DOI: 10.13548/j.sxzz.1999.02.024

Vol. 19 (1999)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

赋 Orlicz范数的 Orlicz-Lorentz空间的严格凸性*

吴从炘 任丽伟
(哈尔滨工业大学,哈尔滨 150001)

摘要 本文对于赋 Luxemburg范数的 Orlicz-Lorentz空间 ($\wedge_{h,w}, \|\circ\|$),引进了一种与 Luxemburg范数等价的新的范数 (记为 $\|\circ\|^0$),称之为 *Orlicz* 范数,并且给出了 Orlicz-Lorentz
空间 $\wedge_{h,w}$ 关于 Orlicz范数严格凸的充要条件,这为研究 Orlicz-Lorentz空间的几何性质提供了一个新的框架.

关键词: Orlicz-Lorentz空间; Luxemburg范数; Orlicz范数; 严格凸性
MR(1991)主题分类: 46B20; 46E30
中图法分类: **O177.2**

1 引言

本文用 R、R_+ 分别表示实数集、非负实数集. 一个函数 $h: R_+ \to R_+$ 称为 Orlicz函数,若它满足: (1) h 为凸的、连续的, (2) $h(0)=0$, $h(u)>0$, $(u>0)$, (3) $\frac{h(u)}{u} \to \infty$ $(u \to \infty)$, $\frac{h(u)}{u} \to 0$ $(u \to 0)$, $w: (0,r) \to R_+$ (这里 $(r<\infty)$ 表示一个非增可积函数且 $\int_0^s w(t)\,dt \neq 0$ $(s \leqslant r)$, 我们称之为权函数. 令 M 表示所有 $f: (0,r) \to R$ 组成的集合,且 f 对于 Lebesgue测度 u 是可测的. 对于 $f \in M$,我们定义它的分布函数

$$d_f(\theta) = \_\{s \in (0,r), |f(s)| > \theta\}, \theta \geqslant 0,$$

及 $|f|$ 的非增等可测重排

$$f^*(t) = \inf\{\theta > 0: d_f(\theta) \leqslant t\}, t \in (0,r).$$

对于 $f \in M$,令

$$d_h(f) = \int_0^r h(f^*(t))w(t)dt = \int_0^r h(|f(t)|)^* w(t)dt$$

则 Orlicz-Lorentz空间定义如下:

$$\wedge_{h,w} = \{f \in M: \exists \lambda > 0, 使\ d_h(\lambda f) < \infty\},$$

且 $\|f\| = \inf\{\lambda > 0: d_h(\frac{f}{\lambda}) \leqslant 1\}$.

这里"$\|\circ\|$"我们称之为 Luxemburg范数. 如果令 w 为一常数,则 $\wedge_{h,w}$ 成为 Orlicz空间 L^h. 若 $h(u)=u^p$,则 $\wedge_{h,w}$ 成为 Lorentz空间 $\wedge_{p,w}$.

Orlicz-Lorentz空间作为 Orlicz空间与 Lorentz空间的一种推广,在插值空间理论研究

* 收稿日期: 1996-12-02.
国家自然科学基金资助项目

中具有重要应用．关于赋 Luxemburg范数的$\Lambda_{\Phi,w}$的几何性质，人们已经有不少研究(如见[1-5])．其中，Kaminska在[1]中证得了$(\Lambda_{\Phi,w},\|\cdot\|)$是严格凸的当且仅当 $a)\Phi\in\Delta_2$，$b)\Phi$是严格凸的，$c)w(t)>0,t\in(0,r)(r<\infty)$．在本文中，我们对$\Lambda_{\Phi,w}$引进一个与 Luxemburg范数等价的新的范数$\|\cdot\|^0$，称之为 Orlicz范数．利用此范数我们得到了$(\Lambda_{\Phi,w}\|\cdot\|^0)$是严格凸的充要条件．注意到 Orlicz空间几何理论由于有了 Luxemburg与 Orlicz两种范数而显得丰富多彩(见[6])，因此，对$\Lambda_{\Phi,w}$引进 Orlicz范数就必将丰富对$\Lambda_{\Phi,w}$几何性质的研究．

2 Orlicz-Lorentz空间的 Orlicz范数

我们令$\Psi(u)$表示 Orlicz函数$\Phi(u)$的余函数，即$\Psi(u)=\sup_{v>0}\{uv-\Phi(v)\}$，$u\in R_+$．对于$f\in\Lambda_{\Phi,w}$，令$\|\cdot\|^0$与之对应，即

$$\|f\|^0=\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r f^*(t)g^*(t)w(t)dt$$

下面我们将证明$\|\cdot\|^0$为$\Lambda_{\Phi,w}$的一个范数，且$(\Lambda_{\Phi,w},\|\cdot\|^0)$为一 Banach空间．在证明此结果之前，需引入以下几个事实及引理．

事实(a)．对于 Orlicz函数$\Phi(u)$及它的余函数$\Psi(u)$有如下的不等式(Young不等式)成立(见[6]，P_{23})：

$uv\leqslant\Phi(u)+\Psi(v)$，特别地$up(u)=\Phi(u)+\Psi(p(u))$，这里$p(u):[0,\infty)\to[0,\infty)$是非降、右连续的，且满足$\Phi(u)=\int_0^u p(t)dt$.

事实(b)．根据$f^*(t)$的性质及$\Psi(u)$、$p(u)$的非降性，则有

$$\int_0^r\Psi(p(|f(t)|))^*w(t)dt=\int_0^r\Psi(p(f^*(t)))w(t)dt=\int_0^r\Psi(p(|f(t)|)^*)w(t)dt.$$

引理 **2.1** (i)若$\|f\|^0\leqslant 1$，则$\rho_\Psi(p(|f|))\leqslant 1$.　　(ii)若$\|f\|^0\leqslant 1$，则$\rho_\Phi(f)\leqslant\|f\|^0$.

证　(i)若$\|f\|^0\leqslant 1$，有$\rho_\Psi(p(|f|))>1$，取$f(t)$的截断函数为

$$f_n(t)=\begin{cases}f(t) & |f(t)|\leqslant n\\ 0 & |f(t)|>n.\end{cases}$$

则有$|f_n(t)|\leqslant n$，从而$\rho_\Psi(p(|f_n|))<\infty$，同时，由于$0\leqslant|f_n(t)|\uparrow|f(t)|$，便有$f_n^*(t)\uparrow f^*(t)$(见[1]，$P_{32}$)．这样，由 Levy定理有

$$\int_0^r\Psi(p(f_n^*(t)))w(t)dt\to\int_0^r\Psi(p(f^*(t)))w(t)dt$$

取充分大的N，使$\int_0^r\Psi(p(f_N^*(t)))\cdot w(t)dt>1$.

根据$\Psi(au)\leqslant a\Psi(u)$，$0\leqslant a\leqslant 1$(见[6]，$P_{22}$)，则有

$$\int_0^r\Psi\left(\frac{p(f_N^*(t))}{\int_0^r\Psi(p(f_N^*(t))).w(t)dt}\right)\cdot w(t)dt\leqslant\frac{\int_0^r\Psi(p(f_N^*(t)))w(t)dt}{\int_0^r\Psi(p(f_N^*(t)))w(t)dt}=1.$$

于是根据$\|\cdot\|^0$的定义及事实(a)、(b)有

$$\|f\|^0\geqslant\|f_N\|^0=\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r f_N^*(t)g^*(t)w(t)dt\geqslant\int_0^r f_N^*(t)\frac{p(f_N^*(t))}{\int_0^r\Psi(p(f_N^*(t)))w(t)dt}\cdot$$

$$w(t)dt=\frac{\int_0^r[\Phi(f_N^*(t))+\Psi(p(f_N^*(t)))]\cdot w(t)dt}{\rho_\Psi(p(|f_N|))}=\frac{\rho_\Phi(f_N)+\rho_\Psi(p(|f_N|))}{\rho_\Psi(p(|f_N|)}>1.$$

这与$\|f\|^0\leqslant 1$相矛盾，所以原命题成立．

(ii)由(i)知，$\rho_\Psi(p(|f|))\leqslant 1$，于是

$$\rho_\Phi(f)=\int_0^r \Phi(f^*(t))\,w(t)dt\leqslant\int_0^r f^*(t)\,p(f^*(t))\,w(t)dt$$

$$\leqslant \sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r f^*(t)\,g^*(t)\,w(t)dt=\|f\|^0$$

引理 2.2　令 $J_\Phi=\{f\in M:\|f\|^0=\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r f^*(t)\,g^*(t)\,w(t)dt<\infty\}$，则 $\Lambda_{\Phi,w}=J_\Phi$.

证　对于 $\forall f\in\Lambda_{\Phi,w}$，$\exists\lambda>0$，使 $\rho_\Phi(\lambda f)<\infty$. 于是，对于 $\forall g\in\Lambda_{\Phi,w}$，$\rho_\Psi(g)\leqslant 1$，有

$$\int_0^r f^*(t)\,g^*(t)\,w(t)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^r\lambda f^*(t)g^*(t)w(t)dt\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_0^r((\Phi(\lambda f^*(t))+\Psi(g^*(t)))w(t)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}(\rho_\Phi(\lambda f)+\rho_\Psi(g))<\infty$$

这样，$\|f\|^0=\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r f^*(t)\,g^*(t)w(t)dt<\infty$，从而 $\Lambda_{\Phi,w}\subset J_\Phi$.

反之，若 $f\in J_\Phi$，则 $\|\frac{f}{\|f\|^0}\|=1$，由引理 2.1中的(ii) $\rho_\Phi(\frac{f}{\|f\|^0})\leqslant 1$，从而 $\frac{f}{\|f\|^0}\in\Lambda_{\Phi,w}$，而 $\Lambda_{\Phi,w}$ 为线性集，便有 $f\in\Lambda_{\Phi,w}$，这样 $J_\Phi\subset\Lambda_{\Phi,w}$. 证毕.

定理 2.3　$\|\circ\|^0$ 为 $\Lambda_{\Phi,w}$ 的一个范数，且 $(\Lambda_{\Phi,w},\|\circ\|^0)$ 为 Banach 空间.

证　首先证明 $\|\circ\|^0$ 满足范数的三条公理.

(i) $\|f\|^0=0\Leftrightarrow f=0$.

由 $f=0\Rightarrow\|f\|^0=0$，显然. 反之，若 $\|f\|^0=0$，即对 $\forall g$ 且 $\rho_\Psi(g)\leqslant 1$，有 $\int_0^r f^*(t)g^*(t)w(t)dt=0$. 则 $f^*(t)\,g^*(t)\,w(t)=0$，$a.e.\ t\in(0,r)$. 由于 g 是满足 $\rho_\Psi(g)\leqslant 1$ 的任意可测函数，W 为非增权函数，且 $W\neq 0$ 及 $f^*(t)$ 在 $(0,r)$ 上非增，有 $f^*(t)=0$，$a.e.\ t\in(0,r)$，从而 $f(t)=0$，$a.e.\ t\in(0,r)$，即 $f=0$.

(ii) $\|af\|^0=|a|\,\|f\|^0$，a 为实数，这是显然的.

(iii) $\|f+g\|^0\leqslant\|f\|^0+\|g\|^0$，$\forall f,g\in\Lambda_{\Phi,w}$.

$$\|f+g\|^0=\sup_{\rho_\Psi(h)\leqslant 1}\int_0^r(f(t)+g(t))^*h^*(t)w(t)dt$$

$$\leqslant\sup_{\rho_\Psi(h)\leqslant 1}\int_0^r f^*(t)h^*(t)w(t)dt+\sup_{\rho_\Psi(h)\leqslant 1}\int_0^r g^*(t)h^*(t)w(t)dt\leqslant\|f\|^0+\|g\|^0.$$

这样，(i)、(ii)、(iii)均成立，$\|\circ\|^0$ 为 $\Lambda_{\Phi,w}$ 上的一个范数，我们称其为 Orlicz范数.

其次，由于 $\Lambda_{\Phi,w}$ 是线性的，可知 $(\Lambda_{\Phi,w},\|\circ\|^0)$ 为一赋范线性空间. 下面证明 $(\Lambda_{\Phi,w},\|\circ\|^0)$ 为一 Banach空间. 首先，需要证明这样一个关系式，即

$$\|f\|\leqslant\|f\|^0\leqslant 2\|f\|\qquad\forall f\in\Lambda_{\Phi,w}.$$

事实上，取 $g(t)=p(\frac{f^*(t)}{\|f\|^0})$，则 $g^*(t)=g(t)$，且由引理 2.1中的(i)有，$\rho_\Psi(g)\leqslant 1$，从而

$$\rho_\Phi(\frac{f}{\|f\|^0})=\int_0^r\Phi(\frac{f^*(t)}{\|f\|^0})w(t)dt\leqslant\int_0^r\Phi(\frac{f^*(t)}{\|f\|^0})w(t)dt+\int_0^r\Psi(p(\frac{f^*(t)}{\|f\|^0}))w(t)dt$$

$$=\int_0^r\frac{f^*(t)\,p(\frac{f^*(t)}{\|f\|^0})}{\|f\|^0}w(t)dt\leqslant\frac{1}{\|f\|^0}\int_0^r f^*(t)\,g^*(t)\,w(t)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\|f\|^0}\cdot\|f\|^0=1$$

于是 $\|f\|\leqslant\|f\|^0$，又

$$\|\frac{f}{\|f\|}\|^0=\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r\frac{f^*(t)}{\|f\|}g^*(t)w(t)dt\leqslant\sup_{\rho_\Psi(g)\leqslant 1}\int_0^r(\Phi(\frac{f^*(t)}{\|f\|})+\Psi(g^*(t)))w(t)dt$$

$$\leqslant 1+\int_0^r \Phi\left(\frac{f^*(t)}{\|f\|}\right)w(t)dt \leqslant 1+1=2.$$

于是,$\|f\|^0 \leqslant 2\|f\|$.这样,我们证得$\|\cdot\|^0$与$\|\cdot\|$等价.已知$(\Lambda_{\Phi,w},\|\cdot\|)$为 Banach空间,从而便有$(\Lambda_{\Phi,w},\|\cdot\|^0)$也为 Banach空间,可简记为$\Lambda^0_{\Phi,w}$.

与[6]中的 P_{43}, Th1.25 Th1.26及 P_{46}, Th1.27的证明相类似,我们有下面相应的结果.

定理 2.4 若存在 $k>0$,使 $\rho_J(p(k|f|))=1$,则

$$\|f\|^0=\int_0^r f^*(t)p(kf^*(t))w(t)dt=\frac{1}{k}(1+\rho_\Psi(kf)).$$

定理 2.5 对$\forall f\in\Lambda^0_{\Phi,w}$,$\|f\|^0=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+\rho_\Psi(kf))$.

定理 2.6 $\forall f\in\Lambda^0_{\Phi,w}$,当且仅当 $k\in \boldsymbol{K}(f)=[k^*,k^{**}]$时,

$$\|f\|^0=\frac{1}{k}(1+\rho_\Psi(kf))=\inf_{h>0}\frac{1}{h}(1+\rho_\Psi(hf)),$$

这里 $k^*=\inf\{k>0: \rho_J(p(|f|))\geqslant 1\}$,$k^{**}=\sup\{k>0: \rho_J(p(|f|))\leqslant 1\}$.

3 $\Lambda^0_{\Phi,w}$的严格凸性

一个 Banach空间 X称为严格凸的,若对任意 $x,y\in X$,$\|x\|=\|y\|=1$,$x\neq y$,有$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$.我们用 $S(X)$表示 X的单位球面.

引理 3.1([1]) 对于定义在$(0,r)$上的任意可测函数 f、g,若$|f(t)|\leqslant|g(t)|$,$a.e.t\in(0,r)$,且存在 $A\subset(0,r)$,$\mu A>0$,使得$|f(t)|<|g(t)|$,$t\in A$,则存在 $B\subset(0,r)$,$\mu B>0$,使得 $f^*(t)<g^*(t)$,$t\in B$.

定理 3.2 $\Lambda^0_{\Phi,w}$是严格凸的$\Leftrightarrow$ a) Φ是严格凸的,b) $w(t)>0$,$t\in(0,r)$.

证 充分性.对任意 f、$g\in S(\Lambda^0_{\Phi,w})$,$f\neq g$,下面将证明$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^0<1$.

令 $k_1\in \boldsymbol{K}(f)$,$k_2\in \boldsymbol{K}(g)$,则由定理 2.6有

$$\|f\|^0=\frac{1}{k_1}(1+\rho_\Psi(k_1f)),\quad \|g\|^0=\frac{1}{k_2}(1+\rho_\Psi(k_2g)).$$

由于 $f\neq g$,则存在 $A\subset(0,r)$,$\mu A>0$,使得 $k_1f(t)\neq k_2g(t)$,$t\in A$.否则,若 $k_1f(t)=k_2g(t)$,$a.e.t\in(0,r)$,则 $k_1=\|k_1f\|^0=\|k_2g\|^0=k_2$,从而 $f(t)=g(t)$,$a.e.t\in(0,r)$,即 $f=g$,与 $f\neq g$矛盾.由于 Φ是严格凸的,则对于 $t\in A$,

$$\Phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\left|\frac{f(t)+g(t)}{2}\right|\right)=\Phi\left(\left|\frac{k_2(k_1f(t))}{k_1+k_2}+\frac{k_1(k_2g(t))}{k_1+k_2}\right|\right)$$
$$<\frac{k_2}{k_1+k_2}\Phi(k_1|f(t)|)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\Phi(k_2|g(t)|).$$

由引理 3.1有

$$\Phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\left|\frac{f(t)+g(t)}{2}\right|\right)^*<\left[\frac{k_2}{k_1+k_2}\Phi(k_1|f(t)|)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\Phi(k_2|g(t)|)\right]^*$$

对 $t\in B$,$B\subset(0,r)$,$\mu B>0$.由于 $w(t)>0$,$t\in(0,r)$,于是

$$\int_0^r\Phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\left|\frac{f(t)+g(t)}{2}\right|\right)^*w(t)dt<\int_0^r\left[\frac{k_2}{k_1+k_2}\Phi(k_1|f(t)|)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\Phi(k_2|g(t)|)\right]^*$$
$$w(t)dt\leqslant\frac{k_2}{k_1+k_2}\int_0^r\Phi(k_1|f(t)|)^*w(t)dt+\frac{k_1}{k_1+k_2}\int_0^r\Phi(k_2|g(t)|)^*w(t)dt.$$

从而,由定理 2.5有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^0\leqslant\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}\left(1+\rho_\Psi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{f+g}{2}\right)\right)$$

$$< \frac{k_1+k_2}{2k_1k_2} + \frac{1}{2k_1}\int_0^r \Phi(k_1|f(t)|)^* w(t)dt + \frac{1}{2k_2}\int_0^r \Phi(k_2|g(t)|)^* w(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_1}(1+\rho_\Phi(k_1 f))\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_2}(1+\rho_\Phi(k_2 g))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\|f\|^0 + \frac{1}{2}\|g\|^0 = 1.$$

故$\Lambda^0_{\Phi,w}$是严格凸的.

必要性. 若(i)不成立,即 Φ不是严格凸的,则存在 $v_0>u_0$,使得 $p(u)$在 $[u_0,v_0]$上取常数值 $A>0$. 取 $a>v_0$, $r_1>0$,使

$$\varphi(p(a))\int_0^{r_1} w(t)dt > 1,\quad \varphi(A)\int_0^{r_1} w(t)dt < 1.$$

命 $F(t)=\varphi(p(a))\int_0^t w(t)dt+\varphi(A)\int_t^{r_1} w(t)dt$,令 $t\to r_1$,则有 $F(t)\to\varphi(p(a))\int_0^{r_1} w(t)dt>1$. 又令 $t\to 0$,则有 $F(t)\to\varphi(A)\int_0^{r_1} w(t)dt<1$,因此,存在 r_0, $0<r_0<r_1$,使

$$\varphi(p(a))\int_0^{r_0} w(t)dt+\varphi(A)\int_{r_0}^{r_1} w(t)dt = 1.$$

取 $r_0<s<r_1$,便有

$$\varphi(p(a))\int_0^{r_0} w(t)dt+\varphi(A)\left(\int_{r_0}^{s} w(t)dt+\int_s^{r_1} w(t)dt\right) = 1 \tag{1}$$

再取 $\varepsilon,\delta>0$,使 $v_0-\varepsilon>u_0+\delta$,且

$$\int_{r_0}^{s}(v_0-\varepsilon)w(t)dt+\int_s^{r_1}(u_0+\delta)w(t)dt=\int_{r_0}^{s}v_0 w(t)dt+\int_s^{r_1}u_0 w(t)dt \tag{2}$$

令

$$k = ap(a)\int_0^{r_0} w(t)dt+\int_{r_0}^{s}Av_0 w(t)dt+\int_s^{r_1}Au_0 w(t)dt \tag{3}$$

$$f=\frac{1}{k}(a\chi_{[0,r_0]}+v_0\chi_{[r_0,s]}+u_0\chi_{[s,r_1]})$$

$$g=\frac{1}{k}(a\chi_{[0,r_0]}+(v_0-\varepsilon)\chi_{[r_0,s]}+(u_0+\delta)\chi_{[s,r_1]}).$$

则 $f\neq g$,且 $f^*=f$, $g^*=g$.另外

$$\frac{f+g}{2}=\frac{1}{k}a\chi_{[0,r_0]}+\frac{1}{k}\cdot\frac{v_0+v_0-\varepsilon}{2}\chi_{[r_0,s]}+\frac{1}{k}\cdot\frac{u_0+u_0+\delta}{2}\chi_{[s,r_1]},$$

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^*=\frac{f+g}{2}.$$

注意由(1)式可有

$$\rho_\varphi(p(k|f|))=\varphi(p(a))\int_0^{r_0} w(t)dt+\varphi(A)\int_{r_0}^{s} w(t)dt+\varphi(A)\int_s^{r_1} w(t)dt=1.$$

再根据定理 2.4及(3)式就有

$$\|f\|^0=\frac{1}{k}\left(\int_0^{r_0}ap(a)w(t)dt+\int_{r_0}^{s}v_0Aw(t)dt+\int_s^{r_1}u_0Aw(t)dt\right)=1.$$

又根据(1)、(2)、(3)式,同理可证得$\|g\|^0=1$, $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^0=1$,这与$\Lambda^0_{\Phi,w}$的严格凸性相矛盾,故(i)成立.

若(ii)不成立,则存在 $0<r_0<r$,使 $w(t)=0$, $t\in(r_0,r)$.取 $a>0$,使$\|a\chi_{[0,r_0]}\|^0=1$.然后令

$$f=a\chi_{[0,r_0]},\qquad g=a\chi_{[0,r_0]}+\frac{a}{2}\chi_{[r_0,r]}.$$

则$\|f\|^0=1$, $f\neq g$.令 $k\in K(f)$,便有

$$1=\|f\|^0\leqslant\|g\|^0\leqslant\frac{1}{k}(1+\rho_\Phi(kg))=\frac{1}{k}\left(1+\int_0^{r_0}\Phi(ka)w(t)dt\right)=\frac{1}{k}(1+\rho_\Phi(kf))=1.$$

于是$\|g\|^0=1$. 而$\frac{f+g}{2}=a\chi_{[0,r_0]}+\frac{a}{4}\chi_{[r_0,r]}$,同理可证得$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^0=1$,这与$\Lambda^0_{\Phi,w}$的严格凸性相矛盾 . 证毕 .

推论 **3.3**([6,P77定理 2.4]) 赋 Orlicz范数的 Orlicz空间 L^0_Φ是严格凸的$\Leftrightarrow\Phi$是严格凸的 .

证 这里 $w(t)=1>0$, $t\in(0,r)$,所以根据定理 3.2,此推论显然成立 .

参 考 文 献

1 Kaminska, A., Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces, Math. Nachr., 1990, 147(1): 29~38.
2 Kaminska, A., Extreme points in Orlicz-Lorentz spaces, Arch. Math. 1990, 55: 173~180.
3 Kaminska, A., Uniform convexity of generalized Lorentz spaces, Arch. Math., 1991, 56: 181~188.
4 Montgomery-Smith, S. J., Comparison of Orlicz-Lorentz spaces, Studia Math., 1992, 103: 161~189
5 Lin Pei-Kee and Sun Huiying, Some geometric properties of Lorentz-Orlicz spaces, Arch. Math., 1995, 64: 500~511.
6 吴从炘,王廷辅,陈述涛,王玉文,Orlicz空间几何理论,哈尔滨,哈尔滨工业大学出版社,1986.

STRICT CONVEXITY OF ORLICZ-LORENTZ SPACES WITH ORLICZ NORM

Wu Congxin(吴从炘) Ren Liwei(任丽伟)
(*Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001)

Abstract

In this paper, we introduce Orlicz norm which is equivalent to Luxemburg norm in Orlicz-Lorentz spaces. And then, we give a criterion for strict convexity of Orlicz-Lorentz spaces equipped with Orlicz norm. This provides a new frame for studying geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces.

Keywords: Orlicz-Lorentz space; Luxemburg norm; Orlicz norm; strict convexity.

MR 1991 Subject Classification: 46B20; 46E30