А К А Д Е М И Я Н А У К У З Б Е К С К О Й С С Р

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В.И.РОМАНОВСКОГО

На правах рукописи

ЯДГОРОВ Нурмухаммад Жураевич

УДК 517.98

СТРОЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

01.01.01 - математический анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор Ш.А.АЮПОВ

Ташкент - 1989

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Стр.

В В Е Д Е Н И Е 4

Г Л А В А I. ПРОСТРАНСТВА АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ НА СПЕКТРАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ. . . 23

§ I.I. Предварительные сведения 23

§ I.2. Проективность и спектральность дуальных пар и выпуклых множеств. Характеризация проективных единиц 29

§ I.3. Множества Глисона и Яуха-Пирона. Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах 44

§ I.4. Упорядоченные пространства и выпуклые множества типа I. 56

§ I.5. Общая классификация пространств с порядковой единицей и выпуклых множеств. Связь с другими классификациями 63

Г Л А В А П. ЙОРДАНОВА СТРУКТУРА В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЙ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР 72

§ 2.I. Йорданова структура и изометрии в пространствах с порядковой единицей. . . . 74

§ 2.2. Характеризация пространств состояний конечномерных йордановых алгебр. 82

§ 2.3. Однородность самодуальных конусов в конечномерных пространствах 93

ЛИТЕРАТУРА. 100

ВВЕДЕНИЕ

При математическом обосновании квантовой механики, исследовании статистических и вероятностных аспектов квантовой теории возникает необходимость изучения математических объектов различной степени общности. Такими объектами в порядке возрастания общности были алгебра $B(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, алгебры фон Неймана (C^* - алгебры), йордановы банаховы алгебры и, наконец, упорядоченные банаховы пространства с порядковой единицей. Если первые два объекта стали уже классическими, их теория уже получила глубокое развитие, и ей посвящено большое количество работ (подробнее см. монографии Диксмье [14],[57], Сакаи [75], Такесаки [49] , Педерсен [72] и Стратила, Жидо [78]), то йордановы банаховы алгебры и, тем более пространства с порядковой единицей, стали изучаться сравнительно недавно [2],[36], [63] . Двойственным объектом для всех этих пространств являются их пространства состояний, представляющие собой выпуклые компактные множества. Поэтому исследование многих вопросов сводится к изучению соответствующих выпуклых множеств или пространств с базовой нормой.

Настоящая работа посвящена исследованиям по теории упорядоченных банаховых пространств с порядковой единицей и спектральной теории выпуклых множеств.

Хорошим введением в теорию пространств с порядковой единицей и с базовой нормой является книга Альфсена "Compact Convex Sets and Boundary Integrals" [33].

В работе [36] Альфсен и Шульц изучили дуальную пару - пространство с порядковой единицей и пространство базовой нормой и построили для них некоммутативную спектральную теорию. Аббати и Маниа [31] получили спектральную теорию для пространства с порядковой единицей в терминах F - проекторов, затем в работе [73] Рейдель получил спектральную теорию для пространства с порядковой единицей в терминах фундаментальных единиц. Последние две спектральные теории обобщают спектральную теорию Альфсена и Шульца.

Различные вопросы, связанные с пространствами с порядковой единицей и с базовой нормой рассматриваются в работах Эдвардса и Руттимана [58 - 60], Ш.А.Аюпова [4], Т.А.Сарымсакова и Н.П.Зимакова [2I],[22], Н.П.Зимакова [I5], Н.П.Зимакова и А.С.Халмухамедова [I6], О.Е.Тихонова [24],[25] и др.

Понятие проективной единицы и другие обобщения проекторов в операторных алгебрах играют основную роль в некоммутативной спектральной теории для упорядоченных пространств.

В диссертации мы приведем различные варианты таких обобщений, исследуем их взаимосвязь и выделим класс упорядоченных пространств, в которых все эти понятия совпадают (пространства, обладающие P - свойством). Помимо собственно спектральной теории, рассмотрение этих вопросов представляет интерес, также и для некоторых ее приложений (см., например, работу А.С.Холево [62], в которой дано чисто статистическое описание измерений наблюдаемых в квантовой механике).

Классификация алгебр фон Неймана по типам I , II , III , полученная Мюрреем и фон Нейманом [71] , сыграла важную роль в развитии теории алгебр фон Неймана. Аналогичная классификация слабо замкнутых йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (JW - алгебр), основанная на свойствах модулярности решетки проекторов, была построена Топпингом [80] .

Естественно ставится задача: для пространств с порядковой единицей построить классификацию по типам.

Один из подходов к решению этой задачи предложен в работах Чо-Хо-Чу и Райта [55] ,[56] , где дана глобальная классификация пространств с порядковой единицей на языке P - проекторов, основанная на свойствах существования центрального следа. В работе Стаси [77] изучены точки типа I в компактном выпуклом множестве.

Наша основная цель - построить классификацию для пространств с порядковой единицей по типам, основанную на свойствах модулярности решетки P - проекторов, и изучить связь с классификацией, построенной Чо-Хо-Чу и Райтом в работе [56].

Спектральные выпуклые множества представляют собой обобщение пространств состояний операторных алгебр. Они были рассмотрены в работах [37] ,[38] ,[39] ,[41] .

Мы изучим строение конечномерных спектральных выпуклых множеств и, в частности, опишем их в случае малых размерностей. Более подробно рассмотрен случай спектральных множеств, у которых грани образуют логику Яуха - Пирона.

Одной из главных задач в диссертации является проблема описания пространств состояний конечномерных йордановых алгебр и C^* - алгебр в классе спектральных выпуклых множеств.

В работах [37], [38], [39], [41], [44], [54], [65] найдены более или менее наглядные геометрические или физические условия на выпуклое множество, обеспечивающие его аффинную изоморфность пространству состояний C^* - алгебры или JB - алгебры (йордановой банаховой алгебры). Здесь мы исследуем геометрию так называемых проективных выпуклых множеств, изучим решетку их граней и найдем простые геометрические условия для того, чтобы конечномерное выпуклое множество было пространством состояний JB - алгебры, т.е. алгебры $\mathfrak{r}$ - чисел в смысле Йордана - фон Неймана - Вигнера [66].

Последний результат допускает также интересное толкование в терминах самодуальных конусов [47], [64].

Данная диссертация посвящена решению следующих проблем:

- описание дуальных пар, для которых совпадают различные понятия проекторов;
- описание конечномерных спектральных выпуклых множеств (малой размерности);
- классификация спектральных выпуклых множеств;
- характеризация пространств состояний и положительных конусов конечномерных йордановых алгебр.

Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на восемь параграфов и списка литературы.

В первой главе исследованы общие свойства пространств с порядковой единицей и с базовой нормой, а также соответствующих выпуклых множеств. Даны различные подходы к их классификации.

В первом параграфе приведены необходимые сведения из теории упорядоченных банаховых пространств с порядковой единицей и с базовой нормой в смысле работ Альфсена, Шульца [33 - 39].

В § I.2, частично носящем вводный характер, для пространств с порядковой единицей приведены различные обобщения понятия проектора и исследована их взаимосвязь. Выделен класс пространств, в которых все обобщения совпадают.

Пусть (A, e) - пространство с порядковой единицей, (V, K) - пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности. Обозначим через $\mathcal{P}(A)$ (соответственно $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{F}(K)$) множество всех P - проекторов в A (соответственно проективных единиц из A, проективных граней K).

Определение I.2.I. Будем говорить, что пространства (A, e) и (V, K) находятся в проективной двойственности, если выполнены два условия:

I) A - монотонно полно;

2) всякая выставленная грань K проективна.

О п р е д е л е н и е I.2.3. Говорят, что (A, e) и (V, K) находятся в с п е к т р а л ь н о й д в о й с т в е н н о с т и, если они находятся в проективной двойственности и любой элемент $a \in A$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где $a_+, a_- \in A^+$ и $a_+ \perp a_-$.

Когда (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности, как показано в работе [36], для пространства A с порядковой единицей e имеет место спектральная теорема, т.е. для любого $a \in A$ существует единственное спектральное разложение $\{e^a_\lambda\}$ такое, что $a = \int \lambda de^a_\lambda$, где справа стоит сходящийся по норме интеграл Римана-Стильтеса.

Пусть пространство A является монотонно полным пространством с порядковой единицей e, которое находится в отделимой порядковой и нормированной двойственности с пространством с базовой нормой (V, K).

Т е о р е м а I.2.6. Для элемента $p \in [0, e] = \{a \in A : 0 \leq a \leq e\}$ рассмотрим следующие свойства:

a. p - проективная единица;

в. $(\{p\}_\perp)^\perp \cap [0, e] = [0, p]$, $(\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [0, e] = [0, e-p]$;

c. p - является экстремальной точкой в $[0, e]$;

d. $[-p, p] \cap [-(e-p), e-p] = \{0\}$;

e. $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$.

Имеют место следующие импликации:

$$a. \Rightarrow b. \Rightarrow c. \Leftrightarrow d. \Rightarrow e.$$

Определение 1.2.7. Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e, обладает P - свойством, если для $p \in [0,e]$ из $[0,p] \cap [0,e-p] = \{0\}$ следует, что p - проективная единица (т.е. все свойства $a.$ – $e.$ эквивалентны).

Теорема 1.2.8. Рассмотрим следующие три условия на двойственность между (A,e) и (V,K):

(i) (A,e) и (V,K) находятся в спектральной двойственности;

(ii) A обладает P - свойством;

(iii) (A,e) и (V,K) находятся в проективной двойственности.

Тогда имеют место импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Следствие 1.2.10. Пусть пространство A конечномерно. A обладает P- свойством тогда и только тогда, когда (A,e) и (V,K) находятся в спектральной двойственности.

В § 1.3 введены некоторые классы выпуклых множеств, изучена их взаимосвязь и исследовано строение конечномерных спектральных выпуклых множеств.

Пусть K - выпуклое множество в некотором локально выпуклом хаусдорфовом вещественном пространстве V. Через $A = A^b(K)$ обозначим пространство всех ограниченных аффинных функций на K, с поточечным порядком. Если в качестве порядковой единицы взять функцию e, тождественно равную единице 1 на K, то (A, e) является пространством с порядковой единицей. При этом будем считать, что K регулярно вложено в V, т.е. (V, K) является пространством с базовой нормой и $A = V^*$.

Напомним, что выпуклое множество K называется проективным (соответственно, спектральным), если (A, e) и (V, K) находятся в проективной (соответственно спектральной) двойственности.

Состоянием на логике L называется отображение $\mu : L \longrightarrow [0,1]$ такое, что $\mu(\theta) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu(\vee x_\alpha) = \sum \mu(x_\alpha)$ для любого семейства $\{x_\alpha\}$ попарно ортогональных элементов из L. Состояние μ называется состоянием Яуха-Пирона, если для $x, y \in L$ из $\mu(x) = \mu(y) = 0$ следует, что $\mu(x \vee y) = 0$. Логика L называется логикой Яуха-Пирона, если все состояния на L являются состояниями Яуха - Пирона.

Определение I.3.5. Спектральное выпуклое множество K назовем множеством Яуха-Пирона, если логика $\mathcal{F}(K)$ его проективных граней, а значит и логики $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{U}(A)$, являются логиками Яуха - Пирона.

Определение I.3.6. Спектральное выпуклое множество K называется множеством Глисона, если всякое состояние на логике $\mathcal{U}(A)$ проективных единиц продолжается до $*$ -слабо непрерывного линейного функционала на A .

Т е о р е м а I.3.7. Рассмотрим следующие свойства спектрального выпуклого множества

1) K - пространство всех нормальных состояний JBW - алгебры без прямых слагаемых типа I_2 ;

2) K - множество Глисона;

3) K - множество Яуха - Пирона.

Имеют место импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3).

Т е о р е м а I.3.13. Если спектральное выпуклое множество K имеет конечное число проективных граней, то K - конечномерный симплекс.

Далее полностью описаны спектральные выпуклые множества размерности ≤ 4 и указано, что среди них множествами Яуха - Пирона и, следовательно, множествами Глисона являются только симплексы.

Т е о р е м а I.3.15. Существуют спектральные выпуклые множества размерности $\geqslant 6$, отличные от симплексов, но проективные грани которых образуют логику Яуха - Пирона.

С л е д с т в и е I.3.16. Пусть K - конечномерное спектральное множество, такое, что $\dim K \leq 5$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

1) K - пространство всех нормальных состояний JBW - алгебры без прямых слагаемых типа I_2 ;

2) K – множество Глисона;

3) K – множество Яуха – Пирона;

4) K – симплекс.

В §§ 1.4 и 1.5 строится классификация для пространств с порядковой единицей и выпуклых множеств по типам, основанная на свойствах модулярности решетки P – проекторов и изучается ее связь с классификацией, построенной Чо-Хо-Чу и Райтом в работе [55],[56].

В § 1.4 предполагается, что пространство A с порядковой единицей находится в спектральной двойственности с пространством с базовой нормой.

Определение 1.4.2. Пространство A с порядковой единицей e, называется **коммутативным**, если любые два элемента $a, b \in A$ совместимы.

Определение 1.4.4. P – проектор $R: A \to A$ называется **коммутативным проектором**, если $R(A)$ коммутативно, следуя [56] P – проектор $R: A \to A$ называется **абелевым проектором**, если $R(A) = \operatorname{Im} R$ – векторная решетка и $R(A) = R(Z(A))$.

Теорема 1.4.5. Если P – проектор R абелев, то R является коммутативным проектором. Обратное неверно.

Определение 1.4.8. Пространство A с порядковой единицей e называется **типа** I^K, если для любого центрального проектора R в A существует коммутативный подпроектор.

Основным результатом этого параграфа является

Т е о р е м а 1.4.9. В каждом пространстве A с порядковой единицей существует центральный проектор H, такой что $H(A)$ имеет тип I^k, $H'(A)$ не содержит ненулевых коммутативных проекторов. Этот центральный проектор единственный и является наибольшим среди центральных проекторов H таких, что $H(A)$ имеет тип I^k.

Т е о р е м а 1.4.12. Пусть $R: A \to A$ центральный проектор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $R(A)$ - типа I;

2) $R(A)$ - типа I^k.

З а м е ч а н и е 6. Теоремы 1.4.5, 1.4.12 показывают, что хотя понятия коммутативного и абелева проекторов не совпадают, пространства типа I при обеих классификациях образуют один и тот же класс.

Выпуклое множество K называется т и п а I, если $A = A^b(K)$ является пространством типа I.

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 1.4.14. Конечномерное спектральное выпуклое множество K имеет типа I.

Пусть K - выпуклое множество в пространстве V. $A = A^b(K)$ - пространство с порядковой единицей e.

О п р е д е л е н и е [56] P - проектор $R: A \to A$ называется к о н е ч н ы м п р о е к т о р о м, если в $R(A)$ существует центральный след; пространство A с порядковой единицей называется к о н е ч н ы м, если тождественное отображение I является конечным проектором;

выпуклое множество K называется к о н е ч н ы м, если $A=A^{e}(K)$ конечно.

Понятия типа $I_{fin}, I_{\infty}, II_1, II_{\infty}, III$ для пространств с порядковой единицей определяются как обычно [56].

Т е о р е м а I.5.3 [56]. В произвольном пространстве A с порядковой единицей e, существуют пять ортогональных центральных проекторов R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 таких, что $R_1+R_2+R_3+R_4+R_5=I$ и

(i) $R_1(A)$ - типа I_{fin} ;

(ii) $R_2(A)$ - типа I_{∞} ;

(iii) $R_3(A)$ - типа II_1 ;

(iv) $R_4(A)$ - типа II_{∞} ;

(v) $R_5(A)$ - типа III .

Напомним [56], что выпуклое множество K имеет тип I_{fin} (соответственно $I_{\infty}, II_1, II_{\infty}, III$), если $A=A^{e}(K)$ является пространством типа I_{fin} (соответственно $I_{\infty}, II_1, II_{\infty}, III$).

С л е д с т в и е I.5.4. Конечномерное спектральное выпуклое множество K имеет тип I_{fin} .

З а м е ч а н и е 7. Утверждение следствия I.5.4 не верно для произвольного конечномерного выпуклого множества, поскольку имеются примеры конечномерных множеств типа II (см. пример I.4.15).

Определение 1.5.9. Пространство A с порядковой единицей e, называется модулярным (соответственно локально модулярным), если I является модулярным проектором (соответственно, если в A существует модулярный проектор с центральным носителем, равным I). Центральный проектор $R : A \longrightarrow A$ называется локально модулярным, если $R(A)$ является локально модулярным.

Определение 1.5.11. Пространство A с порядковой единицей e, называется собственно немодулярным, если оно не содержит ненулевых центральных модулярных проекторов; чисто немодулярным, если оно не содержит ненулевых модулярных проекторов; типа II^M, если оно локально модулярно и не содержит ненулевых абелевых проекторов.

Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e, имеем

(i) тип I^M_{fin}, если оно модулярно и типа I ;

(ii) тип I^M_{∞}, если оно собственно немодулярно локально модулярно типа I ;

(iii) тип II^M_1, если оно модулярно и типа II^M ;

(iv) тип II^M_{∞}, если оно собственно немодуярно и типа II^M ;

(v) тип III^M, если оно чисто немодулярно.

Основной теоремой § 1.5 является

Т е о р е м а 1.5.12. В произвольном пространстве A с порядковой единицей e, существуют пять ортогональных центральных проекторов E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 таких, что $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = I$ и

(i) $E_1(A)$ – типа I^M_{fin};

(ii) $E_2(A)$ – типа I^M_∞;

(iii) $E_3(A)$ – типа II^M_1;

(iv) $E_4(A)$ – типа II^M_∞;

(v) $E_5(A)$ – типа III^M.

Глава II посвящена исследованию возможности введения йордановой структуры на пространстве с порядковой единицей: описана геометрия выпуклого множества состояний и конуса положительных элементов конечномерных йордановых алгебр.

В § 2.1 рассматриваются изометрии пространств с порядковой единицей в спектральной двойственности и показана корректность вопроса о йордановой структуре пространства.

В этом параграфе, говоря о пространстве с порядковой единицей, будем предполагать, что оно находится в спектральной двойственности с некоторым пространством с базовой нормой.

Следующая теорема обобщает теорему Райта и Янгсона [82] об изометрии йордановых алгебр.

Т е о р е м а 2.1.4. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) – пространства с порядковой единицей, φ – сюрьективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2 такое, что $\varphi(e_1) = e_2$. Тогда $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}$ для любого $a \in A_1$.

Здесь $a^{(2)}$ – квадрат элемента $a \in A$ в смысле функционального исчисления на A [36].

С л е д с т в и е 2.1.6. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) – пространства с порядковой единицей, φ – сюръективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2, такое, что $\varphi(e_1) = e_2$. Пространство A_1 есть йорданова банахова алгебра тогда и только тогда, когда A_2 йорданова банахова алгебра.

В § 2.2 в классе компактных выпуклых множеств охарактеризованы те, которые аффинно гомеоморфны пространству состояний конечномерной JB – алгебры.

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех положительных линейных операторов на A таких, что $Se = e$ и $ST = TS$ для всех $T \in O(A)$; где $O(A)$ – множество всех порядково ограниченных операторов в A. Положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{ S_p = 2(P + P') - I,\ p \in \mathcal{P}(A) \}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2.1. Элемент $\tau \in K$ назовем с л е д о м, если $S_p^* \tau = \tau$ для всех $p \in \mathcal{P}(A)$.

О п р е д е л е н и е 2.2.2. Выпуклое множество K

назовем **симметричным**, если $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}$, т.е. $S_{\rho} = 2(\rho + \rho') - I \geqslant 0$ для любого $\rho \in \mathcal{P}(A)$.

Напомним, что точка x называется **аффинно внутренней** для выпуклого множества K, если $x \in K$ и для каждого $y \in \mathrm{aff}(K)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[x, x+\varepsilon y] \subset K$, где $\mathrm{aff}(K)$ – аффинная оболочка выпуклого множества K. Множество аффинно внутренних точек множества K называется его **аффинной внутренностью** и обозначается через $\mathrm{ai}\,K$. Выпуклое множество называется **аффинно телесным**, если его аффинная внутренность непуста, т.е. $\mathrm{ai}\,K \neq \emptyset$.

Лемма 2.2.4. Пусть K – проективное аффинно телесное множество; тогда для любой точки его границы наименьшая проективная грань, содержащая эту точку, является собственной гранью в K.

Теорема 2.2.5. Пусть K – проективное аффинно телесное множество. Тогда

(i) всякая экстремальная точка K является проективной гранью;

(ii) проективная грань F в K минимальна тогда и только тогда, когда $F = \{\rho\}$, где ρ – экстремальная точка K.

Теорема 2.2.5 дает утвердительный ответ в аффинно телесном случае на вопрос, поставленный в замечании на стр.

504 в [39] : всякая ли экстремальная точка проективного компактного выпуклого множества является выставленной гранью?

Теорема 2.2.6. Пусть K - проективно, аффинно телесно, симметрично и не имеет отщепляемых граней. Если в K существует след, то он единственнен.

В частности, если K - пространство нормальных состояний алгебры фон Неймана или JBW - алгебры, то отсутствие у K отщепляемых граней означает, что рассматриваемая алгебра является фактором. Таким образом, теорема I.2.6 дает новое доказательство следующего известного результата в случае аффинно телесного пространства состояний.

Следствие 2.2.7. Если на JBW - факторе (или W^* - факторе) существует следовое состояние, то оно единственно.

Определение 2.2.8. Выпуклое множество K назовем модулярным, если $\mathcal{F}(K)$ является модулярной решеткой.

Основной теоремой в § 2.2 является

Теорема 2.2.I0. Конечномерное компактное выпуклое множество K аффинно изоморфно и гомеоморфно пространству состояний JB - алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$i)$ K - проективно;

$ii)$ K - симметрично;

$iii)$ K - модулярно.

Последний параграф - 2.3 посвящен характеризации положительных конусов конечномерных йордановых алгебр.

Пусть H - конечномерное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$, H^+ - самодуальный конус в H , $\mathfrak{D}(H^+)$ - множество дифференцированный конуса H^+ , т.е.

$$\mathfrak{D}(H^+)=\{\delta\in L(H)/e^{t\delta}H^+\subset H^+ \text{ для всех } t\in\mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(H^+)_{SA}$ множество всех самосопряженных операторов из $\mathfrak{D}(H^+)$, через $Fac(H^+)$ - множество всех граней H^+ .

Конус H^+ называется симметричным, если $U_F=2(P_F+P_{F^\perp})-I\geq\theta$ для любого $F\in Fac(H^+)$; модулярным, если решетка $\mathcal{F}(H^+)$ является модулярной решеткой.

Основной теоремой в § 2.3 является

Теорема 2.3.2. Пусть H^+ самодуальный конус в конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H . Тогда $\mathfrak{D}(H^+)_{SA}$ совпадает с конусом положительных элементов JB - алгебры тогда и только тогда, когда выполне следующие условия:

(i) H^+ - симметричен;

(ii) H^+ - модулярен.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [83 - 90]. В работе [83] основной результат получен совместно с М.А.Бердикуловым. Идея рассмотрения множеств Глисона в [86], доказательства теоремы 3 в [87] и теоремы 2 в [88] принадлежит Ш.А.Аюпову, остальные результаты - автору. В статьях [89], [90] Ш.А.Аюпову и Б.Иокуму принадлежит общая постановка задач; лемма I [89] принадлежит Ш.А.Аюпову; идея доказательства основной теоремы [90] принадлежит Б.Иокуму, остальные результаты получены диссертантом.

Результаты диссертации докладывались на городском семинаре при кафедре функционального анализа в ТашГУ им.В.И.Ленина под руководством академика АН УзССР Т.А.Сарымсакова (1987 - 1989 гг.), на семинаре "Операторные алгебры и их приложения" под руководством профессора Ш.А.Аюпова в Институте математики имени В.И.Романовского АН УзССР (1986 - - 1989 гг.), на конференциях молодых ученых ТашГУ (1987 г.), на ежегодных конференциях молодых ученых Института математики АН УзССР (1987, 1988 гг.), на семинаре "Алгебраические методы в квантовой и классической статистике в МИ АН СССР им. В.А.Стеклова под руководством профессора Холево А.С. (1989 г.).

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность своему научному руководителю Шавкату Абдуллаевичу Аюпову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь при работе над диссертацией.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВА АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ НА СПЕКТРАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

§ I.I. Предварительные сведения

В этом параграфе мы введем исходные понятия и обозначения, которые будут использоваться во всей диссертации.

Пусть A -упорядоченное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Положительный элемент e называется порядковой единицей, если для любого $a \in A$ существует $\lambda \in \mathbb{R}^+$ такое, что $-\lambda e \leq a \leq \lambda e$. Нетрудно видеть, что, если A имеет порядковую единицу, то конус положительных элементов A^+ является порождающим (воспроизводящим), т.е. $A = A^+ - A^+$. В этом случае порядок на A называется архимедовым, если из $na \leq e$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ следует, что $a \leq 0$. Архимедовость позволяет ввести порядковую норму в

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leq a \leq \lambda e\}. \tag{I.I}$$

Определение I.I.I. Пространством с порядковой единицей называется пара (A, e), где A - архимедово упорядоченное векторное пространство с фиксированной порядковой единицей и порядковой нормой (I.I).

Пусть V - упорядоченное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Подмножество $K \subset V$ называется **в ы п у к л ы м**, если для каждой пары точек $x_1, x_2 \in K$ отрезок

$$[x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)\} \tag{I.2}$$

содержится в K. Выпуклое множество K в V называется **р а д и а л ь н о к о м п а к т н ы м**, если $K \cap L$ является замкнутым ограниченным сегментом для любой прямой L, проходящей через нулевой элемент V. Выпуклое подмножество K гиперплоскости $H \subset V$, не проходящей через начало называется базой для конуса V^+, если

$$V^+ = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K .$$

О п р е д е л е н и е I.I.2. **П р о с т р а н с т в о с б а з о в о й н о р м о й** - это пара (V, K), где V - упорядоченное векторное пространство с воспроизводящим конусом V^+, имеющим базу K, причем множество $B = \operatorname{conv}(K \cup -K)$ радиально компактно и в V введена базовая норма

$$\|\rho\| = \inf\{\lambda \geq 0 : \rho \in \lambda B\} \tag{I.3}$$

здесь $\operatorname{conv} X$ означает выпуклую оболочку множества X в V.

Пусть (A, e) - пространство с порядковой единицей, (V, K)- пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности относительно билинейной формы $\langle\, ,\, \rangle$ т.е. для $a \in A$, $\rho \in V$

$$\begin{cases} a \in A^{+} \Longleftrightarrow \langle a, \rho \rangle \geqslant 0 & \text{для всех } \rho \in V^{+}, \\ \rho \in V^{+} \Longleftrightarrow \langle a, \rho \rangle \geqslant 0 & \text{для всех } a \in A^{+}, \end{cases} \qquad (\mathrm{I}.4)$$

$$\begin{cases} \|a\| \leq 1 \Longleftrightarrow |\langle a, \rho \rangle| \leq 1, & \text{когда } \|\rho\| \leq 1, \\ \|\rho\| \leq 1 \Longleftrightarrow |\langle a, \rho \rangle| \leq 1, & \text{когда } \|a\| \leq 1. \end{cases} \qquad (\mathrm{I}.5)$$

Напомним, что слабая топология $\sigma(A, V)$ - это слабейшая топология на A , для которой линейные формы $a \to \langle a, \rho \rangle, \rho \in V$ непрерывны.

В дальнейшем под проектором будем понимать линейное, положительное, слабо (т.е. $\sigma(A, V)$) - непрерывное отображение $R: A \to A$, удовлетворяющее условию $R^2 = R$. Через $R(A) = \operatorname{Im} R$ (соответственно $R^{-1}(\theta) = \operatorname{Ker} R$) обозначим его образ (соответственно ядро). Сопряженное к R отображение, которое действует в V , обозначим через R^* (в силу двойственности $\langle Rx, \rho \rangle = \langle x, R^*\rho \rangle$). Положим

$$\operatorname{Im}^{+} R = \operatorname{Im} R \cap A^{+}, \ \operatorname{Ker}^{+} R = \operatorname{Ker} R \cap A^{+}.$$

О п р е д е л е н и е I.I.3. Проектор $R: A \to A$ с единичной нормой называется P - п р о е к т о р о м, если существует единственный проектор $R': A \to A$ с единичной нормой, такой, что

$$\mathrm{Im}^+ R = \mathrm{Ker}^+ R' \qquad \mathrm{Im}^+ R^* = \mathrm{Ker}^+ R'^*$$

$$\mathrm{Ker}^+ R = \mathrm{Im}^+ R' \qquad \mathrm{Ker}^+ R^* = \mathrm{Im}^+ R'^* . \tag{I.6}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(A)$ множество всех P - проекторов в A. Для $R, Q \in \mathcal{P}(A)$ положим $R \leqslant Q$, если $\mathrm{Im} R \subseteq \mathrm{Im} Q$. Тогда $\mathcal{P}(A)$ частично упорядочено относительно этого порядка. Очевидно, для любого $R \in \mathcal{P}(A)$: $\Theta \leqslant R \leqslant I$, где Θ - нулевое, I - тождественное отображения. Отображение $R \to R'$ называется ортодополнением в $\mathcal{P}(A)$ и P - проектор R' называется квазидополнением R.

В пространстве A элементы вида $u = Re$, $R \in \mathcal{P}(A)$ называются проективными единицами, их совокупность обозначим через $\mathcal{U}(A)$. В множестве $\mathcal{U}(A)$ рассмотрим порядок, индуцированный из A, и ортодополнение $Re \to e - Re$.

Напомним, что подмножество G выпуклого множества K называется гранью, если для $x, y \in K$, $\lambda \in (0,1)$ из $\lambda x + (1-\lambda) y \in G$ вытекает, что $x, y \in G$. Точка $z \in K$ называется экстремальной (крайней) точкой множества K, если $\{z\}$ является гранью: обозначим через $\partial_e K$ множество всех экстремальных (крайних) точек множества K. Грань G называется A - выставленной, если $G = \{\rho \in K : \langle a, \rho \rangle = 0\}$ для некоторого $a \in A^+$. Если при этом $a \in \mathcal{U}(A)$, т.е. $a = Re$ для некоторого P - проектора $R \in \mathcal{P}(A)$, то грань G называется A-проективной. Другими словами, A-проективные грани - это грани вида $G = \mathrm{Im}^+ R \cap K = F_R$, $R \in \mathcal{P}(A)$. Через $\mathcal{F}_A(K)$ обозначим множество всех A-проективных граней K и введем в нем порядок по включению и операцию ортодополнения $F_R \to F_{R'} = F_R^{\#} = \mathrm{Im}^+ R'^* \cap K$, где R' - квазидополнение R. A-Проективная грань $F_R^{\#}$ называется квазидополнением F_R.

Имеет место следующий результат [36].

Т е о р е м а I.I.4. Множества $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{F}_A(K)$ канонически порядково изоморфны. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}(A) \arrow[dr, "T_2"] & \\ \mathcal{F}_A(K) \arrow[ur, "T_1"] & & \mathcal{U}(A) \arrow[ll, "T_3"'] \end{tikzcd}$$

сохраняющих порядок отображений, где

$T_1 : F_R \to R$, т.е. $T_1(F_R)(a) = \sup\{b \in A^+ : b \leq a$ на F_R, $b = 0$ на $F_R^{\#}\} = \inf\{b \in A^+ : b \geq a$ на F_R, $b = 0$ на $F_R^{\#}\}$;

$T_2 : R \to Re$;

$T_3 : Re \to F_R = \{\rho \in K : \langle Re, \rho \rangle = 1\}$.

Напомним, что P - проекторы $R, Q \in \mathcal{P}(A)$ (соответственно проективные единицы $Re, Qe \in \mathcal{U}(A)$, проективные грани $F_R, F_Q \in \mathcal{F}_A(K)$ называются о р т о г о н а л ь н ы м и, если $RQ = \Theta$ (соответственно $Re + Qe \leq e$, $F_Q \subseteq F_R^{\#}$).

P - проектор R и элемент $a \in A$ называется совместимыми, если $Ra + R'a = a$; обозначим это через $R \leftrightarrow a$. Два P - проектора $R, Q \in \mathcal{P}(A)$ называются совместимыми, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий

(i) $RQ \in \mathcal{P}(A)$;

(ii) $R \leftrightarrow Qe$;

(iii) $RQ = QR$.

Аналогично определяются совместимость проективных граней и проективных единиц. Например, если $F = F_R - A$ - проективная грань, $a + A^+$, то $a \leftrightarrow F$ означает, что a можно разложить в сумму двух положительных $a_1, a_2 \in A^+$, причем $a_1 = 0$ на $F^\#$, $a_2 = 0$ на F.

Пусть K - выпуклое множество в некотором локально выпуклом хаусдорфовом вещественном пространстве V. Через $A = A^b(K)$ обозначим пространство всех ограниченных аффинных функций на K, с поточечным порядком. Если в качестве порядковой единицы взять функцию e, тождественно равную единице 1 на K, то (A, e) является пространством с порядковой единицей.

Будем говорить, что K регулярно вложено в V, если (V, K) является пространством с базовой нормой и $A = V^*$.

Замечание 0. В дальнейшем, мы не будем каждый раз оговаривать, что данное свойство связано с пространством A, и вместо слов " A - выставленная", " A - проективная", $\mathcal{F}_A(K)$ и т.д. будем писать просто "выставленная", "проективная", $\mathcal{F}(K)$ и т.д.

§ I.2. Проективность и спектральность дуальных пар и выпуклых множеств. Характеризация проективных единиц

В работе А.С.Холево [62] в рамках общего статистического (выпуклого) подхода было дано чисто статистическое описание измерений наблюдаемых в квантовой механике. Было показано, что статистические модели могут быть заданы с помощью дуальных пар $\langle (A, e), (V, K) \rangle$, где (A, e) пространство с порядковой единицей, (V, K) пространство с базовой нормой. В терминах этих пространств были описаны простые и экстремальные измерения и тесты, установлено, что всякий экстремальный тест является простым и доказано, что понятия простого и экстремального измерений совпадают тогда и только тогда, когда пространство (A, e) обладает свойством

$$[0, x] \cap [0, e-x] = \{0\} \Rightarrow [-x, x] \cap [-(e-x), e-x] = \{0\}. \qquad (*)$$

Рассмотренное в этом параграфе P - свойство влечет свойство $(*)$. Здесь мы покажем, что P - свойство слабее условия "спектральной двойственности" и сильнее условия "проективной двойственности" между (A, e) и (V, K).

Пусть (A, e) - пространство с порядковой единицей, (V, K) - пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности.

Как и в § I.I обозначим через $\mathcal{P}(A)$ (соответственно $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{F}(K)$) множество всех P - проекторов в A (соответственно проективных единиц из A , проективных граней K).

Элементы $a, b \in A^+$ называются ортогональными $(a \perp b)$, если существует проективная грань F базы K , такая, что $\langle a, \rho \rangle = 0$ и $\langle b, \sigma \rangle = 0$ для всех $\rho \in F$ и $\sigma \in F^{\#}$.

Пространство A с порядковой единицей e , называется монотонно полным, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{a_\alpha\}$ из A существует точная верхняя грань $a = \sup a_\alpha$.

Определение I.2.I. Будем говорить, что пространства (A, e) и (V, K) находятся в проективной двойственности, если выполнены два условия

I) A - монотонно полно;

2) всякая выставленная грань K проективна.

(Ср. условия (4.I) и (4.2) из [36]).

Имеет место следующий результат (см. [36 , следствия 2.I8, I2.5]).

Теорема I.2.2. Если (A, e) и (V, K) находятся в проективной двойственности, то множества $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{F}(K)$ являются попарно порядковыми изоморфными полными ортомодулярными решетками (квантовыми логиками).

О п р е д е л е н и е I.2.3. Говорят, что (A, e) и (V, K) находятся в с п е к т р а л ь н о й д в о й с т в е н н о с т и, если они находятся в проективной двойственности и любой элемент $a \in A$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где $a_+, a_- \in A^+$ и $a_+ \perp a_-$.

О п р е д е л е н и е I.2.4. Выпуклое множество K называется п р о е к т и в н ы м (соответственно с п е к т р а л ь н ы м), если (A, e) и (V, K) находятся в проективной (соответственно спектральной) двойственности.

Если (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности, то как показано в работе [36], для пространства A имеет место спектральная теорема.

Напомним, что семейство $\{e_\lambda\}_{\lambda \in R}$ проективных единиц в A называется спектральным, если

(i) $e_\lambda \le e_\mu$, для $\lambda \le \mu$;

(ii) $\inf\limits_\lambda e_\lambda = 0$, $\sup\limits_\lambda e_\lambda = e$;

(iii) $e_\lambda = \inf\limits_{\mu > \lambda} e_\mu$.

Спектральное семейство $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ называется с п е к т р а л ь н ы м р а з л о ж е н и е м для элемента $a \in A$, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ проективная грань F_λ, соответствующая e_λ, совместима с a и удовлетворяет условиям: $a \le \lambda$ на F_λ, $a > \lambda$ на $F_\lambda^\#$.

Имеет место следующий результат (см. [36, теоремы 6.8, 7.6].

Т е о р е м а I.2.5. Пусть K спектральное выпуклое множество. Тогда для любого $a \in A$ существует единственное спектральное разложение $\{e_\lambda\}_{\lambda \in R}$ такое, что $a = \int \lambda\, de_\lambda$, где справа стоит сходящийся по норме интеграл Римана-Стильтеса.

Две проективные единицы называются с о в м е с т и м ы м и, если соответствующие им P - проекторы совместимы.

Пусть a, b - элементы A, $\{e^a_\lambda\}$ и $\{e^b_\mu\}$ - их спектральные семейства. Два элемента a и b называются с о в м е с т и м ы м и, если все пары e^a_λ, e^b_μ совместимы.

Напомним, что замкнутое по норме подпространство $M \subset A$ называется а б е л е в ы м, если оно замкнуто относительно отображения $a \longrightarrow a^{(2)} = \int \lambda^2 de^a_\lambda$, и любые два элемента в M совместимы.

Введем следующие обозначения: $M(a)$ - наименьшее слабо замкнутое абелево подпространство A, содержащее a и e; $[a,b] = \{x \in A : a \le x \le b\}$ для элементов $a, b \in A$ с $a \le b$. Пусть $B \subset A$, $C \subset V$. Положим $B_\perp = \mathrm{Lin}\{\rho \in V^+ : \langle a, \rho\rangle = 0$ для любого $a \in B \cap A^+\}$, $C^\perp = \mathrm{Lin}\{a \in A^+ : \langle a, \rho \rangle = 0$ для любого $\rho \in C \cap V^+\}$.

Пусть пространство A является монотонно полным пространством с порядковой единицей e, которое находится в отделимой порядковой и нормированной двойственности с пространством с базовой нормой (V, K).

Теорема I.2.6. Для элемента $p \in [0, e] = \{a \in A : 0 \le a \le e\}$ рассмотрим следующие свойства:

a. p - проективная единица;

в. $(\{p\}_\perp)^\perp \cap [0,e] = [0,p]$, $(\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [0,e] = [0,e-p]$;

c. p - является экстремальной точкой в $[0,e]$;

d. $[-p,p] \cap [-(e-p), e-p] = \{0\}$;

e. $[0,p] \cap [0,e-p] = \{0\}$.

Имеют место следующие импликации:

$$a. \Rightarrow b. \Rightarrow c. \Leftrightarrow d. \Rightarrow e.$$

Доказательство "$a. \Rightarrow b$". Если p - проективная единица, т.е. $p = Re$, где $Re \in \mathcal{P}(A)$, то $p = \sup\{a \in A : 0 \le a \le e, \langle a, \rho \rangle = 0$ для любого $\rho \in F_R\}$, где $F = \{\rho \in K : \langle p, \rho \rangle = 0\}$ [36, теорема 2.I7]. Очевидно, что $(\{p\}_\perp)^\perp = \operatorname{Im} R$ и $[0,p] = (\{p\}_\perp)^\perp \cap [0,e]$. Аналогично $[0,e-p] = (\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [0,e]$.

"$b. \Longrightarrow c.$" вытекает из предложений 2.I, 2.6 [32] .

"$c. \Longleftrightarrow d.$" эквивалентность доказана в [62, лемма 3]

"$d. \Longrightarrow e.$" очевидно.

Теорема полностью доказана.

В общем случае условия в теореме I.2.6 не эквивалентны. Приведем некоторые примеры.

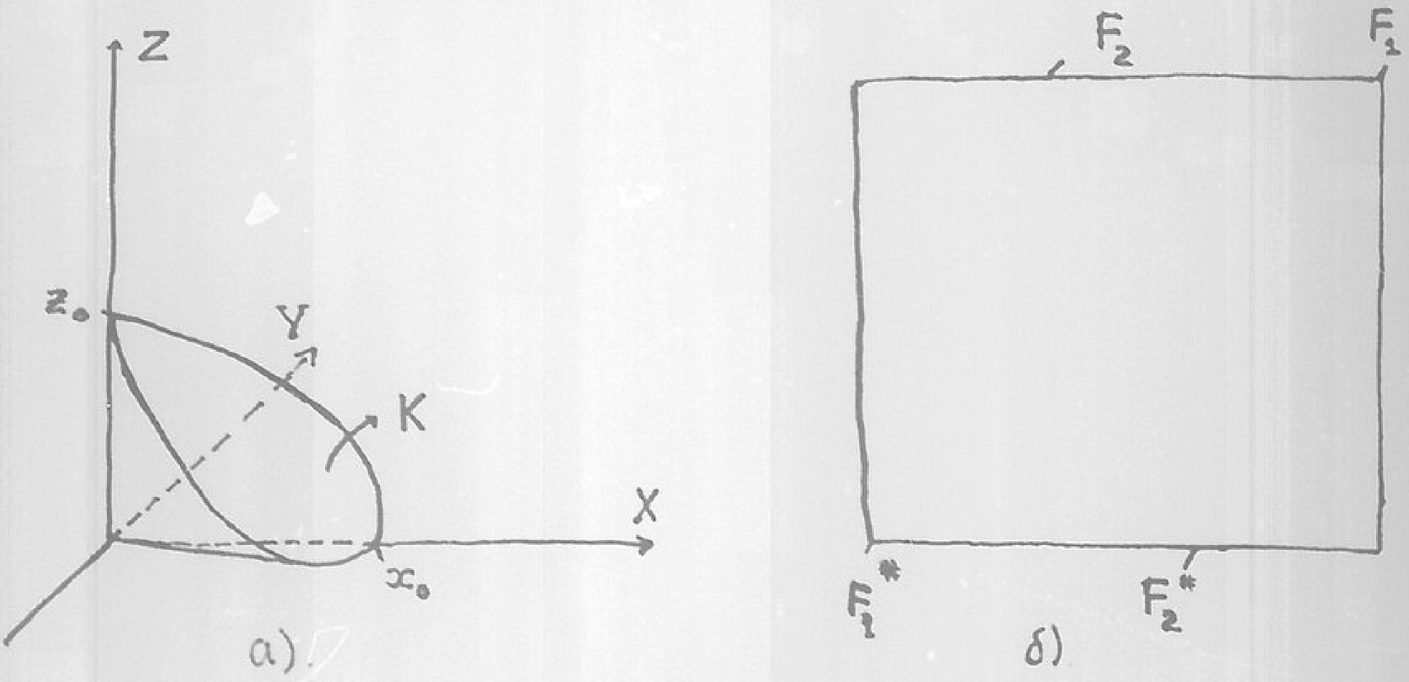

Рисунок I

"$b. \not\Longrightarrow a.$" В качестве K рассмотрим выпуклое множество, изображенное на рисунке I, а). Тогда $V=\mathbb{R}^3$, (V,K) - является пространством с базовой нормой и $(A^b(K),e)$ - пространство с порядковой единицей, где $A^b(K)$ - пространство всех ограниченных аффинных функций на K , e - функция, тождественно равная единице на K . Рассмотрим элемент $p\in[0,e]$, такой, что $p(x_0)=0$ и $p(z_0)=1$.

Легко видеть, что $[0,p] = (\{p\}_\perp)^\perp \cap [0,e]$,

$[0,e-p] = (\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [0,e]$, т.е. p удовлетворяет условию $b.$. Однако p не является проективной единицей (см. [36 стр. I5]).

"$c. \not\Rightarrow b.$" Пусть $A = A^b(K)$, где K - квадрат на плоскости (см. рисунок I, б)). Рассмотрим аффинную функцию $p \in [0,e]$, заданную как $p(F_1) = 0$, $p(F_1^{\#}) = 1$.

Легко видеть, что p удовлетворяет условию $c.$. Покажем, что p не удовлетворяет условию $b.$. Определим $q \in [0,e]$, положив $q(F_2) = 0$, $q(F_2^{\#}) = 1$. Тогда очевидно,

$$q \in (\{p\}_\perp)^\perp \cap [0,e] \text{ , но } q \notin [0,p].$$

"$e. \not\Rightarrow d.$" (см. [73]). Пусть A линейное пространство всех полиномов вида $ax^3 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ на интервале $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. Тогда A с поточечным порядком образует упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей $e(x) = 1$ (см. [73, предложение I]). Пусть $p(x) = x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Очевидно, что $p \in [0,e]$. Однако, p не является экстремальной точкой в $[0,e]$. Действительно, пусть $s(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ и $t(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. Тогда $s,t \in [0,e]$ и $p = \frac{1}{2}(s+t)$.

Теперь покажем, что $[0,p]\cap[0,e-p]=\{0\}$. Пусть $h(x)=ax^3+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ такой полином, что $h\in[0,p]\cap[0,e-p]$. Имеем $p(-1)=0$, $(e-p)(1)=0$. Поэтому $h(-1)=h(1)=0$. Следовательно, $-a-b+c=0$ и $a+b+c=0$. Отсюда $a=-b$ и $c=0$, т.е. $h(x)=ax(x^2-1)$. Если $a\neq 0$, то найдется $x\in[-1,1]$ такой, что $h(x)<0$, что противоречит условию $h\in[0,e]$. Таким образом, $a=0$, т.е. $h=0$. Следовательно, $[0,p]\cap[0,e-p]=\{0\}$, а значит p удовлетворяет условию е..

Введем в рассмотрение класс пространств, в которых все условия на элемент $p\in[0,e]$ в теореме I.2.6 эквивалентны, в частности, обладающих свойством ($*$).

О п р е д е л е н и е I.2.7. Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e, обладает P - с в о й с т в о м, если для $p\in[0,e]$ из $[0,p]\cap$ $\cap[0,e-p]=\{0\}$ следует, что p - проективная единица.

Помимо условий а. - е. в теореме I.2.6 есть еще много других условий на элемент $p\in[0,e]$, позволяющих построить соответствующую спектральную теорию в (A,e) (см. [31, 32, 46, 73]). Однако в пространствах, обладающих P -

свойством, все эти условия совпадают, т.е. все сводится к спектральной теории Альфсена и Шульца [36]. Поэтому естественно попытаться выяснить, насколько широк класс пространств, обладающих P - свойством.

Теорема I.2.8. Рассмотрим следующие три условия на двойственность между (A, e) и (V, K):

(i) (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности;

(ii) A обладает P - свойством;

(iii) (A, e) и (V, K) находятся в проективной двойственности.

Тогда имеют место импликации $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Пусть $p \in [0, e]$, такой, что $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Так как (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности, то абелево подпространство $M(p)$ изометрически и порядково изоморфно $C(X)$, где X - некоторый гиперстоуновский компакт. В силу теоремы 40.2 [70] следует, что $p^{(2)} = p$. Из предложения 8.7 [36] вытекает, что p является проективной единицей. Следовательно, A обладает P - свойством.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Пусть F - выставленная грань базы K. Покажем, что существует элемент $p \in [0, e]$, такой, что $F = \{\rho \in K : \langle \rho, p \rangle = 0\}$ и $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$.

Так как F - выставленная грань K, то $F=\{\rho\in K:$ $\langle b,\rho\rangle=0\}$ для некоторого $b\in[0,e]$. Рассмотрим множество $F^{\circ}=\{a\in A:\langle a,\rho\rangle=0$ для любого $\rho\in F\}$. Так как F - выставленная грань и A - монотонно полно, то F° - является монотонно полным порядковым идеалом в A и для произвольной цепи $\{q_{\alpha}\}\subset$ $\subset F^{\circ}\cap[0,e]$ существует $\sup\{q_{\alpha}\}=q\in F^{\circ}\cap[0,e]$. По лемме Цорна, существует максимальный элемент $p\in F^{\circ}\cap[0,e]$ такой, что $b\leq p$. Теперь покажем, что $[0,p]\cap[0,e-p]=$ $=\{0\}$. Пусть $x\in[0,p]\cap[0,e-p]$. Тогда $0\leq x\leq p$, $0\leq x\leq e-p$. Отсюда следует, что $x+p\in F^{\circ}$ и $0\leq x+p\leq e$. Следовательно, $x+p\in F^{\circ}\cap[0,e]$. В силу максимальности p имеем $x+p=p$. Таким образом $x=0$, т.е. $[0,p]\cap[0,e-p]=\{0\}$. Так как пространство A обладает P - свойством, то p - проективная единица. Следовательно, (A,e) и (V,K) находятся в проективной двойственности. Теорема доказана.

Отметим, что импликация $(iii)\Longrightarrow(ii)$ в общем случае не верна.

П р и м е р I.2.9 (см. [36, предложение 6.II]).

Пусть $A=l_2=\{a:a=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\alpha_i\in\mathbb{R},$ $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha_i^2<+\infty$ и $V=\{\rho:\rho=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,$

$0,0\ldots),\beta_i\in\mathbb{R}\}$ – пространство финитных последовательностей. И пусть $e=(1,0,0,\ldots)$ и $K=\{\rho=(\beta_i)\in V:$

$$\beta_0=1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2\leq 1\}.$$

Тогда (A,e) является пространством с порядковой единицей с положительным конусом:

$$A^+=\{a\in A:\alpha_0>0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\leq\alpha_0^2\}$$ и нормой:

$$\|a\|=|\alpha_0|+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ для $a\in A$. Далее (V,K) является пространством с базовой нормой с положительным конусом: $V^+=\{\rho\in V:\beta_0>0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2\leq\beta_0^2\}$

и нормой: $\|\rho\|=max\{|\beta_0|,\ \left(\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\}$

для $\rho\in V$.

Пространства (A,e) и (V,K) находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности относительно формы

$$\langle a,\rho\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\beta_i .$$

Очевидно, что $A=V^*$, (т.е. пространство A является монотонно полным), причем (A,e) и (V,K) находятся в проективной двойственности (см. [36, предложение 6.II]).

Покажем, что пространство A, не обладает P - свойством. В качестве p возьмем элемент $(\frac{1}{2}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in A$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \frac{1}{4}$ и $\alpha_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $e - p = (\frac{1}{2}, -\alpha_1, -\alpha_2, \ldots)$.

В силу предложения 6.II из [36], p не является проективной единицей, покажем однако, что $[0,p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Пусть $b \in [0,p] \cap [0, e-p]$. Тогда

$$b = (\tfrac{1}{2} - \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \ldots), \quad 0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}.$$

Так как $p - b \geqslant 0$ и $e - p - b \geqslant 0$, то $p - b = (\alpha, \alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \ldots) \in [0,e]$, $e - p - b = (\alpha, -\alpha_1 - \gamma_1, -\alpha_2 - \gamma_2, \ldots) \in [0,e]$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i - \gamma_i)^2 \leq \alpha^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \gamma_i)^2 \leq \alpha^2$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 \leq \alpha^2,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 \leq \alpha^2$$

или

$$\frac{1}{4} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 \leq \alpha^2,$$

$$\frac{1}{4} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 \leq \alpha^2.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{1}{2}+2\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i^2\le 2\alpha^2, \text{ т.е. } 2\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i^2\le 2\alpha^2-\frac{1}{2}.$$

Так как $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$, то $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i^2=0$, т.е.

$\gamma_i=0,\ \alpha=\frac{1}{2}$. Отсюда вытекает, что $b=0$, т.е.

$[0,p]\cap[0,e-p]=\{0\}$.

Вопрос об эквивалентности условий (i) и (ii) в теореме I.2.8 пока остается открытым. Из [36, предложение 8.7] и [39, теорема 2.2] вытекает

Следствие I.2.IO. (A,e) и (V,K) находятся в спектральной двойственности тогда и только тогда, когда A обладает P - свойством и любой элемент $a\in A$ представляется единственным образом в виде: $a=a_+-a_-$, где $a_+,a_-\in A^+$ и $a_+\perp a_-$.

В конечномерном случае имеет место следующий результат (см. [36, теорема 7.II]).

Теорема I.2.II. Пусть K - конечномерное компактное выпуклое множество. Следующие условия эквивалентны:

I) K - проективно;

2) K - спектрально.

Следствие I.2.I2. Пусть пространство A конечномерно. A обладает P - свойством тогда и только тогда, когда (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности.

Замечание I. Пары $\langle A, V \rangle$, где A - полное пространство с порядковой единицей, находящейся в порядковой и нормированной двойственности с пространством V с базовой нормой, возникают при статистической характеризации измерений наблюдаемых в квантовой механике. Отсылая за подробностями к [62] (см. также [26], [27]), напомним лишь, что в полной отделимой статистической модели $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ (где $\mathfrak{S}$ - множество состояний, $\mathfrak{M}$ - множество измерений) $\mathfrak{S}$ можно отождествить с базой K пространства V, множество тестов (измерений, принимающих два значения 0 и 1) с интервалом $[0, e]$ в A.

При этом измерению M с пространством исходов U (где U - измеримое пространство с σ - алгеброй измеримых подмножеств $B(U)$), соответствуют разложение единицы в A, т.е. вероятностная мера μ^M на $B(U)$ со значением в $[0, e]$. Через $\mathfrak{M}(U)$ обозначим множество измерений из $\mathfrak{M}$ с пространством исходов U.

Пользуясь терминологией работы [62] тест $x \in [0, e]$ будем называть простым, если $[0, x] \cap [0, e-x] = \{0\}$. Измерение $M \in \mathfrak{M}(U)$ назовем простым, если $\mu^M(B) \in [0, e]$ является простым тестом для любого $B \in B(U)$. Измерение $M \in \mathfrak{M}(U)$ называется экстремальным, если оно является крайней точкой выпуклого множества $\mathfrak{M}(U)$. Тест $x \in [0, e]$ экстремален тогда, когда x является крайней точкой в $[0, e]$.

Следуя [32] и [69] тест $x \in [0, e]$ назовем эффектом решения (decision effect), если

$$[0,x] = (\{x\}_{\perp})^{\perp} \cap [0,e], \; [0,e-x] = (\{e-x\}_{\perp})^{\perp} \cap [0,e].$$

Таким образом тесты, удовлетворяющие условию в. теоремы I.2.6 - это эффекты решения, условию с. - это экстремальные тесты, условию е. - это простые тесты.

Из результатов работы [62] и теорем I.2.6, I.2.8 вытекают следующие утверждения.

Предложение I.2.13. Если пространство A обладает P - свойством, то понятия простого и экстремального измерений совпадают.

Предложение I.2.14. Всякий эффект решения является экстремальным тестом, всякий экстремальный тест является простым. Для того, чтобы все понятия совпадали с понятием проективной единицы в A необходимо, чтобы (A, e) и (V, K) находились в проективной двойственности, и достаточно, чтобы (A, e) и (V, K) находились в спектральной двойственности.

§ I.3 Множества Глисона и Яуха-Пирона. Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах

В этом параграфе мы введем некоторые классы спектральных выпуклых множеств, изучим их взаимосвязь, а также исследуем строение конечномерных спектральных выпуклых множеств.

Примерами спектральных выпуклых множеств являются пространства всех состояний JB - алгебр и C^* - алгебр, пространства нормальных состояний JBW - алгебр и алгебр фон Неймана [36, §§ II, I2] . Среди спектральных выпуклых множеств пространства нормальных состояний JBW - алгебр могут быть выделены следующим образом.

Т е о р е м а I.3.I [65]. Выпуклое множество K аффинно изоморфно пространству нормальных состояний JBW-алгебры тогда и только тогда, когда оно спектрально и эллиптично, т.е. $R(Q-Q')R'=\theta$ для всех $R, Q \in \mathcal{P}(A)$.

Приведем примеры спектральных выпуклых множеств, наиболее часто встречающиеся в диссертации.

П р и м е р I.3.2 Пусть K_1 - выпуклое множество, изображенное на рисунке 2, причем экваториальное сечение этого множества является треугольником. Непосредственно проверяется, что K_1 - является спектральным выпуклым множеством (см. [36 , § I0]).

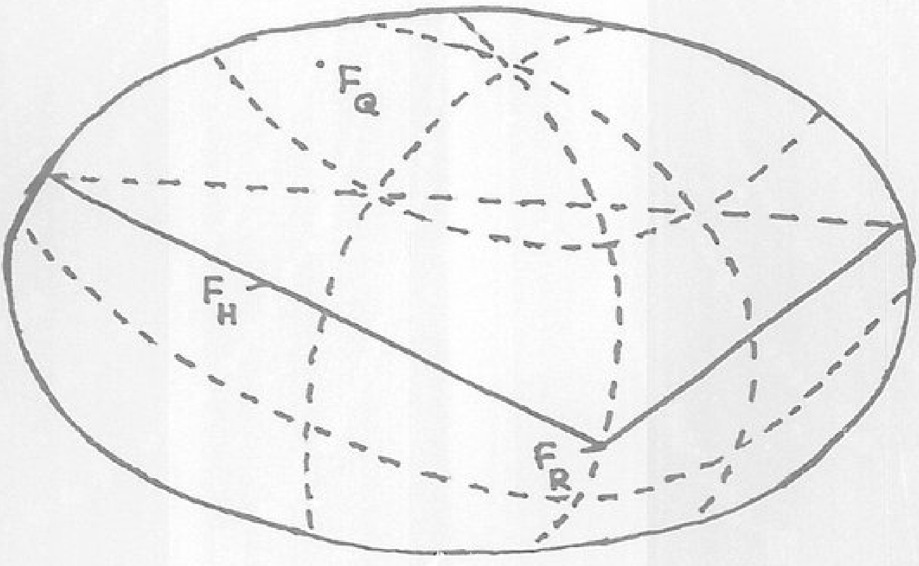

Рисунок 2

Пример I.3.3 Пусть K_2 - единичный шар L_p $(1<p<+\infty)$. K_2 - является спектральным выпуклым множеством (см. [36, теорема I0.3]).

Замечание 2. K_1 и K_2 $(p\neq 2)$ являются примерами спектральных выпуклых множеств, которые аффинно не изоморфны пространству нормальных состояний JBW - алгебр.

Напомним, что компактное выпуклое множество K называется симплексом Шоке, если пространство с базовой нормой $V=A(K)^*$ является векторной решеткой. Симплекс Шоке K называется симплексом Бауэра, если множество $\partial_e K$ его экстремальных точек замкнуто. Известно [36, теорема I0.II], что всякий симплекс Шоке является спектральным выпуклым множеством.

Замкнутая грань F выпуклого множества K называется о т щ е п л я е м о й (или д о п о л н я е м о й), если существует грань F' $(F \cap F' = \emptyset)$ такая, что K является прямой выпуклой суммой F и F', т.е. всякий элемент ρ можно единственным образом представить в виде $\rho = \lambda x + (1-\lambda) y$, где $\lambda \in [0,1], x \in F$, $y \in F'$. В этом случае K записывается как $K = F \oplus_c F'$. Из [36, предложения 5.4, 5.5, теорема IO.2[и [45, теорема 7.2] вытекает

Т е о р е м а I.3.4 Пусть K - спектральное выпуклое множество. Следующие условия эквивалентны:

(i) K - симплекс Шоке;

(ii) $A^b(K)$ - векторная решетка;

(iii) всякая замкнутая выставленная грань отщепляема;

(iv) изоморфные решетки $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{F}(K)$ являются булевыми алгебрами (т.е. дистрибутивными).

Напомним, что с о с т о я н и е м на логике L называется отображение $\mu : L \to [0,1]$ такое, что $\mu(0)=0$,

$$\mu(1)=1, \quad \mu(\bigvee_\alpha x_\alpha) = \sum \mu(x_\alpha)$$ для

любого семейства $\{x_\alpha\}$ попарно ортогональных элементов из L. Состояние μ называется с о с т о я н и е м Я у х а - П и р о н а, если для $x, y \in L$ из $\mu(x)=\mu(y)=0$ следует, что $\mu(x \vee y)=0$. Логика L называется л о г и к о й Я у х а - П и р о н а, если все состояния на L являются состояниями Яуха - Пирона.

Определение I.3.5. Спектральное выпуклое множество K назовем множеством Яуха-Пирона, если логика $\mathcal{F}(K)$ его проективных граней, а значит и логики $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{U}(A)$, являются логиками Яуха-Пирона.

Определение I.3.6 Спектральное выпуклое множество K называется множеством Глисона, если всякое состояние на логике $\mathcal{U}(A)$ проективных единиц продолжается до $*$ - слабо непрерывного линейного функционала на A.

Так как множество K можно отождествить с пространством всех $*$ - слабо непрерывных положительных линейных функционалов, принимающих значение 1 на e, то множества Глисона - это такие спектральные множества, для которых всякое состояние на $\mathcal{U}(A)$ задается некоторой точкой из K.

В [4] доказано, что K - множество Глисона тогда и только тогда, когда всякое состояние на логике $\mathcal{F}(K)$ проективных граней K имеет "барицентр" в K.

Теорема I.3.7 Рассмотрим следующие свойства спектрального выпуклого множества K:

I) K - пространство всех нормальных состояний JBW - алгебры без прямых слагаемых типа I_2;

2) K - множество Глисона;

3) K - множество Яуха-Пирона.

Имеют место импликации $1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3)$.

Доказательство 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из обобщения теоремы Глисона для мер на проекторах JBW - алгебр [I], [3], [5], [5I].

2) $\Longrightarrow$ 3). Достаточно доказать, что если μ - состояние на $\mathcal{U}(A)$ и $\{u_n\}$ - последовательность проективных единиц из $\mathcal{U}(A) \subset A$, с $\mu(u_n)=0$, то $\mu(\bigvee_n u_n) = 0$.

Положим $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n$. Тогда по определению множества Глисона, μ можно рассматривать как нормальное состояние на A. Поэтому $\mu(x)=0$. По спектральной теореме существует последовательность проективных единиц $\{U_n\} \subset \mathcal{U}(A)$, возрастающая к носителю $\tau(x)$ элемента x, причем $x > \varepsilon_n U_n$ для некоторых $\varepsilon_n > 0$, $n=1,2,\ldots$. Поэтому $\mu(\bigvee u_n) = \mu(\tau(x)) = \sup \mu(U_n) = 0$ так как $\mu(U_n)=0$, т.е. K - множество Яуха-Пирона. Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что вопрос об остальных импликациях теоремы I.3.7 между свойствами 1) - 3) пока остается открытым.

Из теоремы I.3.7 и [4, теорема 6] вытекает следующий результат.

Следствие I.3.8. Следующие выпуклые множества являются множествами Яуха-Пирона:

а) симплексы Шоке;

б) пространства нормальных состояний W^* - алгебр без слагаемых типа I_2;

в) пространства нормальных состояний JBW - алгебр без слагаемых типа I_2 .

Приведем пример спектрального множества, не являющегося множеством Яуха - Пирона.

Пример I.3.9 [4]. Пусть K - единичный шар в вещественном гильбертовом пространстве H $(\dim H \geqslant 2)$.
Тогда K является спектральным выпуклым множеством (это пространство состояний спин фактора, т.е. - фактора типа I_2). Проективные грани K - это все экстремальные точки K (т.е. точки единичной сферы S), $\varnothing$ и все K , причем $\varnothing^{\#}=K$, $K^{\#}=\varnothing$, $F^{\#}=-F$ для $F\in S$.

Любая неотрицательная функция μ на $\mathcal{F}(K)$ такая, что $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(K)=1$, $\mu(F)+\mu(-F)=1$ для всех $F\in S$, является состоянием на $\mathcal{F}(K)$.
Пусть $F, G\in S$ такие, что $F^{\#}\neq G$, $F\vee G=K$
Здесь существует состояние μ_0 на $\mathcal{F}(K)$ такое, что

$$\mu_0(F)=\mu_0(G)=0,\ \mu_0(F\vee G)=\mu(K)=1,$$

т.е. $\mathcal{F}(K)$ не является логикой Яуха - Пирона. Следовательно K не является множеством Яуха - Пирона.

Теперь мы более подробно изучим строение конечномерных спектральных выпуклых множеств и, в частности, опишем их в случае малых размерностей.

Пусть K - спектральное выпуклое множество в конечномерном пространстве V . Будем считать, что K регулярно вложено в V. Если $F \subseteq K$ является гранью K, то через $\mathrm{Lin}\, F$ обозначим линейную оболочку F в V; алгебраическую размерность пространства $\mathrm{Lin}\, F$ обозначим через $\dim F$ и назовем размерностью грани F. В частности, $\dim K = \dim V$.

Т е о р е м а I.3.10 Пусть K - конечномерное спектральное множество. Если существует проективная грань F в K, такая, что $\dim F + \dim F^{\#} = \dim K$, то F является отщепляемой гранью K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\dim F + \dim F^{\#} = \dim K$, в силу теоремы I.3.4 [36] подпространство $M = \mathrm{Lin}(F \cup F^{\#})$ совпадает с $\mathrm{Lin}\, K = V$. Поэтому утверждение вытекает из предложения 3.2 [36]. Теорема доказана.

С л е д с т в и е I.3.11 Если конечномерное спектральное выпуклое множество K $(\dim K = n)$ имеет проективную грань F коразмерности 1 $(\dim F = n-1)$, то F является отщепляемой гранью.

Доказательство очевидно.

С л е д с т в и е I.3.12 Если конечномерное спектральное выпуклое множество K имеет проективную грань F коразмерности 1, и F является симплексом, то K - симплекс.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathrm{codim}\, F = 1$, то $\dim F^{\#} = 1$, т.е. $F^{\#}$ - экстремальная точка K.

По следствию I.3.II $K = F \oplus_c F^*$, т.е. K - симплекс.

Теорема I.3.I3 (ср. [74, теорема 3.5]). Если спектральное выпуклое множество K имеет конечное число проективных граней, то K - конечномерный симплекс.

Доказательство. Так как K - спектрально, то в силу спектральной теоремы I.2.5 K - конечномерно. Докажем по индукции (по размерности K), что K - симплекс. Если $\dim K = 2$, то K - отрезок и утверждение очевидно. Допустим для $\dim K = n$ утверждение доказано. Если K - $(n+1)$ - мерное спектральное множество, имеющее конечное число проективных граней, т.е. $(n+1)$ - мерный многогранник, тогда K имеет проективную грань F размерности n, причем число проективных граней у F также конечно. По предположению индукций F - симплекс. В силу следствия .I.3.I2 K - симплекс. Теорема доказана.

Опишем все спектральные выпуклые множества размерности 2, 3, 4. Если $\dim K = 2$, то очевидно K - симплекс (отрезок).

Пусть $\dim K = 3$.

Если K имеет проективную грань размерности 2, то в силу следствия I.3.I2 K является треугольником. Если не имеет проективной грани размерности 2, т.е. все нетривиальные проективные грани являются крайними точками, то в силу [36, §§ I, 2] K является строго выпуклым множеством на плоскости и имеет гладкую границу.

Пусть $\dim K = 4$.

а) Если K имеет проективную грань F размерности

3, то в силу следствия I.3.I2 F - отщепляемая грань, т.е. $K = F \oplus_c F^{\#}$, где $F^{\#}$ - вершина K.
В силу сказанного выше, F является либо треугольником, либо строго выпуклым множеством с гладкой границей. В первом случае K - симплекс, во втором K является конусом с основанием F.

б) Пусть K не имеет проективных граней размерности 3, но имеет проективные грани размерности 2 (ребра). И пусть F - некоторое ребро K. Если $\dim F^{\#} = 2$, то по теореме I. 3.I0 $K = F \oplus_c F^{\#}$ является симплексом, что невозможно, т.к. симплекс имеет грани размерности 3. Если $\dim F^{\#} = 1$, т.е. $F^{\#}$ - крайняя точка, то существуют ребра F_1, F_2 соединяющие $F^{\#}$ с крайними точками $F_1^{\#}$, $F_2^{\#}$ множества K, расположенными на концах ребра F.
В противном случае, грани $\varnothing, F_1, F_2, F_1^{\#}, F_2^{\#}, K$ образуют решетку изоморфную решетке O_6 (Рис. 3). В силу [67, теорема 2, стр. 22] это противоречит тому, что грани K образуют ортомодулярную решетку. Значит K является выпуклой фигурой, у которой одно из сечений является треугольником.
При этом других ребер кроме F, F_1, F_2 у множества K не существует. В противном случае

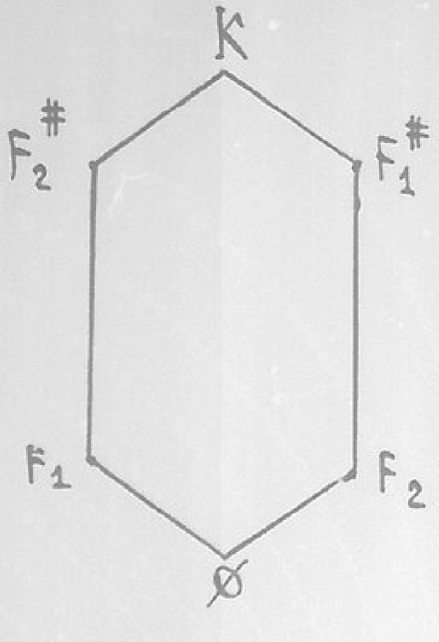

Рисунок 3

легко видеть, что существует ребро, пересекающее одно из ребер F, F_1 или F_2 в точке G, лежащей внутри ребра. Точка G как пересечение граней, должна быть гранью (крайней точкой) K и в то же время лежит внутри ребра, это невозможно. Итак, в случае б) получается фигура, изображенная на рис. 2.

в) K не имеет проективных граней размерности 2 и 3. Тогда легко видеть, что K – строго выпуклая фигура с гладкой границей. На рис. 4 изображены все возможные типы 3-мерных и 4-мерных спектральных выпуклых множеств.

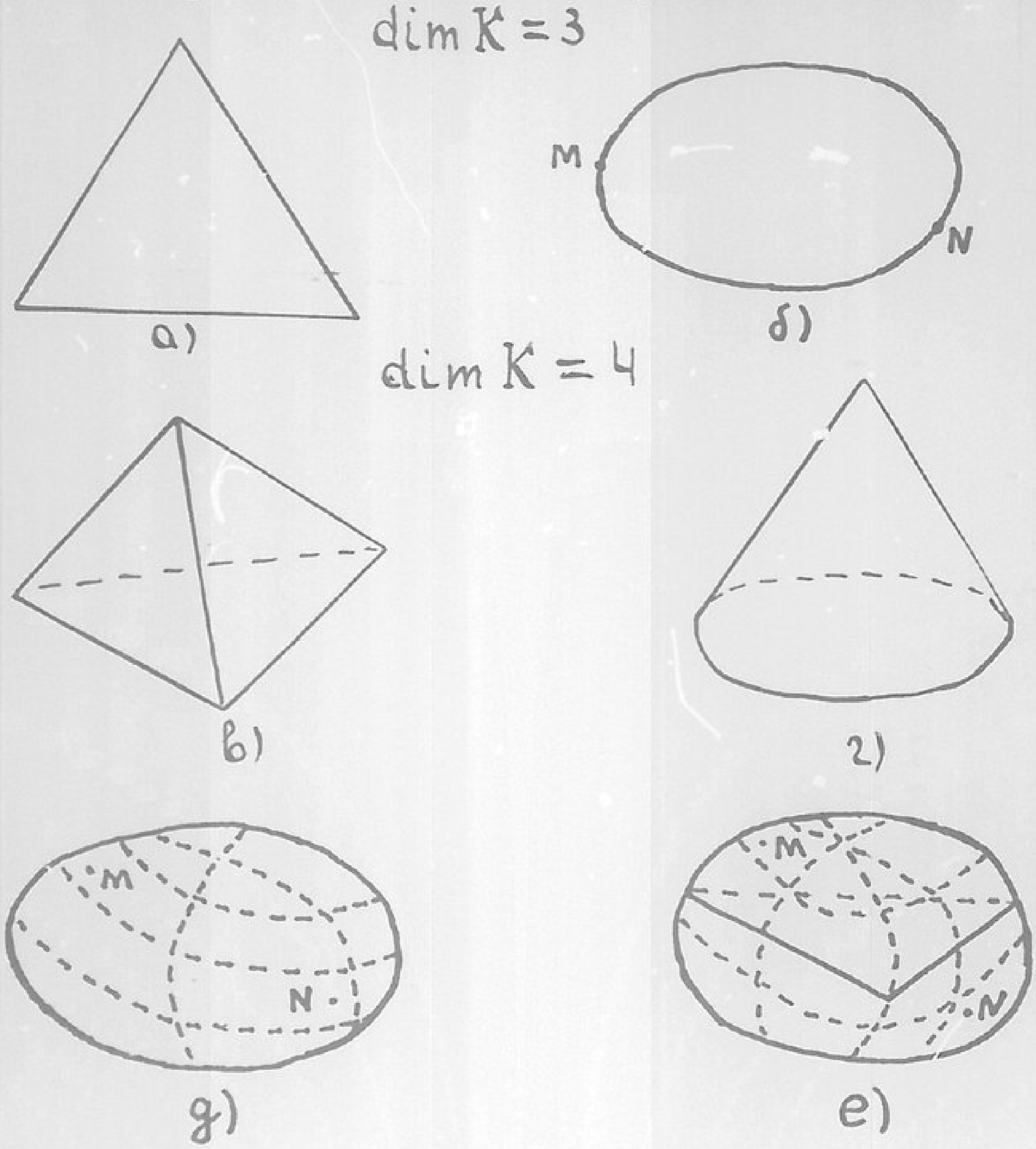

Рисунок 4

Т е о р е м а I.3.I4 Пусть K - спектральное выпуклое множество размерности ≤ 4. K является Яуха-Пирона тогда и только тогда, когда K - симплекс.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если K - симплекс, то очевидно $\mathcal{F}(K)$ булева алгебра и, следовательно, K является множеством Яуха-Пирона. Обратно, пусть K является множеством Яуха-Пирона. Покажем, что K - симплекс. Для этого достаточно показать, что грани множеств б), г), д), е) на рис. 4 не образуют логику Яуха-Пирона. Легко видеть, что если K является прямой выпуклой суммой двух своих проективных граней ($K = F \oplus_c F^{\#}$), то грани K образуют логику Яуха-Пирона тогда и только тогда, когда проективные грани множеств F и $F^{\#}$ образуют логики Яуха-Пирона. Это следует из того, что логика $\mathcal{F}(K)$ является прямой суммой логик $\mathcal{F}(F)$ и $\mathcal{F}(F^{\#})$. Поэтому достаточно проверить фигуры б), д), е). В этих фигурах существуют минимальные грани (крайние точки) M, N такие, что $M^{\#} \neq N$, $M \vee N = K$. Возьмем произвольное состояние μ на $\mathcal{F}(K)$ и положим

$$\mu_1(H) = \begin{cases} 0, & \text{если } H = M \text{ либо } H = N, \\ 1, & \text{если } H = M^{\#} \text{ либо } H = N^{\#}, \\ \mu(H) & \text{для остальных } H \in \mathcal{F}(K). \end{cases}$$

Легко видеть, что μ_1 является состоянием на $\mathcal{F}(K)$, причем $\mu_1(M) = \mu_1(N) = 0$, $\mu_1(M \vee N) = 1$, т.е. $\mathcal{F}(K)$ не является логикой Яуха-Пирона. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. По аналогии со случаем $\dim K=4$ можно описать спектральные множества размерности 5. При этом точно также доказывается, что и в этом случае K является множеством Яуха-Пирона тогда и только тогда, когда K - симплекс. Таким образом, теорема I.3.I4 верна для $\dim K=5$.

Однако для $\dim K \geqslant 6$ имеет место следующий результат.

Т е о р е м а I.3.I5. Существуют спектральные выпуклые множества размерности $\geqslant 6$, отличные от симплексов, но проективные грани которых образуют логику Яуха-Пирона.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество K всех положительно определенных матриц порядка n $(n \geqslant 3)$ со следом 1 и с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ или из тела квантернионов $\mathbb{Q}$ (при $n=3$ можно взять коэффициенты из октав $\mathbb{O}$ (числа Кэли)). Тогда K является пространством состояний JBW - фактора A типа I_n $(n \geqslant 3)$ и в силу теоремы I.3.9 решетка $\mathcal{U}(A)$ проекторов является логикой Яуха-Пирона. Так как решетки $\mathcal{U}(A)$ (проективных единиц $=$ проекторов в $A = A^b(K)$) и $\mathcal{F}(K)$ (проективных граней K) изоморфны, то $\mathcal{F}(K)$ также логика Яуха-Пирона.

При этом размерность K над $\mathbb{R}$ равна

в случае $\mathbb{R}: \dim K = n(n+1)/2$ (6, I0, I5, 2I,...),

в случае $\mathbb{C}: \dim K = n^2$ (9, I6, 25, 36,...),

в случае $\mathbb{Q}: \dim K = 2n^2 - n$ (I5, 28, 45, 66,...),

в случае эрмитовых 3 x 3 матриц над октавами $\dim K = 27$.

Таким образом, при $\dim K = 6, 9, 10, \ldots$ существуют искомые спектральные множества. Теорема доказана.

Из теоремы I.3.9 и замечания 4 вытекает

Следствие I.3.16. Пусть K - конечномерное спектральное множество, такое, что $\dim K \leq 5$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

I) K - пространство всех нормальных состояний - алгебры без прямых слагаемых типа I_2;

2) K - множество Глисона;

3) K - множество Яуха - Пирона;

4) K - симплекс.

§ I.4 Упорядоченные пространства и выпуклые множества типа I

Пусть K - выпуклое множество в пространстве V. Как отмечено выше, будем считать, что K регулярно вложено в V. Тогда (V, K) является пространством с базовой нормой, (A, e) - пространство с порядковой единицей, где $A = A^b(K)$ - пространство всех ограниченных аффинных функций на K, e - функция тождественно равная единице 1 на K. $O(A)$ - множество всех порядково-ограниченных операторов в A, т.е. $O(A) = \{T \in End(A):$ $-\lambda I \leq T \leq \lambda I$, где $\lambda \geqslant 0$ некоторое число и I единичный оператор в $A\}$. $Z(A)=\{Te : T\in O(A)\}$ назовем центром пространства A с порядковой единицей e.

Напомним, что P - проектор $R : A\longrightarrow A$ называется абелевым проектором, если $R(A)=\mathrm{Im}\,R$ - векторная решетка и $R(A)=R(Z(A))$; P - проектор R назовем центральным проектором, если $R+R'=I$. Пространство A с порядковой единицей e, называется типа I, если для всякого центрального проектора Q в A, существует абелев проектор R, такой, что $R\lneq Q$.

Из [56, лемма 4.2] вытекает следующий результат.

Теорема I.4.I В каждом пространстве A с порядковой единицей существует центральный проектор Q, такой, что $Q(A)$ имеет тип I, $Q'(A)$ не содержит ненулевых абелевых проекторов. Этот центральный проектор единственный и является наибольшим среди центральных проекторов Q, таких, что $Q(A)$ имеет тип I.

В дальнейшем, говоря о пространстве A с порядковой единицей, будем предполагать, что оно находится в спектральной двойственности с пространством с базовой нормой (V,K), т.е. K - спектрально.

Определение I.4.2. Пространство A с порядковой единицей e, называется коммутативным, если любые два элемента $a, b\in A$ совместимы.

Имеет место следующий результат (см. [36 ,следствие 9.5]).

Теорема I.4.3 Пусть A пространство с порядковой единицей e. Следующие условия эквивалентны:

I) A - коммутативно;

2) A - векторная решетка.

Определение I.4.4. P - проектор $R: A \to A$ называется коммутативным проектором, если $R(A)$ коммутативно.

Теорема I.4.5 Если P - проектор R абелев, то R является коммутативным проектором. Обратное неверно.

Доказательство. Пусть R - абелев проектор, то $R(A)$ векторная решетка. В силу теоремы I.4.3, $R(A)$ коммутативно, следовательно R является коммутативным проектором.

Построим пример коммутативного проектора, не являющегося абелевым проектором. В качестве K рассмотрим выпуклое множество в $\mathbb{R}^3$, изображенное на рисунке 2. Экваториальное сечение этого множества является треугольником. Тогда $A = A^b(K)$ и V находится в спектральной двойственности, т.е. K является спектральным выпуклым множеством. В этом случае (см. рис. 2) можно выбрать проективную грань $F_Q = Q^*(V) \cap K = \{\rho \in K : \langle Qe, \rho \rangle = 1\}$ в $\mathcal{F}(K)$ такую, что F_Q - симплекс. Из теоремы I.3.4 следует, что $Q(A)$ - векторная решетка, т.е. Q - является коммутативным проектором. Очевидно, что $Q(A) \neq Q(Z(A))$.

Отсюда вытекает, что Q не абелев проектор. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Если K является пространством нормальных состояний JBW - алгебры или единичный шар в $\mathbb{R}_p^n$ $(1<p<+\infty)$, $n=2,3,\ldots)$, то понятия абелева проектора и коммутативного проектора в $A=A^b(K)$ совпадают.

Пусть $R\in\mathcal{P}(A)$. Центральный проектор $c(R)=$ $=\wedge\{E\in\mathcal{P}(A):\ E$ - центральный проектор $R\leq E\}$ называется центральным носителем R. Два P - проектора R и Q называются центрально ортогональными, если $c(R)\perp c(Q)$, т.е. $c(R)\leq c(Q)'$.

Л е м м а I.4.6 Пусть R - центральный проектор. Тогда: I) если Q - коммутативный проектор в A, то RQ является коммутативным проектором в $R(A)$;

2) если $Q\leq R$ и Q - коммутативный проектор в $R(A)$, тогда Q является коммутативным проектором в A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пусть P проектор Q коммутативный проектор в A. Так как R - центральный проектор, то $RQ=QR$. Положим $H=RQ$. Тогда $H(A)\subseteq Q(A), H(A)\subseteq R(A)$. Так как $Q(A)$ - коммутативно, то $H(A)$ - коммутативно в A. Следовательно, RQ коммутативный проектор в $R(A)$.

Второе утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма I.4.7 Сумма произвольного семейства центрально-ортогональных коммутативных проекторов также является коммутативным проектором.

Доказательство. Пусть $\{R_i\}$ - произвольное семейство центрально-ортогональных коммутативных проекторов. В силу теоремы I.4.3 $R_i(A)$ является векторной решеткой для любого i. Положим $R=\sum_i R_i$. Так как $\{R_i\}$ центрально ортогональны, то $R(A)=\sum_i R_i(A)$. Поэтому, если $R_i(A)$ - векторная решетка для любого i, тогда $R(A)$ - векторная решетка, как прямая сумма векторных решеток. Следовательно, R коммутативный проектор. Лемма доказана.

Определение I.4.8 Пространство A с порядковой единицей называется пространством типа I^K, если для любого центрального проектора R в A существует коммутативный подпроектор.

Теорема I.4.9 В каждом пространстве A с порядковой единицей существует центральный проектор H, такой, что $H(A)$ имеет тип I^K, $H'(A)$ не содержит ненулевых коммутативных проекторов. Этот центральный проектор единственный и является наибольшим среди центральных проекторов H таких, что $H(A)$ имеет тип I^K.

Доказательство. Пусть $\{R_i\}$ - максимальное семейство центрально-ортогональных коммутативных проекторов в A, $R=\sum_i R_i$. По лемме I.4.7, R

является коммутативным проектором. Если Q - ненулевой центральный проектор, такой, что $Q \leq H$, где $H = c(R)$, то в силу леммы I.4.6 QR является ненулевым коммутативным проектором в $H(A)$. Следовательно, $H(A)$ является типа I^k. Из построения видно, что $H'(A)$ не содержит ненулевых коммутативных проекторов. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.4.I0. Пусть $A = A^b(K)$ пространство с порядковой единицей e. Следующие условия эквивалентны:

I) K не имеет отщепляемых граней кроме $\varnothing$ и K;

2) A - фактор;

3) $Z(A) = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ - числовая прямая $\}$.

Напомним, что P - проектор $R \neq \theta$ называется а т о м о м, если он является минимальным, т.е. из $Q \leq R$, $Q \in \mathcal{P}(A)$ следует, что либо $Q = R$, либо $Q = \theta$.

Т е о р е м а I.4.II. Фактор A имеет тип I^k тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один атом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A имеет атом R; в силу [39, предложение I.I3] и теоремы I.2.2 $R(A) \cong \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ - числовая прямая. Значит, $R(A)$ - векторная решетка. Следовательно, R - коммутативно и $c(R) = I$, т.е. A типа I^k.

Обратно, пусть A типа I^k; тогда A содержит коммутативный проектор Q, т.е. $Q(A)$ - коммутативно. В силу теорем I.4.3 и I.3.4 проективная грань

$F_Q = \{\rho \in K : \langle Qe, \rho \rangle = 1\}$ является симплексом и значит, $R(A)$ содержит атом. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.4.I2. Пусть $R: A \to A$ центральный проектор. Тогда следующие условия эквивалентны:

I) $R(A)$ - типа I ;

2) $R(A)$ - типа I^k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Longrightarrow$ 2). Очевидно. 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $R(A)$ типа I^k. Тогда существует коммутативный проектор Q такой, что $c(Q) = R$. В силу теорем I.3.4, I.4.3 $F_Q = \{\rho \in K : \langle Qe, \rho \rangle = 1\}$ является симплексом и по теореме I.4.II существует абелев проектор H в $R(A)$, такой, что $c(H) = R$. Отсюда следует, что $R(A)$ имеет тип I. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6. Теоремы I.4.5, I.4.I2 показывают, что хотя понятия коммутативного и абелева проекторов несовпадают, пространства типа I при обеих классификациях образуют один и тот же класс.

О п р е д е л е н и е I.4.I3. Выпуклое множество называется м н о ж е с т в о м т и п а I, если K $A = A^b K$ имеет тип I.

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а I.4.I4. Конечномерное спектральное выпуклое множество K имеет тип I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как K конечномерное спектральное выпуклое множество, то в A существует минимальный P - проектор Q. Из [39, предложение I.13] следует, что $Q(A) \cong \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $A = A^b(K)$ - типа I. Следовательно, K имеет тип I. Теорема доказана.

Утверждение теоремы I.4.14 неверно для произвольного конечномерного выпуклого множества.

В самом деле, рассмотрим

Пример I.4.15. Пусть K - квадрат на плоскости. Известно, что K - неспектрально (см. § I.3). В силу теоремы I.7 [35], не существует собственного P - проектора в $A = A^b(K)$. Так как $A \neq Z(A) \cong \mathbb{R}$, то A не имеет тип I. Следовательно, K не имеет тип I.

§ I.5 Общая классификация пространств с порядковой единицей и выпуклых множеств. Связь с другими классификациями.

Классификация алгебр фон Неймана по типам I, II, III, полученная Мюрреем и фон Нейманом [71], сыграла важную роль в развитии теории алгебр фон Неймана. Аналогичная классификация слабо замкнутых йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (JW - алгебр), основанная на свойствах модулярности решетки проекторов, была построена Топпингом [80].

Естественно ставится задача: для пространства с порядковой единицей построить классификацию по типам.

Один из подходов к решению этой задачи предложен в работах [55, 56], в которых дана глобальная классификация пространств с порядковой единицей на языке P - проекторов и основанная на свойствах существования центрального следа.

Наша основная цель - построить классификацию для пространств с порядковой единицей по типам, основанную на свойствах модулярности решетки P - проекторов, и изучить связь с классификацией, построенной Чо-Хо-Чу и Райтом в работах [55, 56].

Напомним, что симметрией пространства A с порядковой единицей e называется изометрический порядковый изоморфизм $S: A \to A$, сохраняющий e и коммутирующий с любым порядково-ограниченным оператором T в A. Центральным следом на A называется положительный оператор Γ из A в $Z(A)$, сохраняющий e, коммутирующий с каждым оператором $T \in O(A)$ и удовлетворяющий условию $\Gamma S = \Gamma$ для всех симметрий S.

Определение I.5.I [56] P - проектор $R: A \to A$ называется конечным проектором, если в $R(A)$ существует центральный след; пространство A с порядковой единицей называется конечным, если I является конечным проектором; выпуклое множество K называется конечным, если $A = A^{b}(K)$ конечно.

П р е д л о ж е н и е I.5.2 56 . Пусть K - конечномерное выпуклое множество. Тогда $A = A^{b}(K)$ конечно, т.е. единичный проектор I - конечен.

О п р е д е л е н и е I.5.3 [56] Пространство A с порядковой единицей e называется п р о с т р а н с т в о м т и п а II, если для всякого центрального проектора R в A, существует конечный проектор Q ,такой,что $Q \leqslant R$ и в A не существует ненулевого абелева проектора; ч и с т о б е с к о н е ч н ы м, если не существует ненулевого конечного проектора в A ; п о л у к о н е ч н ы м, если для всякого центрального проектора R в A , существует ненулевой конечный проектор Q , такой, что $Q \leqslant R$; с о б с т в е н н о б е с к о н е ч н ы м, если не существует ненулевого конечного центрального проектора.

Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e , имеет

(i) тип I_{fin} , если оно конечно и типа I ;

(ii) тип I_{∞} , если оно собственно бесконечно и типа I ;

(iii) тип II_{1} , если оно конечно и типа II ;

(iv) тип II_{∞} , если оно собственно бесконечно и типа II ;

(v) тип III , если оно чисто бесконечно.

Имеет место следующий результат.

Теорема I.5.4 [56] В произвольном пространстве A с порядковой единицей e, существуют пять ортогональных центральных проекторов R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 таких, что $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = I$ и

(i) $R_1(A)$ - типа I_{fin} ;

(ii) $R_2(A)$ - типа I_∞ ;

(iii) $R_3(A)$ - типа II_1 ;

(iv) $R_4(A)$ - типа II_∞ ;

(v) $R_5(A)$ - типа III .

Причем, если A является фактором (т.е. если A не содержит центральных проекторов, кроме θ и I), то оно может принадлежать только одному из этих типов.

Отметим, что если K является пространством нормальных состояний алгебры фон Неймана, то приведенная выше классификация совпадает с известной классификацией алгебр фон Неймана, полученная Мюрреем и фон Нейманом [71] (см. [56 , предложение 4.8]).

Напомним, что выпуклое множество K называется множеством типа I_{fin} (соответственно $I_\infty, II_1, II_\infty, III$), если $A = A^b(K)$ имеет тип I_{fin} (соответственно I_∞, II_1, II_∞, III).

Из теоремы I.4.I4, предложения I.5.2 вытекает

Следствие I.5.5. Конечномерное спектральное выпуклое множество K является пространством типа I_{fin} .

З а м е ч а н и е 7. Утверждение следствия I.5.5 неверно для произвольного конечномерного выпуклого множества, поскольку имеются примеры конечномерных множеств типа II (см. пример I.4.15).

О п р е д е л е н и е I.5.6 Решетка $\mathcal{P}(A)$ - называется м о д у л я р н о й, если $(R \vee Q) \wedge H = R \vee (Q \wedge H)$ для всех R , $Q, H \in \mathcal{P}(A)$ таких, что $R \leq H$.

P - проектор R называется модулярным проектором, если множество $[\theta, R] = \{Q \in \mathcal{P}(A) : Q \leq R\}$ является модулярной решеткой.

Л е м м а I.5.7 Пусть $\{Q_i\}$ - семейство модулярных проекторов в A с ортогональными центральными носителями. Тогда $Q = \vee Q_i$ модулярный проектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как все центральные носители $c(Q_i)$ ортогональны и операция перехода к центральному носителю сохраняет точные верхние грани, то решетка $[\theta, c(Q)]$ является прямым произведением модулярных решеток $[\theta, c(Q_i)]$. Значит, $[\theta, Q]$ - прямое произведение модулярных решеток $[\theta, Q_i]$ и следовательно, $[\theta, Q]$ - модулярная решетка. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е I.5.8 Точная верхняя грань любого семейства центральных модулярных проекторов является модулярным проектором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{Q_i\}$ - произвольное семейство модулярных центральных проекторов в A ,

$Q = \vee Q_i$. Среди всевозможных семейств центральных подпроекторов в Q_i (по всем i) выберем максимальное ортогональное семейство $\{R_k\}$ и положим $R = \vee R_k$. Тогда $R = Q$, так как в противном случае $Q - R$ является центральным проектором и $(Q-R)Q_i \neq \theta$ для некоторого Q_i, что противоречит максимальности семейства $\{R_k\}$. Так как все R_k центральные и модулярные проекторы, то в силу леммы I.5.7 Q есть модулярный проектор. Предложение доказано.

Определение I.5.9 Пространство A с порядковой единицей e, называется модулярным (соответственно локально модулярным), если I является модулярным проектором (соответственно, если в A существует модулярный проектор с центральным носителем, равным I). Центральный проектор $R : A \to A$ называется локально модулярным, если $R(A)$ является локально модулярным.

Предложение I.5.10. Точная верхняя грань любого семейства центральных локально модулярных проекторов является локально модулярным проектором.

Доказательство. Пусть $\{Q_i\}$ - произвольное семейство локально модулярных центральных проекторов в A, $Q = \vee Q_i$. Аналогично предложению I.5.8 выберем максимальное ортогональное семейство $\{R_k\}$ такое, что $Q = \vee R_k$. Для каждого центрального локально модулярного проектора R_k существует модулярный проектор H_k

такой, что $c(H_k) = R_k$. В силу леммы I.5.7 Q является локально модулярным проектором, т.е. $Q = c(H)$, где $H = \vee H_k$. Предложение доказано.

Определение I.5.II Пространство A с порядковой единицей e , называется собственно немодулярным, если оно не содержит ненулевых центральных модулярных проекторов; чисто немодулярным, если оно не содержит ненулевых модулярных проекторов; типа II^M , если оно локально модулярно и не содержит ненулевых абелевых проекторов.

Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e , имеет

(i) тип I^M_{fin} , если оно модулярно и типа I ;

(ii) тип I^M_{∞} ; если оно собственно немодулярно, локально модулярно типа I ;

(iii) тип II^M_1 , если оно модулярно и типа II ;

(iv) тип II^M_{∞} , если оно собственно немодулярно и типа II^M ;

(V) тип III^M , если оно чисто немодулярно.

Имеет место следующий результат.

Теорема I.5.I2 В произвольном пространстве A с порядковой единицей e , существуют пять ортогональных центральных проекторов E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 таких, что $E_1+E_2+E_3+E_4+E_5=I$ и

(i) $E_1(A)$ - типа I^M_{fin} ;

(ii) $E_2(A)$ - типа I^M_∞ ;

(iii) $E_3(A)$ - типа II^M_1 ;

(iv) $E_4(A)$ - типа II^M_∞ ;

(v) $E_5(A)$ - типа III^M .

Если пространство A с порядковой единицей e, является фактором, то оно может принадлежать только одному из этих типов.

Доказательство. По теореме I.4.I существует центральный проектор E, такой, что пространство $E(A)$ с порядковой единицей Ee типа I и пространство $E'(A)$ с порядковой единицей $E'e$ без ненулевых абелевых проекторов. Так как всякий абелев проектор, очевидно, модулярный проектор, то пространство $E(A)$ с порядковой единицей Ee, всегда локально модулярно и в силу предложения I.5.8 разлагается в прямую сумму простнанства $E_1(A)$ (с порядковой единицей $E_1 e$) типа I^M_{fin} и пространство $E_2(A)$ (с порядковой единицей $E_2 e$) типа I^M_∞. По предложению I.5.I0 разложим пространство $E'(A)$ с порядковой единицей $E'e$, в прямую сумму $H(A)$ типа II^M и $E_5(A)$ - типа III^M. Также с силу предложения I.5.8 пространство $H(A)$ с порядковой единицей H_e, разлагается в прямую сумму $E_3(A)$ типа $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_1$ и $E_4(A)$ - типа $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_\infty$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8. Если K пространство нормальных состояний JBW - алгебр, то приведенное выше разложение по типам полностью согласуется с соответствующим разложением для JBW - алгебр (см. [63, 80]).

Выпуклое множество K назовем множеством типа I^M_{fin} (соответственно I^M_∞, $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_1$, $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_\infty$, $\overline{\underline{\mathrm{III}}}{}^M$), если $A=A^b(K)$ является пространством типа I^M_{fin} (соответственно I^M_∞, $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_1$, $\overline{\underline{\mathrm{II}}}{}^M_\infty$, $\overline{\underline{\mathrm{III}}}{}^M$).

З а м е ч а н и е 9. В этом случае утверждение следствия I.5.5 (т.е. конечномерное спектральное выпуклое множество K является типа I^M_{fin}) неверно поскольку имеется пример конечномерного спектрального выпуклого множества типа $\overline{\underline{\mathrm{I}}}{}^M_\infty$. В качестве K рассмотрим множество, изображенное на рисунке 2. Экваториальное сечение этого множества является треугольником. Тогда K является спектральным выпуклым множеством (см. § I.3). В этом случае, как показано на рисунке 2, можно выбрать такие проективные грани F_R, F_Q, F_H в $\mathcal{F}(K)$, что $F_R \subseteq F_H$ и $F_R \vee (F_Q \wedge F_H) \neq (F_R \vee F_Q) \wedge F_H$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{F}(K)$ немодулярно. В силу теоремы I.4.I4 K имеет тип I^M_∞.

ГЛАВА II

ЙОРДАНОВА СТРУКТУРА В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЙ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

В исследованиях по аксиоматике квантовой теории в настоящее время существуют три основных течения:

- алгебраический подход, который берет за основу алгебру наблюдаемых физической системы;

- квантово-логический подход, исходным понятием которого является решетка высказываний;

- операциональный или "выпуклый" подход, основным элементом в котором является выпуклое множество состояний физической системы.

Наиболее исследованным является первый подход - его математическим аппаратом является теория топологических (в частности, операторных) алгебр и их представлений. В основном это - теория C^* - алгебр, алгебр фон Неймана (W^* - алгебр), йордановых банаховых алгебр (JB , JBW - алгебр) и др. (Подробнее см. [8, 9, 23, 28, 30, 36]).

Второй подход возник одновременно и развивался параллельно с первым ([18 , 48 , 81]), тем не менее теория ортомодулярных решеток, или так называемых логик, еще далека от совершенства.

В 70-е годы возник третий подход, который можно назвать также статистическим, поскольку он представляет собой далеко идущее логическое развитие статистической интерпретации квантовой механики [20, 26, 27, 61, 62, 69] .

В основе статистического подхода лежат физически наиболее естественные аксиомы, однако именно это обстоятельство и обуславливает нетривиальность задачи обоснования в его рамках алгебраической структуры в множестве наблюдаемых, которая просто постулируется в первом и отчасти во втором подходах. Так были предложены различные системы аксиом, характеризующие в классе общих решеток решетку проекторов гильбертова пространства [18, 81] или операторной алгебры [50] . В работах [37, 41, 44, 54, 65] найдены более или менее наглядные геометрические или физические условия на выпуклое множество, обеспечивающие его аффинную изоморфность пространству состояний C^* - алгебры или JB - алгебры.

Именно последнему кругу проблем посвящена данная глава. Здесь мы изучим вопрос о возможности введения йордановой структуры на пространстве с порядковой единицей и покажем корректность постановки данного вопроса. Далее исследуем геометрию проективных выпуклых множеств, изучим решетку их граней и найдем простые геометрические условия для того, чтобы конечномерное выпуклое множество было пространством состояний JB - алгебры, т.е. алгебры τ - чисел в смысле Йордана - фон Неймана - Вигнера [66].

Последний результат можно изложить и в терминах конусов: мы найдем условия, когда данный самодуальный конус является однородным.

§ 2.1 Йорданова структура и изометрии в пространствах с порядковой единицей

Наиболее важным классом пространств с порядковой единицей являются йордановы банаховы алгебры (JB , JBW - алгебры). В связи с этим одной из интересных проблем в теории пространств с порядковой единицей является нахождение условий, когда на данном пространстве можно ввести йорданову структуру. В настоящем параграфе мы покажем корректность постановки данного вопроса: будет доказано, что если на пространстве с порядковой единицей существует йорданова структура, то ее можно ввести и на любом пространстве, изометрически изоморфном исходному.

Йорданова банахова алгебра или JB - алгебра - это йорданова алгебра A с единицей над полем действительных чисел, на которой введена норма, такая, что A - банахово пространство, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|a\cdot b\| \le \|a\|\|b\|$;

2) $\|a^2\| = \|a\|^2$;

3) $\|a^2\| \le \|a^2+b^2\|$

для всех $a, b \in A$.

JB - алгебра A называется JBW - алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т.е. существует банахово пространство N такое, что A изометрически изоморфна пространству N^*, топологически сопряженному к N.

Пусть A - замкнутое по норме (оператора) линейное подпространство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: A называется JC - алгеброй, если оно замкнуто относительно йорданова произведения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ операторов из A. Легко видеть, что всякая JC - алгебра и, в частности, эрмитова часть C^* - алгебры, являются JB - алгебрами. Всякая JW - алгебра, т.е. JC - алгебра, замкнутая в слабой (операторной) топологии, является примером JBW - алгебры. В частности, эрмитова часть алгебры фон Неймана является JBW - алгеброй.

Если A - JB - алгебра, то множество A^+ всех квадратов элементов A является правильным выпуклым конусом, превращающим A в полное пространство с порядковой единицей, в котором порядковой единицей является мультипликативная единица $\mathbb{1}$.

Положительный линейный функционал ρ на JB - алгебре A называется состоянием, если $\rho(\mathbb{1}) = 1$. Линейный функционал ρ называется нормальным, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$, монотонно убывающей к нулю, $\rho(x_\alpha) \to 0$. Через $S(A)$ обозначим пространство всех состояний JB - алгебры A. $S(A)$ является компактным выпуклым множеством в A^* относительно $*$ - слабой топологии.

Множество K всех нормальных состояний произвольной JBW - алгебры A (и, в частности, W^* - алгебры $\mathcal{U}$) является спектральным множеством. При этом $A = A^b(K)$ (соответственно, $\mathcal{U}_{SA} = A^b(K)$) и понятия P - проекторов, проективных единиц и проективных граней, являются обобщениями соответственно отображений $a \to U_p a$, самосопряженных проекторов, и замкнутых граней пространства состояний операторной алгебры.

Отметим также, что если $K = S(A)$ множество всех состояний JB - алгебры (или C^* -алгебры) A, то K можно отождествить с пространством всех нормальных состояний обертывающей JBW - алгебры (соответственно алгебры фон Неймана) A^{**} [19, 63, 76].

Пусть (A, e) - пространство с порядковой единицей, (V, K) - пространство с базовой нормой. Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности.

Обозначим через $\mathcal{P}(A)$ (соответственно $\mathcal{U}(A), \mathcal{F}(K)$) множество всех P - проекторов в A (соответственно проективных единиц из A, проективных граней K). Пусть $[0, e] = \{a \in A : 0 \leq a \leq e\}$; $\partial_e[0, e]$ множество всех его экстремальных точек.

Из следствия 2.9 и предложения 8.7 [36] вытекает

Лемма 2.1.1 Пусть (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности. Тогда $\mathcal{U}(A)$ и $\partial_e[0, e]$ совпадают.

В дальнейшем, говоря о пространстве с порядковой единицей, будем предполагать, что оно находится в спектральной двойственности с некоторым пространством с базовой нормой. В этом случае, как отмечено в § I.2, для любого $a \in A$ существует спектральное семейство $\{e^a_\lambda\} \subset \mathcal{U}(A)$ такое, что $a = \int \lambda \, de^a_\lambda$.

Л е м м а 2.I.2. Пусть (A_1, e_1) и (A_2, e_2) - пространства с порядковой единицей, φ - порядковый изоморфизм A_1 на A_2. Если $a, b \in A$ и $a \longleftrightarrow b$, то $\varphi(a) \longleftrightarrow \varphi(b)$ в A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Сначала покажем, что, если $a, b \in \mathcal{U}(A_1)$ и $a \longleftrightarrow b$, то $\varphi(a) \longleftrightarrow \varphi(b)$ По лемме 2.I.I $\varphi(\mathcal{U}(A_1)) = \mathcal{U}(A_2)$, где $\mathcal{U}(A_1)$ и $\mathcal{U}(A_2)$ множества проективных единиц соответственно в A_1 и A_2. Так как $a, b \in \mathcal{U}(A_1)$ и $a \longleftrightarrow b$ то в силу предложения 5.4 [36], существуют попарно ортогональные проективные единицы $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{U}(A_1)$ такие, что $a = u_1 + u_2$ и $b = u_1 + u_3$. Тогда

$$\varphi(a) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2); \quad \varphi(b) = \varphi(u_1) + \varphi(u_3) \in \mathcal{U}(A_2)$$

и, следовательно, $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3)$ попарно ортогональные проективные единицы. Отсюда следует, что $\varphi(a) \longleftrightarrow \varphi(b)$.

2) Пусть $a, b \in A_1$ и $a \longleftrightarrow b$, т.е. $e^a_\lambda \longleftrightarrow e^b_\mu$

для любого $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, где $\{e_\lambda^a\}$ и $\{e_\mu^b\}$ - спектральные семейства соответственно a и b .

В силу I) $\varphi(e_\lambda^a) = \varphi(e_\mu^b)$ для любого $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

По спектральной теореме $\{\varphi(e_\lambda^a)\}$ и $\{\varphi(e_\mu^b)\}$ являются спектральными семействами элементов $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ соответственно. Следовательно, $\varphi(a) \longleftrightarrow \varphi(b)$. Лемма доказана.

В пространство A с порядковой единицей e , с помощью спектральной теоремы введем понятие квадрата элемента a :

$$a^{(2)} = \int \lambda^2 de_\lambda^a , \tag{2.I}$$

а также формального произведения двух элементов $a, b \in A$:

$$a * b = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{(2)} - a^{(2)} - b^{(2)}\right\}. \tag{2.2}$$

Имеет место следующий результат (см. [36, теорема I2.I2]).

Т е о р е м а 2.I.3 Пусть (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности. Если произведение (2.2) является билинейным, тогда относительно этого произведения A становится JB - алгеброй с мультипликативной единицей, совпадающей с порядковой единицей e и нормой, определяемой как порядковая норма. Кроме того, для любого

P - проектора P с соответствующей проективной единицей $u=Pe$ и для любого $a\in A$, Pa выражается как йорданово тройное произведение $Pa=\{uau\}$, а $u*a$ можно выразить формулой

$$u*a=\frac{1}{2}(I+P-P')a. \tag{2.3}$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 2.I.4 Пусть (A,e_1) и (A_2,e_2) пространства с порядковой единицей, φ - сюрьективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2 такое, что $\varphi(e_1)=e_2$. Тогда $\varphi(a^{(2)})=\varphi(a)^{(2)}$ для любого $a\in A_1$.

Доказательство. Пусть $\varphi: A_1\to A_2$ сюрьективная, линейная изометрия A_1 на A_2 такая, что $\varphi(e_1)=e_2$. В силу предложения П.I.3 и следствия П.I.4 [33], φ является порядковым изоморфизмом.

Из леммы 2.I.I $\varphi(\mathcal{U}(A_1))=\mathcal{U}(A_2)$, где $\mathcal{U}(A_1)$ и $\mathcal{U}(A_2)$ множества проективных единиц соответственно в A_1 и A_2.

Пусть a - произвольный элемент A_1, $M(a)$ наименьшее слабо замкнутое абелево подпространство, содержащее a и e_1; $M(a)$ изометрически и порядково изоморфно $C(X)$, где X - некоторый гиперстоуновский компакт. Для любого положительного ε можно выбрать конечное число попарно ортогональных проективных единиц $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в $M(a)$ и действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$\|a-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\| \le \varepsilon, \quad \|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\| \le \|a\| \quad \text{и}$$

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)^{(2)} = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \varphi(u_i))^{(2)} = \sum_{i=1}^{n}\lambda^2 \varphi(u_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i).$$

Так как $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ являются попарно ортогональными проективными единицами в A_2, то в силу леммы 2.I.2 имеем

$$\|\varphi(a^{(2)}) - \varphi(a)^{(2)}\| = \|\varphi(a^{(2)}) - \varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i) +$$

$$+\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i) - \varphi(a)^{(2)}\| = \|\varphi(a^{(2)} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i) +$$

$$+\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)^{(2)} - \varphi(a)^{(2)}\| \le \|\varphi(a^{(2)} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i)\| +$$

$$+\|\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)^{(2)} - \varphi(a)^{(2)}\| = \|a^{(2)} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u_i\| +$$

$$+\|(\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i) - \varphi(a)) * (\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i) + \varphi(a))\| \le$$

$$\le \|(a - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i) * (a + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)\| +$$

$$+\|\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i-a)\|\cdot\|\varphi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i+a)\|\leq$$

$$\leq\|a-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\|\cdot\|a+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\|+\|a-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\|\times$$

$$\times\|a-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\|\leq 2\varepsilon\|a\|+2\varepsilon\|a\|=4\varepsilon\|a\|.$$

Следовательно, $\varphi(a^{(2)})=\varphi(a)^{(2)}$ в силу произвольности ε. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2.I.5. Пусть (A_1,e_1) и (A_2,e_2)- пространства с порядковой единицей, φ - сюръективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2, такое, что $\varphi(e_1)=e_2$. Тогда $\varphi(a*b)=\varphi(a)*\varphi(b)$ для любого $a,b\in A$.

Из теоремы 2.I.3 и следствия 2.I.5 вытекает

С л е д с т в и е 2.I.6. Пусть (A_1,e_1) и (A_2,e_2) - пространства с порядковой единицей и φ - сюръективное линейное изометричное отображение A_1 на A_2 такое, что $\varphi(e_1)=e_2$. Пространство A_1 есть йорданова банахова алгебра тогда и только тогда, когда A_2 - йорданова банахова алгебра.

§ 2.2 Характеризация пространств состояний конечномерных йордановых алгебр

Хорошо известно, что пространство состояний C^* - алгебры или JB - алгебры является слабо компактным выпуклым множеством. Существенно сложной является обратная задача - охарактеризовать в классе компактных (или более общих) выпуклых множеств, те которые аффинно изоморфны пространствам состояний C^* - алгебр, JB - алгебр или более общим пространствам нормальных состояний алгебр фон Неймана и JBW - алгебр. Этот вопрос, представляющий интерес как с математической точки зрения, так и для приложений в аксиоматике квантовой механики, рассмотрен в ряде работ [37, 38, 39, 41, 44, 54, 65].

В настоящем параграфе найдены простые, чисто геометрические условия для того, чтобы конечномерное выпуклое множество было пространством состояний JB - алгебры.

Пусть K - выпуклое множество в пространстве V. Через $A=A^b(K)$ обозначим пространство всех ограниченных аффинных функций на K с поточечным порядком. Будем считать, что K регулярно вложено в V.

Пусть $\mathcal{S}$ - множество всех положительных линейных операторов на A таких, что $Se=e$ и $ST=TS$ для всех $T\in \mathcal{O}(A)$. Положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}=\{S_P=2(P+P')-I,\ P\in \mathcal{P}(A)\}.$$

Определение 2.2.1 Элемент $\tau \in K$ назовем следом, если $S_p^* \tau = \tau$ для всех $p \in \mathcal{P}(A)$.

Отражением выпуклого множества K называется аффинный автоморфизм $\varphi : K \to K$ такой, что $\varphi^2 = I$. Выпуклое множество K назовем симметричным относительно выпуклого подмножества $K_0 \subset K$, если существует отражение на K, множество неподвижных точек которого в точности совпадает с K_0.

Определение 2.2.2. Выпуклое множество K назовем симметричным, если $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}$, т.е. $S_p = 2(p + p') - I \geqslant 0$ для любого $p \in \mathcal{P}(A)$.

Имеет место следующий результат (см. [38, лемма I.I3]).

Теорема 2.2.3 Пусть K - проективное выпуклое множество. Следующие условия эквивалентны:

I) K - симметрично;

2) K - симметрично относительно $co(F \cup F^{\#})$ для любой проективной грани $F \in \mathcal{F}(K)$, где $co(F \cup F^{\#})$ означает выпуклую оболочку множества $F \cup F^{\#}$.

Говорят, что выпуклое множество K обладает свойством гильбертова шара (Hilbert ball property [38]), если для любых двух экстремальных точек ρ, τ в K, наименьшая выставленная грань, порожденная этими точками, аффинно изоморфна единичному шару в некотором гильбертовом пространстве.

Напомним, что точка x называется аффинно внутренней для выпуклого множества K, если $x \in K$ и для каждого $y \in \mathrm{aff}(K)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[x, x+\varepsilon y] \subset K$, где $\mathrm{aff}\, K$ - аффинная оболочка выпуклого множества K. Множество аффинно внутренних точек множества K называется его аффинной внутренностью и обозначается через $\mathrm{ai}\, K$. Выпуклое множество называется аффинно телесным, если его аффинная внутренность непуста, т.е. $\mathrm{ai}\, K \neq \emptyset$.

Лемма 2.2.4 Пусть K - проективное аффинно телесное множество; тогда для любой точки его границы наименьшая проективная грань, содержащая эту точку, является собственной гранью в K.

Доказательство. Пусть $\rho \in \partial K$, где ∂K - граница K. Существование наименьшей проективной грани F_0, содержащей ρ вытекает из полноты решетки $\mathcal{F}(K)$. Нужно лишь доказать, что F_0 - собственная грань.
В силу следствия 2.5.2 [6] существует замкнутая опорная гиперплоскость H для K, такая, что $\rho \in H$. Рассмотрим грань $F = H \cap K$. По определению F содержит ρ и является собственной выставленной (и поэтому проективной) гранью K. Так как $F_0 \subseteq F$, то F_0 также является собственной гранью в K. Лемма доказана.

Теорема 2.2.5 Пусть K - проективное аффинно телесное множество. Тогда

(i) всякая экстремальная точка K является проективной гранью;

(ii) проективная грань F в K минимальна тогда и только тогда, когда $F = \{\rho\}$, где ρ – экстремальная точка K.

Доказательство. (i). Пусть ρ – произвольная экстремальная точка K, F_0 – наименьшая проективная грань, содержащая ρ. По лемме 2.2.4 F_0 является собственной гранью K. Если $\{\rho\} \neq F_0$, то, снова применяя лемму 2.2.4, найдем собственную грань в F_0, содержащую ρ. Согласно [39, предложение I.10] проективные грани F_0 – это в точности проективные грани K, содержащиеся в F_0. Это противоречит минимальности F_0. Следовательно, $\{\rho\} = F_0$, т.е. $\{\rho\}$ – проективная грань K.

(ii). Необходимость. Пусть F – минимальная проективная грань в K. Так как F – компактное выпуклое множество, то существует экстремальная точка $\rho \in F \subset K$, которая в силу (i) является проективной гранью для K. В силу минимальности F, отсюда следует, что $F = \{\rho\}$.

Достаточность очевидна. Теорема доказана.

Замечание 10. Теорема 2.2.5 дает утвердительный ответ в аффинно телесном случае на вопрос, поставленный в замечании на стр. 504 в [39]: всякая ли экстремальная точка проективного компактного выпуклого множества является выставленной гранью?

Теорема 2.2.6 Пусть K – проективно, аффинно телесно, симметрично и не имеет отщепляемых граней. Если в

K существует след, то он единственнен.

Доказательство. От противного: пусть τ_1, τ_2 - следы в K и $\tau_1 \neq \tau_2$. Обозначим через прямую проходящую через точки τ_1 и τ_2. Очевидно, любая точка из $L(\tau_1, \tau_2) \cap K$ является следом. Пусть ρ - произвольная точка $L(\tau_1, \tau_2) \cap \partial K$. В силу леммы I.2.4 наименьшая проективная грань F_0 в K, содержащая ρ, является собственной гранью. Из симметричности K следует, что $S_p^*(F_0) \in \mathcal{F}(K)$, для любого $p \in \mathcal{P}(A)$. Так как ρ - след, то $\rho \in S_p^*(F_0)$. Поскольку F_0 - наименьшая проективная грань K, содержащая ρ, то $S_p^*(F_0) \supset F_0$. Применяя к включению $S_p^*(F_0) \supset F_0$ оператор S_p^* и учитывая, что $S_p^* \cdot S_p^*$ - тождественный оператор на V, получим $F_0 \supset S_p^*(F_0)$, т.е. $F_0 = S_p^*(F_0)$ для любого $p \in \mathcal{P}(A)$. В силу предложения 5.2 из [36] F_0 - отщепляемая грань для K, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\tau_1 = \tau_2$, т.е. след единственен. Теорема доказана.

В частности, если K - пространство нормальных состояний алгебры фон Неймана или JBW - алгебры, то отсутствие у K отщепляемых граней означает, что рассматриваемая алгебра является фактором. Таким образом, теорема 2.2.6 дает новое доказательство следующего известного результата (в случае аффинно телесного пространства состояний).

Следствие 2.2.7 Если на JBW - факторе (или W^* - факторе) су ствует следовое состояние, то оно единственно.

Определение 2.2.8 Выпуклое множество K назовем модулярным, если $\mathcal{F}(K)$ является модулярной решеткой.

Замечание II. Если K - проективное, модулярное компактное выпуклое множество, K_0 - проективная грань в K, то, как отмечено при доказательстве теоремы 2.2.5, проективные грани K_0 образуют правильную подрешетку решетки $\mathcal{F}(K)$. Следовательно, множество K_0 само также является проективным и модулярным.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем считать, что K - конечномерное компактное выпуклое множество. В этом случае, очевидно, что $A = A^b(K)$ совпадает с пространством $A(K)$ всех непрерывных аффинных функций на K.

В работе [38] было дано описание пространства состояний JB - алгебр в классе компактных выпуклых множеств. В частности для конечномерного случая был доказан следующий результат (см. [38, следствие 7.5]).

Теорема 2.2.9 Конечномерное компактное выпуклое множество K аффинно изоморфно и гомеоморфно пространству состояний JB - алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) K - проективно;

(ii) K - обладает свойством гильбертова шара.

Отправляясь от этой теоремы мы дадим следующую более простую характеризацию пространств состояний конечномерных JB - алгебр.

Т е о р е м а 2.2.10 Конечномерное компактное выпуклое множество K аффинно изоморфно и гомеоморфно пространству состояний JB - алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) K - проективно;

(ii) K - симметрично;

(iii) K - модулярно ;

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Л е м м а 2.2.11 Множество K проективно тогда и только тогда, когда любая его грань является проективной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если любая грань K проективна, то очевидно, K - проективна.

Обратно, пусть K - проективна. Докажем по индукции, что любая грань в K проективна. Если $\dim K = 1$, то утверждение очевидно. Допустим при $\dim K < n$ всякая грань K проективна. Пусть $\dim K = n$, F - некоторая собственная грань K, H - касательная к K гиперплоскость, содержащая F. Тогда $G = K \cap H$ является выставленной и поэтому проективной гранью в K [36, предложение 6.2]. Следовательно, множество G - проективно в силу [39, предложение 1.10] и $\dim G < n$. Так как F является гранью G, то по предположению индукции F - является проективная грань в G. В силу [39, предложение I.10] проективные грани G - это в точности проективные грани K, содержащиеся в G. Следовательно, F - проективная грань в K. Лемма доказана.

Учитывая лемму 2.2.11 в дальнейшем мы можем опускать прилагательное "проективная" перед словом "грань", если рассматривается проективное множество.

Л е м м а 2.2.12. Пусть K проективно и симметрично. Тогда в K существует след. Если, кроме того, K - строго выпукло, то след единственнен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathcal{S}^* = \{S^*, S \in \mathcal{S}\}$ является, в силу конечномерности K, компактной группой, действующей в K. Следовательно, на $\mathcal{S}^*$ существует инвариантная вероятностная мера m. Положив $\tau = \int (S^*\rho)\,dm(S^*)$, для произвольного $\rho \in K$, получим след τ. Пусть K строго выпукло, тогда в K нет отщепляемых граней. В самом деле, если $K = F \oplus_c F'$, то для любых экстремальных точек $\sigma \in F$ и $\sigma' \in F'$ отрезок $[\sigma, \sigma']$ является гранью K - это вытекает из единственности представления элементов $[\sigma, \sigma']$ в виде выпуклой комбинации элементов F и F'. Таким образом, грань $[\sigma, \sigma']$ является собственной не минимальной гранью, что противоречит строгой выпуклости K . Следовательно, K не имеет отщепляемых граней. В силу теоремы 2.2.6 след τ в K единственнен. Лемма доказана.

Лемма 2.2.13. Пусть K - строго выпукло, симметрично и проективно. Тогда K является эллипсоидом.

Доказательство. Пусть $\dim K = 3$. Тогда K - строго выпуклое множество на плоскости с центром симметрии τ , где τ - единственный след в K (лемма 2.2.12). Любая прямая L , проходящая через τ , определяется парой минимальных граней $\{\rho\}$ и $\{\rho\}^{\#}$. По теореме 2.2.3 K аффинно симметрично относительно этой прямой, т.е. существует семейство параллельных хорд в K , делящихся прямой L попалам. По теореме 25.5 [10, стр. 178] K является эллипсом.

Пусть K имеет произвольную размерность, H -произвольная 2 - мерная плоскость, проходящая через точку τ (центр симметрии K). Тогда множество $K \cap H$ является строго выпуклым аффинно симметричным множеством на плоскости H . Это следует из симметричности множества K . Как отмечено выше, $K \cap H$ - эллипс. В силу произвольности H , K является эллипсоидом. (см. [17, теорема 13.5]).

Лемма 2.2.14. Пусть K - проективно и модулярно. Тогда для любых двух экстремальных точек ρ, σ в K , наименьшая грань $face(\{\rho, \sigma\})$, порожденная этими точками, является либо строго выпуклым множеством, либо совпадает с сегментом $[\rho, \sigma]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $K_0 = face(\{\rho, \sigma\})$ – проективная грань K, то K_0 также является проективным и модулярным множеством.

Предположим $K_0 \neq [\rho, \sigma]$. Пусть F – собственная грань K_0, содержащая ρ, и $F \neq \{\rho\}$, тогда $F \wedge \{\sigma\} = \emptyset$. Следовательно, $(\{\rho\} \vee \{\sigma\}) \wedge F = F$, но $\{\rho\} \vee (\{\sigma\} \wedge F) = \{\rho\}$, т.е. $(\{\rho\} \vee \{\sigma\}) \wedge F \neq \{\rho\} \vee (\{\sigma\} \wedge F)$, что противоречит модулярности K_0. Следовательно, не существует собственной грани в K_0, строго содержащей ρ. Предположим, что в K_0 существует не минимальная собственная грань G. Возьмем некоторую экстремальную точку $\psi \in G$, $\psi \neq \rho$. Тогда $\{\psi\} \vee \{\rho\} = K_0$, так как в K нет собственных граней, строго содержащей ρ. Рассматривая грани $\{\psi\}$, $\{\rho\}$, G, аналогично получим противоречие с модулярностью K_0. Следовательно, K_0 содержит только минимальные грани, т.е. строго выпукло.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2.10. Необходимость условий $(i)-(iii)$ следует из [38, предложение 3.14], теоремы 2.2.9 и модулярности конечномерных JBW - алгебр [63, гл. 5], [80].

Достаточность. Пусть ρ и σ произвольные экстремальные точки K, $K_0 = face(\{\rho, \sigma\})$ грань, порожденная ρ и σ . По лемме 2.2.14 K_0 либо строго выпукло, либо совпадает с сегментом $[\rho, \sigma]$; следовательно, K_0 - эллипсоид (лемма 2.2.13). Таким образом, грань $face(\{\rho, \sigma\})$ аффинно изоморфна единичному шару в гильбертовом пространстве. Это означает, что K обладает свойством гильбертова шара. В силу теоремы 2.2.9 K аффинно изоморфно и гомеоморфно пространству состояний JB - алгебры. Теорема доказана.

Замечание 12. Как показывают примеры не симметричных, строго выпуклых множеств (например, "яйцо в $\mathbb{R}^3$ или единичный шар в $\mathbb{R}^n_p$, $p > 2$, $n = 2, 3, \ldots$), условия (i) и (iii) недостаточны для утверждения теоремы. Однако условия (i) и (ii), по-видимому, влекут условие (iii).

Замечание 13. Известно (подробнее см. [42]), что JBW - алгебра с пространством нормальных состояний K изоморфна эрмитовой части алгебры фон Неймана тогда и только тогда, когда K обладает свойством "глобального 3 - шара" (global 3 - ball property). Отсюда и из теоремы 2.2.10 вытекает следующая характеризация пространств состояний конечномерных C^* - алгебр:

Следствие 2.2.15. Конечномерное компактное выпуклое множество аффинно изоморфно пространству состояний C^* - алгебры тогда и только тогда, когда оно проективно, симметрично, модулярно и обладает свойством глобального 3 -шара.

§ 2.3 Однородность самодуальных конусов в конечномерных пространствах

Пусть H - конечномерное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$, H^+ - самодуальный конус в H, т.е.

$$H^+ = \{\xi \in H : \langle \xi, \eta \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } \eta \in H^+\}$$

Через $Fac(H^+)$ обозначим множество всех граней H^+, P_F означает ортогональную проекцию на пространство $F-F$, порожденное $F \in Fac(H^+)$.

Напомним, что грань F называется полной, если $F = F^{\perp\perp}$, где $F^\perp = \{\xi \in H^+ : \langle \xi, \eta \rangle = 0$ для всех $\eta \in F\}$. Совокупность полных граней H^+ обозначим через $\mathfrak{F}(H^+)$. Пусть $O(H)$ - множество всех порядково ограниченных операторов в H (см. § I.4), $S(H^+)$ - множество всех унитарных положительных операторов на H, таких, что $UT = TU$ для всех $T \in O(H)$ $\mathfrak{D}(H^+)$ - множество дифференцирований конуса H^+, т.е.

$$\mathfrak{D}(H^+) = \{\delta \in L(H) : e^{t\delta} H^+ \subset H^+ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(H^+)_{SA}$ множество всех самосопряженных операторов из $\mathfrak{D}(H^+)$.

Вектор $\xi_0 \in H^+$ называется следовым вектором, если $U\xi_0 = \xi_0$ для всех $U \in S(H^+)$. Конус H^+ называется симметричным, если $U_F = 2(P_F + P_{F^\perp}) - I$ лежит в $S(H^+)$ для любого $F \in Fac(H^+)$, однородным, если $P_F - P_{F^\perp} \in \mathcal{D}(H^+)$ для любого $F \in Fac(H^+)$; регулярным, если $P_F H^+ \subset H^+$ для любого $F \in Fac(H^+)$; модулярным, если решетка $\mathcal{F}(H^+)$ является модулярной решеткой.

В работе [47] было дано описание множества положительных элементов JB - алгебры в классе самодуальных конусов. В частности, для конечномерного случая был доказан следующий результат (см. [47, теоремы 5.4, 6,I]), (см. также работы Э.Б.Винберга [II], [I2], [I3]).

Теорема 2.3.I Пусть H^+ самодуальный конус в конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H. Тогда $\mathcal{D}(H^+)_{SA}$ совпадает с конусом положительных элементов JB - алгебры тогда и только тогда, когда конус H^+ является однородным.

Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 2.3.2. Пусть H^+ самодуальный конус в конечномерном вещественном гильбертовом пространстве H. Тогда $\mathcal{D}(H^+)_{SA}$ совпадает с конусом положительных элементов JB - алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) H^+ - симметричен;

(ii) H^+ - модулярен.

Доказательство. Предварительно докажем несколько лемм.

В дальнейшем, говоря о конусе H^+, будем предполагать, что H^+ самодуальный конус в H.

Лемма 2.3.3. Пусть F грань H^+. Тогда

i) Если H^+ регулярен, тогда $P_F H^+ = F$ и F является самодуальным конусом в $P_F H$.

ii) Если H^+ симметричен и регулярен, тогда $F = F^{\perp\perp}$

Доказательство. i) Если $\xi \geq 0$ тогда по предположению $P_F \xi \geq 0$. Так как $P_F \xi = \eta - \rho$, где $\eta, \rho \in F$, то

$$0 \leq P_F \xi \leq P_F \xi + \rho = \eta \in F \quad \text{и} \quad P_F \xi \in F$$

По лемме I.I.I3 [64] $P_F H^+ = F$ означает, что F самодуальный конус в $P_F H$.

ii) Так как $P_F P_{F^\perp} = P_{F^\perp} P_F$ и $P_F P_{F^{\perp\perp}} = P_F$ то $U_F U_{F^{\perp\perp}} = I + 2P_F - 2P_{F^\perp}$. Поэтому, если H^+ симметричен и $\xi \in F^{\perp\perp}$, то $2\xi = 2P_{F^{\perp\perp}}\xi \leq$ $\leq (I + 2P_F)\xi$ и $0 \leq \xi \leq 2P_F \xi \in F$.

Отсюда $\mathcal{E} \in F$ и $F^{\perp\perp} \subset F$. Следовательно, $F = F^{\perp\perp}$. Лемма доказана.

Замечание I4. Заметим, что из леммы 2.3.3 ii) следует, $Fac(H^+)$ является ортомодулярной решеткой, а ее атомы - одномерные грани (см. [64, лемма П.I.7]).

Лемма 2.3.4. Пусть конус H^+ симметричен и модулярен. Тогда любой самодуальный конус L^+ в гильбертовом подпространстве $L \subset H$ такой, что $L^+ \subset H^+$, является симметричным и регулярным. В частности, любая грань F является симметричным регулярным самодуальным конусом в $P_F H$

Доказательство. Пусть $F \in Fac(H^+)$ В силу леммы 2.3.3 и леммы П.7.I [64] следует, что $F = \langle F \rangle \cap L^+$, где $\langle F \rangle$ - грань, порожденная F в H^+, $P_F = P_L P_{\langle F \rangle} P_L$, $P_{F^\perp} = P_L P_{\langle F^\perp \rangle} P_L$ и P_L сохраняет порядок. Следовательно, $L^+ \subset H^+$ и L^+ симметричен и регулярен. Лемма доказана.

Лемма 2.3.5. Пусть H^+ симметричен и регулярен. Тогда существует следовый вектор $\mathcal{E}_0$ такой, что $\mathcal{E}_0 = P_F \mathcal{E}_0 + P_{F^\perp} \mathcal{E}$ для любого $F \in Fac(H^+)$

Доказательство. В силу леммы I.2.I0 [64] $S(H^+)$ имеет неподвижную точку $\mathcal{E}_0$. Так как $U_F \in S(H^+)$ для любого $F \in Fac(H^+)$, то

$P_F \mathcal{E}_0 + P_{F^\perp} \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0$. Лемма доказана.

Пусть Δ гиперплоскость в пространстве H, порожденная следовым вектором $\mathcal{E}_0$, т.е.

$$\Delta = \{\rho \in H : \langle \rho, \mathcal{E}_0 \rangle = 0, \ \mathcal{E}_0 \text{ - следовый вектор} \}$$

и $B = \Delta \cap H^+$. Тогда B является базой для H^+ и $Fac(B) = \{ F \cap B : F \in Fac(H^+) \}$.

Из леммы 2.2.13 и теоремы II.2.I [64] вытекает

Л е м м а 2.3.6. Пусть H^+ симметричен и регулярен. Если его база B строго выпукла, тогда конус H^+ является однородным.

Л е м м а 2.3.7. Пусть H^+ симметричный и модулярный конус, F, G экстремальные грани H^+. Тогда грань $F \vee G$, порожденная этими гранями, содержит только экстремальные грани.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Регулярность H^+ следует из [46]. Утверждение леммы доказывается аналогично лемме 2.2.14.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.3.2

Необходимость. Пусть $\mathfrak{D}(H^+)_{SA}$ совпадает с конусом положительных элементов JB - алгебры, в силу теоремы 2.3.I, конус H^+ является однородным. Тогда H^+ симметричен (см. [67, предложение II.I.3]) и модулярен (см. [67, предложение Ш.6.4], леммы 2.3.3 и 2.3.5).

Достаточность. Пусть H^+ симметричен и модулярен. Тогда H^+ регулярен [46]. Пусть F, G две экстремальные грани H^+. По лемме 2.3.7, $F \vee G$ либо двумерный конус, либо $B \cap (F \vee G)$ является строго выпуклой базой $F \vee G$. В первом случае $F \vee G$, очевидно, однороден, во втором случае $F \vee G$ самодуальный однородный конус в $P_{F \vee G} H$ (лемма 2.3.6).

Пусть ξ - экстремальная точка H^+ и $F \in Fac(H^+)$. Тогда мы имеем

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})}\xi = e^t P_F \xi + e^{-t} P_{F^\perp}\xi +$$

$$+ [I - (P_F + P_{F^\perp})]\xi \in H^+$$

для всех $t \in R$.

Так как $U_F \xi$ является экстремальной точкой H^+, то $G = \langle \xi \rangle \vee \langle U_F \xi \rangle$ является однородным в $P_G H$. Кроме того,

$$0 \le P_F \xi \le (P_F + P_{F^\perp})\xi = \frac{1}{2}(\xi + U_F \xi) \in G,$$

отсюда $P_F \xi \in G$ и, аналогично, $P_{F^\perp} \in G$. Следовательно, конус G - однороден.

Теперь пусть ξ произвольный элемент H^+. Так как ξ является выпуклой комбинацией экстремальных точек, то оператор $e^{t(P_F - P_{F^\perp})}$ сохраняет порядок для всех $t \in R$. Отсюда следует, что H^+ однородный конус.

В силу теоремы 2.3.I $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^{+})_{SA}$ совпадает с конусом положительных элементов JB - алгебры. Теорема 2.3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адизов А.А. Описание мер на проекторах и нормальных весов в йордановых банаховых алгебрах. Дисс. на соискание учен. степени канд.физ.-мат.наук. Ташкент: 1986. 100 с.
2. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: "ФАН". 1986. 124 с.
3. Аюпов Ш.А. Йордановы операторные алгебры. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т.27// Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. 1985. С.67-98.
4. Аюпов Ш.А. Некоммутативная теория Шоке для мер на гранях выпуклых множеств. // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. 1988. № 6. С. 3 - 7.
5. Аюпов Ш.А., Адизов А.А. Вероятностные меры на проекторах JBW - алгебр.// Деп. ВИНИТИ. 1984. № 7822-84. Деп. 40 с.
6. Берже М. Геометрия. Т.I. М.: Мир. 1984. 560 с.
7. Биркгоф Г. Теория структур. М.: ИЛ. 1952. 407 с.
8. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров Н.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука. 1969. 424 с.
9. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир. 1982. 512 с.

10. Б у з е м а н Г., К е л л и П. Проективная геометрия и проективные метрики. М.: ИЛ. 1957. 410 с.

11. В и н б е р г Э.Б. Однородные конусы.// Доклады АН СССР. 1960. Т.133. № 1. С.9-12.

12. В и н б е р г Э.Б. Автоморфизмы однородных выпуклых конусов. // Доклады АН СССР. 1962. Т.143. № 2. С.265-268.

13. В и н б е р г Э.Б. Теория выпуклых однородных конусов.// Труды Моск. мат. об-ва. 1963. Т.12. С.340-403.

14. Д и к с м ь е Т. C^* - алгебры и их представления. М.: Наука. 1974. 400 с.

15. З и м а к о в Н.П. О марковских операторах, удовлетворяющих условиям (A) и (A^*), в упорядоченных нормированных пространствах с базой. // Доклады АН УзССР. 1986. № 11. С.8-10.

16. З и м а к о в Н.П., Х а л м у х а м е д о в А.С. Носители элементов в упорядоченных векторных пространствах, удовлетворяющих слабому спектральному условию.// Деп. ВИНИТИ. 1987. № 6476-В87. Деп. 8 с.

17. Л е й х т в е й с К. Выпуклые множества. М.: Наука. 1985. 336 с.

18. М а к к и Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир. 1965. 221 с.

19. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А., Х а д ж и е в Дж., Ч и л и н В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: ФАН. 1983. 304 с.

20. С а р ы м с а к о в Т.А. О новом аксиоматическом подхо-де в теории операторных алгебр.// Успехи мат. наук. Т.40. Вып.4 (244). 1985. С.193-194.

21. С а р ы м с а к о в Т.А., З и м а к о в Н.П. Эргодические свойства марковских операторов в упорядоченных нормированных пространствах с базой.// Операторные алгебры и функциональные пространства. Ташкент: ФАН. 1988. С.45-53.

22. С а р ы м с а к о в Т.А., З и м а к о в Н.П. Эргодический принцип для марковских полугрупп в упорядоченных нормированных пространствах с базой. // Доклады АН СССР. 1986. Т.289. № 3. С.554-558.

23. С и г а л Н. Математические проблемы релятивистской физики. М.: МИР. 1968. 191 с.

24. Т и х о н о в О.Е. Неравенства для пространств в спектральной двойственности, связанные с выпуклыми функциями и следом.// Казан. ун-т. Казань: 1987. 1[illegible] с. Деп. в ВИНИТИ. № 3591-В87.

25. Т и х о н о в О.Е. Пространства $L_p(\tau)$, ассоциированные с пространствами в спектральной двойственности.// Казан. ун-т. Казань. 1987. 10 с. Деп. в ВИНИТИ. № 32792 - В87.

26. Х о л е в о А.С. Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры. М.: Знание. 1985. 32 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "математика, кибернетика". № 6).

27. Х о л е в о А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука. 1980. 320 с.
28. Х о р у ж и й С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М.: Наука. 1986. 304 с.
29. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир. 1971. 360 с.
30. Э м х Ж. Алгебраические методы в статистической механики и квактовой теории поля. М.: Мир. 1976. 424 с.
31. A b b a t i M.C. and M a n i a A. A spectral theory for order unit spaces. // Ann. Inst. Henri Poincare. 1981. XXXV. 4. p. 259-285.
32. A b b a t i M.C. and M a n i a A. Quantum logic and operational quantum mechanics. // Reports of math. Physics. 1984. 19. p. 383-406.
33. A l f s e n E.M. "Compact convex sets and boundary integrals" Ergebnisse der Math. 57. Springer Verlag. Berlin. 1971. 210 p.
34. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "On the geometry of noncommutative spectral theory"// Bull. Amer. Math. Soc. 1975. 81. p. 893-895.
35. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "Noncommutative spectral theory for affine functions on convex sets". Parts I,II, Preprints, Universitet Oslo 1975.
36. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets". Memoirs Amer. Math. Soc. No 172. Providence R.I. 1976. 120 p.

37. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "State spaces of Jordan algebras". Oslo preprint 1976.

38. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "State spaces of Jordan algebras"// Acta Math. 1978. 140. p.155-190.

39. A l f s e n E.M. and S h u l t z F.W. "On non-commutative spectral theory and Jordan algebras"// Proc. London. Math. Soc. 1979. 38. p. 497-516.

40. A l f s e n E.M., S h u l t z F.W. and S t o r m e r E. "A Gelfand - Neumark theorem for Jordan algebras"// Advances in math. 1978. 28. p. 11-56.

41. A l f s e n E.M., H a n c h e - O l s e n H. and S h u l t z F.W. "State spaces of C^* - algebras". Oslo preprint 1978.

42. A l f s e n E.M., H a n c h e - O l s e n H. and S h u l t z F.W. "State spaces of C^* - algebras"// Acta Math. 1980. 144. p.267-305.

43. A m a n n A. 'Jauch-Piron states in W^* - algebraic quantum mechanics"// J. Math. Physics, 1987. 26. p.2384-2389.

44. A r a k i H. "On the characterization of the state space of quantum mechanics" // Commun. Math. Physics. 1980. 75. p.1-25.

45. A s i m o v L. and E l l i s A.J. "Convexity theory and its Applications in Functional Analysis". Academic Press. London. 1980.

46. B a r k e r G.P. "Perfect cones"// Linepr Alg and its Appl. 1978. 22. p. 211-221.

47. B e l l i s s a r d J. and I o c h u m B. "Homogeneous self dual cones, versus Jordan algebras. The theory revisited." // Ann. Inst. Fourier, Grenoble 1978. v.28. No 1. p. 28-67.

48. B i r k h o f f G. and N e u m a n n J. "On the logic of quantum mechanics".// Ann. Math. 1936. 37. p.823-843.

49. B o n n e t P. Une theorie spectrale dans Certains Espace de Banach Ordannes" Prep. Universite de Saint - Etienne. Departament de Math. 1975.

50. B u n c e L.J. and W r i g h t J.D.M. "Quantum logics, state space geometry and operator algebras".// Commun. Math. Physics. 1984. 96. p. 345-348.

51. B u n c e L.J. and W r i g h t J.D.M. "Quantum measures and states on Jordan algebras"// Commun. Math. Physics. 1985. 09. p. 187-202.

52. B u n c e L.J. and W r i g h t J.D.M. "Quantum logics and convex geometry"// Commun. Math. Physics. 1986. 101. p. 87-96.

53. B u n c e L.J., N a v a r a M., P t a k P. and W r i g h t J.D.M. "Quantum logics with Jauch-Piron states"// Quart. J. Math. Oxford 1985. 36. p. 261-271.

54. C h u C.H. "On convexity theory and C^* - algebras"// Proc. London. Math. Soc. 1975. 31. p.257-288.

55. C h u C.H. and W r i g h t J.D.M. "Une theorie des types pour une classe d'espaces de Banach ordannes"// Comples Rendus Acad. Sciences. Paris. 1975. 281. No 15. P.A 633-A636.

56. Chu C.H. and Wright J.D.M. "A theory of types for convex sets and ordered Banach spaces"// Proc. London Math. Soc. 1978. 36. p. 494-517.

57. Dixmier J. Les algebras d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris: Gauthier-Villars. 1969. 369 p.

58. Edwards C.M. and Ruttimann G.T. "Isometries of GL -spaces"// J.London Math. Soc. 1975. 31. p.125-130.

59. Edwards C.M. and Ruttimann G.T. "On the facial structure of the unit balls in a GL -space and its dual"// Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1985. 98. p. 305-322.

60. Edwards C.M. and Ruttimann G.T. "On the facial structure of the unit vall of a GM -space"// Math. Z. 1986. 193. p. 597-611.

61. Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces. Lect. Notes in Physics. 1974. 29. 355 p.

62. Holevo A.C. "Statistical definition of observable and the structure of statistical models"// Reports of Math. Phys. 1985. 22. p. 385-407.

63. Hanche-Olsen H. and Stormer E. "Jordan Operator Algebras" London: Pitman L.T.D. 1984. 183 p.

64. Iochum B. "Cones autopolaires et algebres de Jordan" Springer-Verlag. Berlin: 1984. 247 p.

65. Iochum B. and Shultz F.W. "Normal State spaces of Jordan and von Neumann algebras".// J.of Func. Anal. 1983. 50. p. 317-328.

66. J o r d a n P., von N e u m a n n J. and W i g n e r E. "On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism".// Ann. of Math. 1934. V.35. p.29-64.

67. K a l m b a c h G. "Orthomodular lattices". London: Academic Press. 1983. X +390 p.

68. K a l m b a c h G. "Measures and Hilbert lattices". SINGAPORE : 1986. V+246 p.

69. L u d w i g G. "Foundations of quantum mechanics" Berlin: Springer. 1983. XII + 426 p.

70. L u x e m b u r g W.A.J. and Z a a n e n A.C. "Riesz spaces I". North Holland Publishing Company. Amsterdam. 1971. XI + 514 p.

71. M u r r a y F. and von N e u m a n n J. "On rings of operators."// Ann. of Math. 1936. v.36. p.116-229.

72. P e d e r s e n G. " C^*-algebras and their automorphism groups" Academic press. London: 1979. 416 p.

73. R e i d e l N. "Spektraltheorie in geordneten vertorraumen"// Rev. Roum. Math. Pures et appl. 1983. Tome XXVIII, No 1. p.33-76.

74. R u t t i m a n n G.T. "Jauch - Piron state"// J.Math. Phys. 1977. v.18. p.189-193.

75. S a k a i S. " C^*-algebras and W^*- algebras". Berlin: Springer, 1971. IX + 256 p.

76. S h u l t z F.W. "On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces"// J. of Func. Anal. 1979. v.31. p. 360-376.

77. S t a c e y P.J. "Type I points in a compact convex set."// J.London Math. Soc. 1975. v.10. p.306-308.

78. S t r a t i l a S., Z s i d o L. "Lectures on von Neumann algebras" Bucuresti: Editura Academiei; Tunbridge Wells: Abacus Press, 1979, 478 p.

79. T a k e s a k i M. "Theory of operator algebras". Berlin: Springer, 1979, VIII + 415 p.

80. T o p p i n g D.M. "Jordan algebras of self adjoint algebras" Memeoirs Amer. Math. Soc. 1965. v.53. p. 1-48.

81. V a r a d a r a j a n V.S. "Geometry of quantum theory." Berlin: Springer. 1985. XYIII+412 p.

82. W r i g h t J.D.M. and Y o u n g s o n A.A. "On isometries of Jordan algebras"// J.London Math. Soc. 1978. v.17. p. 339-344.

83. Б е р д и к у л о в М.А., Я д г о р о в Н.Ж. "Пространства с порядковой единицей типа I".// Операторные алгебры и функциональные пространства. Ташкент: ФАН. 1988. С.17-21.

84. Я д г о р о в Н.Ж. "Понятия модулярности и конечности ρ - проекторов в пространстве с порядковой единицей// Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. 1988. № 2. С.42-45.

85. Я д г о р о в Н.Ж. "Изометрии пространств с порядковой единицей."// Доклады АН УзССР. 1988. № 8. С.4-6.

86. А ю п о в Ш.А., Я д г о р о в Н.Ж. "Свойства спектральных выпуклых множеств".// Доклады АН УзССР.1989. № 7. С. 3-4.

87. А ю п о в Ш.А., Я д г о р о в Н.Ж. "Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах".// Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. 1989. № 3. С.3-7.

88. А ю п о в Ш.А., Я д г о р о в Н.Ж."Двойственность упорядоченных пространств и характеризации проективных единиц".// Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. 1989. № 6 С. 13 - 19.

89. А ю п о в Ш.А., И о к у м В., Я д г о р о в Н.Ж. "Геометрия пространств состояний конечномерных йордановых алгебр."// Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1989. № . С.

90. A j u p o v Sh.A., I o c h u m B. and Y a d g o r o v N.Dz. "Symmetry versus facial homogeneity for selfdual cones."// Centre de Physique Theorique Marseille, preprint. May 1989. CPT-89/ P.2268.