关于 Orlicz 空间中 p 一致凸性的刻画

许立滨[1],鄂明川[1],于继杰[2]

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨电力职业技术学校 哈尔滨 150030)

摘　要: 众所周知,p 一致凸性是 Banach 空间重要的几何性质,分别对赋 p – Amemiya 范数、Luxemburg 范数及 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 p 一致凸性做了细致的研究,得到了相关的一些结果和结论.

关键词: Orlicz 空间; p 一致凸性; p – Amemiya 范数

中图分类号: O153.3　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1672 – 0946(2013)03 – 0359 – 03

Characteristics of p – uniform convexity in Orlicz spaces

XUN Li-bin[1], E Ming-chuan[1], YU Ji-jie[2]

(1. School of Applied Science, Harbin University of Technology, Harbin 150080, China;
2. Harbin Power Vocational Technology College, Harbin 150030, China)

Abstract: It is well known that p – uniform convexity is an important geometric propery in Banach spaces. The p – uniform convexity of Orlicz spaces which were respectively equipped with p – Amemiya norm, Luxemburg norm and Orlicz norm were discussed in detail, and some relative results and conclusions were obtained.

Key words: Orlicz spaces; p – uniform convexity; p – Amemiya norm

1　引　言

自 1932 年著名波兰数学家 W·Orlicz 引入 Orlicz 空间以来,Orlicz 空间理论因其重要的理论性质和应用价值得到了长足的发展. 关于赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间的几何性质研究的已近乎完善,而赋 p – Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的研究刚刚开始. p 一致凸性是 Banach 空间重要的几何性质,本文将分别对赋 p – Amemiya 范数、Luxemburg 范数及 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 p 一致凸性做系统的的研究.

下面先给出一些基本概念:

设 X 是实 Banach 空间,$B(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示空间的单位球和单位球面.

映射 $\Phi: R\to [0,\infty]$ 被称为 Orlicz 函数是指 Φ 是偶,凸,在 R^+ 上连续,仅在零点等于零的函数,并且满足 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$. 令 $p(u)$ 是 $\Phi(u)$ 的右导数. 对每个 Orlicz 函数 Φ,定义它的余函数 $\Phi: R\to [0,\infty]$,

$$\Psi(v) = \sup\{u|v| - \Phi(u): u\geqslant 0\}$$

易知余函数 Ψ 也是 Orlicz 函数.

设 (G,Σ,μ) 是 δ_- 有限的测度空间,μ 是非原子且完备的测度,$L^o(\mu)$ 表示所有定义在集合 G 上的可测函数的全体,对一给定的 Orlicz 函数 Φ,在 $L^o(\mu)$ 上定义凸泛函

$$I_\Phi(x) = \int_G \Phi(x(t))\,\mathrm{d}\mu$$

由 Orlicz 函数 Φ 所生成的 Orlicz 空间 L_Φ:

$$L_\Phi = \{x\in L^o(\mu): I_\Phi(cx) < \infty,\text{存在某个 } c > 0\}$$

及 Orlicz 空间 L_Φ 的子空间:

$$E_\Phi = \{x\in L^o(\mu): I_\Phi(cx) < \infty,\text{对任意 } c > 0\}$$

收稿日期: 2012 – 12 – 06.

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11521121).

作者简介: 许立滨(1961 –),男,硕士,副教授,研究方向: 控制系统稳定性.

L_Φ 通常赋以如下的 Luxemburg 范数:

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \leqslant 1\}$$

或等价的 Orlicz 范数:

$$\|x\|_\Phi^0 = \sup\{\int_T |x(t)y(t)| \mathrm{d}\mu : y \in L_\Phi, I_\Phi(y) \leqslant 1\}$$

在 Orlicz 空间中,Orlicz 范数与如下的 Amemiya 范数是等价的[1]

$$\|x\|_\Phi^0 = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kx)).$$

为简化记号,令

$L_\Phi = (L_\Phi \|\cdot\|_\Phi), L_\Phi^0 = (L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^0)$.

对于 $x \in L_\Phi^0, x \neq 0$,记

$k_x^* = \inf\{k > 0 : I_\Phi(p(k|x|)) \geqslant 1\}, k_x^{**} = \sup\{k > 0 : I_\Psi(p(k|x|)) \leqslant 1\}$,

$K(x) = [k_x^*, k_x^{**}]$. 众所周知,

$\|x\|_\Phi^0 = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(k(x))$ 当且仅当

$k \in K(x)$[1],对 $t > 0$,令

$p_-(t) = \sup\{p(s) : 0 \leqslant s < t\}$,且

$p_-(0) = 0$.

称 Orlicz 函数 Φ 满足 Δ_{2-} 条件(简记为 $\Phi \in \Delta_2$)是指若存在正整数 K 和 $u_0 > 0$,使得对于 $|u| \geqslant u_0$,有 $\Phi(2u) \leqslant K\Phi(u)$.

称 Orlicz 函数满足 ∇_{2-} 条件(简记为 $\Phi \in \nabla_2$)是指它的余函数 Ψ 满足 Δ_{2-} 条件.

记 S_Φ 为 Φ 的所有严格凸点构成的集合,即若 $u, v \in R, \alpha \in (0,1)$,且

$\alpha u + (1-\alpha)v \in S_\Phi$,则

$\Phi(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha\Phi(u) + (1-\alpha)\Phi(v)$.

在 L_Φ 中引入如下泛函:

$$\|x\|_{\Phi,p} = \begin{cases} \inf\limits_{k>0} k^{-1}(1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p \leqslant \infty \\ \inf\limits_{k>0} k^{-1}\max\{1, I_\Phi(kx)\}, p = \infty \end{cases}$$

事实上,$\|x\|_{\Phi,1} = \|x\|_\Phi^0$,$\|x\|_{\Phi,\infty} = \|x\|_\Phi$,并对于任意的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,泛函 $\|x\|_{\Phi,p}$ 为 L_Φ 上的范数,且所有的范数是互相等价的[3-7],我们称泛函 $\|x\|_{\Phi,p}$ 为 L_Φ 上的 p - Amemiya 范数,赋予该范数的 Orlicz 空间记为 $L_{\Phi,p}$,并已知该空间为 Banach 空间[8-11].

2 主要结果

引理 2.1[2] $\forall x \in L_\Phi$,

$\|x\|_L = \|x\|_{\Phi,\infty} \leqslant \|x\|_{\Phi,p} \leqslant \|x\|_{\Phi,1} = \|x\|_\Phi$.

引理 2.2[1] 对一切 $x \in L_\Phi$ 有

$\|x\|_L \leqslant \|x\|_\Phi \leqslant 2\|x\|_L$.

引理 2.3[1] 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$,则 $\forall \varepsilon_1 > 0$,$\exists \delta_1 > 0$,使得

$\|u\|_L \geqslant \varepsilon_1 \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geqslant \delta_1$

定理 2.1 对一切 $x \in L_\Phi$ 有 $\|x\|_L \leqslant \|x\|_{\Phi,p} \leqslant 2\|x\|_L$.

证明 利用引理 2.1 和引理 2.2 可以推出此结论.

定理 2.2 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$,则 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,使得

$\|u\|_\Phi \geqslant \varepsilon \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geqslant \delta$

证明 若对 $\forall \varepsilon > 0$,有 $\|u\|_\Phi \geqslant \varepsilon$,利用引理 2.2 可以推出

$$\|u\|_L \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\Phi \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

因此,利用引理 2.3 可以推出:

$\exists \delta > 0$ s. t. $\rho_\Phi(u) \geqslant \delta$

定理 2.3 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$,则 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,使得

$\|u\|_{\Phi,p} \geqslant \varepsilon \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geqslant \delta$

证明 若对 $\forall \varepsilon > 0$,有 $\|u\|_{\Phi,p} \geqslant \varepsilon$,利用定理 2.1 可以推出:

$$\|u\|_L \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_{\Phi p} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

因此,利用引理 2.3 得出: $\exists \delta > 0$,使得 $\rho_\Phi(u) \geqslant \delta$.

定理 2.4 设 Φ 是 N 函数,$\Phi(u) \in \Delta_2$,令 $M(u) = \Phi^p(u)$,$(p \geqslant 2)$. 若 $\Phi(u)$ 是一致凸的,则赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_L)$ 是 p 一致凸的.

证明 由于 Φ 是 N 函数,所以由 N 函数的定义可知: M 也是 N 函数. 赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_L)$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u, v \in S(L_M)$,存在 $c > 0$,使得对给定 $0 \leqslant h \leqslant 1$,有

$$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_L \geqslant h \Rightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_L \leqslant 1 - c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u) \in \Delta_2$,即 $\exists K > 2$ 和 $u_0 \geqslant 0$ 使得 $\Phi(2u) \leqslant K\Phi(u)$,$(u \geqslant u_0)$. 则 $M(2u) = \Phi^p(2u) \leqslant K^p\Phi^p(u) = K^pM(u)$,即 $M(u) \in \Delta_2$. 因此利用引理 2.3 可知: 要证本定理,只须证

$$\rho_M(\frac{u-v}{2}) \geqslant h \Rightarrow \rho_M(\frac{u+v}{2}) \leqslant 1 - c(2h)^p$$

对于上述 h，选取 $u_0>0$，使得 $M(u_0)mesG<(h-h^p)/2$，并令

$\varepsilon'=((h-h^p)/2)^{1/p}$. 由于 $\Phi(u)$ 是一致凸的，即对上述的 u_0,ε'，$\exists\delta>0$，当 $|u-v|\geqslant\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon' u_0$ 时，有

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{\Phi(u)+\Phi(u)}{2}$$

因此

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)=\Phi^p\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)^p\frac{\Phi(u)+\Phi(u))^p}{2^p}=\frac{(1-\delta)^p}{2^{p-1}}\frac{\Phi(u)+\Phi(u))^p}{2}$$

又由于 $p\geqslant2$，

$$\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^p+\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^p\leqslant|\alpha|^p+|\beta|^p,$$

$\alpha,\beta\in R$，$0<1-\delta<1$，从而有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{(1-\delta)^p}{2}\frac{(\Phi(u)+\Phi(v))^p}{2}\leqslant\frac{(1-\delta)^p}{2}(\Phi^p(u)+\Phi^p(v))\leqslant(1-\delta)\frac{\Phi^p(u)+\Phi^p(v)}{2}=(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

即 $M(u)$ 也是一致凸的.

对任意的 $u,v\in S(L_M)$，$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)\geqslant h$，记

$G_1=G(\max(|u(t)|,|v(t)|)<u_0)$

$G_2=G(|u(t)-v(t)|<\varepsilon'\max(|u(t)|,|v(t)|))$

$G_3=G(|u(t)-v(t)|\geqslant\varepsilon'\max(|u(t)|,|v(t)|)\geqslant\varepsilon' u_0)$

因 $\varepsilon'<1$，由 G_2 的定义及

$$\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^p+\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^p\leqslant|\alpha|^p+|\beta|^p,$$

$\alpha,\beta\in R$，有

$$\int_{G_2}M\left(\frac{u(t)}{2}\right)dt=\int_{G_2}\Phi^p\left(\frac{u(t)-v(t)}{2}\right)dt$$

$$\leqslant\int_{G_2}\Phi^p\left(\varepsilon'\frac{|u(t)|+|v(t)|}{2}\right)dt$$

$$\leqslant\varepsilon'^p\int_{G_2}\left(\frac{\Phi(u(t))+\Phi(v(t))}{2}\right)^p dt=\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}}\int\frac{(\Phi(u(t))+\Phi(v(t)))^p}{2}dt$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}}\int_{G_2}[\Phi^p(u(t))+\Phi^p(v(t))]dt\leqslant\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}}[\rho_M(u)+\rho_M(v)]=\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-2}}\leqslant\varepsilon'^p$$

于是

$$h\leqslant\int_G M\left(\frac{u(t)-v(t)}{2}\right)dt\leqslant M(u_0)mesG_1+\varepsilon'^p+\int_{G_3}\frac{M(u(t))+M(v(t))}{2}dt$$ 从而

$$\int_{G_3}\frac{M(u(t)+M(v(t))}{2}dt\geqslant h^p$$

由于 M 在 G_1,G_2 上是凸函数，在 G_3 上是严格凸函数，因此有

$$\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\int_{G_1\cup G_2}\frac{M(u(t))+M(v(t))}{2}dt+(1-\delta)\int_{G_3}\frac{M(u(t))+M(v(t))}{2}dt<\frac{\rho_M(u)+\rho_M(v)}{2}-\delta h^p=1-\delta h^p$$

令 $\delta=c2^p$，即

$$\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant1-c(2h)^p$$

定理2.5　设 Φ 是 N 函数，$\Phi(u)\in\Delta_2$，令 $M(u)=\Phi^p(u)$，$(p\geqslant2)$. 若 $\Phi(u)$ 是一致凸的，则赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间$(M_M,\|\cdot\|_M)$ 是 p 一致凸的.

证明　由于 Φ 是 N 函数，所以由函数的定义可知：$M(u)$ 也是 N 函数. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 $(L_M,\|\cdot\|_M)$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u,v\in S(L_M)$ 存在 $c>0$，使得对给定 $0\leqslant h\leqslant1$，有

$$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_M'\geqslant h\Rightarrow\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_M\leqslant1-c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u)\in\Delta_2$，即 $\exists K>2$ 和 $u_0\geqslant0$ 使得 $\Phi(2u)\leqslant K\Phi(u)$，$u(\geqslant u_0)$. 则 $M(2u)=\Phi^p(2u)\leqslant K^p\Phi^p(u)=K^pM(u)$，即 $M(u)\in\Delta_2$. 因此利用定理2.2可知：要证本定理，只须证

$$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)\geqslant h\Rightarrow\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant1-c(2h)^p$$

证明过程与定理2.4的证明过程类似.

定理2.6　设 Φ 是 N 函数，$\Phi(u)\in\Delta_2$，令 $M(u)=\Phi^p(u)$，$(p\geqslant2)$. 若 $\Phi(u)$ 是一致凸的，则赋 p - Amemiya 范数的 Orlicz 空间$(L_M,\|\cdot\|_{M,p})$ 是 p 一致凸的.

证明　由于 Φ 是 N 函数，所以 N 由函数的定义可知：$M(u)$ 也是 N 函数. 赋 p - Amemiya 范数的 Orlicz 空间$(L_M,\|\cdot\|_{M,p})$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u,v\in S(L_M)$，存在 $c>0$，使得对给定 $0\leqslant h\leqslant1$，有

$$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{\Phi,p}\geqslant h\Rightarrow\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{\Phi,p}\leqslant1-c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u)\in\Delta_2$，即 $\exists K>2$ 和 $u_0\geqslant0$ 使得 $\Phi(2u)\leqslant K\Phi(u)$，$(u\geqslant u_0)$. 则 $M(2u)=\Phi^p(2u)$

（下转368页）

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0 \\ \lambda_1 & \lambda_1^3 & \lambda_1^5 & \cdots & \lambda_1^{2m-1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^5 & \cdots & \lambda_2^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m-1} & \lambda_{m-1}^3 & \lambda_{m-1}^5 & \cdots & \lambda_{m-1}^{2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\lambda_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda_1^2 & (\lambda_1^2)^2 & \cdots & (\lambda_1^2)^{m-1} \\ 1 & \lambda_2^2 & (\lambda_2^2)^2 & \cdots & (\lambda_2^2)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{m-1}^2 & (\lambda_{m-1}^2)^2 & \cdots & (\lambda_{m-1}^2)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!$$

又知$|\boldsymbol{A}|2ma^m \in \boldsymbol{Z}(R)$，则当$2m!\ a$为正则元时，$a^m \in \boldsymbol{Z}(R)$. 故式(3)可化为$(xa)^{2m} + x^{2m}a^{2m} \in \boldsymbol{Z}(R)$，由文献[5]得$R$是交换的. 同理可证满足式(4)时$R$也是交换的.

3 结 语

定理2虽然比定理1的多项式条件更广泛，但是需要附加扭自由的限制. 目前，还没有找到合适的例子说明这个附加条件是必要的. 这将是今后的一个研究方向. 另外，于宪君[8]已经在次数为2的时候将多项式条件推广为最一般的6项式，在次数不为2时能否做到也是日后需要考虑的内容.

参考文献:

[1] 郭元春. 环的交换性条件[J]. 吉林大学自然科学学报，1983(2)：19－25.

[2] 朱 杰，于宪君，国春光. 关于半质环的中心与交换性[J]. 黑龙江大学自然科学学报，1998，15(4)：28－29.

[3] 朱 捷，于宪君. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 哈尔滨师范大学学报：自然科学版，2003，19(3)：9－10.

[4] 肇 慧，杨新松. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 哈尔滨理工大学学报，2004，9(5)：90－91.

[5] 王延鹏，陈光海. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 哈尔滨理工大学学报，2007，12(6)：77－78.

[6] 王琳琳，杨新松. 使半质环交换的两个子结构条件[J]. 哈尔滨商业大学学报：自然科学版，2009，25(4)：475－476.

[7] 谢中根. 特征非2半质环的交换性定理[J]. 大学数学，2011，27(1)：73－74.

[8] 朱 捷，于宪君. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(4)：450－451.

(上接361页)

$\leqslant K^p\Phi^p(u) = K^pM(u)$，即$M(u) \in \Delta_2$. 因此利用定理2.3可知：要证本定理，只须证

$$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right) \geqslant h \Rightarrow \rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant 1 - c(2h)^p$$

证明过程与定理2.4的证明过程类似.

本文分别给出了赋p－Amemiya范数、Luxemburg范数及Orlicz范数的Orlicz空间具有p一致凸性的充分条件，但对于必要条件还需更深入地研究.

参考文献:

[1] CHEN S T. Geometry of Orlicz spaces[M]. Dissert. Math，1996，356：1－204.

[2] CUI Y，DUAN L，HUDZIK H. Basic theory of p－Amemiya norm in Orlicz spaces: extreme points and rotundity in Orlicz space sequipped with these norms[J]，Nonlinear Anal.，2008，69：1796－1816.

[3] CUI Y，HUDZIK H，PLUCIENNIK R. Extreme points and strongly extreme points in Orlicz spaces equipped with the Orlicz norm[J]. Z. Anal. Anwendungen，2003，22：789－817.

[4] CHEN L L，CUI Y，HUDZIK H. Criteria for complex strongly extreme points of Musielak Orlicz function spaces[J]. Nonlinear Anal.，2009，70：2270－2276.

[5] HUDZIK H，NARLOCH A. Relationships between monotonicity and complex rotundityproperties with some consequences[J]. Math. Scand.，2005，96：289－306.

[6] CHEN L L，CUI Y N. Complex extreme points and complex rotundity in Orlicz function spaces equipped with the p－Amemiya norm[J]，Nonlinear Analysis，2010，73(5)：1389－1393.

[7] CUI Y N，HUDZIK H，LI J J. Strongly extreme points in Orlicz space equippedwith the p－Amemiya norm[J]. Nonlinear Analysis，2009，71(12)：6343－6364.

[8] 刘培德. 鞅与Banach空间几何学[M]. 武汉：武汉大学出版社，2007：179－215.

[9] 段丽芬，崔云安. 广义Orlicz范数和广义Luxemburg范数[J]. 兰州理工大学学报，2006，32(2)：131－134.

[10] 段丽芬，崔云安. 广义Orlicz范数的Orlicz空间强端点[J]. 浙江大学学报，2009，36(1)：6－11.

[11] 李小彦，崔云安. 特殊Orlicz函数空间的光滑点[J]. 哈尔滨商业大学学报：自然科学版，2010，26(4)：439－441.