工 程 数 学 学 报

第4卷 第3期 JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS vol.4, № 3

1987年11月 Nov. 1987

Orlicz空间的光滑性 *

王廷辅　　　陈述涛

（哈尔滨科技大学）　（哈尔滨师范大学）

本文得到赋Luxemburg范数 $\|\cdot\|_{(M)}$ 的Orlicz空间 $L_M^*(G)$ 的光滑、很光滑、强光滑和一致光滑判据。

定理1 $[L_M^*,\|\cdot\|_{(M)}]$ 光滑的充分必要条件是 $M'(u)$ 连续和 $M(u)$ 满足 $\triangle_2$ 条件。

证　充分性　由 $\triangle_2$ 条件知 $[L_M^*,\|\cdot\|_{(M)}]^*=[L_N^*,\|\cdot\|_N]$，故对 $u_0\in L_M^*$, $\|u_0\|_{(M)}=1$，总有 $v_0\in L_N^*$; $\|v_0\|_N=$, $1\int_G u_0(x)v_0(x)dx=1$。现只须证 v_0 的唯一性。由[2]ch.2, Th2.3知存在 $k>0$、满足 $1=\|v_0\|_N=\frac{1}{K}(1+\int_G N(kv_0(x))dx)$。从而

$$1+\int_G N(kv_0(x))dx=k=\int_G ku_0(x)v_0(x)dx$$

$$\leqslant\int_G M(u_0(x))dx+\int_G N(kv_0(x))dx=1+\int_G N(kv_0(x))dx$$

由是得 $\int_G\{M(u_0(x))+N(kv_0(x))-ku_0(x)v_0(x)\}dx=0$。联系被积分函数的非负性得 $M(u_0(x))+N(kv_0(x))=Ku_0(x)v_0(x)(a.e.)$。再顾及 $M'(u)$ 的连续性得 $kv_0(x)=M'(u_0(x))(a.e.)$。又从 $\|v_0\|_N=1$ 知 $k=\|M'(u_0(\cdot))\|_N$，从而

$$v_0(x)=M'(u_0(x))/\|M'(u_0(\cdot))\|_N$$

这表明 v_0 由 u_0 唯一确定。

必要性　若 $M'(u)$ 不连续，则 $N'(v)$ 在某闭区间 $[v_1,v_2]$ 上取常值A，取 $G_1\subset G$, $M(A)\mathrm{mes}G_1<1$; 取 $a>0$, $M(N'(a))\mathrm{mes}(G/G_1)>1M(A)\mathrm{mes}G_1$; 取 $G_2\subset G/G_1$, $M(N'(a))\mathrm{mes}G_2=1-M(A)\mathrm{mes}G_1$，将 G_1 分为测度相等互不相交的 G_{11} 和 G_{12}，置

$$w_1(x)=v_1k_{G_{11}}(x)+v_2k_{G_{12}}(x)+ak_{G_2}(x),$$

$$w_2(x)=v_2k_{G_{11}}(x)+v_1k_{G_{12}}(x)+ak_{G_2}(x)。$$

易见 $w_1\neq w_2$，但 $\|w_1\|_N=\|w_2\|_N=c$，令 $v_1(x)=\frac{w_1(x)}{c}$, $v_2(x)=\frac{w_2(x)}{c}$，则 $\|v_1\|_N=\|v_2\|_N=1$，又置

$$u(x)=Ak_{G_1}(x)+N'(a)k_{G_2}(x)=N'(w_1(x))=N'(w_2(x))。$$

* 本文于1985年8月10日收到。国家自然科学基金资助项目。

则$\int_G M(u(x))dx = M(A)\mathrm{mes}G_1 + M(N'(a))\mathrm{mes}G_2 = 1$，故$\|u\|_{(M)} = 1$；鉴于

$$\int_G M(N'(cv_1(x)))dx = \int_G MN'(w_1(x))dx = \int_G M(u(x))dx = 1，由[1]Th10,4$$

$$1 = \|v_1\|_N = \int_G v_1(x)N'(cv_1(x))dx = \int_G v_1(x)u(x)dx$$

同理可证$1 = \int_G v_2(x)u(x)dx$，从而$u(x)$不是L_M^*的光滑点。

若$M(u)$不满足Δ_2条件，则有$u_K \nearrow \infty$，满足

$$M((1+\frac{1}{k})u_K) > 2^K M(u_K) \qquad (k = 1,2\cdots)$$

不妨设$M(u_1) \geqslant \frac{1}{\mathrm{mea}G}$，取$G$的两两不交子集列$\{G_K\}_1^\infty$，$\mathrm{mes}G_K = \frac{1}{2^K M(u_K)}(k = 1,2\cdots)$；将$G_K$分成等测度互不相交的$G_K'$，$G_K''(k = 1,2,\cdots)$。置

$$u_0(x) = \sum_{K=1}^{\infty} u_K k_{G_K}(x),\ v_0(x) = \sum_{K=1}^{\infty} u_K k_{G_K'}(x), w_0(x) = \sum_{K=1}^{\infty} u_K k_{G_K''}(x)$$

则

$$\int_G M(w_0(x))dx = \int_G M(v_0(x))dx < \int_G M(u_0(x))dx = \sum_{K=1}^{\infty} M(u_K)\mathrm{mes}G_K = 1$$

而对任何自然数m，

$$\int_G M[(1+\frac{1}{m})u_0(x)]dx > \int_G M[(1+\frac{1}{m})w_0(x)]dx = \int_G M[(1+\frac{1}{m})v_0(x)]dx$$

$$= \sum_{K=1}^{\infty} M((1+\frac{1}{m})u_K)\mathrm{mes}G_K' \geqslant \sum_{K=m}^{\infty} M((1+\frac{1}{k})u_K)\mathrm{mes}G_K' > \sum_{K=m}^{\infty} 2^K M(u_K)\frac{1}{2^{K+1}M(u_K)} = \infty$$

可见$\|u_0\|_{(M)} = \|v_0\|_{(M)} = \|w_0\|_{(M)} = 1$

援用[3]引理4建立的L_M^*上泛函

$$\rho(u) = \inf\{\alpha > 0: \int_G M\left(\frac{u(x)}{\alpha}\right)dx < \infty\}$$

由方才的讨论知$\rho(u_0) = \rho(v_0) = \rho(w_0) = 1$，考虑$v_0, w_0$在$L_M^*$中的线性包$\mathscr{D} = \mathrm{span}\{v_0, w_0\}$，由$v_0, w_0$的构造易知$\mathscr{D}$中元关于$v_0, w_0$的分解式唯一。在$\mathscr{D}$上定义两个泛函$\phi_1, \phi_2$：对于

$$u = \alpha v_0 + \beta w_0 \in \mathscr{D}$$

$$\phi_1(u) = \rho(\alpha v_0)\mathrm{sign}\alpha,\ \ \phi_2(u) = \rho(\beta w_0)\mathrm{sign}\beta。$$

我们将证ϕ_1是$\mathscr{D}$上线性有界泛函，设$u_1 = \alpha_1 v_0 + \beta_1 w_0$，$u_2 = d_2 v_0 + \beta_2 w_0$，注意$\rho(\cdot)$的正齐性，

$$\phi_1(ku_1 + hu_2) = \rho((k\alpha_1 + h\alpha_2)v_0)\mathrm{sign}(k\alpha_1 + h\alpha_2) = (k\alpha_1 + h\alpha_2)\rho(v_0)$$

$= k\rho(\alpha_1 v_0)\mathrm{sign}\alpha_1 + h\rho(\alpha_2 v_0)\mathrm{sig}\alpha_2 = k\phi_1(u_1) + h\phi_1(u_2)$。

这表说$\phi_1(\cdot)$的线性。又当$u = \alpha v_0 + \beta w_0$ 时

$$|\alpha| = \|\alpha v_0\|_M = \inf\{\xi>0: \int_G M\left(\frac{\alpha v_0(x)}{\xi}\right)dx = \sum_{K=1}^{\infty} M\left(\frac{du_K}{\xi}\right)\mathrm{mes}G'_K \leqslant 1\}$$

$$\leqslant \inf\{\xi>0: \int_G M\left(\frac{u(x)}{\xi}\right)dx = \sum_{K=1}^{\infty}[M\left(\frac{\alpha u_K}{\xi}\right)\mathrm{mes}G'_K + M\left(\frac{\beta u_K}{\xi}\right)\mathrm{mes}G''_K] \leqslant 1\} = \|u\|_M$$

从而$\|\phi_1\|_{\mathscr{D}} = \sup\limits_{\|u\|_M \leqslant 1} |\phi_1(u)| = \sup\limits_{\|u\|_M \leqslant 1} \rho(\alpha v_0) = \sup\limits_{\|u\|_M \leqslant 1} |\alpha| \leqslant 1$，但$u_0 \in \mathscr{D}$，$\|u_0\|_M = 1$，$\phi_1(u_0) = \rho(v_0) = 1$，$\because \|\phi_1\|_{\mathscr{D}} = 1$，同理可证$\phi_2$也是$\mathscr{D}$上有界线性泛函，$\|\phi_2\|_{\mathscr{D}} = 1$。明显地$\phi_1 \neq \phi_2$。

将ϕ_1，ϕ_2分别保范延拓到L_M^*，仍用原记号，则仍有$\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1$，$\phi_1 \neq \phi_2$，但

$$\phi_1(u_0) = \rho(v_0) = 1 = \|u_0\|_M = \rho(w_0) = \phi_2(u_0)$$

这表明u_0不是L_M^*的光滑点。

定理2 $[L_M^*, \|\cdot\|_M]$强光滑(F可微)等价于很光滑等价于$M'(u)$连续和$M(u)$同时满足Δ_2，∇_2条件。

证 参见[4]p.33Th1和p.32Th4及[6]

定理3 $[L_M^*, \|\cdot\|_M]$一致光滑的充分必要条件是$M(u)$满足Δ_2，∇_2条件，$M'(u)$连续，对任何$\varepsilon>0$，有$k_\varepsilon>1$，$M'(k_\varepsilon u) \leqslant (1+\varepsilon)M'(u)$对较大的u成立。

证 参见[4]p38Th2和[5]Th11。

参 考 文 献

[1] M, A, Красносельский, Я, б, Рутичкий, 凸函数与奥尔里奇空间(吴从炘译)，科学出版社，1962。

[2] 吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社，1983。

[3] T.Ando, Nieuw Arch. 8 (1960), 1—16

[4] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces—Selected Topics, Springer, 1975

[5] H.W, Milnes, Pacific J.Math.7(1957)1451—1483

[6] 陈述涛，哈师大学报 (1983) no.2, 48—56。

Smoothness of Orlicz Spaces

Wang Tingfu Chen Shutao

(Harbin Vniv.Sci.Techn) (Harbin Teach.Univ)

Abstract

In this paper, the criteria of smoothness, very smoothness, strong smoothness and uniformly smoothness of Orlicz space respect to Luxemburg norm are obtained.