УДК 517.98

Н. ЯДГОРОВ

ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работах [1, 2] исследованы упорядоченные банаховы пространства с порядковой единицей и базовой нормой. В настоящем сообщении доказывается теорема о изометрии двух пространств с порядковой единицей, обобщающая соответствующую теорему для йордановых алгебр ([3], теорема 4). Терминология и обозначения взяты из [1, 2].

Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей, (V, K) — пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности [2].

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех P-проекторов в A. Элементы A вида $u = Pe$, $P \in \mathcal{P}$ называются проективными единицами: их совокупность обозначим через U. Две проективных единицы Pe и Qe называются совместимыми (ортогональными), если $PQ = QP$ $(Pe + Qe \leqslant e)$.

Пусть $A^I = \{a \in A : 0 \leqslant a \leqslant e\}$. Тогда A^I—замкнутое по норме выпуклое множество; обозначим через ∂A^I множество всех его экстремальных точек. Из следствия 2.9 и предложения 8.7 [2] вытекает

Лемма 1. Пусть (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности. Тогда U и ∂A^I совпадают.

В дальнейшем, говоря о пространстве с порядковой единицей, будем предполагать, что оно находится в спектральной двойственности с некоторым пространством с базовой нормой. В этом случае, как показано в работе [2], для любого $a \in A$ существует спектральное семейство $\{e_\lambda^a\} \subset U$ такое, что $a = \int \lambda de_\lambda^a$. Исходя из указанного введем понятие квадрата элемента a:

$$a^{(2)} = \int \lambda^2 de_\lambda^a.$$

Пусть a, b — элементы A, $\{e_\lambda^a\}$ и $\{e_\mu^b\}$ — их спектральные семейства. Два элемента a и b называются совместимыми, если все пары e_λ^a, e_μ^b совместимы (обозначим через $a \leftrightarrow b$). С помощью спектральной теоремы легко доказывается

Лемма 2. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) — пространства с порядковой единицей, φ — порядковый изоморфизм A_1 на A_2. Если $a, b \in A$ и $a \leftrightarrow b$, то $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$ в A_2.

Теорема 1. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) — пространства с порядковой единицей, φ — сюрьективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2, такое, что $\varphi(e_1) = e_2$. Тогда $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}$ для любого $a \in A_1$.

Доказательство. Пусть $\varphi: A_1 \to A_2$ сюрьективная, линейная изометрия A_1 на A_2 такая, что $\varphi(e_1) = e_2$. В силу предложения II.1.3 и следствия II.1.4 [1], φ является порядковым изоморфизмом. В силу леммы 1 $\varphi(U_1) = \varphi(U_2)$, где U_1 и U_2 — множества проективных единиц соответственно в A_1 и A_2.

Пусть a — произвольный элемент A_1, $M(a)$ — наименьшее слабо замкнутое абелево подпространство, содержащее a и e_1; $M(a)$ изометрически и порядково изоморфно $C(X)$, где X — некоторый гиперстоуновский компакт. Для любого положительного ε можно выбрать конечное число попарно ортогональных проектных единиц $u_1, u_2, \dots, u_n$ в $M(a)$ и действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\left\| a - \sum_1^n \lambda_i u_i \right\| \leqslant \varepsilon$, $\left\| \sum_1^n \lambda_i u_i \right\| \leqslant \|a\|$ и

$$\varphi\left(\sum_1^n \lambda_i u_i\right)^{(2)} = \left\| \sum_1^n \lambda_i \varphi(u_i) \right\|^{(2)} = \sum_1^n \lambda_i^2 \varphi(u_i) = \varphi\left(\sum_1^n \lambda_i^2 u_i\right).$$

Так как $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$ являются попарно ортогональными проективными единицами в A_2, то в силу леммы 2 имеем

$$\|\varphi(a^{(2)}) - \varphi(a)^{(2)}\| = \left\| \varphi\left(a^{(2)} - \sum_1^n \lambda_i^2 u_i\right) + \varphi\left(\sum_1^n \lambda_i u_i\right)^{(2)} - \right.$$

*189

$$- \varphi(a)^{(2)}\Big\| \leqslant \Big\| a^{(2)} - \sum_{1}^{n} \lambda_i^2 u_i \Big\| + \Big\| \varphi\Big(\sum_{1}^{n} \lambda_i u_i - a\Big) \times$$

$$\times \varphi\Big(\sum_{1}^{n} \lambda_i u_i + a\Big)\Big\| \leqslant \Big\| a - \sum_{1}^{n} \lambda_i u_i \Big\| \cdot \Big\| a + \sum_{1}^{n} \lambda_i u_i \Big\| +$$

$$+ 2\varepsilon \|a\| \leqslant 4\varepsilon \|a\|.$$

Следовательно, $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}$.

Из этой теоремы и теоремы 3.6 из [4] вытекает

Следствие. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) — пространства с порядковой единицей и φ — сюрьективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2 такое, что $\varphi(e_1) = e_2$. Пространство A_1 есть йорданова банахова алгебра тогда и только тогда, когда A_2 — йорданова банахова алгебра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alfsen E. M. Compact convex set and boundary integrals. Berlin. Springer Verlag. 1971. 210 p. [2] Alfsen E. M., Schultz F.-W.//Memoirs Amer. Math. Soc. 1976. V. 172. N XI. P. 120. [3] Maitland Wright J. D., Youngson M. A.// J. Lon. Math. Soc. 1978. V. 17. P. 339—344. [4] Alfsen E. M., Shultz F. M.//Proc. Lon. Math. Soc. 1979. V. 38 P. 497—516.

Поступило
30. 09. 87 г.

Институт математики
им. В. И. Романовского АН УзССР