各项互不相交的。将f_1单位化，用f_1^e表示，即$\rho_{\psi,\omega}(f_1^e) = 1$。对于$n > 1$，由于

$$\rho_{\varphi,\omega}(f_1^e) \le \rho_{\varphi,\omega}(f_n + f_1^e) \le \rho_{\varphi,\omega}(f_1^e) + \rho_{\varphi,\omega(f_n)} \text{ ,}$$

即

$$\rho_{\varphi,\omega}(f_1^e + f_n) \to 1\ (n \to \infty) \text{ ,}$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (g_n + g_1)^* (f_n + f_1^e)^* \omega(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g_n^*(t) f_n^*(t) \omega(t)dt \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g_1^* (f_1^e)^* \omega(t + m(\operatorname{supp} f_n))dt \\ &= 2,\end{aligned}$$

我们得到

$$\| g_n + g_1 \|_{\varphi,\omega}^{O} \to 2\ (n \to \infty) \text{ ,}$$

但$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$显然不是紧集。

最后，将证明严格凸的必要性。设φ非严格凸，存在区间$[a,b]$使得φ在

$[a,b]$ 上有:

$$\varphi = Au + b\,,$$

由中值定理，存在 s_0，使得：

$$\psi(A)W(s_0) = 1\,,$$

定义 f_0 如下：

$$f_0 = \frac{a+b}{2}\chi_{[0,s_0]}\,。$$

下面寻找下一项，取 s_1 满足：

$$\int_0^{\infty}\omega(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{s_0}\omega(t)dt\,,$$

再定义 f_1 如下：

$$f_1 = b\chi_{[0,s_1]} + a\chi_{[s_1,s_0]}\,,$$

对上述 f_1，有以下关系式

$$\begin{aligned}\rho_{\psi,\omega}(pf_1) &= \int_0^{\infty}\psi(p(b\chi_{[0,s_1]} + a\chi_{[s_1,s_0]}))^{*}\omega(t)dt \\ &= \int_0^{s_0}\psi(A)\omega(t)dt \\ &= \psi(A)W(s_0) \\ &= 1\end{aligned}$$

成立，这说明 $1 \in K(f_1)$，再由引理 3.2.2，有以下等式

$$
\begin{aligned}
\| f_1\|_{\varphi,\omega}^{O} &= 1+\rho_{\varphi,\omega}(b\chi_{[0,s_1]}+a\chi_{[s_1,s_0]}) \\
&= 1+\varphi(b)W(s_1)+\varphi(a)[W(s_0)-W(s_1)] \\
&= 1+\frac{1}{2}\varphi(b)W(s_0)+\frac{1}{2}\varphi(a)W(s_0) \\
&= 1+[\varphi(\frac{a+b}{2})W(s_0)]W(s_0) \\
&= 1+\varphi(\frac{a+b}{2})W(s_0) \\
&= \| f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}
\end{aligned}
$$

成立，再定义：

$$f_2 = a\chi_{[0,s_2]}+b\chi_{[s_2,s_1]}+b\chi_{[s_1,s_3]}+a\chi_{[s_3,s_0]}\text{，}$$

由于

$$
\begin{aligned}
\rho_{\varphi,\omega}(pf_2) &= \int_0^{\infty}\psi(p(a\chi_{[0,s_2]}+b\chi_{[s_2,s_1]}+b\chi_{[s_1,s_3]}+a\chi_{[s_3,s_0]}))^{*}\omega(t)dt \\
&= \int_0^{\infty}\psi(p(b\chi_{[0,s_1]}+a\chi_{[s_1,s_0]}))\omega(t)dt \\
&= \psi(A)W(s_0) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

此时$1\in K(f_2)$，故

$$
\begin{aligned}
\| f_2\|_{\varphi,\omega}^{O} &= 1+\int_0^{\infty}\varphi(a\chi_{[0,s_2]}+b\chi_{[s_2,s_1]}+b\chi_{[s_1,s_3]}+a\chi_{[s_3,s_0]})^{*}\omega(t)dt \\
&= 1+\varphi(b)W(s_1)+\varphi(a)[W(s_0)-W(s_1)] \\
&= 1+\varphi(\frac{a+b}{2})W(s_0) \\
&= \| f_1\|_{\varphi,\omega}^{O} \\
&= \| f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}\text{。}
\end{aligned}
$$

再来寻找下一项。取s_4为$[0,s_2]$的中点，s_5为$[s_2,s_1]$的中点。定义

$$f_3 = a\chi_{[0,s_4]}+b\chi_{[s_4,s_2]}+a\chi_{[s_2,s_5]}+b\chi_{[s_5,s_1]}+b\chi_{[s_1,s_3]}+a\chi_{[s_3,s_0]}\text{，}$$

用同样的方法验证，

$$\rho_{\psi,\omega}(p(f_3))=1,$$

且有

$$\|f_3\|_{\varphi,\omega}^{O}=1+\varphi(\frac{a+b}{2})W(s_0)=\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O},$$

利用相同的方法，得到序列$\{\frac{f_n}{\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}}\}_{n\in\mathbb{N}}$。若$m\neq n$，有以下关系式：

$$\rho_{\psi,\omega}(p(\frac{f_n+f_m}{2}))=\psi(A)W(s_o)=1,$$

我们得到：

$$\begin{aligned}\|\frac{f_n+f_m}{2\|f_0\|^{O}}\|_{\varphi,\omega}^{O}&=\frac{1}{\|f_0\|^{O}}\{1+\varphi(b)W(s_1)+\varphi(a)[W(s_0)-W(s_1)]\}\\&=\frac{1}{\|f_0\|^{O}}\{1+\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}W(s_o)\}\\&=\frac{1}{\|f_0\|^{O}}\{1+\varphi(\frac{a+b}{2})W(s_0)\}\\&=1,\end{aligned}$$

即

$$\|\frac{f_n+f_m}{\|f_0\|^{o}}\|_{\varphi,\omega}^{O}=2。$$

又因为：

$$\rho_{\varphi,\omega}(\frac{f_n-f_m}{\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}})=\frac{1}{\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}}\varphi(b-a)W(\frac{s_1}{2})>0,$$

矛盾，故φ严格凸。

定理 3.4.3：设φ是一个N函数，$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$是局部一致凸的，当且仅当$\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$且$\varphi$严格凸。

证明：必要性的证明是显然的。由于$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$的局部一致凸性蕴含严格凸性，充分性的证明是显然的。

3.5 本章小结

本章给出了赋Orlicz 范数Orlicz-Lorentz 序列空间$\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$具有局部一致凸性，紧局部一致凸性的充要条件，即$\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$且$\varphi$严格凸。在证明中，先给出Luxemburg 范数的表达式：

$$\|f\|_{\psi,\omega}=\inf\{\lambda>0:\rho_{\psi,\omega}(\frac{f}{\lambda})\le 1\}=\sup\{\int_0^{\infty}f^{*}(t)g^{*}(t)\omega(t):\|g\|_{\varphi,\omega}^{O}\le 1\}\text{ 。}$$

若φ为N函数，上式确界可达，即$\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=\int_0^{\infty}f^{*}(t)g^{*}(t)\omega(t)dt$。在证明过程中，我们设$\rho_{\psi,\omega}(f)=1$，取$g(t)=\dfrac{q(f)}{1+\rho_{\varphi,\omega}(q(f))}$，最终证明了$\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=\int_0^{\infty}f^{*}(t)g^{*}(t)\omega(t)dt$，其中$g(t)$的作用相当于支撑泛函。在证明$\varphi\in\nabla_2$时，通过这种方法，利用证明$\varphi\in\Delta_2$的方法来证明$\varphi\in\nabla_2$的问题。在证明$\varphi$严格时，构造出了反例，该反例可以方便地解决Orlicz 函数φ严格凸的必要性问题。

第 4 章 赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 函数空间的一致凸性

4.1 引言

定义 4.1.1[2] 称 Banach 空间 X 为一致凸的，若任意序列 $f_n \in S(X)$，$g_n \in S(X)$，若满足 $\| f_n + g_n \| \to 2$，能够得到 $\| f_n - g_n \| \to 0$。

定义 4.1.2[2][3] 一致凸的另一种定义是:

任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，任意 f，$g \in S(X)$，若满足 $\| f - g \| > \varepsilon$，则 $\| \frac{f+g}{2} \| < 1 - \delta$。

定义 4.1.3[2] 设 X 为 Banach 空间，若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得任意的 $x_0, x_1, \ldots, x_k \in B(X)$，且 $\left\| x_0 + x_1 + \ldots + x_k \right\| \ge k + 1 - \delta$，有

$$\Delta\left(x_0, x_1, \ldots, x_k\right) = \sup_{f_i \in B\left(X^*\right)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f_1\left(x_0\right) & f_1\left(x_1\right) & \ldots & f_1\left(x_k\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_k\left(x_0\right) & f_k\left(x_1\right) & \ldots & f_k\left(x_k\right) \end{vmatrix} < \varepsilon$$

成立，则称 Banach 空间 X 为 k 一致凸的 ($k \ge 1$)。显然，一致凸性蕴含 k 一致凸性。关于 Orlicz-Lorentz 空间中的 K一致凸性，读者可参考[18-19]。

4.2 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 的一致凸性

引理 4.2.1 设 $\varphi \in \Delta_2$，对任意 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $\varepsilon_2 > 0$，使得若 f，$g \in K(f)$，$\| f - g \|_{\varphi,\omega}^{O} > \varepsilon_1$，则 $\rho_{\varphi,\omega}(kf - hg) > \varepsilon_2$，其中 $k \in K(f)$，$h \in K(g)$。

证明：应用反证法，假设存在 k_n， $h_n \in S(\lambda_{\varphi,\omega})$， $\| f_n - g_n \|_{\varphi,\omega}^O > \varepsilon_1$， 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n - h_n g_n) = 0$， 其中 $k_n \in K(f_n)$， $h_n \in K(g_n)$。由于 $\varphi \in \Delta_2$， 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| k_n f_n - h_n g_n \|_{\varphi,\omega}^O = 0$。即

$$| k_n - h_n | = | k_n \| f_n \|_{\varphi,\omega}^O - h_n \| g_n \|_{\varphi,\omega}^O | \le \| k_n f_n - h_n g_n \|_{\varphi,\omega}^O \to 0 \text{ 。}$$

由于$\varphi \in \Delta_2$，故存在$K > 0$，使得

$$\varphi(2u) \le K\varphi(u), \quad u \in [0,\infty) \text{ 。}$$

由于

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi,\omega}(h_n(f_n - g_n)) &= \rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n - h_n g_n - (k_n - h_n) f_n) \\
&\le \rho_{\varphi,\omega}(| k_n f_n - h_n g_n | + | k_n - h_n \| f_n |) \\
&\le \frac{1}{2} \rho_{\varphi,\omega}(2 | k_n f_n - h_n g_n |) + \frac{1}{2} \rho_{\varphi,\omega}(2 | k_n - h_n \| f_n |) \\
&\le \frac{K}{2} \rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n - h_n g_n) + | k_n - h_n | \rho_{\varphi,\omega}(f_n),
\end{aligned}$$

由于$\| f_n - g_n \| > \varepsilon_3$，故存在$\varepsilon_3$使得$\rho_{\varphi,\omega}(f_n - g_n) > \varepsilon_3$，于是有

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi,\omega}(k_n f_n - h_n g_n) &\ge \frac{2}{K}[\rho_{\varphi,\omega}(h_n(f_n - g_n)) - | k_n - h_n | \rho_{\varphi,\omega}(f_n)] \\
&\ge \frac{2}{K}[\rho_{\varphi,\omega}(f_n - g_n) - \frac{\varepsilon_3}{2}] \\
&\ge \frac{\varepsilon_3}{K},
\end{aligned}$$

矛盾。

定理 4.2.2 设φ是N函数，以下条件等价：

(1) $\lambda_{\varphi,\omega}^O$是一致凸的，

(2) $\lambda_{\varphi,\omega}^O$是$k$一致凸的，

(3) $\varphi \in \Delta_2$ 且 φ 一致凸。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 显然，现在证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。由于 k 一致凸的 Banach 空间自反，于是有 $\varphi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$，现在想用反证法证明 φ 是一致凸的。否则，存在 $0 < \varepsilon_0 < 1$，

存在 $u_n \uparrow \infty$ 使得

$$p((1+\varepsilon_0)u_n) < (1+\frac{1}{n})p(u_n) \qquad (n \in N) 。 \tag{4-1}$$

取 $u_1 > 2$，取 $G_n = [0, a_n]$ 使得

$$[k\psi(p(u_n)) + \psi(p(1+\varepsilon_0)u_n)]\int_{G_n} \omega(t)dt = k+1 , \tag{4-2}$$

再取

$$k_n = \frac{1}{k+1}[ku_n p(u_n) + (1+\varepsilon_0)u_n p((1+\varepsilon_0)u_n)]\int_{G_n} \omega(t)dt 。$$

将 G_n 分割为 $G_n^0, G_n^1, G_n^2 \cdots G_n^k$，使得 $\int_{G_n^i} \omega(t)dt = \frac{1}{k+1}\int_{G_n} \omega(t)dt$，对于 $i = 1, 2, \cdots k$，$n \in \mathbb{N}$，定义

$$x_n^0 = \frac{1}{k_n}[u_n \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{G_n^j} + (1+\varepsilon_0)u_n \chi_{G_n^k}],$$

$$x_n^i = \frac{1}{k_n}[u_n \sum_{j \neq i} \chi_{G_n^j} + (1+\varepsilon_0)u_n \chi_{G_n^i}],$$

容易验证 $\rho_{\psi,\omega}(p(k_n x_n^i)) = 1$，故 $\| x_n^i \|_{\varphi,\omega}^O = < p(k_n x_n^i), x_n^i > = 1$。设 $v_n = p(u_n)\chi_{G_n}$，

有 $\rho_{\psi,\omega}(v_n) \le 1$，且：

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\|\sum_{i=0}^{k}x_n^i\|_{\varphi,\omega}^o &\geq \frac{1}{k+1}<v_n,\sum_{i=0}^{k}x_n^i> \\ &= \frac{1}{(k+1)k_n}[ku_np(u_n)W(mG_n)+(1+\varepsilon_0)u_np(u_nW(mG_n))] \\ &\geq (1+\frac{1}{n})^{-1}\frac{1}{(1+k)k_n}[ku_np(u_n)+(1+\varepsilon_0)u_np((1+\varepsilon_0)u_n)]W(mG_n) \\ &= (1+\frac{1}{n})^{-1}\to 1\text{。}\end{aligned}$$

令 $c_n=(k+1)W(mG_n)$， $\alpha_n=\psi^{-1}(\frac{1}{c_n})$， $b=[(k+1)(1+\varepsilon_0)]^{-1}$，

由于 $\psi(p(u_n))W(mG_n)\leq 1$ ，故 $p(u_n)\leq\psi^{-1}(\frac{1}{W(mG_n)})\leq\alpha_n$ ，因此，由公式(4-1)和公式(4-2)可知：

$$\begin{aligned}1 &\leq (1+\varepsilon_0)u_np((1+\varepsilon_0)u_n)W(mG_n) \\ &\leq 2(1+\varepsilon_0)u_np(u_n)W(mG_n) \\ &\leq 2(1+\varepsilon_0)(k+1)c_n\alpha_nu_n\text{。}\end{aligned}$$

定义 $g_n^i=\alpha_n\chi_{G_n^i}$， $\|g_n^i\|_{\psi,\omega}$， $i=1,2\cdots k$， $n\in\mathbb{N}$。定义 Δ_n：

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 \\ g_n^1\left(x_n^0\right) & g_n^1\left(x_n^1\right) & \dots & g_n^1\left(x_n^k\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n^k\left(x_n^0\right) & g_n^k\left(x_n^1\right) & \dots & g_n^k\left(x_n^k\right)\end{vmatrix},$$

第一列的相反数加到其他列，然后按第一行展开可得：

$$\Delta_n=(\frac{\varepsilon_0\alpha_nu_nW(mG_n)}{k_n(k+1)})^k\geq(\frac{\varepsilon_0}{2(1+\varepsilon_0)k_n(k+1)^3})^k\geq(\frac{\varepsilon_0}{2(1+\varepsilon_0)d(k+1)^3})^k,$$

其中 d 的定义如公式 (3) 所以。这表明此时 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 不是 k 一致凸的。

$(3)\Rightarrow(1)$：任取 f， $g\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^O)$，且 $\|f-g\|_{\varphi,\omega}^O<\varepsilon_1$。因此，由引理 4.2.1，存在 ε_2 使得对于 $k\in K(f)$，$h\in K(g)$，有 $\rho_{\varphi,\omega}(kf-hy)>\varepsilon_2$，由于 φ 一致凸，所以 $\varphi\in\nabla_2$。

由引理 3.2.3，存在$d>1$，使得

$$d=\sup\{l:l\in K(f),\|f\|_{\varphi,\omega}^{o}=1\} 。\tag{4-3}$$

假设

$$a=\min\{\inf\frac{k}{k+h},\inf\frac{h}{k+h}\},$$
$$b=\max\{\sup\frac{k}{k+h},\sup\frac{h}{k+h}\},$$

显然，$[a,b]\subset(0,1)$。由于$\varphi\in\Delta_2$，存在$\mathrm{K}>0$，使得

$$\varphi(2du)\leq K\varphi(u) 。$$

由于 φ 一致凸，存在 $\delta>0$，使得对于任何 $\lambda\in[a,b]$，任意 $u,v\in\mathbb{R},|u-v|\geq\frac{\varepsilon_2}{4}\max\{|u|,|v|\}$,有：

$$\varphi(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq(1-\delta)[\lambda\varphi(u)+(1-\lambda)\varphi(v)] 。$$

对于给定的f,g，存在一个保测度变换σ：$supp(f+g)^*:\to supp(f+g)$，使得

$$(f+g)^*(t)=f(\sigma(t))+g(\sigma(t)) 。$$

令

$$T=\{t\in[0,\infty):|kf(\sigma(t))-hg(\sigma(t))|\geq\frac{\varepsilon_2}{4(d-1)}\max\{|kf(\sigma(t))|,|hg(\sigma(t))|\} ,$$

因此

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi,\omega}[((kf(\sigma(t))-hg(\sigma(t)))\chi_{T^c})^*]&=\int_0^\infty\varphi[((kf(\sigma(t))-hg(\sigma(t)))\chi_{T^c})^*]\omega(t)dt\\&\leq\frac{\varepsilon_2}{4(d-1)}\int_0^\infty\varphi[(kf(\sigma(t))+hg(\sigma(t))\chi_{T^c})^*]\\&\leq\frac{\varepsilon_2}{4(d-1)}[\rho_{\varphi,\omega}(kf)+\rho_{\varphi,\omega}(hg)]\\&\leq\frac{\varepsilon_2}{4(d-1)}(k+h-2)\\&\leq\frac{\varepsilon_2}{4(d-1)}(2d-2)\\&\leq\frac{\varepsilon_2}{2},\end{aligned}\tag{4-4}$$

且有

$$
\begin{aligned}
2-\|f+g\|_{\varphi,\omega}^{o} &= \|f\|_{\varphi,\omega}^{o}+\|g\|_{\varphi,\omega}^{o}-\|f+g\|_{\varphi,\omega}^{o} \\
&\geq \frac{1}{k}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(kf)\}+\frac{1}{h}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(hg)\}-\frac{k+h}{kh}[1+\rho_{\varphi,\omega}(\frac{kh}{k+h}(f+g))] \\
&= \frac{k+h}{kh}\int_0^{\infty}(\frac{h}{k+h}\varphi(kf(t))^{*}+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(t))^{*}-\varphi(\frac{kh}{k+h}(f(t)+g(t)))^{*})\omega(t \\
&+\frac{k+h}{kh}\int_{T^c}^{\infty}(\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(t)))+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(t)))^{*} \\
&-\frac{kh}{k+h}(f(\sigma(t))+g(\sigma(t)))))\omega(t)dt \\
&+\frac{k+h}{kh}\int_{T^c}^{\infty}(\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(t)))+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(t)))^{*} \\
&-\frac{kh}{k+h}(f(\sigma(t))+g(\sigma(t)))))\omega(t)dt \\
&\geq \frac{k+h}{kh}\int_{T}(\frac{h}{k+h}\varphi(kf(\sigma(t)))+\frac{k}{k+h}\varphi(hg(\sigma(t))) \\
&-\varphi(\frac{h}{k+h}kf(\sigma(t))+\frac{k}{k+h}hg(\sigma(t))))\omega(t)dt \\
&\geq \delta\int_T(\frac{1}{k}\varphi(kf(\sigma(t)))+\frac{1}{h}\varphi(hg(\sigma(t)))) \\
&\geq \frac{2\delta}{Kd^2}\int_T\varphi((f+g)^{*}(t))\omega(t)dt\text{。}
\end{aligned}
$$

再由 $\rho_{\varphi,\omega}[(kf(\sigma(t))-hg(\sigma(t)))\chi_{T^c}]\leq\frac{\varepsilon_2}{2}$， $\rho_{\varphi,\omega}(kf-hg)>\varepsilon_2$，有以下不等式

$$\rho_{\varphi,\omega}[(kf(\sigma(t))-hg(\sigma(t)))\chi_{T}]\geq\frac{\varepsilon_2}{2}\text{。}$$

因此有以下不等式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_2}{2} &\le \rho_{\varphi,\omega}[(kf(\sigma(t))+hg(\sigma(t)))\chi_T] \\
&= \rho_{\varphi,\omega}[\frac{kh}{k+h}(\frac{k+h}{h}f(\sigma(t))+\frac{k+h}{k}g(\sigma(t)))\chi_T] \\
&\le K^2\rho_{\varphi,\omega}[(k+h)(f(\sigma(t))-g(\sigma(t)))\chi_T] \\
&\le K^2\rho_{\varphi,\omega}(f(\sigma(t))+g(\sigma(t)))\chi_T \\
&\le K^2\rho_{\varphi,\omega}[(f(t)+g(t))^*\chi_T],
\end{aligned}
$$

即

$$\rho_{\varphi,\omega}[(f(t)+g(t))^*\chi_T \ge \frac{\varepsilon_2}{2K^2}\text{。}$$

易证，存在$\varepsilon_3 > 0$使得

$$\int_T \varphi[(f(t)+g(t))^*]\omega(t)dt \ge \varepsilon_3\text{。}$$

由公式(4-5)，

$$\|\frac{f+g}{2}\|_{\varphi,\omega}^O \le 1-\frac{\delta\varepsilon_3}{Kd^2},$$

证毕。

4.3 本章小结

本章在$\lambda_{\varphi,\omega}^O$对偶空间刻画仍然不清晰的情况下，证明了$\lambda_{\varphi,\omega}^O$具有(k)一致凸性的充要条件为$\varphi\in\Delta_2$且$\varphi$一致凸。

第 5 章 赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 函数空间的强端点与中点局部一致凸性

5.1 引言

定义 5.1.1[2] 设 A 是 Banach 空间中的凸集，$f \in A$。若 $2f = g + h$，$g, h \in A$ 能够得到 $f = g$，则称 f 为 A 的端点。

定义 5.1.2[2] 设 A 是 Banach 空间中的凸集。$f \in A$。若 $f_n + g_n = 2f$，$d(f_n, A) \to \infty$，$d(g_n, A) \to \infty$，能够得到 $\| f_n - g_n \| \to \infty \ (n \to \infty)$，则称 f 为 A 的强端点。

定义 5.1.3[2] 若 $B(X)$ 上所有强端点的集合等于 $S(X)$，则称 Banach 空间 X 为中点局部一致凸(MLUR)空间。

引理 5.1.4[46] 设 E 是一个具有法图性质的对称空间，满足 $t / \phi_E(t) \to 0 \ (t \to 0+)$，则 $(E')_a$ 是 E 的预对偶空间，并且 $(E')_a$ 包含了每个定义在紧集上的有界函数。

关于Orlicz-Lorentz空间中端点与中点局部一致凸的研究，请参考[44-46]。

5.2 一般 Orlicz 函数生成的 Orlicz-Lorentz 函数空间的 Orlicz 范数的表达式

定理 5.2.1 $\forall f \in \lambda_{\varphi,\omega}^{O} \setminus \{0\}$，以下结论成立：

(1)若 φ 是一个 N 函数，则对任意 $f \in \lambda_{\varphi,\omega}^{O}$，$k^{**} < \infty$。此时对于任意 $k \in K(f)$，

$$\| f \|_{\varphi,\omega}^{O} = \frac{1}{k}\{1 + I_{\varphi,\omega}(kf)\},$$

(2) $\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$，若 $\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt>1$，则 $k^{**}<\infty$。此时对于任意 $k\in K(f)$，$\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=\frac{1}{k}\{1+I_{\varphi,\omega}(kf)\}$，

(3) 情况 3 $\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$，$f\in\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$，$\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt\le 1$，则 $k^{**}=\infty$。此时 $\|f\|_{\varphi,\omega}^{O}=B\int_0^{\infty}f^*(t)\omega(t)dt$。

证明：

(1): 实际上，若 $k^{**}=\infty$，则存在一个非负序列 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $k_n\uparrow\infty$ 且 $\int_0^{\infty}\psi(p(k_nf)^*)\omega(t)dt\le 1$。设 $t_0=m\{t:f^*(t)>1\}<\infty$，有：

$$\psi\left(p\left(k_n\right)\right)W\left(t_0\right)=\int_0^{t_0}\psi\left(p\left(k_n\right)\right)\omega=\int_0^{m\left\{t:f^*>1\right\}}\psi\left(p\left(k_n\right)\right)\omega\le\int_0^{\infty}\psi\left(p\left(k_nf^*\right)\right)\omega\le 1$$

同除 $W(t_0)p(k_n)$，上式化为 $\frac{\psi(p(k_n))}{p(k_n)}\le\frac{1}{W(t_0)p(k_n)}$。由于 $\frac{\psi(p(k_n))}{p(k_n)}\to\infty\ (n\to\infty)$，而 $\frac{1}{W(t_0)p(k_n)}\to 0\ (n\to\infty)$，矛盾。

(2):取 $a\in R^+$ 满足以下条件：

$$\psi(B)\int_0^{a}\omega(t)dt>1$$

显然，当 $m(supp\ f)=\infty$ 是，上述 a 是存在的。若 $m(\sup p\ f)<\infty$，此时可以取 $a=m(\sup p\ f)$。由于 $\lim_{u\to\infty}p(u)=B$，故存在 $u_x>0$ 使得 $\psi(p(u_x))\int_0^{a}\omega(t)dt>1$。定义 $k_f=\frac{u_x}{f^*(a)}$，可以得到 $\rho_{\psi,\omega}(p(k_f)f^*)>\int_0^{a}\psi(k_ff^*(a))\omega(t)dt>1$。故显然有 $k^{**}\le k_f<\infty$。

(3)：假设 $\psi(B)<\infty$ 且 $\psi(u)=\infty\ \ (u>B)$。则对于任意 $g\in\lambda_{\psi,\omega}$，满足 $\rho_{\psi,\omega}(g)\le 1$，必有在 R 上几乎处处存在 $g(t)\le B$。因此，对于 g，我们有以下不等式成立

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt \le B\int_0^\infty f^*(t)\omega(t)dt$$

再定义 $g_0 = B\chi_{[0,m(supp\ f)]}$，有 $\rho_{\psi,\omega}(g_0) = \int_0^\infty \psi(B)\omega(t)dt \le 1$，且

$$\int_0^\infty f^*(t)g_0^*(t)\omega(t)dt = B\int_0^\infty f^*(t)\omega(t)dt \text{ ，}$$

最终得到

$$\| f\|_{\varphi,\omega}^O = B\int_0^\infty f^*(t)\omega(t)dt \text{ 。}$$

5.3 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 空间中端点的刻画

为了给出一般Orlicz 范数生成的Orlicz-Lorentz 函数空间 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 端点的刻画，先来介绍以下几个相关的结论。

引理 5.3.1[46] 设 E 是一个具有法图性质的对称空间，$t/\phi_E(t) \to 0\ (t \to 0+)$，则 $(E')_a$ 是 E 的预对偶空间，并且 $(E')_a$ 包含了每个定义在紧集上的有界函数。

引理 5.3.2[18]若 $\varphi \in \Delta_2$，且 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$，设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 上的一个序列，且

$$\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty}\| f_{n_1} + f_{n_2}\|_{\varphi,\omega}^O = 2 \text{，}$$

则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 M, N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\| f_n\chi_{\{t:|f_n(t)|\ge M\}}\|_{\varphi,\omega}^O < \varepsilon \text{ 。}$$

证明：设定义在测度有限集上的简单函数 f 所构成的集合为 L_f。由于 $\varphi \in \Delta_2$ 且 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$，故 L_f 在 $\lambda_{\varphi,\omega}^O$ 中稠密。不失一般性，假设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是简单函数列且 $m(supp\ f_n) < \infty$。P. K. Lin 中证明了 $\| f_n\chi_{\{t:|f_n(t)|\ge M\}}\|_{\varphi,\omega} < \dfrac{\varepsilon}{2}$。由 Orlicz 范数和

Luxemburg 范数的关系可知$\| f_n\chi_{\{t:|f_n(t)|\geq M\}}\|_{\varphi,\omega}^{O}<\varepsilon$ 。

引理 5.3.3[56] 假设$k_0\in K(f)$，$k_0|f(t)|=\alpha\chi_A+g(t)$，其中$\alpha\in S'$，$g(t)\in S$，$[\alpha_1,\alpha_2]$是$\varphi(u)$的最大仿射区间。$\varphi=\alpha u-b$， $u\in[\alpha_1,\alpha_2]$。设A满足$[\alpha,\alpha_2):=\sigma(A)$，可令$s=\int_{[\alpha_1,\alpha_2)}\omega(t)dt$， $M=\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\varphi(kf^*)\omega(t)dt$， $N=1-bs+M$，若$mA'\neq 0$，则$N>0$。

证明：由于$\psi(p(u))+\varphi(u)=p(u)u$且$p(u)=a=p(\alpha)$，$u\in[a_1,a_2]$。则$\varphi(u)=\alpha u-\psi(p(\alpha))$， $u\in[a_1,a_2]$。得$b=\psi(p(\alpha))$，则

$$
\begin{aligned}
N&=1-bs+M\\
&=\rho_{\psi,\omega}(p(kf))-b\int_{[\alpha_1,\alpha_2)}\omega(t)dt+\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\varphi\left(kf^*\right)\omega(t)dt\\
&=\left[\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\psi\left[p\left(kf^*\right)\right]\omega(t)dt+\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\varphi\left(kx^*\right)\omega(t)dt\right]\\
&\quad+\left[\int_{[\alpha_1,\alpha_2)}\psi\left[p\left(kf^*\right)\right]\omega(t)dt-\int_{[a_1,a_2)}b\omega(t)dt\right]\\
&=\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\left(kf^*\right)\left[p\left(kf^*\right)\right]\omega(t)dt+\int_{[\alpha_1,\alpha_2)}(\psi(p(\alpha))-b)\omega(t)dt\\
&=\int_{[\alpha_1,\alpha_2)'}\left(kf^*\right)\left[p\left(kf^*\right)\right]\omega(t)dt>0。
\end{aligned}
$$

引理 5.3.4[17,54,56] 设$f\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$，假设$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\infty$，或$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$且$\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt\leq 1$，若存在$g,h\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$使得$f=\dfrac{g+h}{2}$，则

$$f^*=\frac{1}{2}g^*+\frac{1}{2}h^*。$$

证明：这是 Lorentz 空间中相关结论的推广。

定理 设φ是一个 Orlicz 函数，$f\in S(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$，

(1)[49] 当 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\infty$ 或 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$ 且 $\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt>1$ 。则 f 是 $B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 的端点当且仅当 $kf=s(t)\in S,t\in\mathbb{R}^{+}$ 或 $kf=\alpha\chi_A$ ，其中 $\alpha\in S'$ 且 $m(\sigma(A)\cap L(\omega))=0$ 。

(2) 当 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\infty$ 或 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$ 且 $\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt\le 1$，则 f 是 $B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 的端点当且仅当 $f\in\alpha\chi_A$ 其中 $m(\sigma(A)\cap L(\omega))$ =0。

证明：

(1) 的完整证明过程，请参考[56]。

(2) 的必要性：

首先证明 $f=\alpha\chi_A$ 的必要性。参考[11]中的定理 4，假设存在 $u>0$ 使得 $A=\{t\in supp\ f:|f(t)|>u\}$ ， $B=supp\ f\setminus A$ 均具有正的测度。对于 $g=(f-u\,\mathrm{sgn}(f))\chi_A$ 与 $h=f-g$ ，我们有以下等式成立

$$\begin{aligned}\|g\|_{\varphi,\omega}^{O}+\|h\|_{\varphi,\omega}^{O}&=B\int_0^{m(A)}\left(f^{*}(t)-u\right)\omega(t)dt+B\int_0^{m(A)}u\,\omega(t)dt\\&\quad+B\int_{m(A)}^{\infty}f^{*}(t)\omega(t)dt\\&=1,\end{aligned}$$

且 $\min(\|g\|,\|h\|)>0$ 。定义 $g_1=\dfrac{g}{\|g\|}$，定义 $h_1=\dfrac{h}{\|h\|}$，此时有 g_1， $h_1\in S(\lambda_{1,\omega})$ ，且 $g_1\ne h_1$。定义 $f=\|g\|\,g_1+\|h\|\,h_1$， f 不是端点。

假设 $|f|=\alpha\chi_A$，其中 A 是一个勒贝格可测集， $m(A)<\infty$，并且权函数 ω 在 $(0,m(A))$ 上是常数。设 B 和 C 是 A 的勒贝格可测子集， $B\cup C=A$， $B\cap C=\varnothing$ ，且 $m(B)=m(C)$ 。则对于 $g=2f\chi_B$ 与 $z=2f\chi_C$ ，此时有 $f=\dfrac{g+h}{2}$， $g\ne h$ ， $\|g\|_{\varphi,\omega}^{O}=\|h\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$，故 f 不是单位球的端点。

(2)的充分性：设 $f,g,h\in B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$， $f=\alpha\chi_A$， $f=\dfrac{g+h}{2}$， $g\neq h$ 。由引理 5.3.4 可以得到

$$f^{*}=\frac{g^{*}+h^{*}}{2},$$

由 $g\neq h$，得 $g^{*}\neq h^{*}$。不失一般性，假设存在 t_0 使得 $h^{*}(t_0)<f^{*}(t_0)<g^{*}(t_0)$ 。由于 $g^{*}(t)=g^{*}(t_0)$ 对于 $t\in[0,mA)$ 均成立。因此 $\|g\|_{\varphi,\omega}^{O}>1$，矛盾。

5.4 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 的强端点与中点局部一致凸性

定理 5.4.1 设 φ 是一个一般 Orlicz 函数，则 f_0 是 $B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 的强端点当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$ 且 f_0 是 $B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 的端点。

证明：充分性

情况 1：

$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=\infty$ 或 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\varphi(u)}{u}=B<\infty$ 且 $\psi(B)\int_0^{m(supp\ f)}\omega(t)dt>1$ 。

假设 $f_0=\dfrac{f_n+g_n}{2}$， f_n， $g_n\in B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_{\varphi,\omega}^{O}=\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$ 。由于 $\varphi\in\Delta_2$，只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n-g_n)=0$ 。取 $k_n\in K(f_n)$， $h_n\in K(g_n)$ 。

情况 1：$f_0=s(t)$，$s(t)\in S(\varphi)$，$t\in supp(f_0)$。首先，需要证明 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。由于 $B(\lambda_{\varphi,\omega}^{O})$ 是弱*序列紧的，存在 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$， $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{h_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$，存在 f^1,g^1 使得

$$f_{n_k}\overset{weak*}{\to}f^{1},g_{n_k}\overset{weak*}{\to}\infty 。$$

故$\| f_1\|_{\varphi,\omega}^O \le 1$，$\| g_1\|_{\varphi,\omega}^O \le 1$且$f_1 + g_1 = 2f_0$。由于$f_0$是$B(\lambda_{\varphi,\omega}^O)$的端点，故$f_1 = g_1 = f_0$。

显然，存在$m_1, m_2 > 0$，存在$a > 0$，使得$\int_{m_1}^{m_2} f_0(t)dt = a > 0$。由于$\chi_{[m_1,m_2]}$属于$\lambda_{\varphi,\omega}^O$的预对偶空间，以下等式成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{m_1}^{m_1} f_n(t)dt = \int_{m_1}^{m_2} f_0(t)dt = a \text{ 。}$$

因此，存在δ_1, δ_2，使得$m\{t \in G : | f_n | \ge \delta_1\} \ge \delta_2$。若$\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$，可以得到

$$1 \ge \frac{1}{k_n}\{1 + I_{\varphi,\omega}(k_n f_n(t))\} \ge \frac{1}{k_n}\delta_2\varphi(k_n\delta_2) \ge \frac{\varphi(k_n\delta_1)}{k_n\delta_1}\delta_1\delta_2 \to \infty \text{ 。}$$

矛盾。至此证明了$\{k_n\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$与$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有界的。因此存在$a_1, a_2 \in (0,1)$，存在$d > 0$，使得

$$a_1 \le \frac{k_n}{k_n + h_n}, \quad \frac{h_n}{k_n + h_n} \le a_2$$

且

$$1 \le k_n, h_n \le d$$

取$k_n^o = \dfrac{2k_n h_n}{k_n + h_n}$，由于

$$
\begin{aligned}
2 &\geq \| f_n \|_{\varphi,\omega}^{O} + \| g_n \|_{\varphi,\omega}^{O} \\
&= \frac{1}{k_n} + \frac{1}{h_n} + \frac{1}{k_n}\int_0^{\infty} \varphi(k_n f_n(t))^{*}\omega(t)dt + \frac{1}{h_n}\int_0^{\infty} \varphi(h_n g_n(t))^{*}\omega(t)dt \\
&\geq \frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\{1+\int_0^{\infty}(\frac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_n f_n(t)+\frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_n g_n(t))))^{*}\omega(t)dt\} \\
&\geq \frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\{1+\int_0^{\infty}\varphi(\frac{k_n h_n}{k_n+h_n}f_n+\frac{k_n h_n}{k_n+h_n}g_n)^{*}\omega(t)dt\} \\
&\geq \frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\{1+\int_0^{\infty}\varphi(k_n^0 f_0(t))^{*}\omega(t)dt\} \\
&= \frac{2}{k_n^0}\{1+\int_0^{\infty}\varphi(k_n^0 f_0(t))^{*}\omega(t)dt\} \\
&\geq 2\| f_0 \|_{\varphi,\omega}^{O} \\
&= 2,
\end{aligned}
$$

因此，由引理 5.3.2，我们得到对任意$\varepsilon>0$，存在$M>0$使得

$$\| f_n\chi_{\{t:|x_n|>M\}} \|_{\varphi,\omega}^{O} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\| g_n\chi_{\{t:|x_n|>M\}} \|_{\varphi,\omega}^{O} < \frac{\varepsilon}{3}。$$

对于任意的$\sigma>0$，令

$$F=\{(u,v,\lambda):|u|\leq M,|v|\leq M,|u-v|\geq\sigma,\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]\}，$$

由于F是一个闭集，且连续函数

$$\frac{\varphi[\lambda u+(1-\lambda)v]}{\lambda\varphi(u)+(1-\lambda)\varphi(v)}<1,$$

因此，存在$\delta_3>0$，使得

$$\frac{\varphi[\lambda u+(1-\lambda)v]}{\lambda\varphi(u)+(1-\lambda)\varphi(v)}\leq 1-\delta_3。$$

令

$$C_n=\{t\in[0,\infty):|k_n f_n|\leq M,|h_n g_n(t)|\leq M,|k_n f_n(t)-h_n g_n(t)|\geq\sigma\}，$$

因此，对于C_n中的任意t，有：

$$(k_n f_n(t), h_n g_n(t), \frac{k_n}{k_n+h_n}) \in F,$$
$$(k_n f_n(t), h_n g_n(t), \frac{h_n}{k_n+h_n}) \in F。$$

此时有

$$\begin{aligned}\| f_n\|_{\varphi,\omega}^O + \| g_n\|_{\varphi,\omega}^O - 2\| f_0\|_{\varphi,\omega}^O = &\frac{}{k_n}\{1+\int_0^\infty \varphi(k_n f_n(t))^* \omega(t)dt\} + \frac{1}{h_n}\{1+\int_0^\infty \varphi(h_n g_n(t))^* \omega(t)dt\} \\ &-\frac{1}{k_n^0}\{1+\varphi(k_n^0 f_0(t))^* \omega(t)dt\} \\ &\ge \frac{h_n}{k_n+h_n}\int_0^\infty (\frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\varphi(k_n f_n(t)\chi_{C_n})^* + \frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_n g_n(t)\chi_{C_n})^* \\ &-\varphi(\frac{h_n}{k_n+h_n} f_n + \frac{k_n}{k_n+h_n} g_n)^*]\omega(t)dt \\ \ge \delta_3 \frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\int_0^\infty \{\frac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_n f_n(t))^* + \frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_n g_n(t))^*\}\omega(t)dt \\ \ge \frac{\delta_3}{d}\int_0^\infty (\varphi(k_n f_n(t)\chi_{C_n})^* + \varphi(h_n g_n(t)\chi_{C_n})^*)\omega(t)dt,\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi,\omega}((k_n f_n - h_n g_n)\chi_{C_n}) &= \int_0^\infty \varphi((k_n f_n - h_n g_n)\chi_{C_n})^* \omega(t)dt \\ &\le \int_0^\infty (\varphi(k_n f_n(t))^* + \varphi(h_n g_n(t))^*)\omega(t)dt \\ &\le \| f_n\|_{\varphi,\omega}^o + \| g_n\|_{\varphi,\omega}^O - 2\| f_0\|_{\varphi,\omega}^O \to 0 (n\to\infty)\end{aligned}$$

成立，即

$$\|(k_n f_n - h_n g_n)\chi_{C_n}\|_{\varphi,\omega}^O \to \infty (n\to\infty)\ 。$$

故存在$N_2 > 0$使得$\|(k_n f_n - h_n g_n)\chi_{C_n}\|_{\varphi,\omega}^O < \dfrac{\varepsilon}{3}$对与任意$n > N_3$。最终得到，

$$\|(k_n f_n - h_n g_n)\|_{\varphi,\omega}^{O} \le \| k_n f_n \chi_{\{t:|k_n f_n(t)|>M\}} \|_{\varphi,\omega}^{O} + \| h_n g_n \chi_{\{t:|h_n g_n|>M\}} \|_{\varphi,\omega}^{O} + \|(k_n f_n - h_n g_n)\chi_{C_n}\|_{\varphi,\omega}^{O}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$$
$$=\varepsilon,$$

且存在 $N_3 > N_2 + N_1$ 使得

$$|k_n - h_n| \le |k_n \| f_n \|_{\varphi,\omega}^{O} - h_n \| g_n \|_{\varphi,\omega}^{O}| + \varepsilon \le 2\varepsilon,$$

故对于 $n > N_3$，有

$$\| f_n - g_n \|_{\varphi,\omega}^{O} \le \frac{1}{k_n} \| k_n f_n - h_n g_n \|_{\varphi,\omega}^{O} + |k_n - h_n| \| g_n \|_{\varphi,\omega}^{O} \le (\frac{1}{d}+2)\varepsilon 。$$

情况 2：若 $f_0 : kf_0 = \alpha\chi_A$，使用相同的方法

$$2 \ge \| f_n \|_{\varphi,\omega}^{O} + \| g_n \|_{\varphi,\omega}^{O}$$
$$\ge \frac{k_n + h_n}{k_n h_n}\{1+\int_0^\infty (\frac{h_n}{k_n + h_n}\varphi(k_n f_n(t)+\frac{k_n}{k_n + h_n}\varphi(h_n g_n(t))))^* \omega(t)dt\}$$
$$\ge \frac{k_n + h_n}{k_n h_n}\{1+\int_0^\infty \varphi(k_n^0 f_0(t))^* \omega(t)dt\}$$
$$\ge \frac{2}{k_n^0}\{1+\int_0^\infty \varphi(k_n^0 f_0(t))^* \omega(t)dt\}$$
$$\ge 2\| f_n \|_{\varphi,\omega}^{O}$$
$$=2,$$

故以下等式成立：

$$\frac{h_n}{k_n + h_n}\varphi(k_n f_n(t)^*) + \frac{k_n}{k_n + h_n}\varphi(h_n g_n^*(t)) = \varphi(\alpha) \;\; (t \in [0, mA)) 。$$

由于 $k_n f_n^*(t)$ 与 $h_n g_n^*(t)$ 是单调非增的，我们得到 $k_n f_n^*(t) = \alpha_1$，且 $h_n g_n^*(t) = \alpha_2$。显然

$$\frac{h_n}{k_n + h_n}\varphi(k_n f_n^*(t)) + \frac{k_n}{k_n + h_n}\varphi(h_n g_n^*(t)) = \varphi(0) = 0 \quad (t \notin [0, mA]) 。$$

由于$k_n f_n^*$是非负的，这表明对于$t \neq [0, mA)$时，$k_n f_n^*(t) = h_n g_n^*(t) = 0$，故

$$\| f_n \|_{\varphi,\omega}^O = \alpha_1 \| \chi_A \|_{\varphi,\omega}^O \to 1(n \to \infty),$$
$$\| g_n \|_{\varphi,\omega}^O = \alpha_2 \| \chi_A \|_{\varphi,\omega}^O \to 1(n \to \infty),$$

于是有

$$| \alpha_1 - \alpha_2 | \to 0 \, (n \to \infty),$$

因此，

$$\rho_{\varphi,\omega}(f_n - g_n) = \int_0^{mA} \varphi(| \alpha_1 - \alpha_2 |) \omega(t) dt ,$$

上式等价于$\| f_n - g_n \|_{\varphi,\omega}^O \to 0 \, (n \to \infty)$。

情况 2：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = \infty$或$\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = B < \infty$且$\psi(B) \int_0^{m(supp\ f)} \omega(t) dt \le 1$。在这种情况下，证明过程与前文相似。

必要性：只需证明$\varphi \in \Delta_2$的必要性。取$1 = \| f_0(t) \|_{\varphi,\omega}^O = \dfrac{1}{k_0} \{1 + \rho_{\varphi,\omega}(k_0 f_0)\}$，若$\varphi \notin \Delta_2$，存在$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$u_n \uparrow \infty \, (n \to \infty)$，$\varphi(u_n) > 2^n \varphi(u_n)$。取$G_n = [0, d_n]$，满足$\mu G_n = \dfrac{1}{2^n \varphi(u_n)}$，$(n = 1, 2...)$。显然，$\{d_n\}_{n\in}$是有界的，故存在$\gamma > 0$，对任意的$t \in G_n$，有$0 < | f_0(t) | < \gamma$。取

$$f_n(t) = f_0(t) + \frac{u_n}{k_0} \chi_{G_n},$$

$$g_n(t) = f_0(t) - \frac{u_n}{k_0} \chi_{G_n},$$

显然，$f_n(t) + g_n(t) = 2 f_0(t)$。我们可以进一步定义$f_n'(t), f_n''(t)$

$$f_n^{'}(t)=f_0(t)\chi_{[0,\infty)\backslash G_n}+\frac{u_n}{k_0}\chi_{G_n}$$

$$f_n^{''}(t)=f_0(t)\chi_{G_n}$$

由于

$$\|f_n^{''}(t)\|_{\varphi,\omega}^{O}=\|f_0\chi_{G_n}\|_{\varphi,\omega}^{O}\le\gamma\|\chi_{G_n}\|_{\varphi,\omega}^{O}\to\infty(n\to\infty)$$

$$\|f_n^{'}(t)\|_{\varphi,\omega}^{O}\ge\|f_0\chi_{[0,\infty)\backslash G_n}\|_{\varphi,\omega}^{O}\ge\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}-\|f_0\chi_{G_n}\|_{\varphi,\omega}^{O}$$

得以下关系式：

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|f_n^{'}\|_{\varphi,\omega}^{o}\ge 1$$

$$\begin{aligned}\|f_n^{'}\|_{\varphi,\omega}^{O}&=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(kf_n^{'})\}\le\frac{1}{k_0}\{1+\rho_{\varphi,\omega}(k_0f_n^{'})\}\\&\le\frac{1}{k_0}\{1+\int_0^{\infty}\varphi(k_0f_0(t))^{*}\omega(t)dt+\int_{G_n}\varphi(u_n)\omega(t)\}\\&=\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O}+\frac{1}{k_02^n},\end{aligned}$$

可得 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|f_n^{'}\|_{\varphi,\omega}^{o}\le 1$，因此，$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{'}\|_{\varphi,\omega}^{O}=1$。另外，

$$1=\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{o}\le\|f_n\|_{\varphi,\omega}^{o}\le\|f_n^{'}\|_{\varphi,\omega}^{o}+\|f_n^{''}\|_{\varphi,\omega}^{o}\to 1\text{ 。}$$

用相同地方法，得到 $\|g_n\|_{\varphi,\omega}^{O}\to\infty$，但是

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi,\omega}(k_0(f_n-g_n))&=\int_{G_n}\varphi(2u_n)\omega(t)dt\\&=\varphi(2u_n)W(mG_n)\\&\ge 2^n\frac{1}{2^n}\\&=1,\end{aligned}$$

得 $\|f_n-g_n\|_{\varphi,\omega}^{O}\nrightarrow 0$，$f_0$ 不是一个强端点。

定理 5.4.2 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 是一个中点局部一致凸空间当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$ 且 φ 严格凸。

证明：充分性显然。参考定理 5.4.1 证明过程，可完成 $\varphi\in\Delta_2$ 必要性的证明。下证 φ 严格凸的必要性。设 φ 不是严格凸的，即存在 $[a,b]$ 使得对于 $u\in[a,b]$，$\varphi=Au+B$ 。由中值定理，存在 s_0,s_1,s_2,s_3,s_4 使得

$$\psi(A)W(s_0)=1,\ \int_0^{s_1}\omega(t)\,dt=\int_{s_1}^{s_0}\omega(t)\,dt,\ s_1=2s_2=2(s_3-s_1)\ 。$$

定义

$$f_0=\frac{a+b}{2}\chi_{[0,s_1]}+b\chi_{(s_1,s_3]}+a\chi_{[s_3,s_0]}\ ,$$

对任意 n，将 $[0,s_2]$ 以及 $[s_2,s_1]$ 均等分为 2^n 部分，定义

$$f_n=b\chi_{A_1}+a\chi_{A_2}+b\chi_{A_3}+a\chi_{A_4}...+b\chi_{B_{2^n-1}}+a\chi_{B_{2^n}}+b\chi_{[s_1\ s_3]}+a\chi_{[s_3\ s_0]},$$
$$g_n=a\chi_{A_1}+b\chi_{A_2}+a\chi_{A_3}+b\chi_{A_4}...+a\chi_{B_{2^n-1}}+b\chi_{B_{2^n}}+a\chi_{[s_1\ s_3]}+b\chi_{[s_3\ s_0]},$$

其中 A_n， B_n 分别是 $[0,s_2]$，$[s_2,s_1]$ 的第 n 部分，有以下等式成立

$$\rho_{\psi,\omega}(p(f_n))=\rho_{\psi,\omega}(p(g_n))=\rho_{\psi,\omega}(pf_0)=\psi(A)W(s_0)=1\ ,$$

且

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{\varphi,\omega}^{O}=\|g_n\|_{\varphi,\omega}^{O}&=1+\rho_{\varphi,\omega}(f_n)\\&=1+\varphi(b)\int_0^{s_1}\omega(t)\,dt+\varphi(a)\int_{s_1}^{s_3}\omega(t)\,dt\\&=1+\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)W(s_0)\\&=\|f_0\|_{\varphi,\omega}^{O},\end{aligned}$$

然而

$$\rho_{\varphi,\omega}(f_n-g_n)=\varphi(b-a)W(s_1)>0\ ,$$

矛盾。

5.5 本章小结

本章主要对 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 的端点，强端点，中点局部一致凸性进行研究。给出了 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 中端点，强端点的判定准则。给出了 $\lambda_{\varphi,\omega}^{O}$ 具有中点局部一致凸性的充要条件。

结　论

本文主要研究了赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz函数及序列空间的若干几何性质。这些研究能够促进Orlicz-Lorentz空间相关理论的研究与发展，促进该空间理论的应用，同时也推广了经典Orlicz空间理论，具有重要意义。

在本文中，我们给出了赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz序列空间的一致Kadec-Klee性质，给出赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz函数空间具有(紧)局部一致凸性，(k)一致凸性，中点局部一致凸性的充要条件，同时也给出了该空间端点以及强端点的刻画。我们在证明Orlicz-Lorentz序列空间一致Kadec-Klee性质时，创新性地使用Lebesgue滑变法来处理ε可分序列。在研究Orlicz-Lorentz函数空间的(紧)局部一致凸性时，由于该空间的对偶空间未知，我们求得了Luxemburg范数的新的表达式,通过该表达式找到了一个类似支撑泛函的函数，以便于在对偶空间未知的情况下解决问题。同时在证明N函数严格凸必要性时，给出了一个重要的反例。该反例在解决相关问题时发挥了重要作用。在刻画该空间端点时，给出了一般Orlicz函数生成的Orlicz范数的表达式，该表达式在研究一般Orlicz函数生成的Orlicz-Lorentz空间的几何性质时发挥了重要作用。

Orlicz-Lorentz空间还有很多值得研究的课题，如对偶空间的刻画，有兴趣的读者可以参考[9]。另外，尽管Kaminska A给出了赋Luxemburg范数的Orlicz-Lorentz函数空间具有一致Kadec-Klee性质的充分条件与必要条件，但是未给出充要条件，同时，赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz函数空间的Kadec-Klee性质，一致Kadec-Klee性质也有待研究。该问题也具有一定的研究价值，感兴趣的读者可以参考[46]。

参考文献

[1] Clarkson J A. Uniformly Convex Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1936, 40(3): 396-414.

[2] 崔云安. Banach空间几何理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-223.

[3] 刘培德. 鞅与Banach空间几何学[M]. 北京:科学出版社, 1993: 1-180.

[4] Kaminska A. Some remarks on Orlicz-Lorentz space[J], Mathematische Nachrichten[J], 1990, 147(1): 29-38.

[5] Chen S. Geometry of Orlicz Spaces[M]. Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny, 1996.

[6] 吴从炘, 王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983: 1-50.

[7] Wu M, Long L, Zeng X. Some basic results on the orlicz space generated from a random normed module[J]. Journal of nonlinear and convex analysis, 2022, 23(5).

[8] Lu J Z. Two-parameter martingale orlicz-hardy spaces[J], Acta mathematica Hungarica, 2022, 166(1).

[9] Wisła M. Orlicz spaces equipped with s-norms[J], Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, 483(2): 123659

[10] Zhou D. Wu Lian. Jiao Y, Martingale weak Orlicz-Karamata-Hardy spaces associated with concave functions[J], Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 456(1): 543-562.

[11] Li X, Cui Y. Exposed Points of Orlicz Sequence Spaces Equipped with p-Amemiya $(1 \le p \le \infty)$ Norms[J], The Journal of Geometric Analysis, 2022, 32(12): 307-320.

[12] Cui Y, Wisła M. Monotonicity properties and solvability of dominated best approximation problem in Orlicz spaces equipped with s-norms[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2021, 115(4):1-22.

[13] Cui Y. Hudzik H, Kaczmarek R, et al. Uniform monotonicity of Orlicz spaces equipped with the Mazur-Orlicz F-norm and dominated best approximation in F-normed Köthe spaces[J], 2022, 295(3): 487-511.

[14] Cui Y, Hudzik H, Kaczmarek R, et al. Geometric properties of F-normed Orlicz spaces[J]. Aequationes mathematicae, 2018, 93(1): 311-343.
[15] Kaczmarek R. Some monotonicity properties in F-normed Musielak–Orlicz spaces[J]. Aequationes mathematicae, 2019, (94): 865-885.
[16] Kumar M, Kumar N. Convolution structures for an Orlicz space with respect to vector measures on a compact group[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2021, 64(1): 87-98.
[17] Foralewski P. Some remarks on the geometry of Lorentz spaces $\Lambda_{1,\omega}$ [J]. Indagationes Mathematicae, 2012, 23(3): 361-376.
[18] Lin P K, Sun H. Some geometric properties of Lorentz-Orlicz spaces[J]. Archiv der Mathematik, 1995, 64(6):500-511.
[19] Lin P K, K-uniform rotundity of Lorentz-Olicz spaces[J], Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 204(1): 29-45.
[20] Wu C X, Ren L W. Strict convexity of Orlicz-Lorentz space with Orlicz norm[J], Journal of Mathematics, 1999, 19(2): 235-240.
[21] Foralewski P. Hudzik H. Kolwicz P, Non-squareness properties of Orlicz–Lorentz sequence spaces[J]. Journal of Functional Analysis, 2013, 264(2): 605–629.
[22] Foralewski P, Kończak J. Local uniform non-squareness of Orlicz–Lorentz function spaces[J]. Revista de La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2019, 113: 3425-3443.
[23] Chen B, Gong W. Uniform normal structure and uniform non-squareness of Orlicz-Lorentz function spaces endowed with the Orlicz norm, Annals of Functional Analysis[J], 2021.
[24] Foralewski P. On some geometric properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces[J], Indagationes Mathematicae, 2013, 24(2): 346-372.
[25] Kamińska A, Lesnik K, Raynaud Y. Dual spaces to Orlicz-Lorentz spaces[J]. Studia Math. 2014, 222(3): 229-261.
[26] Gong W. Zhang D, Monotonicity in Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped with the orlicz norm[J], 2016，36(6): 1577-1589.
[27] Cui Y, Foralewski P, Hudzik H. M-constants in Orlicz-Lorentz function spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 2019, 292(493): 346-372.
[28] Cui Y, Foralewski P, Hudzik H, et al. Kadec-Klee properties of Orlicz-Lorentz

sequence spaces equipped with the Orlicz norm[J]. Positivity, 2021, 25(4): 1273-1294.

[29] Cui Y, Foralewski P, Kończak, J. Orlicz-Lorentz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J], Acta Mathematica Scientia, 2022, 42(2), 623-652.

[30] Gong W, Shi Z. Points of monotonicity in Orlicz-Lorentz function spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73(5): 1300-1317.

[31] Levis F E, Cuenya H H. Gateaux differentiability in Orlicz–Lorentz spaces and applications[J]. Mathematische Nachrichten, 2007, 280(11): 1282–1296.

[32] Astashkin S V, Sukochev F A, Wong C P. Distributionally concave symmetric spaces and uniqueness of symmetric structure[J]. Advances in Mathmatics, 2013, 232(1): 399-431.

[33] Ghosh A, Mohanty P. Weighted inequalities for higher dimensional one-sided hardylittlewood maximal function in Orlicz spaces[J], Expositiones Mathematicae, 2021, 40(1), 23-44.

[34] Ferreyra D E, Gareis M I, Levis F E. Extended best polynomial approximation operator in Orlicz-Lorentz spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 295: 1292-1311.

[35] Kamińska A, Raymaud Y. Isomorphic copies in the lattice e and its symmetrization e^* with applications to Orlicz-Lorentz spaces[J], Journal of Functional Analysis[J], 2009, 267 (1) :271-331.

[36] Brudnyi Y. Krein S. Semenov E, Interpolation of linear operators[J], Journal of mathematics 1988, 42(1), 2000-2133.

[37] Radon J. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Sitz[J]. Akad. Wiss. Wien, 1913, 122(1): 1295-1438.

[38] Riesz F. Sur la convergence en Moyenne I[J]. Acta Sci. Math, 1929, 4: 58-64.

[39] Riesz F. Sur la convergence en moyenne II[J]. Acta Sci. Math, 1929, 4: 182-185.

[40] Cui Y, Zhao L. Kadec-Klee property in Musielak-Orlicz function spaces equipped with the Orlicz norm[J], Aequationes mathematicae, 2022, 96(1): 167-184.

[41] Cerda J, Hudzik H, Kamińska A, Mastylo M. Geometric property of symmetric spaces with application to Orlicz-Lorentz spaces[J], Positivity, 1998, 2(4): 311-337.

[42] Raymond S. Kadec–Klee property and fixed points[J], Journal of Functional Analysis, 2014, 266(8): 5429-5438.
[43] Chilin V I, Dodds P G, Sukochev A. Characterizations of Kadec-Klee properties in symmetric spaces of measurable functions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1996, 348(12): 4895-4918.
[44] Dominguez T, Hudzik H, Lapez G, et al. Complete characterizations of Kadec-Klee properties in Orlicz spaces[J]. Houston Journal of Mathematics, 2003, 29, 1027-1044.
[45] Ciesielski M, Kolwicz P, Płuciennik R. Local approach to Kadec–Klee properties in symmetric function spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 426(2): 700-726.
[46] Kamińska A, Lennard C, Mastylo M, et al. The uniform Kadec-Klee property for Orlicz-Lorentz spaces[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2007, 143(02): 349-374.
[47] Panda B, Kapoor O. A generalization of local uniform convexity of the norm[J], Journal of Mathematical Analysis and Application, 1975, 52(2): 300-308.
[48] Foralewski P, Hudzik H, Szymaszkiewicz L. On some geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces[J]. Math. Nachr. 2008, 281(1): 181-198.
[49] 宁哲. Orlicz-Lorentz 空间的一致凸性与局部一致凸性[D].苏州：苏州大学,2010：1-32.
[50] Cerdà J, Hudzik H, Kamińska A, Mastylo M. Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces[J]. Positivity 2, 311-337 (1998).
[51] Wang J. Rotundity and uniform rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with the Orlicz norm[J]. Houston Journal of Mathematics, 2012, 38: 131-152.
[52] Wang J. Ning Z, Rotundity and uniform rotundity of Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped with Orlicz norm[J], Mathematische Nachrichten, 2011, 284(17-18): 2297-2311.
[53] Choi C, Kamińska A, Lee H. Complex convexity of Orlicz-Lorentz spaces and its applications[J], Bulletin of The Polish Academy of Sciences Mathematics. 2004, 52(1)19-38.
[54] Hudzik H, Mastyło M. Strongly Extreme Points in Köthe-Bochner Spaces[J]，

Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1993, 23(3): 899–909.
[55] Storozhuk K. Strongly normal cones and the midpoint locally uniform rotundity[J], Positivity, 2013, 17: 935-940.
[56] 王晶晶. Orlicz-Lorentz 空间中的端点[D]. 苏州：苏州大学, 2009：1-29.

攻读硕士学位期间发表的学术论文及获得成果

[1] Wang D. Cui Y, Uniform Kadec-Klee properties of Orlicz-Lorentz sequence spaces equipped with the Orlicz norm[J], Positivity, 2022, 26(2): 32-48. DOI: 10.1007/s11117-022-00875-4.(SCI)

[2] Wang D. Cui Y, K-uniform convexity in Orlicz-Lorentz function space equipped with the Orlicz norm[J], Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2022. DOI: 10.1007/s13226-022-00319-5.(SCI)

[3] Wang D. Cui Y, Locally uniform convexity in Orlicz-Lorentz function space equipped with the Orlicz norm[J], submitted.

[4] Wang D. Cui Y, Strongly extreme points in Orlicz-Lorentz function space equipped with the Orlicz norm[J], submitted.

致　谢

感谢我的父母，亲人对我的支持。感谢我的导师崔云安教授对我的指导与鼓励。读研到论文完成期间的日子是一段忙碌但是治愈的时光，我的数学基础得到了巩固，同样与日俱增的还有自己的勇气。感谢 C901 同窗的帮助，感谢 556 的室友一路的帮助与支持，感谢一直以来陪伴我成长的人，谢谢大家对我的包容。感谢国家自然科学基金项目 11871181 在论文完成过程中给予的资助。