

哈尔滨理工大学

硕士学位论文

Orlicz空间的若干几何性质在鞅理论中的应用

姓名：于丽梅

申请学位级别：硕士

专业：@

指导教师：崔云安

201103

Orlicz 空间的若干几何性质在鞅理论中的应用

摘 要

Orlicz 空间理论和鞅理论在各自的领域都有了一定的发展和完善,但是 Orlicz 空间的几何性质在鞅理论中的研究才刚刚开始,尤其是赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何性质在鞅理论中的应用还没有进行研究。本文对 B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式、鞅空间上算子的有界性和 Orlicz 空间的 p 一致凸性进行了一些研究。本文共分四部分,主要工作总结如下:

回顾了 Orlicz 空间理论在鞅理论中的应用和 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的发展历程,总结了已得出的主要结果,并给出了本文各章节所研究的主要内容。

本文对 B 值鞅的极大函数和 p 均方函数的 p -Amemiya 范数不等式进行了研究,其结果给出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。这将有助于我们更好的研究 Orlicz 空间的几何性质和鞅理论。

本文研究了鞅空间上平削算子和变差算子的有界性,得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

p 一致凸性是 Banach 空间中重要的几何性质。本文根据 N 函数 Φ 定义了另一个 N 函数 M ,得出了赋 Luxemburg 范数、赋 Orlicz 范数和赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间 L_M p 一致凸性的判别准则。

关键词 p 一致凸性; q 一致光滑性; p -Amemiya范数; 鞅空间; Orlicz 空间

The Application of Some Geometric Properties of Orlicz Space in the Martingale Theory

Abstract

The theory of Orlicz space and the martingale theory in their respective have had certain development and perfection, but the application of some geometric properties of Orlicz space in the martingale theory research has just begun, especially the application of some geometric properties of Orlicz space equipped with the p -Amemiya norm in the martingale theory research has not begun. The p -Amemiya norm inequalities of B -valued martingales and the boundedness of some operators of Martingale space and p uniform convexity of Orlicz space will be studied. This thesis consists of four parts. The main results are as follows:

It is reviewed that the application of theory of Orlicz space in the martingale theory and developing process of the p -uniform convexity and q -uniform smoothness of Banach space. Moreover, main research results relative to propewrties mentioned above that have been already summarized and the main contents of this thesis are shown.

The p -Amemiya norm inequalities of the maximal functions and the p -mean functions of B -valued martingales are proved, meaning while criteria for a Banach space are the p -uniform convexity and q -uniform smoothness are presented. This will help us to study the Orlicz space and Martingale theory better.

The boundedness of pingxiao operator and variable operator of Martingale space are proved. Moreover, the criterion of the p -uniform convexity and q -uniform smoothness of Banach space are presented.

P -uniform convexity is an important geometric property in Banach space. According to N function Φ , we define another N function M . So the criterion of the p -uniform convexity of Orlicz space L_M equipped with the Luxemburg norm and the Orlicz norm and the p -Amemiya norm are presented.

Keywords p -uniform convexity, q -uniform smoothness, p -Amemiya norm, martingale space, Orlicz space

第1章 绪论

1.1 研究的目的是和意义

鞅与 Banach 空间几何学是自 20 世纪六七十年代以来, Banach 空间理论、鞅论与调和分析相互交叉渗透形成的新的学科分支。B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式与鞅空间理论是泛函分析、Orlicz 空间理论和经典鞅论的有机结合。事实证明, 经典鞅论中的不等式和算子的有界性在一般 Banach 空间情况不再成立, 他们仅在值空间具有一定的几何条件时才成立, 因此寻找使他们成立的几何条件至为关键。本文将以此观点探讨 B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式与鞅空间上算子的有界性的问题。

1986 年, 吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文^[1]给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间一致凸性的等价条件。本文将研究赋 p -Amemiya 范数、赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 p 一致凸性的判别条件。

这将有助于我们更好的研究鞅与 Banach 空间几何学的关系、鞅理论与 Orlicz 空间理论的关系, 使得 Banach 空间几何学、Orlicz 空间理论和鞅理论更加完善、更加系统化。

1.2 国内外文献综述

到目前为止, Banach 空间几何学、Orlicz 空间理论和鞅理论在各自的领域都得到了一定的发展和完善, 同时众多数学工作者又在不断开拓新的研究方向, 使得 Banach 空间几何学、Orlicz 空间理论和鞅理论得到了不断的推广和深化。

上个世纪, Assouad^[2]给出了 Assouad 定理, 它是后来刻画 p 一致凸性和 q 一致光滑性的鞅不等式的关键。

1975 年, Pisier^[3]为 B 值鞅不等式与鞅空间的有关问题提供了一个起点。

1986 年, 吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文^[1]给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间一致凸性的等价条件。

大约在 1987 年, 引入了 p 均方函数的概念。以后的事实证明它是研究 Banach 空间值鞅不等式和鞅空间问题的关键。

1988 年, Pisier^[4] 给出了关于变差算子的不等式。

1989 年和 1991 年, 刘培德^{[5][6]} 给出了关于鞅的 p 均方函数不等式。

2006 年以来, 崔云安, 段丽芬^[7] 等研究了赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的若干几何性质。

2007 年, 刘培德^{[8]225-240} 系统讨论了 B 值鞅的极大函数、 p 均方函数和条件 p 均方函数的 Luxemburg 范数不等式, 其结果给出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的等价条件, 把 Banach 空间的几何性质、Orlicz 空间理论与鞅理论有机联系在一起了。

2007 年, 刘培德^{[8]252-261} 讨论了 B 值鞅空间上算子的有界性, 通过给出鞅空间上平削算子和变差算子的 Luxemburg 范数不等式, 得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

2007 年, 于林^[9] 通过给出一个算子值乘子序列, 定义了一个广义鞅变换算子。

2007 年, 于林^[9] 研究了广义鞅变换算子的 Orlicz 范数不等式, 得出了证明 B 值鞅的极大函数、 p 均方函数的 Orlicz 范数不等式的新方法, 其结果给出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的又一个判别准则。

2007 年, 刘培德^{[8]179-315} 给出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的若干判别准则。

Orlicz 空间的几何性质在鞅理论中应用的文章及参考文献较少, 这给我们进一步研究这些结论带来了一定的困难。最主要的解决方法是通过仔细阅读有限的参考文献, 向导师请教, 并进行一些创新, 使这个问题得以解决。

B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式与鞅空间理论是泛函分析、Orlicz 空间理论和经典鞅论的有机结合。事实证明, 经典鞅论中的不等式和算子的有界性在一般 Banach 空间情况不再成立, 他们仅在值空间具有一定的几何条件时才成立, Orlicz 空间 p 一致凸性的判别条件也还没有得出。因此, 本文将研究 B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式与鞅空间上若干算子的有界性以及赋 p -Amemiya 范数、赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 p 一致凸性的判别准则, 这将有助于我们更好的研究 Orlicz 空间几何性质在鞅理论中的应用。因此研究赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何性质在鞅理论中的应用是非常有意义的。

1.3 课题来源

本课题来源于导师崔云安教授的海外学人基金项目(1152hq07)。

1.4 本文主要工作

本文主要研究 Orlicz 空间的若干几何性质在鞅理论中的应用。

一、B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式。

在本章中，我们对 B 值鞅的极大函数和 p 均方函数的 p -Amemiya 范数不等式进行了系统的研究，其结果给出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

二、鞅空间上算子的有界性。

在本章中，我们通过对鞅空间上平削算子、变差算子的有界性的研究，给出了平削算子、变差算子的 p -Amemiya 范数不等式，得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

三、Orlicz 空间的 p 一致凸性。

在本章中，我们根据 N 函数 Φ 定义了另一个 N 函数 M ，对于 N 函数 M 所生成的 Orlicz 空间 L_M ，我们推断证明了赋 p -Amemiya 范数、赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 L_M 是 p 一致凸的。

第2章 B 值鞅的 p-Amemiya 范数不等式

2.1 引言

B 值鞅的 p-Amemiya 范数不等式与鞅空间理论是泛函分析、Orlicz 空间理论和经典鞅论的有机结合。事实证明，经典鞅论中的不等式在一般 Banach 空间情况不再成立，他们仅在值空间具有一定的几何条件时才成立，因此本章将给出 B 值鞅的 p-Amemiya 范数不等式。下面我们给出一些基本概念：

定义 2.1 若 Φ 满足：(1) Φ 是非负的偶的连续凸函数；(2) $\Phi(0)=0$ ；
(3) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ ，则称 Φ 是 N 函数。

定义 N 函数 $\Phi(u)$ 的余函数 $\Psi(v)$ 为 $\Psi(v) = \sup\{|v|u - \Phi(u) : u \geq 0\}$ 。

定义 2.2 对于 N 函数 Φ ，若存在 $K > 0$ 和 $u_0 \geq 0$ 使得

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u) \quad (u \geq u_0)$$

则称 N 函数 Φ 满足 Δ_2 条件。

定义 2.3 设 $f = (f_n, B_n, n \geq 0)$ 简记 $f = (f_n)$ 为 B 值鞅，鞅差为 $df = (df_n)$ ，其中 $df_n = f_n - f_{n-1}$ ， $B_{-1} = \{\emptyset, \Sigma\}$ 。令 f 的极大函数， p 均方函数和条件 p 均方函数分别为：

$$\begin{aligned} f_n^* &= \sup_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|, \quad f_n^* = \sup_{n \geq 1} f_n^* \\ S_n^{(p)}(f) &= \left(\sum_{i=0}^n \|df_i\|^p \right)^{1/p}, \quad S^{(p)}(f) = \sup_{n \geq 1} S_n^{(p)}(f) \\ \sigma_n^{(p)}(f) &= \left(\sum_{i=0}^n E(\|df_i\|^p | B_{i-1}) \right)^{1/p}, \quad \sigma^{(p)}(f) = \sup_{n \geq 1} \sigma_n^{(p)}(f) \end{aligned}$$

这里 $1 \leq p < \infty$ 。

定义 2.4 设 Φ 是 N 函数， $p_\Phi = \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}$ ， $q_\Phi = \inf_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}$ ， $q_\Phi = \frac{q_\Phi}{q_\Phi - 1}$ 。

若 Φ 还满足 $p_\Phi > 1$ ，则称 Φ 是严格凸的 N 函数。

定义 2.5 设 X 是 Banach 空间， Φ 是 N 函数，在测度空间 (Ω, Σ, μ) 上定

义 $L_{\Phi}(\mu, X) = \{f: \|f\|_{\Phi, p} < \infty\}$, 其中

$$\|f\|_{\Phi, p} = \begin{cases} \inf_{k>0} k^{-1} \left(1 + \rho_{\Phi}^p(k\|f(\omega)\|)\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \inf_{k>0} k^{-1} \max\{1, \rho_{\Phi}(k\|f(\omega)\|)\}, & p = \infty \end{cases}$$

其中 $\|f\|_{\Phi, 1} = \|f\|_{\Phi}$, $\|f\|_{\Phi, \infty} = \|f\|_L$ 。

定义 2.6 设 (Ω, Σ, μ) 是概率空间, $(B_n, n \geq 0)$ 是子 σ 代数序列且是递增的。称映射 $\tau: \Omega \rightarrow N \cup \{\infty\}$ 是一个停时, 若 $\{\omega: \tau(\omega) \leq n\} \in B_n, \forall n \geq 1$ 。

定义 2.7 一对非负函数 (u, v) 称为满足好 λ 不等式, 若对于 $\alpha > 1$ 和 $\beta_n (\beta_n > 0, \beta_n \rightarrow 0)$, 存在 $\varepsilon_{\alpha\beta_n}$ 和有界序列 $\delta_{\alpha\beta_n}$, 使得 $\forall \lambda > 0$,

$$P(u > \alpha\lambda) \leq \varepsilon_{\alpha\beta_n} P(u > \lambda) + \delta_{\alpha\beta_n} P(v > \beta_n \lambda)$$

并且对于固定的 α , $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{\alpha\beta_n} = 0$ 。

引理 2.1^{[8]221-222} 设 Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, u, v 是非负随机变量, 满足 $E u \varphi(u) < \infty$, $E u \varphi(u) < E v \varphi(u)$, 则 $E \Phi(u) \leq E \Phi(v)$ 。

引理 2.2^{[8]189-190} 设 $2 \leq p < \infty$, Banach 空间 X 是 p -一致凸的等价于对于任何的 X 值鞅 f , 存在 $c > 0$, 使得

$$c \sup_{n \geq 0} E \|f_n\|^p \geq \sum_{n=0}^{\infty} E \|df_n\|^p$$

引理 2.3^{[8]225-225} 设 Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 非负函数对 (u, v) 满足好 λ 不等式, 则只要 $\beta = \beta_n$ 足够小就有

$$E \Phi(u) \leq c_{\alpha} c_{\beta}^{-1} \delta_{\alpha\beta} (1 - c_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta})^{-1} E \Phi(v)$$

引理 2.4^{[8]230-230} 每个 X 值鞅 $f = (f_n)$ 有分解 $f = g + h$, 其中 $g = (g_n)$, $h = (h_n)$ 都是鞅, 并且 $\|dg_n\| \leq 4d_{n-1}^*(f)$, $E \sum_{n=1}^{\infty} \|dh_n\| \leq 4Ed^*(f)$ 。

引理 2.5^{[8]222-222} 设 (A_n) 是非负增加适应序列, $Y \geq 0$, 若

$$E(A_{\infty} - A_{n-1} | B_n) \leq E(Y | B_n) \quad n \geq 0$$

则对于任何 N 函数 Φ ,

$$E \Phi(A_{\infty}) \leq E \Phi(A_{\infty}) Y$$

若 Φ 还满足 Δ_2 条件, 则

$$E \Phi(A_{\infty}) \leq p_{\Phi} E \Phi(Y)$$

引理 2.6^{[8]229-230} 设 $2 \leq p < \infty$, X 是 Banach 空间。 X 同构于 p -一致凸空

间等价于对于任何 X 值鞅 f , 当 $\|f\|_\infty < \infty$ 时, 有 $S^{(p)}(f) < \infty$ a.e.

引理 2.7^{[8]234-234} 设 $1 < q \leq 2$, X 是 Banach 空间. X 同构于 q -一致光滑空间等价于对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$, 若 $S^{(q)}(f) \in L_\infty$, 则 f_n a.e. 收敛.

2.2 B 值鞅的 p -Amemiya 范数不等式

定理 2.1 设 Φ 是严格凸的 N 函数且满足 Δ_2 条件, u, v 是非负随机变量, 满足

$$\lambda \mu(u > \alpha \lambda) \leq \int_{\{u > \beta \lambda\}} v d\mu, \forall \lambda > 0 \quad (2-1)$$

其中 $\alpha \geq \beta > 0$, 则

$$\|u\|_{\Phi, p} \leq \alpha c q_\Phi \|v\|_{\Phi, p}$$

证明 对公式(2-1)两端关于 $d\varphi(\lambda)$ 积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \int_{\{u > \alpha \lambda\}} d\mu d\varphi(\lambda) &\leq \int_0^\infty \int_{\{u > \beta \lambda\}} v d\mu d\varphi(\lambda) \\ \int_\Omega \int_0^{\frac{u}{\alpha}} \lambda d\varphi(\lambda) d\mu &\leq \int_\Omega \int_0^{\frac{u}{\beta}} v d\varphi(\lambda) d\mu \\ E \int_0^{\frac{u}{\alpha}} \lambda d\varphi(\lambda) &\leq E v \int_0^{\frac{u}{\beta}} d\varphi(\lambda) \end{aligned}$$

则

$$E\left(\frac{u}{\alpha} \varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right) - E\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right) \leq E v \varphi\left(\frac{u}{\beta}\right) \quad (2-2)$$

由于 $q_\Phi = \inf_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}$, 则 $\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{q_\Phi} \frac{u}{\alpha} \varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right)$. 又由于 $\frac{\Phi(t)}{t^{p_\Phi}}$ 是 t 的下降函

数, $p_\Phi = \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}$, 从而对 $\forall t > 0, \gamma \geq 1$ 有

$$\varphi(\gamma t) \leq p_\Phi \frac{\Phi(\gamma t)}{\gamma t} \leq p_\Phi (\gamma t)^{p_\Phi-1} \frac{\Phi(t)}{t^{p_\Phi}} \leq p_\Phi \gamma^{p_\Phi-1} q_\Phi^{-1} \varphi(t) \quad (2-3)$$

令公式(2-3)中 $t = \frac{u}{\alpha}, \gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, 然后将其代入公式(2-2)得到

$$E\left(\frac{u}{\alpha} \varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right) \leq \frac{q_\Phi}{q_\Phi - 1} p_\Phi q_\Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p_\Phi-1} E v \varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right)$$

令 $c' = p_\Phi q_\Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p_\Phi-1}$, 设 $E v \varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right) < \infty$, 应用引理 2.1 可以得出

$$E\left(\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right) \leq E\left(\Phi\left(q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\right)\right)$$

即

$$\rho_{\Phi}\left(\frac{u}{\alpha}\right) \leq \rho_{\Phi}\left(q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\right)$$

对于 $\forall c^{\cdot} > 0, c^{\cdot} u, c^{\cdot} v$ 也满足公式(2-1), 则有 $\rho_{\Phi}\left(\frac{c^{\cdot} u}{\alpha}\right) \leq \rho_{\Phi}\left(q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\right)$ 。

取 $c^{\cdot} = \|q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\|_{\Phi, p}^{-1}$, 则

$$\rho_{\Phi}\left(\frac{c^{\cdot} u}{\alpha}\right) \leq \rho_{\Phi}\left(\frac{q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v}{\|q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\|_{\Phi, p}}\right) \leq 1$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时,

$$\left\|\frac{c^{\cdot} u}{\alpha}\right\|_{\Phi, p} \leq \left(1 + \rho_{\Phi}\left(\frac{c^{\cdot} u}{\alpha}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 + \rho_{\Phi}\left(\frac{q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v}{\|q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} v\|_{\Phi, p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2$$

则 $\|u\|_{\Phi, p} \leq \frac{2\alpha}{c^{\cdot}} = 2\alpha q_{\Phi}^{\cdot} c^{\cdot} \|v\|_{\Phi, p}$ 。令 $c = 2c^{\cdot}$, 有

$$\|u\|_{\Phi, p} \leq \alpha c q_{\Phi}^{\cdot} \|v\|_{\Phi, p}$$

当 $p = \infty$ 时, 由于 $\|\cdot\|_{\Phi, p} = \|\cdot\|_L$, 则 $\|u\|_{\Phi, p} = \|u\|_L \leq \frac{\alpha}{c^{\cdot}} = \alpha c^{\cdot} q_{\Phi}^{\cdot} \|v\|_{\Phi, p}$ 。

令 $c = c^{\cdot}$, 有

$$\|u\|_{\Phi, p} \leq \alpha c q_{\Phi}^{\cdot} \|v\|_{\Phi, p}$$

推论 2.1 设 $f = (f_n)$ 是 B 值鞅, Φ 是严格凸的的 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则

$$\|f^{\star}\|_{\Phi, p} \leq q_{\Phi}^{\cdot} \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{\Phi, p}$$

定理 2.2 设 $2 \leq p < \infty$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则以下结论等价:

- (i) X 同构于 p -一致凸空间;
- (ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi, p} > 0$, 使得

$$\|S^{(p)}(f)\|_{\Phi, p} \leq C_{\Phi, p} \|f^{\star}\|_{\Phi, p}$$

- (iii) 若 Φ 还是严格凸的, 则对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi, p} > 0$, 使得

$$\|S^{(p)}(f)\|_{\Phi, p} \leq C'_{\Phi, p} \|f\|_{\Phi, p}$$

其中 $\|f\|_{\Phi,p} = \sup_n \|f_n\|_{\Phi,p}$ 。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 记

$$\begin{aligned} A &= \{\omega : S^{(p)}(f) > \lambda\} \\ A_1 &= \{\omega : \|S_1^{(p)}(f)\| > \lambda\} \\ &\dots\dots \\ A_n &= \{\omega : \|S_1^{(p)}(f)\| \leq \lambda, \dots, \|S_{n-1}^{(p)}(f)\| \leq \lambda, \|S_n^{(p)}(f)\| > \lambda\} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ，且 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$)，从而应用条件期望的定义及 μ 的性质可以得出

$$\begin{aligned} \lambda^p P(S^{(p)}(f) > \lambda) &= \lambda^p \mu(A) = \\ \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \|S_n^{(p)}(f)\|^p d\mu \leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} E(\|S_n^{(p)}(f)\|^p | B_k) d\mu &\leq \\ \|S_n^{(p)}(f)\|_p^p &\leq \|S^{(p)}(f)\|_p^p \end{aligned}$$

应用引理 2.2 可以得出：存在 $c > 0$ ，使得 $\|S^{(p)}(f)\|_p^p \leq c \|f\|_p^p$ ，从而对任意的 X 值鞅 f ，存在 $c_p > 0$ ，使得

$$\lambda^p P(S^{(p)}(f) > \lambda) \leq c_p \|f\|_p^p \quad (2-4)$$

设 $W = (W_n)$ 是 $(\|df_n\|)$ 的任意可料强函数序列 ($\|df_n\| \leq W_n, W_n$ 单调递增并且 W_n 关于 B_{n-1} 可测)。

$\forall \lambda > 0, \delta > 0, \beta^p > \delta^p + 1$ ，定义停时

$$\begin{aligned} \mu &= \inf \{n : S_n^{(p)}(f) > \lambda\} \\ \nu &= \inf \{n : S_n^{(p)}(f) > \beta \lambda\} \\ \sigma &= \inf \{n : \|f_n\| \vee W_{n+1} > \delta \lambda\} \end{aligned}$$

记 $A_k = \{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}$ ， $u_k = \chi_{A_k}$ ，则 (u_k) 是可料的。令 $\hat{f}_n = \sum_{k=1}^n u_k df_k$ ， $\hat{f} = (\hat{f}_n)$ ，当 $u_n = 1$ 时， $\omega \in \{\mu < n \leq \nu \wedge \sigma\} = \{\mu < n\} \cap \{n \leq \nu \wedge \sigma\}$ 。此时存在 $k_0, 1 \leq k_0 < n$ ， $\omega \notin A_{k_0}, \omega \in A_{k_0+1}$ ，从而

$$\hat{f}_n = \sum_{i=k_0+1}^n df_i = f_n - f_{k_0} = f_{n-1} + df_n - f_{k_0}$$

由 σ 的定义和 $n \leq \sigma$ 有

$$\|\hat{f}_n\| \leq \|f_{n-1}\| + \|df_n\| + \|f_{k_0}\| \leq 2\delta\lambda + W_n \leq 3\delta\lambda$$

则 $\|\hat{f}_n\|^p \leq (3\delta\lambda)^p$ 。

从而

$$E\|\hat{f}_n\|^p \leq (3\delta\lambda)^p P(\mu < \infty) = (3\delta\lambda)^p P(S^{(p)}(f) > \lambda) \quad (2-5)$$

在 $\{v=n, \sigma=\infty\}$ 上, $f^* \leq \delta\lambda$, $d^*(f) \leq \delta\lambda$, 并且对于上述 k_0 , 有 $k_0-1 < \mu$, 则

$$\begin{aligned} S_n^{(p)}(\hat{f})^p &= \sum_{k=1}^n \|u_k df_k\|^p \geq \\ &\sum_{k=k_0+1}^n \|df_k\|^p - \|df_{k_0}\|^p - \sum_{k=1}^{k_0} \|df_k\|^p \geq \\ &(\beta\lambda)^p - (\delta\lambda)^p - \lambda^p = (\beta^p - \delta^p - 1)\lambda^p \end{aligned}$$

从而

$$P(S^{(p)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leq \delta\lambda) \leq P(S^{(p)}(\hat{f})^p \geq (\beta^p - \delta^p - 1)\lambda^p)$$

由公式(2-4)得

$$\begin{aligned} P(S^{(p)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leq \delta\lambda) &\leq \\ c_p (\beta^p - \delta^p - 1)^{-1} \lambda^{-p} \|\hat{f}\|_p^p &= \\ c_p (\beta^p - \delta^p - 1)^{-1} \lambda^{-p} E\|\hat{f}\|^p & \end{aligned}$$

又由公式(2-5)得

$$P(S^{(p)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leq \delta\lambda) \leq c_p (3\delta)^p (\beta^p - \delta^p - 1)^{-1} P(S^{(p)}(f) > \lambda)$$

则

$$\begin{aligned} P(S^{(p)}(f) > \beta\lambda) &\leq P(S^{(p)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leq \delta\lambda) + P(f^* \vee W^* > \delta\lambda) \leq \\ c_p (3\delta)^p (\beta^p - \delta^p - 1)^{-1} P(S^{(p)}(f) > \lambda) &+ P(f^* \vee W^* > \delta\lambda) \end{aligned}$$

即 $(S^{(p)}(f), f^* \vee W^*)$ 满足好 λ 不等式。

当 δ 足够小时, 由引理 2.3: $\exists L > 0$ s.t.

$$E\Phi(S^{(p)}(f)) \leq LE\Phi(f^* \vee W^*)$$

应用引理 2.4 可得: $f = g + h$, 对于 $g = (g_n)$, 以 $4d_{n-1}^*(f)$ 作为强函数序列, 有

$$E\Phi(S^{(p)}(g)) \leq LE\Phi(g^* \vee 4d^*(f))$$

由 $g^* \leq f^* + h^*$, $d^*(f) \leq 2f^*$ 及 $\Phi(t)$ 是单调增加的, 则存在 $L > 0$, 使得

$$\begin{aligned} E\Phi(S^{(p)}(g)) &\leq LE\Phi(g^* \vee 4d^*(f)) \leq \\ &LE\Phi(f^* \vee 4d^*(f)) + LE\Phi(h^* \vee 4d^*(f)) \leq \\ &LE\Phi(f^*) + LE\Phi(h^*) \end{aligned} \quad (2-6)$$

又利用引理 2.4 和条件期望的性质可知: 对于 $h = (h_n)$

$$E\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\| | B_n\right) \leq E(4d^*(f) | B_n)$$

应用引理 2.5 得出

$$E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\|\right) \leq E\Phi(4d^*(f))$$

从而

$$E\Phi(S^{(p)}(h)) \leq E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\|\right) \leq E\Phi(4d^*(f)) \leq LE\Phi(f^*) \quad (2-7)$$

$$E\Phi(h^*) \leq E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\|\right) \leq E\Phi(4d^*(f)) \leq LE\Phi(f^*) \quad (2-8)$$

又由于 $S^{(p)}(f) \leq S^{(p)}(g) + S^{(p)}(h)$, 由公式(2-6) (2-7) (2-8)有

$$E\Phi(S^{(p)}(f)) \leq cE\Phi(S^{(p)}(g)) + cE\Phi(S^{(p)}(h)) \leq cE\Phi(f^*)$$

即

$$\rho_{\Phi}(S^{(p)}(f)) \leq c\rho_{\Phi}(f^*)$$

令 $\|f^*\|_{\Phi,p} = 1$, 则 $\rho_{\Phi}(f^*) \leq \|f^*\|_{\Phi,p}$.

由于 $2 \leq p < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \|S^{(p)}(f)\|_{\Phi,p} &\leq \left(1 + \rho_{\Phi}(S^{(p)}(f))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(1 + (c\rho_{\Phi}(f^*))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + c^p)^{\frac{1}{p}} = \\ &(1 + c^p)^{\frac{1}{p}} \|f^*\|_{\Phi,p} \end{aligned}$$

令 $C_{\Phi,p} = (1+c^p)^{\frac{1}{p}}$, 即

$$\|S^{(p)}(f)\|_{\Phi,p} \leq C_{\Phi,p} \|f^*\|_{\Phi,p}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 由推论 2.1 可得出 (iii)。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 由 (iii) 可知, 对于每个 $\|f\|_{\infty} < \infty$ 的鞅 f , $S^{(p)}(f) < \infty, a.e.$, 应用引理 2.6 可以推出: X 同构于 p -一致凸空间。

定理 2.3 设 $1 < q \leq 2$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则 X 同构于 q -一致光滑空间等价于对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|f^*\|_{\Phi,q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q}$$

证明 必要性 利用 Pisier 定理^{[8]189-189} 可以得出

$$\lambda^q P(f^* > \lambda) \leq \|f^*\|_q^q \leq c_q \|S^{(q)}(f)\|_q^q$$

设 $W = (W_n)$ 是 $(\|df_n\|)$ 的任意可料强函数序列, $\forall \lambda > 0, \delta > 0, \beta^q > \delta^q + 1$, 定义停时

$$\begin{aligned} \mu &= \inf \{n: f_n^* > \lambda\} \\ \nu &= \inf \{n: f_n^* > \beta\lambda\} \\ \sigma &= \inf \{n: S_n^{(q)}(f) \vee W_{n+1} > \delta\lambda\} \end{aligned}$$

与定理 2.2 中 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明类似, 因此有 $(f^*, S^{(q)}(f) \vee W^*)$ 满足好 λ 不等式, 从而有

$$E\Phi(f^*) \leq LE\Phi(S^{(q)}(f) \vee W^*)$$

由引理 2.4, 有 $f = g + h$, 对于 $g = (g_n)$, 以 $4d_{n-1}^*(f)$ 作为可料强函数序列, 有 $E\Phi(g^*) \leq LE\Phi(S^{(q)}(f)) + LE\Phi(S^{(q)}(h))$ 。对于 $h = (h_n)$, 有

$$E\Phi(h^*) \leq E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\|\right) \leq E\Phi(4d^*(f)) \leq LE\Phi(S^{(q)}(f))$$

$$E\Phi(S^{(q)}(h)) \leq E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|dh_i\|\right) \leq LE\Phi(S^{(q)}(f))$$

从而有

$$E\Phi(f^*) \leq cE\Phi(g^*) + cE\Phi(h^*) \leq cE\Phi(S^{(q)}(f))$$

即

$$\rho_{\Phi}(f^*) \leq c\rho_{\Phi}(S^{(q)}(f))$$

令 $\|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q} = 1$, 则 $\rho_{\Phi}(S^{(q)}(f)) \leq \|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q}$ 。

由于 $1 < q \leq 2$, 则

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{\Phi,q} &\leq \left(1 + \rho_{\Phi}(f^*)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\left(1 + \left(c\rho_{\Phi}(S^{(q)}(f))\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + c^q)^{\frac{1}{q}} = \\ &(1 + c^q)^{\frac{1}{q}} \|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q} \end{aligned}$$

令 $C_{\Phi,q} = (1 + c^q)^{\frac{1}{q}}$, 即

$$\|f^*\|_{\Phi,q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q}$$

充分性 设 $f = (f_n)$ 是满足 $S^{(q)}(f) \in L_{\infty}$ 的 X 值鞅, 对于每个 $m \geq 1$, 定义鞅 $f^{(m)} = (f_n - f_m, n \geq m)$, 则

$$S^{(q)}(f^{(m)})^q = \sum_{n=m}^{\infty} \|df_n\|^q \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

由于 $\|f^*\|_{\Phi,q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)\|_{\Phi,q}$, 则有

$$\left\| \sup_{n \geq m} \|f_n - f_m\| \right\|_{\Phi,q} = \|f^{(m)*}\|_{\Phi,q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f^{(m)})\|_{\Phi,q} \rightarrow 0$$

由 m 的任意性, 则 f_n a.e. 收敛。利用引理 2.7 可以推出: X 同构于 q 一致光滑空间。

2.3 本章小结

B 值鞅的 p-Amemiya 范数不等式对于进一步研究 Orlicz 空间和鞅空间的几何性质有着非常重要的作用。本章根据对 B 值鞅的极大函数、p 均方函数的 p-Amemiya 范数不等式的研究, 得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

第3章 鞅空间上算子的有界性

3.1 引言

定义 3.1 设 X 是实空间, $\dim X \geq 2$, 称

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \{1 - \|x + y\|/2 : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon\} \quad (0 \leq \varepsilon \leq 2)$$

是 X 的凸性模。称

$$\rho_X(\tau) = \sup \{(\|x + y\| + \|x - y\|)/2 - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau\} \quad (\tau > 0)$$

是 X 的光滑模。

若存在 $c > 0$, 使得 $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^p$, $0 \leq \varepsilon \leq 2$, 则称空间 X 是 p 一致凸的 ($2 \leq p < \infty$)。

若存在 $c > 0$, 使得 $\rho_X(\tau) \leq c\tau^q$, $\tau > 0$, 则称空间 X 是 q 一致光滑的 ($1 \leq q \leq 2$)。

定义 3.2 平削算子: 对于鞅 $f = (f_n)$, 令

$$f_{pn}^\# = \sup_{m \geq n} \left[E(\|f_m - f_{n-1}\|^p | B_n) \right]^{1/p}, \quad f_p^\# = \sup_{n \geq 1} f_{pn}^\#$$

$$\tilde{f}_{pn}^\# = \sup_{m \geq n} \left[E(\|f_m - f_n\|^p | B_n) \right]^{1/p}, \quad \tilde{f}_p^\# = \sup_{n \geq 1} \tilde{f}_{pn}^\#$$

变差算子: 设 (n_k) 是自然数序列且是单调递增的, 令

$$W_p^{(n_k)}(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^p \right)^{1/p}$$

$$\tilde{W}_p^{(n_k)}(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} E(\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^p | B_{n_k}) \right)^{1/p}$$

对于满足 Δ_2 条件的 N 函数 Φ , 令

$$\|W_p(f)^p\|_{\Phi, p}^{1/p} = \sup_{(n_k)} \|W_p^{(n_k)}(f)^p\|_{\Phi, p}^{1/p}$$

$$\|\tilde{W}_p(f)^p\|_{\Phi, p}^{1/p} = \sup_{(n_k)} \|\tilde{W}_p^{(n_k)}(f)^p\|_{\Phi, p}^{1/p}$$

其中 $\sup$ 是关于所有这样的自然数序列 (n_k) 而取的。

引理 3.1^{[8]48-48} (极大引理) 若 $(f_n, B_n, n \geq 0)$ 是任一可积适应序列, 则

$\forall \lambda > 0$, 极大函数 $f^*(\omega) = \sup_{n \geq 1} \|f_n(\omega)\|$ 满足 $\lambda \mu\{f^* > \lambda\} \leq \sup_{n \geq 1} E\|f_n\|$.

引理 3.2^{[8]241-242} 设 $2 \leq p < \infty$, 则 X 同构于 p -一致凸空间等价于对每个 X 值鞅 $f = (f_n)$, 存在 $C > 0$, 使得

$$E\left(\sum_{i=n+1}^m \|df_i\|^p | B_n\right) \leq CE\left(\|f_m - f_n\|^p | B_n\right), \quad m \geq n$$

或者

$$E\left(\sum_{i=n}^m \|df_i\|^p | B_n\right) \leq CE\left(\|f_m - f_{n-1}\|^p | B_n\right), \quad m \geq n$$

引理 3.3^{[8]242-242} 设 $1 < q \leq 2$, 则 X 同构于 q -一致光滑空间等价于对每个 X 值鞅 $f = (f_n)$, 存在 $C > 0$, 使得

$$E\left(\|f_m - f_n\|^q | B_n\right) \leq CE\left(\sum_{i=n+1}^m \|df_i\|^q | B_n\right), \quad m \geq n$$

或者

$$E\left(\|f_m - f_{n-1}\|^q | B_n\right) \leq CE\left(\sum_{i=n}^m \|df_i\|^q | B_n\right), \quad m \geq n$$

引理 3.4^{[8]200-201} 设 $1 < q \leq 2$, 则 X 同构于 q -一致光滑空间等价于若

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} E\|df_n\|^q < \infty, \quad \text{则 } n^{-1}f_n \rightarrow 0 \quad a.e.$$

3.2 鞅空间上算子的有界性

定理 3.1 设 $2 \leq p < \infty$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则以下结论等价:

(i) X 同构于 p -一致凸空间;

(ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\|S^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(iii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 对任意的 X 值鞅 $f = (f_n)$ 和 $\alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0$, 定义停时

$$\tau = \inf\{n : S_n^{(p)}(f)^p > (1 + \alpha)\lambda\}$$

$$\theta = \inf \left\{ n: S_n^{(p)}(f)^p > \alpha \lambda \right\}$$

$$\mu = \inf \left\{ n: f_{pn}^{\#p} > \beta \lambda \right\}$$

则 $\theta \leq \tau$ 。因此

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty) &\leq P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\tau < \infty, \theta \geq \mu) = \\ &P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\tau < \infty, \mu < \tau) = \\ &P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty) \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中, 由 τ, θ 的定义、极大引理、 $S_n^{(p)}(f)$ 的定义和条件期望的定义得

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leq P(\theta < \mu, S_\tau^{(p)}(f)^p - S_{\theta-1}^{(p)}(f)^p > \lambda) \leq \\ &\frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} (S_\tau^{(p)}(f)^p - S_{\theta-1}^{(p)}(f)^p) dP \leq \\ &\frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} E\left(\sum_{i=\theta}^{\tau} \|df_i\|^p | B_\theta\right) dP \end{aligned}$$

又利用引理 3.2、 $f_{pn}^{\#}$ 和 μ 的定义可以推出

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} E(\|f_\tau - f_{\theta-1}\|^p | B_\theta) dP \leq \\ &\frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} f_{p\theta}^{\#p} dP \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \infty\}} \beta \lambda dP = \\ &C\beta P(\theta < \infty) \end{aligned} \quad (3-2)$$

从而由公式(3-1) (3-2)得

$$P(S^{(p)}(f)^p > (1+\alpha)\lambda) \leq C\beta P(S^{(p)}(f)^p > \alpha\lambda) + P(f_p^{\#p} > \beta\lambda)$$

即 $(S^{(p)}(f)^p, f_p^{\#p})$ 满足好 λ 不等式。

利用引理 2.3 可以得出: 对任意的 X 值映 f , 存在 $C > 0$, 使得

$$E\Phi(S^{(p)}(f)^p) \leq CE\Phi(f_p^{\#p})$$

即

$$\rho_\Phi(S^{(p)}(f)^p) \leq C\rho_\Phi(f_p^{\#p})$$

令 $\|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p} = 1$, 则 $\rho_\Phi(f_p^{\#p}) \leq 1$ 。

又由于 $2 \leq p < \infty$, 则

$$\|S^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p} \leq \left(1 + \rho_\Phi(S^{(p)}(f)^p)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left(1 + \left(C\rho_{\Phi}(f_p^{\#p})\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + C^p)^{\frac{1}{p}} \|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p}$$

令 $C_{\Phi,p} = (1 + C^p)^{\frac{1}{p^2}}$, 则

$$\|S^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) 对 X 值鞅 $f = (f_n)$ 和 $\alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0$, 定义停时

$$\tau = \inf \left\{ n : \sigma_{n+1}^{(p)}(f)^p > (1 + \alpha)\lambda \right\}$$

$$\theta = \inf \left\{ n : \sigma_{n+1}^{(p)}(f)^p > \alpha\lambda \right\}$$

$$\mu = \inf \left\{ n : \tilde{f}_{pn}^{\#p} > \beta\lambda \right\}$$

则 $\theta \leq \tau$ 。因此

$$P(\tau < \infty) \leq P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty) \quad (3-3)$$

其中, 利用 τ, θ 的定义、极大引理、 $\sigma_n^{(p)}(f)$ 的定义和条件期望的定义可以推出

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leq P\left(\theta < \mu, \sigma_{\tau+1}^{(p)}(f)^p - \sigma_{\theta}^{(p)}(f)^p > \lambda\right) \leq \\ &\frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} E\left(\sigma_{\tau+1}^{(p)}(f)^p - \sigma_{\theta}^{(p)}(f)^p \mid B_{\theta}\right) dP \leq \\ &\frac{1}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} E\left(\sum_{i=\theta+1}^{\tau+1} \|df_i\|^p \mid B_{\theta}\right) dP \end{aligned}$$

利用引理 3.2、 $\tilde{f}_{pn}^{\#}$ 和 μ 的定义可以推出

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} E\left(\|f_{\tau+1} - f_{\theta}\|^p \mid B_{\theta}\right) dP \leq \\ &\frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \mu\}} \tilde{f}_{p\theta}^{\#p} dP \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{\theta < \infty\}} \beta\lambda dP = \\ &C\beta P(\theta < \infty) \end{aligned} \quad (3-4)$$

从而由公式(3-3)、(3-4)得

$$P\left(\sigma^{(p)}(f)^p > (1 + \alpha)\lambda\right) \leq C\beta P\left(\sigma^{(p)}(f)^p > \alpha\lambda\right) + P\left(\tilde{f}_p^{\#p} > \beta\lambda\right)$$

即 $(\sigma^{(p)}(f)^p, \tilde{f}_p^{\#p})$ 满足好 λ 不等式。

类似(i) $\Rightarrow$ (ii)的证明可得: 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 设 $f = (f_n)$ 是满足 $\|f\|_\infty < \infty$ 的任意的 X 值鞅。

当 $\|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p} \leq 1$ 时, 由(ii)得

$$\|S^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p} < \infty$$

即

$$S^{(p)}(f) < \infty \quad a.e.$$

当 $\|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p} > 1$ 时, 由(ii)得: 存在 $C > 0$, 使得

$$\|S^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \|f_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \left(1 + (E\Phi(\|f\|_\infty))^p\right)^{\frac{1}{p^2}} < \infty$$

即 $S^{(p)}(f) < \infty \quad a.e.$ 因此, 利用引理 2.6 可以得出: X 同构于 p 一致凸空间。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $f = (f_n)$ 是满足 $\|f\|_\infty < \infty$ 的任意的 X 值鞅。

当 $\|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p} \leq 1$ 时, 由(iii)得

$$\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p} < \infty$$

即 $\sigma^{(p)}(f) < \infty \quad a.e.$

当 $\|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p} > 1$ 时, 由(iii)得: 存在 $C > 0$, 使得

$$\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \|\tilde{f}_p^{\#p}\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \left(1 + (E\Phi(\|f\|_\infty))^p\right)^{\frac{1}{p^2}} < \infty$$

即 $\sigma^{(p)}(f) < \infty \quad a.e.$ 因此, X 同构于 p 一致凸空间。

定理 3.2 设 $1 < q \leq 2$, Φ 是严格凸的 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则以下结论等价:

(i) X 同构于 q 一致光滑空间;

(ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|f_q^{\#q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

(iii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|\tilde{f}_q^{\#q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C'_{\Phi,q} \|\sigma^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 由于 X 同构于 q 一致光滑空间, 则利用 $f_q^{\#}$ 的定义、引理 3.3 和 $S^{(q)}(f)$ 的定义得出: 对任意的 X 值鞅 f , 有

$$\begin{aligned} f_q^{\#q} &= \sup_n \sup_{m \geq n} E(\|f_m - f_{n-1}\|^q | B_n) \leq \\ &C \sup_n E\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|df_i\|^q | B_n\right) \leq \\ &C \sup_n E(S^{(q)}(f)^q | B_n) \end{aligned}$$

利用 Φ 的严格凸性和推论 2.1 可以得出

$$\begin{aligned} \|f_q^{\#q}\|_{\Phi,q} &\leq C \left\| \sup_n E(S^{(q)}(f)^q | B_n) \right\|_{\Phi,q} \leq \\ &C' \sup_n \left\| E(S^{(q)}(f)^q | B_n) \right\|_{\Phi,q} \leq \\ &C' \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q} \end{aligned}$$

则存在 $C_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|f_q^{\#q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) 类似 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}_q^{\#q} &= \sup_n \sup_{m \geq n} E(\|f_m - f_{n-1}\|^q | B_n) \leq \\ &C \sup_n E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|df_i\|^q | B_n\right) \leq \\ &C \sup_n E(\sigma^{(q)}(f)^q | B_n) \end{aligned}$$

则存在 $C'_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|\tilde{f}_q^{\#q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C'_{\Phi,q} \|\sigma^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 设 $f = (f_n)$ 是任意的 X 值鞅, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} \|df_n\|^q \in L_{\infty}$ 。令

$$\tilde{f}^{(n)} = (\tilde{f}_i^{(n)}), \quad d\tilde{f}_i^{(n)} = i^{-1} df_i, i \geq n, \quad \text{则}$$

$$S^{(q)}(\tilde{f}^{(n)})^q = \sum_{i=n}^{\infty} i^{-q} \|df_i\|^q \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

由 Fatou 引理和 (ii) 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_q^{(n)\#q}\|_{\Phi,q} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Phi}(\tilde{f}_q^{(n)\#q}) = 0$ 。若 Ψ 是 Φ 的余函数, 则

$$E\|\tilde{f}_m^{(n)} - \tilde{f}_i^{(n)}\|^q \leq E\tilde{f}_q^{(n)\#q} \leq \Psi(1) E\Phi(\tilde{f}_q^{(n)\#q}) =$$

$$\Psi(1)\rho_{\Phi}(\tilde{f}_q^{(n)\#q}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} df_n$ 以 L_q 范数收敛, 从而 $a.e.$ 收敛。

由 Kronecker 引理^{[8]200-201} 得出 $n^{-1}f_n$ $a.e.$ 收敛, 因此, 利用引理 3.4 可以得出: X 同构于 q -一致光滑空间。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $f = (f_n)$ 是任意的 X 值鞅, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} \|df_n\|^q \in L_{\infty}$ 。令

$$\tilde{f}^{(n)} = (\tilde{f}_i^{(n)}), \quad d\tilde{f}_i^{(n)} = i^{-1} df_i, i \geq n, \quad \text{则}$$

$$\sigma^{(q)}(\tilde{f}^{(n)})^q = \sum_{i=n}^{\infty} E(\|i^{-1} df_i\|^q | B_{i-1}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

类似(ii) $\Rightarrow$ (i) 的证明可得: X 同构于 q -一致光滑空间。

定理 3.3 设 $1 < q \leq 2$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则下列结论等价:

(i) X 同构于 q -一致光滑空间;

(ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$C_{\Phi,q}^{-1} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq \|W_q(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q} \quad (3-5)$$

(iii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|f^{*q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C'_{\Phi,q} \|W_q(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q} \quad (3-6)$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 对于 (n_k) , $(f_{n_k}, k \geq 0)$ 也是鞅。

由于 X 同构于 q -一致光滑空间, 则利用 $W_q^{(n_k)}(f)$ 的定义、引理 2.6 及 $S^{(q)}(f)$ 的定义可以推出: 存在 $C > 0$, 使得

$$\begin{aligned} E(W_q^{(n_k)}(f)^q | B_0) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^q | B_0\right) \leq \\ &CE\left(\sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \|df_i\|^q | B_{n_k}\right) | B_0\right) \leq \\ &CE(S^{(q)}(f)^q | B_0) \end{aligned} \quad (3-7)$$

用 $g = (g_i, i \geq n_{k_0}) = (f_i - f_{n_{k_0-1}}, i \geq n_{k_0})$ 代替 $f = (f_n)$, 然后将其代入公式(3-7)可得

$$E(W_q^{(n_k)}(f)^q - W_{qn_{k_0-1}}^{(n_k)}(f)^q | B_{n_{k_0}}) = E(W_q^{(n_k)}(g)^q | B_{n_{k_0}}) \leq$$

$$CE\left(S^{(q)}(g)^q \middle| B_{n_{k_0}}\right) \leq CE\left(S^{(q)}(f)^q \middle| B_{n_{k_0}}\right) \quad (3-8)$$

令 $A_i = W_{q^{n_i}}^{(n_i)}(f)^q$, $B = S^{(q)}(f)^q$, 则公式(3-8)为

$$E\left(A_\infty - A_{k_0-1} \middle| B_{n_{k_0}}\right) \leq E\left(CB \middle| B_{n_{k_0}}\right)$$

利用引理 3.5 可以得出

$$E\Phi\left(W_q^{(n_k)}(f)^q\right) \leq CE\Phi\left(S^{(q)}(f)^q\right)$$

即

$$\rho_\Phi\left(W_q^{(n_k)}(f)^q\right) \leq C\rho_\Phi\left(S^{(q)}(f)^q\right)$$

令 $\|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q} = 1$, 则 $\rho_\Phi\left(S^{(q)}(f)^q\right) \leq 1$ 。

由于 $1 < q \leq 2$, 则

$$\begin{aligned} \|W_q^{(n_k)}(f)^q\|_{\Phi,q} &\leq \left(1 + \rho_\Phi\left(W_q^{(n_k)}(f)^q\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\left(1 + \left(C\rho_\Phi\left(S^{(q)}(f)^q\right)^q\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\left(1 + C^q\right)^{\frac{1}{q}} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q} \end{aligned}$$

令 $C_{\Phi,q} = \left(1 + C^q\right)^{\frac{1}{q^2}}$, 则

$$\|W_q(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C_{\Phi,q} \|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

即公式(3-5)右端成立。

对于左端, 只须取 $n_k = k$ 即可得出。

(i) $\Rightarrow$ (iii) 利用定理 2.3 和公式(3-5)左端可以推出: 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\|f^{*q}\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C'_{\Phi,q} \|W_q(f)^q\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 和 (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明方法与定理 3.2 (ii) $\Rightarrow$ (i) 和 (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明方法类似。

推论 3.1 设 $1 < q \leq 2$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则以下结论等价:

(i) X 同构于 q -一致光滑空间;

(ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$C_{\Phi,q}^{-1} \left\| \sigma^{(q)}(f)^q \right\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq \left\| \tilde{W}_q(f)^q \right\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C_{\Phi,q} \left\| \sigma^{(q)}(f)^q \right\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

(iii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,q} > 0$, 使得

$$\left\| f^{*q} \right\|_{\Phi,q}^{1/q} \leq C'_{\Phi,q} \left\| \tilde{W}_q(f)^q \right\|_{\Phi,q}^{1/q}$$

定理 3.4 设 $2 \leq p < \infty$, Φ 是 N 函数且满足 Δ_2 条件, 则以下结论等价:

(i) X 同构于 p -一致凸空间;

(ii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\left\| W_p(f)^p \right\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \left\| f^{*p} \right\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(iii) 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\left\| \tilde{W}_p(f)^p \right\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \left\| f^{*p} \right\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 对于 (n_k) , $(f_{n_k}, k \geq 0)$ 也是鞅。

由于 X 同构于 p -一致凸空间, 则利用 $W_p^{(n_k)}(f)$ 的定义、引理 3.2 可知: 存在 $C > 0$, 使得

$$\begin{aligned} E\left(W_p^{(n_k)}(f)^q \mid B_0\right) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^p \mid B_0\right) \leq \\ &C \sup_k E\left(\|f_{n_k}\|^p \mid B_0\right) \leq CE(f^{*p} \mid B_0) \end{aligned} \quad (3-9)$$

用 $g = (g_i, i \geq n_{k_0}) = (f_i - f_{n_{k_0-1}}, i \geq n_{k_0})$ 代替 $f = (f_n)$, 然后将其代入公式(3-9)可得

$$\begin{aligned} E\left(W_p^{(n_k)}(f)^p - W_{p_{n_{k_0-1}}}^{(n_k)}(f)^p \mid B_{n_{k_0}}\right) &= E\left(W_p^{(n_k)}(g)^p \mid B_{n_{k_0}}\right) \leq \\ &CE(g^{*p} \mid B_{n_{k_0}}) \leq CE(f^{*p} \mid B_{n_{k_0}}) \end{aligned} \quad (3-10)$$

令 $A_i = W_{p_{n_i}}^{(n_k)}(f)^p$, $B = f^{*p}$, 则公式(3-10)为

$$E\left(A_{\infty} - A_{k_0-1} \mid B_{n_{k_0}}\right) \leq E\left(CB \mid B_{n_{k_0}}\right)$$

利用引理 2.5 可得出

$$E\Phi\left(W_p^{(n_k)}(f)^p\right) \leq CE\Phi(f^{*p})$$

即

$$\rho_{\Phi}\left(W_p^{(n_k)}(f)^p\right) \leq C\rho_{\Phi}(f^{*p})$$

令 $\|f^{*p}\|_{\Phi,p} = 1$, 则 $\rho_{\Phi}(f^{*p}) \leq 1$ 。

由于 $2 \leq p < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \|W_p^{(n_k)}(f)^p\|_{\Phi,p} &\leq \left(1 + \rho_{\Phi}(W_p^{(n_k)}(f)^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(1 + (C\rho_{\Phi}(f^{*p}))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + C^p)^{\frac{1}{p}} \|f^{*p}\|_{\Phi,p} \end{aligned}$$

令 $C_{\Phi,p} = (1 + C^p)^{\frac{1}{p^2}}$, 则

$$\|W_p(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C_{\Phi,p} \|f^{*p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 利用引理 3.2 可以得出

$$E\Phi(\tilde{W}_p^{(n_k)}(f)^p) \leq CE\Phi(W_p^{(n_k)}(f)^p)$$

因此由 (ii) 可得: 对任意的 X 值鞅 f , 存在 $C'_{\Phi,p} > 0$, 使得

$$\|\tilde{W}_p(f)^p\|_{\Phi,p}^{1/p} \leq C'_{\Phi,p} \|f^{*p}\|_{\Phi,p}^{1/p}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) 证明方法与定理 3.1 中 (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明方法类似。

3.3 本章小结

鞅空间上平削算子和变差算子的有界性的研究对于进一步研究 Orlicz 空间的几何性质和鞅理论起着非常重要的作用, 本章根据对鞅空间上平削算子、变差算子的有界性的研究, 得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

第4章 Orlicz 空间的 p 一致凸性

4.1 引言

p 一致凸性是 Banach 空间重要的几何性质, 本文将对赋 p -Amemiya 范数、赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 p 一致凸性做系统的研究。下面给出一些引理:

引理 4.1^[8] $\forall x \in L_\Phi$, $\|x\|_L = \|x\|_{\Phi, \infty} \leq \|x\|_{\Phi, p} \leq \|x\|_{\Phi, 1} = \|x\|_\Phi$ 。

引理 4.2^[8] 对一切 $x \in L_\Phi$ 有 $\|x\|_L \leq \|x\|_\Phi \leq 2\|x\|_L$ 。

引理 4.3^[8] 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 则 $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 使得

$$\|u\|_L \geq \varepsilon_1 \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geq \delta_1$$

4.2 Orlicz 空间的 p 一致凸性

定理 4.1 对一切 $x \in L_\Phi$ 有 $\|x\|_L \leq \|x\|_{\Phi, p} \leq 2\|x\|_L$ 。

证明 利用引理 4.1 和引理 4.2 可以推出此结论。

定理 4.2 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

$$\|u\|_\Phi \geq \varepsilon \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geq \delta$$

证明 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\|u\|_\Phi \geq \varepsilon$, 利用引理 4.2 可以推出

$$\|u\|_L \geq \frac{1}{2}\|u\|_\Phi \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

因此利用引理 4.3 可以推出: $\exists \delta > 0$ s.t. $\rho_\Phi(u) \geq \delta$ 。

定理 4.3 若 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

$$\|u\|_{\Phi, p} \geq \varepsilon \Rightarrow \rho_\Phi(u) \geq \delta$$

证明 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\|u\|_{\Phi, p} \geq \varepsilon$, 利用定理 4.1 可以推出:

$$\|u\|_L \geq \frac{1}{2}\|u\|_{\Phi, p} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

因此利用引理 4.3 得出: $\exists \delta > 0$, 使得 $\rho_\Phi(u) \geq \delta$ 。

定理 4.4 设 Φ 是 N 函数, $\Phi(u) \in \Delta_2$, 令 $M(u) = \Phi^p(u)$, ($p \geq 2$)。若 $\Phi(u)$ 是一致凸的, 则赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_L)$ 是 p 一致

凸的。

证明 由于 Φ 是 N 函数, 所以由 N 函数的定义可知: M 也是 N 函数。赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_L)$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u, v \in S(L_M)$, 存在 $c > 0$, 使得对给定 $0 \leq h \leq 1$, 有

$$\left\| \frac{u-v}{2} \right\|_L \geq h \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_L \leq 1 - c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 即 $\exists K > 2$ 和 $u_0 \geq 0$ 使得 $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$, ($u \geq u_0$)。则 $M(2u) = \Phi^p(2u) \leq K^p \Phi^p(u) = K^p M(u)$, 即 $M(u) \in \Delta_2$ 。因此利用引理 4.3 可知: 要证本定理, 只须证

$$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq h \Rightarrow \rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 1 - c(2h)^p$$

对于上述 h , 选取 $u_0 > 0$, 使得 $M(u_0) \text{mes} G < (h - h^p)/2$, 并令 $\varepsilon' = ((h - h^p)/2)^{1/p}$ 。由于 $\Phi(u)$ 是一致凸的, 即对上述的 u_0, ε' , $\exists \delta > 0$, 当 $|u - v| \geq \varepsilon' \max(|u|, |v|) \geq \varepsilon' u_0$ 时, 有

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta) \frac{\Phi(u) + \Phi(u)}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u+v}{2}\right) &= \Phi^p\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \\ (1-\delta)^p \frac{(\Phi(u) + \Phi(u))^p}{2^p} &= \\ \frac{(1-\delta)^p (\Phi(u) + \Phi(u))^p}{2^{p-1} \cdot 2} \end{aligned}$$

又由于 $p \geq 2$, $\frac{1}{2}|\alpha + \beta|^p + \frac{1}{2}|\alpha - \beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < 1 - \delta < 1$,

从而有

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u+v}{2}\right) &\leq \frac{(1-\delta)^p (\Phi(u) + \Phi(v))^p}{2 \cdot 2} \leq \\ \frac{(1-\delta)^p (\Phi^p(u) + \Phi^p(v))}{2} &\leq \\ (1-\delta) \frac{\Phi^p(u) + \Phi^p(v)}{2} &= \end{aligned}$$

$$(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

即 $M(u)$ 也是一致凸的。

对任意的 $u, v \in S(L_M)$, $\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq h$, 记

$$G_1 = G\left(\max(|u(t)|, |v(t)|) < u_0\right)$$

$$G_2 = G\left(|u(t) - v(t)| < \varepsilon' \max(|u(t)|, |v(t)|)\right)$$

$$G_3 = G\left(|u(t) - v(t)| \geq \varepsilon' \max(|u(t)|, |v(t)|) \geq \varepsilon' u_0\right)$$

因 $\varepsilon' < 1$, 由 G_2 的定义及 $\frac{1}{2}|\alpha + \beta|^p + \frac{1}{2}|\alpha - \beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{G_2} M\left(\frac{u(t) - v(t)}{2}\right) dt = \int_{G_2} \Phi^p\left(\frac{u(t) - v(t)}{2}\right) dt \leq$$

$$\int_{G_2} \Phi^p\left(\varepsilon' \frac{|u(t)| + |v(t)|}{2}\right) dt \leq$$

$$\varepsilon'^p \int_{G_2} \left(\frac{\Phi(u(t)) + \Phi(v(t))}{2}\right)^p dt =$$

$$\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}} \int_{G_2} \frac{(\Phi(u(t)) + \Phi(v(t)))^p}{2} dt \leq$$

$$\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}} \int_{G_2} [\Phi^p(u(t)) + \Phi^p(v(t))] dt \leq$$

$$\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-1}} [\rho_M(u) + \rho_M(v)] =$$

$$\frac{\varepsilon'^p}{2^{p-2}} \leq \varepsilon'^p$$

于是

$$h \leq \int_G M\left(\frac{u(t) - v(t)}{2}\right) dt \leq$$

$$M(u_0) \text{mes} G_1 + \varepsilon'^p + \int_{G_3} \frac{M(u(t)) + M(v(t))}{2} dt$$

从而

$$\int_{G_3} \frac{M(u(t)) + M(v(t))}{2} dt \geq h^p$$

由于 M 在 G_1, G_2 上是凸函数, 在 G_3 上是严格凸函数, 因此有

$$\begin{aligned} \rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) &\leq \int_{G_1 \cup G_2} \frac{M(u(t)) + M(v(t))}{2} dt + (1-\delta) \int_{G_3} \frac{M(u(t)) + M(v(t))}{2} dt < \\ &\frac{\rho_M(u) + \rho_M(v)}{2} - \delta h^p = 1 - \delta h^p \end{aligned}$$

令 $\delta = c2^p$, 即

$$\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 1 - c(2h)^p$$

定理 4.5 设 Φ 是 N 函数, $\Phi(u) \in \Delta_2$, 令 $M(u) = \Phi^p(u)$, ($p \geq 2$)。若 $\Phi(u)$ 是一致凸的, 则赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_M)$ 是 p 一致凸的。

证明 由于 Φ 是 N 函数, 所以由 N 函数的定义可知: $M(u)$ 也是 N 函数。赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_M)$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u, v \in S(L_M)$, 存在 $c > 0$, 使得对给定 $0 \leq h \leq 1$, 有

$$\left\| \frac{u-v}{2} \right\|_M \geq h \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_M \leq 1 - c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 即 $\exists K > 2$ 和 $u_0 \geq 0$ 使得 $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$, ($u \geq u_0$)。则 $M(2u) = \Phi^p(2u) \leq K^p \Phi^p(u) = K^p M(u)$, 即 $M(u) \in \Delta_2$ 。因此利用定理 4.2 可知: 要证本定理, 只须证

$$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq h \Rightarrow \rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 1 - c(2h)^p$$

证明过程与定理 4.4 的证明过程类似。

定理 4.6 设 Φ 是 N 函数, $\Phi(u) \in \Delta_2$, 令 $M(u) = \Phi^p(u)$, ($p \geq 2$)。若 $\Phi(u)$ 是一致凸的, 则赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_{M,p})$ 是 p 一致凸的。

证明 由于 Φ 是 N 函数, 所以由 N 函数的定义可知: $M(u)$ 也是 N 函数。赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间 $(L_M, \|\cdot\|_{M,p})$ 是 p 一致凸的当且仅当对任意的 $u, v \in S(L_M)$, 存在 $c > 0$, 使得对给定 $0 \leq h \leq 1$, 有

$$\left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{\Phi,p} \geq h \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{\Phi,p} \leq 1 - c(2h)^p$$

由于 $\Phi(u) \in \Delta_2$, 即 $\exists K > 2$ 和 $u_0 \geq 0$ 使得 $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$, ($u \geq u_0$)。则 $M(2u) = \Phi^p(2u) \leq K^p \Phi^p(u) = K^p M(u)$, 即 $M(u) \in \Delta_2$ 。因此利用定理 4.3 可知: 要证本定理, 只须证

$$\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq h \Rightarrow \rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 1 - c(2h)^p$$

证明过程与定理 4.4 的证明过程类似。

4.3 本章小结

p 一致凸性是 Banach 空间几何学中重要的几何性质。本章根据 N 函数 Φ 定义了另一个 N 函数 M , 得出了赋 Luxemburg 范数、赋 Orlicz 范数和赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间 L_M p 一致凸性的判别准则。

结论

赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的若干几何性质在鞅理论中的应用可以为 Orlicz 空间理论和鞅理论的发展提供很好的借鉴。

p -Amemiya 范数不等式的研究解决了经典鞅论中的不等式在一般 Banach 空间情况不成立, 仅在 Banach 值空间成立的问题。本文第二章系统介绍了 B 值鞅的极大函数、 p 均方函数的 p -Amemiya 范数不等式, 这使得 Banach 空间的几何性质、Orlicz 空间理论与鞅理论相互交叉渗透、有机结合在一起了。

鞅空间上平削算子和变差算子的有界性的研究解决了经典鞅论中算子的有界性在一般 Banach 空间情况不成立, 仅在 Banach 值空间成立的问题, 本文第三章叙述了鞅空间上平削算子、变差算子的有界性, 通过给出鞅空间上平削算子、变差算子的 p -Amemiya 范数不等式, 得出了 Banach 空间 p 一致凸性和 q 一致光滑性的判别准则。

p 一致凸性是鞅与 Banach 空间几何学中重要的几何性质。鞅与 Banach 空间几何学中的很多结果都与 p 一致凸性有关, 其中部分结果给出了 Banach 空间 p 一致凸性的判别准则。本文第四章给出了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间、赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 p 一致凸性的判别准则。

由于本人学识有限, 对 Orlicz 空间的若干几何性质在鞅理论中的应用的研究还不够深入, Orlicz 空间的几何性质在鞅理论中的应用还有许多没有研究, 本文根据 N 函数 Φ 定义了另一个 N 函数 M , 得出了赋 p -Amemiya 范数、赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间 L_M p 一致凸性的判别准则, 但是还没有得出 Orlicz 空间 L_Φ p 一致凸性的判别条件。

参考文献

- [1] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间几何理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986: 1-200.
- [2] ASSOUD P. Martingales et Rearrangement Dans Les Uniformment Lisses[M]. Paris: Sem Maurery-Schwartzs, 1974-1975.
- [3] PISIER G. Martingales with Values in Unoformly Convex Spaces[J]. Israel J Math, 1975, 20: 326-350.
- [4] PISIER G, Xu Q H. The Strong p -variation of Martingales and Orthogonal Series[J]. Probab Theory Relat Fields, 1988, 77: 497-514.
- [5] LIU P D. Martingale Inequalities and Convexity and Smoothness of Banach Spaces[J]. Acta Math Sinica, 1989, 32: 765-775.
- [6] LIU P D. Martingale Spaces and the Geometrical Properties of Banach Spaces[J]. Science in China, 1991, 34: 513-527.
- [7] 段丽芬, 崔云安. 广义 Orlicz 范数和广义 Luxemburg 范数[J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(2): 131-134.
- [8] 刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007: 179-215.
- [9] 于林. 广义鞅变换算子的 Orlicz 范数不等式及其应用[J]. 河南师范大学学报, 2007, 35(2): 9-12.
- [10] 张立娜. Orlicz 空间的若干凸性与光滑性的研究[D]. 内蒙古: 内蒙古师范大学, 2008.
- [11] Yu L. Duals of Banach-space-valued Martingale Hardy Spaces[J]. Kyungpo-ok Math. J, 2001, 41: 259-275.
- [12] Mei T, Liu P D. On the Maximal Inequalities for Martingales Involving two Functions[J]. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 883-892.
- [13] Liu P D, Long R L. Boundness of Several Operators on Martingale Spaces and Geometrical Properties of Banach Spaces[J]. Ann Math, 1992, 13B: 167-179.
- [14] CHOW Y S. A Martingale Inequality and the Law of Large Numbers[J]. Proc Amer Math Soc, 1960, 11: 107-111.
- [15] FIGIEL T. On the Moduli of Convexity and Smoothness[J]. Studia Math,

- 1976, 56: 121-155.
- [16] LUXEMBURG W A, ZAAENEN A C. Conjugate Spaces of Orlicz Spaces[J]. Indag. Math., 1956, 8(12): 217-228.
- [17] GARLING D J H. On Martingales with Values in a Complex Banach[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1988, 104: 399-406.
- [18] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII Y B. Convex Function and Orlicz Spaces[M]. Math. Phy. Literature Publishing Company, 1958: 11-17.
- [19] GLOBEVNIC J. On Complex Strict and Uniform Convexity[J]. Proc Amer Math Soc, 1975, 47: 175-178.
- [20] ZUO H L, Liu P D. The Minimal Operator and Weighted Inequalities for Martingales[J]. Acta Math Scientia, 2006, 26: 37-40.
- [21] WOYCZYNSKI W A. Geometry and Martingales in Banach Spaces[J]. LNM, 1975, 472: 235-275.
- [22] RUBIO DE FRANCIA J L. Martingale and Integral Transforms of Banach Space Valued Functions[J]. LNM, 1986, 1221: 195-222.
- [23] LONG R L, LIU P D. Real Interpolation of Banach-space-valued Regular Martingale Spaces[J]. Ann Math, 1993, 14A: 152-158.
- [24] MILNES H W. Convexity of Orlicz Spaces[J]. Pacific J. Math., 1957, (8): 1451-1486.
- [25] SCHAFFER J J. Geometry of Sphere in Normed Spaces[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, (84): 71-73.
- [26] 丁夏畦. 一类函数空间的性质和应用[J]. 数学学报, 1960, (10): 316-360.
- [27] TRUDINGER N S. On Imbedding into Orlicz Spaces and Some Application [J]. Math., Mech, 1967, (17): 473-483.
- [28] 吴从炘, 赵善中, 陈俊澳. 关于 Orlicz 空间范数的计算公式与严格赋范的条件[J]. 哈尔滨工业大学, 1978, 10(2): 1-12.
- [29] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983: 1-201.
- [30] CHEN SHUTAO. Geometry of Orlicz Space[M]. Warszawa: Dissertation Math., 1992: 1-191.
- [31] CUI YUNAN, DUAN L F, HUDZIK H. Basic Theory of p -Amemiya Norm in Orlicz Spaces ($1 \leq p \leq \infty$): Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Equipped with These Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1796-

1816.

- [32] 赵志君, 陈增敬. Orlicz 鞅空间的一些不等式[J]. 山东大学学报, 1998, 33(1): 40-43.
- [33] 翟富菊. B 值双鞅算子的有界性及 Banach 空间的几何性质[J]. 河北大学学报, 2006, 26(6): 579-581.
- [34] JIN YAN-MING, YU LIN. MAXIMAL INEQUALITIES IN THE WEAK ORLICZ MARTINGALE SPACES[J]. J. Math. (PRC), 2009, 29(4): 429-432.
- [35] 龚小兵. p 一致光滑空间的注记[J]. 四川师范大学学报, 2009, 2: 58-61.
- [36] 李广利. Banach 空间的几种凸性与光滑性之探讨[D]. 内蒙古: 内蒙古师范大学, 2008.
- [37] 陈怡. 广义空间的一致凸性[D]. 苏州: 苏州大学, 2009.
- [38] S.SAEIUNG. On the Modulus of U-convexity[J]. Abstr. Appl. Anal, 2005, 1: 59-66.
- [39] S.SAEIUNG. On the Modulus of W^* -convexity[J]. J. Math. Anal. Appl, 2006, 320: 543-548.
- [40] 段丽芬, 崔云安. 广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间强端点[J]. 浙江大学学报, 2009, 36(1): 6-11.
- [41] HOU YOUJIANG, REN YANBO. Weak Martingale Hardy Spaces and Weak Atomic Decompositions[J]. Science in China: Series Mathematics, 2006, 49(7): 912-921.
- [42] HOU YOUJIANG, REN YANBO. Vector-valued Weak Martingale Hardy Spaces and Atomic Decompositions[J]. Acta Math.Hungar, 2007, 115(3): 235-246.
- [43] 严加安. 鞅与随机积分引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.

攻读学位期间发表的学术论文

- [1] 崔云安, 于丽梅. 广义鞅变换算子的 p -Amemiya 范数不等式及其应用 [J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2010, 31(5): 14-18.

致谢

感谢我的导师崔云安教授，在我攻读硕士研究生的这两年半里，他给予了我无限的帮助。我毕业论文的完成，是导师太多的教导的结晶。他对学术和人生理想不断追求的精神对我未来的工作生活有着深远的影响。

感谢这两年半里所有帮助过我的老师、同学。

感谢给予我无限支持的家人。

最后，感谢审阅本论文和答辩委员会的各位老师！