DESCOMPUNERI TOPOLOGICE ALE W^*-ALGEBRELOR, I.*)

DE

LÁSZLÓ ZSIDÓ

Scopul acestei lucrări este de a dezvolta descompuneri ale W^*-algebrelor şi ale unor C^*-algebre în familii de algebre mai particulare, bazate pe reprezentarea Ghelfand a centrului.

INTRODUCERE

O C^*-algebră este o algebră Banach complexă A cu o involuţie $a \mapsto a^*$, astfel încît pentru orice $a \in A$

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Orice C^*-algebră este $*$-izomorfă cu o algebră autoadjunctă normic închisă de operatori liniari mărginiţi într-un spaţiu Hilbert. Pentru o C^*-algebră comutativă A, reprezentarea Ghelfand furnizează un $*$-izomorfism canonic al lui A pe C^*-algebra $C(\Omega)$ a tuturor funcţiilor complexe continue pe un spaţiu topologic Hausdorff local compact Ω, care se anulează la infinit. Dacă A are unitate, Ω este compact.

Presupunem familiaritate cu teoria elementară a C^*-algebrelor, în limita primelor două paragrafe ale lui [9].

O C^*-algebră M se numeşte W^*-algebră, dacă este dualul unui spaţiu Banach X. Spaţiul Banach X, scufundat în M^*, este unic determinat de condiţia $M = X^*$. Îl notăm M_* şi îl numim predualul lui M. Pe M se consideră M_*-topologia, notată prin w, şi topologia definită de seminormele

$$x \to \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in M_*, \quad \varphi \geqslant 0,$$

notată prin $s \cdot s$ - topologia se află între w-topologia şi topologia Mackey definită de w.

*) Teză de doctorat

ST. CERC. MAT., TOM. 25, NR. 6, P. 859–945, BUCUREŞTI, 1973

Deoarece bidualul unei C^*-algebre oarecare este o W^*-algebră, teoria W^*-algebrelor poate fi folosită în studiul C^*-algebrelor.

Fie acum H un spaţiu Hilbert complex şi $B(H)$ C^*-algebra tuturor operatorilor liniari mărginiţi în H. Notăm prin *wo* topologia operatorială slabă pe $B(H)$, iar prin *so* topologia operatorială tare pe $B(H)$. *so*-topologia se află între *wo*-topologia şi topologia Mackey definită de *wo*. Numim algebră von Neumann în H orice subalgebră autoadjunctă *wo*-închisă a lui $B(H)$ care conţine operatorul identic. Orice algebră von Neumann este W^*-algebră şi orice W^*-algebră este $_*$-izomorfă cu o algebră von Neumann. Într-o algebră von Neumann *wo*-topologia este mai slabă ca *w*-topologia, iar *so*-topologia este mai slabă ca *s*-topologia. O $*$-subalgebră a unei algebre von Neumann are aceeaşi închidere în topologiile *wo*, *so*, *w*, *s*.

În materie de W^*-algebre presupunem familiaritate cu primele două părţi ale lui [39], sau cu primul capitol din [55] şi cu cîteva cunoştinţe despre clasificarea lui von Neumann după tipuri.

Toate cunoştinţele de C^*-şi W^*-algebre, folosite în această lucrare, se găsesc în primele două părţi ale lui [40].

O W^*-algebră se numeşte factor, dacă centrul său se reduce la multiplii scalari ai unităţii. Printr-o teorie a reducerii a W^*-algebrelor înţelegem o reprezentare a acestora cu ajutorul unei familii de factori. John von Neumann a dat o reducere a W^*-algebrelor cu predual separabil cu ajutorul unor familii „măsurabile" de factori. Pentru reducerea lui von Neumann trimitem la [8], [39], [40] şi [55]. În această lucrare, concepută ca o continuare a lui [55], dezvoltăm o reducere cu ajutorul unor familii „continue" de factori, iniţiată împreună cu Şerban Strătilă în [47] şi [48].

Dacă A este o C^*-algebră, o reducere a lui A^{**} induce o descompunere a lui A. Astfel putem vorbi şi de reducerea C^*-algebrelor.

Explicăm scurt, în ce constă reducerea topologică. Fie π o $*$-reprezentare a unei C^*-algebre cu unitate A, Z centrul *wo*-închiderii $\overline{\pi A}^{wo}$ a lui πA, iar Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Există aplicaţii Z-liniare pozitive *w*-continue $\Phi : \overline{\pi A}^{wo} \to Z$, care lasă fix pe Z. Pentru orice $t \in \Omega$

$$a \mapsto \Phi(\pi(a))(t)$$

este o stare pe A. Notăm prin π_t^Φ $*$-reprezentarea lui A, asociată acestei stări. Familia (π_t^Φ) realizează o descompunere topologică a lui π.

Presupunînd pe π injectivă, C^*-reducerea lui A înseamnă studiul familiei $(\pi_t^\Phi A)_{t\in\Omega}$ de C^*-algebre, iar W^*-reducerea lui A înseamnă studiul familiei $(\overline{\pi_t^\Phi A}^{wo})_{t\in\Omega}$ de W^*-algebre.

Reciproc, fie Ω un spaţiu hiperstonian, adică spaţiul idealelor maximale ale unei W^*-algebre comutative, iar $(\pi_t)_{t\in\Omega}$ o familie continuă de $*$-reprezentări ciclice ale lui A, adică fiecare π_t este asociată unei stări φ_t pe A, astfel încît pentru orice $a \in A$ aplicaţia

$$t \mapsto \varphi_t(a)$$

este continuă. Atunci formula

$$\Phi(a)(t) = \varphi_t(a)$$

defineşte o aplicaţie pozitivă $\Phi : A \to C(\Omega)$. $C(\Omega)$ se scufundă într-un $B(H)$ ca C^*-subalgebră comutativă maximală, unic modulo izomorfism spaţial. Φ, considerată ca aplicaţie a lui A în $B(H)$, este complet pozitivă, deci i se asociază o $*$-reprezentare π a lui A. π realizează sinteza familiei $(\pi_t)_{t\in\Omega}$.

Primul capitol are un caracter auxiliar şi cuprinde cîteva rezultate mai greu accesibile, privind aproximarea elementelor unei W^*-algebre cu ajutorul elementelor unei C^*-subalgebre w-dense. În primul paragraf expunem teorema de închidere monotonă a lui G. K. Pedersen, după schiţa de demonstraţie din [33], în al doilea paragraf dăm o teoremă puternică de tranzitivitate, iar în al treilea paragraf demonstrăm teorema de caracterizare a C^*-algebrelor de tip I a lui J. Glimm şi S. Sakai. În paragraful trei folosim tehnici de aplicaţii complet pozitive, una din tehnicile fundamentale în această lucrare.

Primele două paragrafe ale capitolului doi constituie o trecere în revistă a proprietăţilor de bază ale spaţiilor stoniene şi hiperstoniene. O atenţie deosebită este acordată teoremelor de selecţie continuă, utile în probleme de sinteză. În următoarele două paragrafe dezvoltăm descompuneri topologice ale modulelor normate peste $C(\Omega)$, unde Ω este un spaţiu stonian sau hiperstonian. În sfîrşit, în ultimul paragraf al capitolului, ne ocupăm cu punctele extremale ale părţilor $C(\Omega)$-convexe ale unui modul normat peste $C(\Omega)$.

În al treilea capitol, după o expunere a geometriei proiectorilor aşa-ziselor AW^*-algebre, considerăm clase de C^*-algebre cu geometria proiectorilor analoagă şi dezvoltăm o teorie a C^*-reducerii a acestora. Remarcăm că C^*-algebrele considerate cuprind C^*-algebrele cît ale AW^*-algebrelor. O atenţie deosebită o acordăm structurii de ideale bilaterale închise. În ultimul paragraf menţionăm cîteva aplicaţii.

În al patrulea capitol expunem teoria W^*-reducerii după [47] şi [48], cu unele mici îmbunătăţiri. Ca aplicaţie, demonstrăm teorema de tip Stone — Weierstrass a lui I. Kaplansky, după schiţa de demonstraţie din [48].

O parte a materialului expus apare aici pentru prima dată.

Am căutat ca cele patru capitole să fie cît mai independente. Astfel capitolul II, cu excepţia teoremei II.5.18., nu depinde de capitolul I, capitolul III depinde doar de paragrafele 1, 2, 3, 5 ale capitolului II, iar capitolul IV nu depinde esenţial de capitolul III.

În text folosim denumirea de proiector pentru idempotenţi autoadjuncţi ale unei C^*-algebre şi cea de formă pentru aplicaţiile liniare ale unui spaţiu vectorial în corpul scalarilor.

Începutul şi dezvoltarea activităţii mele ştiinţifice datorează mult conducătorului meu ştiinţific, Profesorul Dr. Docent Ciprian Foiaş. Îmi exprim aici sincera mea recunoştinţă pentru sprijinul Domniei Sale în calitate de profesor, îndrumător, coleg mai experimentat, colaborator şi tovarăş.

Formaţia mea matematică şi evoluţia intereselor mele ştiinţifice poartă pecetea puternică şi a Profesorului Dr. Docent Aristide Halanay. Folosesc această ocazie de a-i exprima sincerele mele mulţumiri.

Mulţumesc de asemenea conducerii Institutului de Matematică al Academiei R.S.R. pentru condiţiile optime de lucru şi pentru sprijinul dat în problemele legate de activitatea mea ştiinţifică.

Înaintea şi în timpul redactării acestei lucrări am avut discuţii utile cu S. Strătilă, colaborator în lucrările privind reducerea topologică, Dr. C. Apostol, G. Arsene, C. Peligrad, Dr. I. Suciu, Dr. S. Teleman, Dr. F. H. Vasilescu şi D. Voiculescu. Tuturor le exprim aici sincerele mele mulţumiri.*)

CÎTEVA NOŢIUNI ŞI NOTAŢII FOLOSITE

aplicaţie complet pozitivă (I.3.6.)
AW^* — algebră (II.1.5.)
axioma (S) (III.2.1.)
axioma (C) (III.2.10.)
axioma (O) (III.2.15.)
axioma (E) (III.2.16.)
axioma (Z) (III.3.3)
C^* — algebră de tip I (I.3.)
C^* — algebră clasificabilă (III.3.14.)
C^* — algebră excepţională (III.3.14.)
C^* — algebră tare semisimplă (III.4.5.)
ideal cu proprietatea lipirii centrale (III.3.6.)
$\mathcal{K}(x)$ (III.2.9.)
M_*^Z (II.4.18.,IV.1.)
principiul selecţiei continue (II.1.10)
principiul şirului de partiţii ale unităţii (II.2.6)
proprietatea de dualitate (II.3.6.)
proprietatea de predualitate (II.4.1.)
proprietatea lipirii (II.4.15)
radicalul tare (III.4.4.)
*-reprezentarea asociată unei aplicaţii complet pozitive (I. 3.6)
*-reprezentarea asociată unei Z — stări (II.5.10.,II.5.11.)
spaţiu stonian (II.1.)
spaţiu hiperstonian (IV.2.4.)
subspaţiu vectorial invariant de tip stare (II.V.2.)
suportul unui ideal cu proprietatea lipirii centrale (III.3.8.)
suportul tare al unui ideal cu proprietatea lipirii centrale (III.3.8.)
Z-modul normat (II.3.)
Z-modul normat finit decompozabil (II.4.)
Z-modul normat decompozabil (II.4.)
Z-submodul de tip predual (II.4.)
Z-convexitate (II.5.)
Z-extremalitate (II.5.2.)

*) Bibliografia se dă în partea a doua a lucrării.

CAPITOLUL I

C^*-ALGEBRE SLAB DENSE

În acest capitol vom analiza aproximarea elementelor unei W^*-algebre cu elemente ale unei C^*-subalgebre slab dense. Teoremele principale pe care le vom demonstra sînt generalizări ale unor rezultate binecunoscute din teoria măsurii pe spaţii locale compacte.

§ 1. ÎNCHIDEREA MONOTONĂ A UNEI C^*-ALGEBRE

Fie M o W^*-algebră şi $A \subset M$ o C^*-algebră w-densă. Notăm prin A_1 bula unitate închisă a lui A, prin A^+ partea pozitivă a lui A, iar prin A_1^+ intersecţia lui A_1 şi A^+. Mulţimile M_1, M^+ şi M_1^+ se definesc analog.

Pentru orice mulţime $S \subset M^+$ notăm prin S^σ mulţimea tuturor elementelor din M^+ care sînt supreme ale unor şiruri crescătoare de elemente din S, şi notăm prin S_δ mulţimea tuturor infimurilor de şiruri descrescătoare din S.

Prima problemă pe care ne-o punem este de a stabili cît de bogate sînt mulţimile :

$$A_1^+ \subset (A_1^+)^\sigma \subset ((A_1^+)^\sigma)_\delta \subset (((A_1^+)^\sigma)_\delta)^\sigma \subset \dots \text{ în } M_1^+.$$

Lema următoare, de caracter tehnic, ne va fi de mare folos în acest paragraf.

1.1. LEMĂ. *Aplicaţia* $x \mapsto (1+x)^{-1}$ *a lui* M^+ *în* M_1^+ *este descrescătoare şi s- continuă, iar aplicaţia* $x \mapsto (1+x)^{-1}x$ *a lui* M^+ *în* M_1^+ *este crescătoare şi s-continuă.*

Demonstraţie. Cum $(1+x)^{-1} + (1+x)^{-1}x = 1$, este suficient să demonstrăm prima parte a lemei.

Fie $0 \leqslant x \leqslant y$. Atunci

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+y)(1+x)^{-\frac{1}{2}} \geqslant (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)(1+x)^{-\frac{1}{2}} \geqslant 1,$$

deci

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{-1}(1+x)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Astfel

$$(1+y)^{-1} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}[(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{-1}(1+x)^{\frac{1}{2}}](1+x)^{-\frac{1}{2}} \leqslant (1+x)^{-1}.$$

Fie acum $x, y \in M^+$ oarecare. Cum

$$(1 + x)^{-1} - (1 + y)^{-1} = (1 + y)^{-1} \cdot$$

$$\cdot [(1 + y) (1 + x)^{-1} - 1],$$

avem

$$[(1 + x)^{-1} - (1 + y)^{-1}]^* [(1 + x)^{-1} - (1 + y)^{-1}] \leqslant$$

$$\leqslant [(1 + x)^{-1} (1 + y) - 1] [(1 + y) (1 + x)^{-1} - 1] =$$

$$= (1 + x)^{-1} (1 + y)^2 (1 + x)^{-1} - (1 + y) (1 + x)^{-1} -$$

$$- (1 + x)^{-1} (1 + y) + 1.$$

Astfel, dacă un şir generalizat (x_ι) din M^+ converge în s-topologia către x, atunci $(1 + x_\iota)^{-1} \to (1 + x)^{-1}$ în s-topologia.

q.e.d.

Reamintim că un proiector $e \in M$ se numeşte de gen numărabil, dacă orice familie de proiectori nenuli, ortogonali, majoraţi de e, este numărabilă. e este de gen numărabil dacă şi numai dacă este suportul unei forme pozitive normale. Dacă unitatea lui M este de gen numărabil, spunem că M este o W^*-algebră de gen numărabil. Orice algebră von Neumann într-un spaţiu Hilbert separabil este de gen numărabil.

Începem investigaţiile cu o lemă de separare.

1.2. LEMĂ. *Fie $e, f \in M$ proiectori ortogonali de gen numărabil. Atunci există $a \in ((A_1^+)^\sigma)_\delta$ astfel încît*

$$ae = e, \quad af = 0.$$

Demonstraţie. Fie φ şi ψ forme pozitive normale pe M, astfel încît supp $\varphi = e$ şi supp $\psi = f$. Conform teoremei de densitate a lui Kaplansky, pentru orice întreg $k > 0$ există $b_k \in A_1^+$ astfel ca

$$\varphi (1 - b_k) \leqslant \frac{1}{k}, \quad \psi (b_k) \leqslant \frac{1}{k\, 2^k}.$$

Pentru $0 < m < n$ definim

$$a_{m,n} = \left(m + \sum_{k=m+1}^{n} k b_k\right)^{-1} \sum_{k=m+1}^{n} k b_k .$$

Conform lemei 1.1,

$$\varphi(1 - a_{m,n}) = m\varphi\left(\left(m + \sum_{k=m+1}^{n} k\, b_k\right)^{-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant m\varphi((m + nb_n)^{-1}) = \frac{m}{m+n}\,\varphi\left(\left(1 - \frac{n}{m+n}(1 - b_n)\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{m}{m+n}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{i}\varphi((1 - b_n)^i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n}\,\varphi(1 - b_n) \leqslant \frac{m+1}{m+n}.$$

De asemenea

$$\psi(a_{m,n}) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{n} k\psi(b_k) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Pentru m fixat şirul $(a_{m,n})$ este crescător şi, notînd $a_m = \sup_n a_{m,n}$, şirul (a_m) este descrescător. Fie $a = \inf_m a_m \in ((A_1^+)^\sigma)_\delta$. Conform inegalităţilor de mai sus

$$\varphi(1 - a) = 0, \quad \psi(a) = 0,$$

de unde

$$ae = e, \quad af = 0.$$

q.e.d.

Putem demonstra acum teorema de închidere monotonă pentru W^*-algebre de gen numărabil.

1.3. TEOREMĂ. *Fie M o W^*-algebră de gen numărabil şi $A \subset M$ o C^*-algebră w-densă. Atunci*

$$((A_1^+)^\sigma)_\delta = M_1^+.$$

Demonstraţie. Din lema 1.2 rezultă imediat că $(A_1^+)^\sigma)_\delta$ conţine toţi proiectorii din M.

Fie $x \in M_1^+$ oarecare. Există un şir (e_k) de proiectori spectrali ai lui x, astfel încît

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}e_k.$$

Pentru k fixat fie $(a_{k,n})$ un şir descrescător în $(A_1^+)^\sigma$ astfel încît $e_k = \inf_n a_{k,n}$. Atunci

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_{k,n} + \frac{1}{2^n} \in (A_1^+)^\sigma,$$

şirul (a_n) este descrescător, şi $x = \inf_n a_n$.

q.e.d.

1.4. Corolar *Fie A o C^*-algebră de operatori într-un spaţiu Hilbert separabil. Dacă A_1^+ este închisă la limite de şiruri monotone, atunci A este închisă în topologia operatorială slabă.*

În cazul general limitele de şiruri monotone nu ne ajung. De aceea notăm pentru orice $S \subset M^+$ prin S^m mulţimea tuturor supremelor de familii filtrate crescător din S, iar prin S_m mulţimea tuturor infimurilor de familii filtrate descrescător din S. Ne punem problema stabilirii bogăţiei mulţimilor

$$A_1^+ \subset (A_1^+)^m \subset ((A_1^+)^m)_m \subset (((A_1^+)^m)_m)^m \subset \dots$$

în M_1^+. Spre deosebire de cazul cînd M este de gen numărabil, în general $((A_1^+)^m)_m \neq M_1^+$. Vom arăta însă că totdeauna $(((A_1^+)^m)_m)^m = M_1^+$.

Prima lemă are un caracter tehnic.

1.5. Lemă. *Pentru orice $a \in M_1^+$ aplicaţia $n \mapsto (1 + n(1-a))^{-1} - \frac{1}{1+n}(1-a)$, definită pe mulţimea întregilor pozitivi, ia valori pozitive şi este descrescătoare. Dacă în plus $a \in (A_1^+)^m$, atunci aplicaţia de mai sus ia valori în $(A_1^+)^m$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geqslant 0$

$$(1 + n(1-a))^{-1} - \frac{1}{1+n}(1-a) =$$

$$= (1 + n(1-a))^{-1}\left(1 - \frac{1}{1+n}(1-a) - \frac{n}{1+n}(1-a)^2\right) =$$

$$= (1 + n(1-a))^{-1}\left(\frac{1+2n}{1+n} a - \frac{n}{1+n} a^2\right) =$$

$$= (1 + n(1-a))^{-1}\left(1 + \frac{n}{1-n}(1-a)\right) a.$$

Folosind reprezentarea Ghelfand a C^*-algebrei generate de a şi de 1, se verifică uşor prima afirmaţie a lemei.

Afirmaţia a doua rezultă uşor, folosind egalitatea de mai sus.

q.e.d.

Urmează acum lema principală.

1.6. LEMĂ. *Fie* $(a_\iota)_{\iota\in I}$ *o familie din* $((A_1^+)^m)_m$, p *supremul suporturilor lui* $1 - a_\iota$ *în laticea proiectorilor lui* M *şi* $q = 1 - p$. *Atunci* $q \in ((A_1^+)^m)_m$.

Demonstraţie. Pentru orice $\iota \in I$ există o familie filtrată descrescător $(a_\iota k)_{k\in K_\iota}$ în $(A_1^+)^m$, astfel încît $a_\iota = \inf\limits_{k\in K_\iota} a_{\iota,k}$. Fie $J \subset I$ finită, $L_\iota \subset \subset K_\iota$ finită pentru orice $\iota \in I$ şi $n \geqslant 0$ un întreg. Notăm

$$x_{J,(L_\iota),n} = \left(1 + n \sum_{\iota\in J} \sum_{k\in L_\iota} (1 - a_{\iota,k})\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + n \sum_{\iota\in J} \operatorname{Card}(L_\iota)\left(1 - \frac{1}{\sum\limits_{\iota\in J} \operatorname{Card}(L_\iota)} \sum_{\iota\in J} \sum_{k\in L_\iota} a_{\iota,k}\right)\right)^{-1}$$

şi

$$J_{J,(L_\iota),n} = \left(1 + n\sum_{\iota\in J} \operatorname{Card}(L_\iota)\left(1 - \frac{1}{\sum\limits_{\iota\in J} \operatorname{Card}(L_\iota)} \sum_{\iota\in J} \sum_{k\in L_\iota} a_{\iota,k}\right)\right)^{-1} -$$

$$- \frac{1}{1+n\sum\limits_{\iota\in J}\operatorname{Card}(L_\iota)} \left(1 - \frac{1}{\sum\limits_{\iota\in J} \operatorname{Card}(L_\iota)} \sum_{\iota\in J} \sum_{k\in L_\iota} a_{\iota,k}.\right.$$

După lemele 1.1 şi 1.5 familiile $(x_{J,(L_\iota),n})$ şi $(y_{J,(L_\iota),n})$ sînt filtrate descrescător. Fie x şi y infimurile lor. Pentru orice J, (L_ι) şi n

$$0 \leqslant x_{J,(L_\iota),n} - y_{J,(L_\iota),n} \leqslant \frac{1}{1+n\sum\limits_{\iota\in J}\operatorname{Card}(L_\iota)},$$

deci $x = y$.

Conform lemei 1.5, pentru orice indici $y_{J,(L_\iota),n} \in (A_1^+)^m$, deci $y \in \in((A_1^+)^m)_m$. Rămîne de arătat că $x = q$.

Cum $1 - a_\iota = \sup\limits_{k\in K_\iota} (1 - a_{\iota,k})$, suportul lui $1 - a_\iota$, este supremul suporturilor lui $1 - a_{\iota,k}$, $k \in K_\iota$, în laticea proiectorilor lui M. Astfel

$$\bigvee_{\iota\in I} \bigvee_{k\in K_\iota} \operatorname{supp}(1 - a_{\iota,k}) = p.$$

Din inegalitatea

$$x_{J,(L_\iota),n} - x^2_{J,(L_\iota),n} \leqslant (1 + n \sum_{\iota \in J} \sum_{\iota \in L_\iota} (1 - a_{\iota,k}))^{-1} p$$

deducem că $x_{J,(L_\iota),n} - x^2_{J,(L_\iota),n}$ tinde către 0 în w-topologia, deci x este un proiector.

Familia $(1 - x_{J,(L_\iota),n})$ este filtrată crescător şi supremul său este $1 - x$. Folosind expresia

$$1 - x_{J,(L_\iota),n} = (1 + n \sum_{\iota \in J} \sum_{k \in L_\iota} (1 - a_{\iota,k}))^{-1} n \sum_{\iota \in J} \sum_{k \in L_\iota} (1 - a_{\iota,k}),$$

se vede uşor că

$$1 - x \leqslant p$$

şi pentru orice ι, K

$$\operatorname{supp} (1 - a_{\iota,k}) \leqslant 1 - x.$$

Rezultă că $1 - x = p$, deci $x = q$.

q.e.d.

Următoarea lemă ne dă informaţii despre bogăţia lui $((A_1^+)^m)_m$.

1.7. LEMĂ. $((A_1^+)^m)_m$ *conţine orice proiector de gen numărabil din* M.

Demonstraţie. Fie $e \in M$ un proiector de gen numărabil şi (e_ι) o familie de proiectori de gen numărabil, ortogonali, astfel încît $\sum_\iota e_\iota = 1 - e$. Conform lemei 1.2, pentru orice ι există $a_\iota \in ((A_1^+)^m)_m$ cu

$$a_\iota e = e, \quad a_\iota e_\iota = 0.$$

Atunci

$$(1 - a_\iota) e = 0, \quad (1 - a_\iota) e_\iota = e_\iota,$$

deci

$$\operatorname{supp} (1 - a_\iota) e = 0, \quad \operatorname{supp} (1 - a_\iota) e_\iota = e_\iota.$$

Notînd

$$p = \bigvee_\iota \operatorname{supp} (1 - a_\iota),$$

deducem că

$$p e = 0, \quad p e_\iota = e_\iota,$$

oricare ar fi ι. Astfel $p = 1 - e$, deci $e = 1 - p$. Conform lemei 1.6, $e \in ((A_1^+)^m)_m$.

q.e.d.

În sfîrşit, demonstrăm teorema de închidere monotonă în cazul general.

1.8. TEOREMĂ. *Fie M o W^*-algebră şi $A \subset M$ o C^*-algebră w-densă. Atunci*

$$(((A_1^+)^m)_m)^m = M_1^+.$$

Demonstraţie. Fie $x \in M_1^+$. Există un şir (e_k) de proiectori spectrali ai lui x, astfel încît

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e_k.$$

Pentru orice întreg $n > 0$ şi pentru orice proiectori de gen numărabil $f_1 \leqslant e_1, \ldots, f_n \leqslant e_n$, notăm

$$x_{f_1,\ldots,f_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} f_k.$$

Conform lemei 1.7, $x_{f_1,\ldots,f_n} \in ((A_1^+)^m)_m$. Cum familia $(x_{f_1,\ldots,f_n})$ este filtrată crescător şi supremul său este x, deducem că $x \in (((A_1^+)^m)_m)^m$.

q.e.d.

1.9. COROLAR. *Fie A o C^*-algebră de operatori într-un spaţiu Hilbert. Dacă A_1^* este închisă la limite de familii filtrate monoton, atunci A este închisă în topologia operatorială slabă.*

Corolariile 1.4 şi 1.9 au fost demonstrate de Kadison în [25], iar teoremele de închidere monotonă aparţin lui Pedersen. Demonstraţia teoremei 1.3 şi o schiţă a demonstraţiei teoremei 1.8 se află în [33].

§ 2. O TEOREMĂ DE TRANZITIVITATE

În acest paragraf demonstrăm extensii ale teoremelor lui Egorov şi Luzin din teoria măsurii pe spaţii local compacte. Extensia teoremei lui Luzin este o teoremă de tranzitivitate şi implică teorema de tranzitivitate cunoscută a lui Kadison.

Reamintim că s^*-topologia pe o W^*-algebră M este definită de seminormele $x \mapsto \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ şi $x \mapsto \varphi(xx^*)^{\frac{1}{2}}$, unde φ trece prin formele pozitive normale pe M. Astfel un şir generalizat (x_ι) converge către x în s^*-topologia dacă şi numai dacă $x_\iota \to x$ şi $x_\iota^* \to x^*$ în s-topologia. s^*-topologia se află între w-topologia şi topologia Mackey asociată

w-topologiei. În particular, dacă $A \subset M$ este o C^*-algebră w-densă, atunci bula unitate a lui A este s^*-densă în bula unitate a lui M.

2.1. TEOREMĂ. *Fie M o W^*-algebră, S o parte a lui M, x un element al aderenței lui S în s^*-topologia, $e \in M$ un proiector, φ o formă pozitivă normală pe M* și $\varepsilon > 0$. *Atunci există un proiector $f \in M$ și un șir (x_n) în S, astfel încît*

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) \leqslant \varepsilon,$$

$$\lim_{n \to \infty} \|xf - x_n f\| = \lim_{n \to \infty} \|fx - fx_n\| = 0.$$

Demonstrație. Fie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ un șir generalizat în S, convergent către x în s^*-topologia.

Notăm

$$a_\iota^1 = e(x - x_\iota)^* (x - x_\iota) e + e(x - x_\iota)(x - x_\iota)^* e.$$

Atunci supp $a_\iota^1 \leqslant e$ și $a_\iota^1 \to 0$ în w-topologia. Fie $e_\iota^1 \leqslant e$ un proiector spectral al lui a_ι^1 astfel încît

$$a_\iota^1 e_\iota^1 \leqslant \frac{1}{2} e_\iota^1,$$

$$a_\iota^1 (e - e_\iota^1) \geqslant \frac{1}{2} (e - e_\iota^1).$$

Cum $\varphi(e - e_\iota^1) \leqslant 2\varphi(a_\iota^1)$, există $\iota_1 \in I$ cu $\varphi(e - e_{\iota_1}^1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Notăm acum

$$a_\iota^2 = e_{\iota_1}^1 a_\iota^1 e_{\iota_1}^1.$$

Atunci supp $a_\iota^2 \leqslant e_{\iota_1}^1$ și $a_\iota^2 \to 0$ în w-topologia. Fie $e_\iota^2 \leqslant e_{\iota_1}^1$ un proiector spectral al lui a_ι^2 astfel încît

$$a_\iota^2 e_\iota^2 \leqslant \frac{1}{2^2} e_\iota^2,$$

$$a_\iota^2 (e_{\iota_1}^1 - e_\iota^2) \geqslant \frac{1}{2^2} (e_{\iota_1}^1 - e_\iota^2).$$

Cum $\varphi(e_{\iota_1}^1 - e_\iota^2) \leqslant 2^2 \varphi(a_\iota^2)$, există $\iota_2 \in I$ cu $\varphi(e_{\iota_1}^1 - e_{\iota_2}^2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$.

Prin inducție, găsim un șir (ι_n) în I și un șir de proiectori

$$e \geqslant e_{\iota_1}^1 \geqslant e_{\iota_2}^2 \geqslant \ldots,$$

astfel încît pentru orice n

$$e^n_{\iota_n} a^1_{\iota_n} e^n_{\iota_n} \leqslant \frac{1}{2^n} e^n_{\iota_n}$$

şi

$$\varphi(e - e^1_{\iota_1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\varphi(e^{n-1}_{\iota_{n-1}} - e^n_{\iota_n}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \ n > 1.$$

Punînd $f = \inf\limits_n e^n_{\iota_n}$ şi $x_n = x_{\iota_n}$, pentru orice n

$$\|(x - x_n) f\|^2 \leqslant \frac{1}{2^n}, \ \|f(x - x_n)\| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

şi

$$\varphi(e - f) \leqslant \varepsilon.$$

q.e.d.

2.2. TEOREMĂ (de tranzitivitate). *Fie M o W^*-algebră, $A \subset M$ o C^*-algebră w-densă şi $\tilde{A}$ C^*-algebra generată de A şi de unitatea lui M.*

(*i*) *Dacă $x \in M$, $e \in M$ este un proiector, φ este o formă pozitivă normală pe M şi ε, $\delta > 0$, atunci există un proiector $f \in M$ şi $a \in \tilde{A}$ astfel încît*

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) \leqslant \varepsilon,$$

$$\|a\| \leqslant (1 + \delta) \|x\|,$$

$$af = xf, \quad fa = fx.$$

(*ii*) *Dacă $x \in M$ este autoadjunct, iar $e, \varphi, \varepsilon, \delta$ sînt ca în (i), atunci există un proiector $f \in M$ şi un element autoadjunct $a \in \tilde{A}$ astfel încît*

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) \leqslant \varepsilon,$$

$$\|a\| \leqslant (1 + \delta) \|x\|,$$

$$af = xf.$$

(*iii*) *Dacă $u \in M$ este unitar, iar e, φ, ε sînt ca în* (*i*), *atunci există un proiector $f \in M$ şi un element unitar $v \in \tilde{A}$ astfel încît*

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) \leqslant \varepsilon,$$

$$vf = uf.$$

Demonstraţie. Ne situăm în condiţiile punctului (*i*).

Conform teoremei 2.1, există un proiector $f_1 \in M$ şi $a_1 \in A$ cu

$$f_1 \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|a_1\| \leqslant \|x\|.$$

$$\|xf_1 - a_1 f_1\| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}, \quad \|f_1x - f_1a_1\| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}.$$

Punem $x_1 = (x - a_1) f_1 + f_1(x - a_1) - f_1(x - a_1) f$. Atunci $\|x_1\| \leqslant \leqslant \sqrt{\|xf_1 - a_1 f_1\|^2 + \|f_1 x - f_1 a_1\|^2} \leqslant \frac{1}{2} \delta \|x\|$.

Aplicînd din nou teorema 2.1, există un proiector $f_2 \in M$ şi $a_2 \in A$ cu

$$f_2 \leqslant f_1$$

$$\varphi(f_1 - f_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2},$$

$$\|a_2\| \leqslant \|x_1\|,$$

$$\|x_1 f_2 - a_2 f_2\| \leqslant \frac{1}{2^2} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}, \quad \|f_2 x_1 - f_2 a_2\| \leqslant \frac{1}{2^2} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}.$$

Punem $x_2 = (x_1 - a_2) f_2 + f_2(x_1 - a_2) - f_2(x_1 - a_2) f_2$. Avem $\|x_2\| \leqslant \frac{1}{2^2} \delta \|x\|$.

Continuînd procedeul, găsim un şir de proiectori

$$e = f_0 \geqslant f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$$

şi un şir (a_k) în A, astfel încît, punînd

$$x_0 = x$$

$$x_k = (x_{k-1} - a_k) f_k + f_k(x_{k-1} - a_k) - f_k(x_{k-1} - a_k) f_k, \quad k > 0,$$

avem

$$\varphi(f_{k-1} - f_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k > 0,$$

$$\|a_1\| \leqslant \|x\|,$$

$$\|a_k\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \delta \|x\|, \quad k > 1,$$

$$\|x_{k-1} f_k - a_k f_k\| \leqslant \frac{1}{2^k} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}, \quad \|f_k x_{k-1} - f_k a_k\| \leqslant \frac{1}{2^k} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}}, \quad k > 0.$$

Notăm

$$f = \inf_k f_k, \quad a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Atunci

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f_{k-1} - f_k) \leqslant \varepsilon,$$

$$\|a\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| \leqslant (1 + \delta)\|x\|.$$

Cum pentru orice întreg $n > 0$

$$\left\|\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) f\right\| \leqslant \left\|\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) f_n\right\| =$$

$$= \|x_{n-1} f_n - a_n f_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \frac{\delta\|x\|}{\sqrt{2}},$$

rezultă că

$$\|(x - a) f\| = 0.$$

Analog

$$\|f(x - a)\| = 0.$$

(*ii*) rezultă imediat din (*i*).

Demonstraţia punctului (*iii*) va fi o variantă multiplicativă a demonstraţiei punctului (*i*).

Folosind descompunerea spectrală, se arată uşor că orice $u \in M$ unitar este de forma $u = \exp(ix)$, unde $x \in M$ este autoadjunct şi $-2\arcsin\frac{\|1-u\|}{2} \leqslant x \leqslant 2\arcsin\frac{\|1-u\|}{2}$. Astfel u aparţine aderenţei în s^*-topologia a mulţimii tuturor elementelor unitare $v \in \widetilde{A}$ cu $\|1-v\| \leqslant \|1-u\|$.

Ne situăm acum în condiţiile punctului (*iii*).

Conform teoremei 2.1, există un proiector $f_1 \in M$ şi un element unitar $v_1 \in \widetilde{A}$ cu

$$f_1 \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|uf_1 - v_1 f_1\| \leqslant \frac{1}{8}.$$

Fie $(1 - v_1^* u f_1 u^* v_1)(1 - f_1) = w_1 a_1$, w_1 izometrie parţială, $a_1 \geqslant 0$, descompunerea polară a lui $(1 - v_1^* u f_1 u^* v_1)(1 - f_1)$.

Avem

$$\|1 - f_1 - w_1 a_1\| = \|v_1^* u f_1 u^* v_1 (1 - f_1)\| =$$

$$= \|f_1 u^* v_1 - f_1 u^* v_1 f_1\| = \|v_1^* u f_1 - f_1 v_1^* u f_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \|v_1^* u f_1 - v_1^* v_1 f_1\| + \|f_1 v_1^* v_1 f_1 - f_1 v_1^* u f_1\| \leqslant 2\|uf_1 - v_1 f_1\|$$

şi

$$\|1 - v_1^* u f_1 u^* v_1 - a_1 w_1^*\| = \|f_1(1 - v_1^* u f_1 u^* v_1)\| \leqslant$$

$$\|f_1 v_1^* v_1 f_1 - f_1 v_1^* u f_1\| + \|f_1 v_1^* u f_1 - f_1 v_1^* u f_1 u^* v_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \|uf_1 - v_1 f_1\| + \|f_1 - f_1 u^* v_1\| = \|uf_1 - v_1 f_1\| +$$

$$+ \|v_1^* v_1 f_1 - v_1^* u f_1\| = 2\|uf_1 - v_1 f_1\|.$$

Mai departe,

$$\|1 - f_1 - a_1\| \leqslant \|1 - f_1 - a_1^2\| = \|1 - f_1 - a_1 w_1^* w_1 a_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \|1 - f_1 - w_1 a_1\| + \|(1 - v_1^* u f_1 u^* v_1) w_1 a_1 - a_1 w_1^* w_1 a_1\| \leqslant$$

$$\leqslant 4\|uf_1 - v_1 f_1\|,$$

deci

$$\|1 - f_1 - w_1\| \leqslant \|1 - f_1 - w_1 a_1\| + \|w_1 a_1 - w_1(1 - f_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant 6 \| u f_1 - v_1 f_1 \|.$$

Cum $\quad \|u f_1 - v_1 f_1\| \leqslant \frac{1}{8}$, avem

$$w_1^* w_1 = 1 - f_1,$$

$$w_1 w_1^* = 1 - v_1^* u f_1 u^* v_1,$$

$$\|1 - f_1 - w_1\| \leqslant \frac{6}{8}.$$

Punem

$$u_1 = v_1^* u f_1 + w_1.$$

Din cele de mai sus rezultă că $u_1 \in M$ este unitar şi

$$\|1 - u_1\| \leqslant \|f_1 - v_1^* u f_1\| + \|1 - f_1 - w_1\| \leqslant \frac{7}{8}.$$

Evident,

$$u_1 f_1 = v_1^* u f_1.$$

Aplicînd din nou teorema 2.1, există un proiector $f_2 \in M$ şi un element unitar $v_2 \in \widetilde{A}$ cu

$$f_2 \leqslant f_1,$$

$$\varphi(f_1 - f_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2},$$

$$\|1 - v_2\| \leqslant \| 1 - u_1\|,$$

$$\|u_1 f_2 - v_2 f_2\| \leqslant \frac{1}{8^2}.$$

Fie $(1 - v_2^* u_1 f_2 u_1^* v_2)(1 - f_2) = w_2 a_2$, w_2 izometrie parţială, $a_2 \geqslant 0$, descompunerea polară a lui $(1 - v_2^* u_1 f_2 u_1^* v_2)(1 - f_2)$. Se verifică ca mai sus că

$$w_2^* w_2 = 1 - f_2,$$

$$w_2 w_2^* = 1 - v_2^* u_1 f_2 u_1^* v_2,$$

$$\|1 - f_2 - w_2\| \leqslant \frac{6}{8^2}.$$

Punem

$$u_2 = v_2^* u_1 f_2 + w_2.$$

Atunci $u_2 \in M$ este unitar, $\|1 - u_2\| \leqslant \dfrac{7}{8^2}$ şi $u_2 f_2 = v_2^* u_1 f_2 = v_2^* v_1^* u f_2$.

Continuînd procedeul, găsim un şir de proiectori

$$e = f_0 \geqslant f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$$

şi un şir (v_k) de elemente unitare din $\widetilde{A}$, astfel încît

$$\varphi(f_{k-1} - f_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k > 0,$$

$$\|1 - v_k\| \leqslant \frac{7}{8^{k-1}}, \quad k > 1,$$

$$\|v_{k-1}^* \ldots v_1^* u f_k - v_k f_k\| \leqslant \frac{1}{8^k}, \quad k > 0.$$

Notăm

$$f = \inf_k f_k.$$

Atunci

$$f \leqslant e,$$

$$\varphi(e - f) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f_{k-1} - f_k) \leqslant \varepsilon.$$

Cum $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|1 - v_k\| < +\infty$, şirul $(v_1 v_2, \ldots . v_k)$ converge în normă către un element unitar $v \in \widetilde{A}$. Pentru orice k

$$\|uf - v_1 \ldots v_k f\| \leqslant \|u f_k - v_1 \ldots . v_k f_k\| =$$

$$= \|v_{k-1}^* \ldots v_1^* u f_k - v_k f_k\| \leqslant \frac{1}{8^k},$$

deci

$$uf = vf.$$

q.e.d.

Din teorema 2.2. rezultă varianta următoare a teoremei de tranzitivitate a lui Kadison:

2.3. COROLAR. *Fie H un spaţiu Hilbert, $B(H)$ W^*-algebra tuturor operatorilor liniari mărginiţi în H, A o C^*-subalgebră a lui $B(H)$, densă în topologia operatorială slabă, şi $\widetilde{A}$ C^*-algebra generată de A şi de operatorul identic.*

(*i*) *Dacă $x \in B(H)$, e este un proiector finit-dimensional în $B(H)$ şi $\delta > 0$, atunci există $a \in A$ cu*

$$\|a\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$ae = xe, \quad ea = ex.$$

(*ii*) *Dacă $x \in B(H)$ este autoadjunct, iar e şi δ sînt ca în* (*i*), *atunci există $a \in A$ autoadjunct cu*

$$\|a\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$ae = xe.$$

(*iii*) *Dacă $u \in B(H)$ este unitar, iar e este ca în* (*i*), *atunci există $v \in \widetilde{A}$ unitar cu*

$$ve = ue, \quad ev = eu.$$

Demonstraţie. Fie n dimensiunea lui eH şi φ_e urma pe $eB(H)e$, cu $\varphi_e(e) = 1$. Putem considera pe φ_e ca formă pozitivă normală pe $B(H)$. Cum orice proiector f cu $f \leqslant e$, $\varphi_e(e-f) < \frac{1}{n}$, este egal cu e, punctele (*i*) şi (*ii*) ale corolarului sînt consecinţe imediate ale punctelor corespunzătoare ale teoremei 2.2.

Punctul (*iii*) al corolarului se obţine aplicînd teorema 2.2 (*iii*) lui u, $e \vee u^*eu$, $\varphi_{e\vee u^*eu}$, $\frac{1}{n+1}$.

q.e.d.

Ideea unor extensii necomutative ale teoremelor lui Egorov şi Luzin aparţine lui Tomita. Teorema 2.1 este o întărire a teoremei 1 din [36], iar teorema 2.2 întăreşte teorema 6 din [50] şi teorema 2 din [36]. Varianta de mai sus a teoremei de tranzitivitate a lui Kadison a fost demonstrată pe o altă cale de Sakai ([40], teorema 1.21.16).

§ 3. C^*-ALGEBRE DE TIP I

În acest paragraf ne ocupăm cu proprietăţi de densitate ale unor C^*-algebre particulare. Scopul nostru principal este de a demonstra teorema lui Glimm şi Sakai despre caracterizarea C^*-algebrelor de tip I.

Reamintim că o W^*-algebră M se numeşte de tip I, dacă orice proiector nenul din M majorează un proiector abelian nenul, adică un proiector $0 \neq e \in M$ pentru care algebra eMe este comutativă. M este de tip I dacă şi numai dacă conţine un proiector abelian cu suport central 1.

Dacă A este o C^*-algebră, iar $\pi : A \to B(H)$ este o $*$-reprezentare tipul închiderii lui πA a lui A într-un spaţiu Hilbert H, atunci prin tipul închiderii lui π înţelegem în topologia operatorială slabă. A se numeşte de tip I, dacă orice $*$-reprezentare a sa este de tip I. A este de tip I dacă şi numai dacă W^*-algebra A^{**} este de tip I.

Definiţia C^*-algebrelor de tip I se face în termeni de închidere slabă universală, şi teorema extrem de adîncă a lui Glimm şi Sakai dă o caracterizare a lor în termeni de $*$-reprezentări ireductibile.

Demonstrăm în prealabil un rezultat care ne va fi util şi în capitolele următoare.

3.1. TEOREMĂ. *Fie $\pi : A \to B$ un $*$-homomorfism al unei C^*-algebre A pe o C^*-algebră B. Pentru orice $a \in A$, $a \geqslant 0$ şi $y \in B$, $y^*y \leqslant \pi(a)$, există $x \in A$ cu*

$$x^* x \leqslant a, \quad \pi(x) = y.$$

Demonstraţie. Fie $r \in A$, $r \geqslant 0$, astfel încît

$$\pi(r) = \pi(a) - y^*y.$$

Notînd $s = a - r$, s este autoadjunct, $s \leqslant a$ şi $\pi(s) = y^*y$.

Fie acum $z \in A$ cu $\pi(z) = y$. Elementul $t = z^* z - s$ este autoadjunct, deci $t = t^+ - t^-$, unde $t^+ \geqslant 0$, $t^- \geqslant 0$, $t^+t^- = 0$. Considerăm pe A scufundată în A^{**}. Notăm pentru orice întreg $n > 0$

$$x_n = z(a + t^+)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1} a^{\frac{1}{2}} \in A.$$

Punînd pentru orice pereche de întregi m, $n > 0$

$$t_{m,n} = \left(\frac{1}{m} + a + t^+\right)^{-1} - \left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1},$$

avem

$$\| x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - x_n)^* (x_m - x_n)\| =$$

$$= \| a^{\frac{1}{2}} t_{m,n}(a + t^+)^{\frac{1}{2}} z^*z(a + t^+)^{\frac{1}{2}} t_{m,n} a^{\frac{1}{2}} \| \leqslant$$

$$\leqslant \| a^{\frac{1}{2}} t_{m,n}(a + t^+)^2 t_{m,n}a^{\frac{1}{2}}\| =$$

$$= \|(a + t^+)\, t_{m,n} a^{\frac{1}{2}}\|^2 =$$

$$= \|(a + t^+)\, t_{m,n}\, a\, t_{m,n}(a + t^+)\| \leq$$

$$\leq \|(a + t^+)\, t_{m,n}(a + t^+)\, t_{m,n}(a + t^+)\| \leq$$

$$\leq \|(a + t^+)\, t_{m,n}\|\, \|(a + t^+)^2\, t_{m,n}\|.$$

Pe de altă parte, folosind reprezentarea Ghelfand a C^*-algebrei generate de $a + t^+$ şi de 1, se vede uşor că

$$\|(a + t^+)\, t_{m,n}\| \leq 2$$

şi

$$\|(a + t^+)^2\, t_{m,n}\| \leq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Astfel, şirul (x_n) converge către un $x \in A$.

Cum pentru orice n

$$x_n^* x_n = a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1}(a + t^+)^{\frac{1}{2}} z^* z (a + t^+)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1} a^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1}(a + t^+)^2\left(\frac{1}{n} + a + t^+\right)^{-1} a^{\frac{1}{2}} \leq a,$$

rezultă că

$$x^* x \leq a.$$

În sfîrşit,

$$\pi(t) = \pi(z)^*\, \pi(z) - \pi(s) = y^* y - y^* y = 0,$$

deci $\pi(t^+) = 0$. Astfel,

$$\pi(x_n) = y\, \pi(a)\left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1},$$

de unde

$$\|y - \pi(x_n)\|^2 = \left\| y\, \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1}\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\|\left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1} y^* y \left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left\|\left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1} \pi(a) \left(\frac{1}{n} + \pi(a)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{n}.$$

În concluzie

$$y = \lim_{n \to \infty} \pi(x_n) = \pi(x).$$

q.e.d.

3.2. COROLAR. Fie $\pi : A \to B$ *un *-homomorfism al unei C^*-algebre A pe o C^*-algebră B. Atunci bula unitate închisă a lui B este imaginea prin π a bulei unitate închise a lui A.*

Spunem că o C^*-algebră A satisface condiția lui Glimm dacă există un element pozitiv nenul $a \in A$, astfel încît, pentru orice *-reprezentare ireductibilă π a lui A într-un spațiu Hilbert H, dimensiunea lui $\pi(a)H$ este ≤ 1.

Primele trei leme ne vor da informații despre structura C^*-algebrelor care nu satisfac condiția lui Glimm.

Notăm pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ prin f_ε funcția continuă pe $(-\infty, +\infty)$ care se anulează pe $(-\infty, 1-\varepsilon]$, este egală cu 1 pe $\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right]$ și este liniară pe $\left[1-\varepsilon, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right]$. Evident, $f_\varepsilon f_{2\varepsilon} = f_\varepsilon$. Notăm de asemenea prin g_ε funcția continuă pe $(-\infty, +\infty)$ definită prin $g_\varepsilon(t) = t^{-1} f_\varepsilon(t)$.

3.3. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, care nu satisface condiția lui Glimm. Pentru orice $d \in A, d \geq 0$, $\|d\| = 1$, și orice $\varepsilon \in (0,1)$ există $w, w', d' \in A$, astfel încît*

1) $w \geq 0,\ d' \geq 0,\ w'^*w = 0,\ \|w\| = \|w'\| = \|d'\| = 1;$

2) $f_\varepsilon(d)\, w = w,\quad f_\varepsilon(d)\, w' = w';$

3) $w^2 d' = d',\ w'^* w' d' = d'.$

Demonstrație. Fie $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$. Pentru $c, u \in A$ cu $0 \leq c \leq 1$ și $\|u\| \leq 1$ definim

$$d_0 = f_{2\delta}(d)\ c\ f_{2\delta}(d),$$

$$d_1 = f_{4\delta}(d) - d_0,$$

$$v = f_\delta(d_1)\ u\ f_\delta(d_0),$$

$$w = f_{\frac{1}{2}}(v^*v)^{\frac{1}{2}},$$

$$w' = v g_{\frac{1}{2}}(v^*v)^{\frac{1}{2}},$$

$$d' = f_{\frac{1}{4}}(v^*v).$$

După ce obţinem informaţii despre elementele de mai sus, vom alege pe c şi pe u astfel încît w, w', d' să satisfacă condiţiile lemei.

Evident, $0 \leqslant d_0 \leqslant 1$ şi $-1 \leqslant d_1 \leqslant 1$.

Cum $f_{48}(d)\, d_0 = d_0 = d_0 f_{48}(d)$, elementele d_0 şi d_1 comută. Fie C C^*-algebra generată de d_0 şi d_1. Dacă χ este un caracter pe C astfel încît $\chi(d_0) \neq 0$, atunci $\chi(f_{48}(d)) = 1$, deci $\chi(d_1) + \chi(d_0) = 1$. Astfel, ori $0 \leqslant \chi(d_1) \leqslant \frac{1}{2}$, ori $\chi(d_0) \leqslant \frac{1}{2}$. Dacă χ este un caracter pe C cu $\chi(d_0) = 0$, atunci afirmaţia precedentă este trivial adevărată. Rezultă că pentru orice funcţie reală continuă h pe $(-\infty, +\infty)$, care se anulează pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, şi pentru orice caracter χ pe C avem

$$\chi(h(d_1)\, h(d_0)) = h(\chi(d_1))\, h(\chi(d_0)) = 0,$$

deci

$$h(d_1)\, h(d_0) = 0.$$

În particular, cum f_8 se anulează pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ avem

$$v^* v^* = f_8(d_0)\, u^*\, f_8(d_1)\, f_8(d_0)\, u^*\, f_8(d_1) = 0.$$

De asemenea, $f_\varepsilon(d)\, d_0 = d_0$ şi $f_\varepsilon(d)\, d_1 = d_1$, deci pentru orice funcţie reală continuă h pe $(-\infty, +\infty)$, care se anulează în 0, avem $f_\varepsilon(d) h(d_0) = h(d_0)$, $f_\varepsilon(d)\, h(d_1) = h(d_1)$. De aici rezultă imediat că

$$f_\varepsilon(d)\, v = v, \quad f_\varepsilon(d)\, v^* = v^*.$$

Avem

$$w^2 d' = f_{\frac{1}{2}}(v^* v)\, f_{\frac{1}{4}}(v^* v) = f_{\frac{1}{4}}(v^* v) = d'$$

şi

$$w'^* w' d' = g_{\frac{1}{2}}(v^* v)^{\frac{1}{2}}\, v^* v\, g_{\frac{1}{2}}(v^* v)^{\frac{1}{2}}\, f_{\frac{1}{4}}(v^* v)\, f_{\frac{1}{2}}(v^* v) = f_{\frac{1}{4}}(v^* v) = d',$$

deci 3) este satisfăcută independent de alegerea lui c şi u.

Cum $f_\varepsilon(d)\, v^* v = v^* v$, avem $f_\varepsilon(d)\, w = w$, iar $f_\varepsilon(d)\, v = v$ implică egalitatea $f_\varepsilon(d)\, w' = w'$. Astfel şi 2) este satisfăcută.

În sfîrşit, deoarece $v^*(v^* v) = 0$, deducem că $w'^* w = 0$. Din 1) mai avem $w \geqslant 0$, $d' \geqslant 0$, $\|w\| \leqslant 1$, $\|w'\| \leqslant 1$, $\|d'\| \leqslant 1$. Rămîne să alegem pe c şi pe u astfel încît să rezulte $\|w\| = \|w'\| = \|d'\| = 1$.

Cum $f_8(d) \neq 0$ şi A nu satisface condiţia lui Glimm, există o $*$-reprezentare ireductibilă π a lui A într-un spaţiu Hilbert H astfel încît $\dim \pi(f_8(d))\, H \geqslant 2$. Fie ξ şi η, $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, vectori ortogonali în $\pi(f_8(d))\, H$.

Conform corolarului 2.3, există $a \in A$ autoadjunct astfel încît

$$\pi(a)\,\xi = \xi, \quad \pi(a)\,\eta = 0.$$

Fie h funcţia continuă pe $(-\infty, +\infty)$, care se anulează pe $(-\infty, 0]$, este egală cu 1 pe $[1, +\infty)$ şi este liniară pe $[0,1]$. Putem $c = h(a)$. Atunci

$$0 \leqslant c \leqslant 1,$$
$$\pi(c)\,\xi = \xi,$$
$$\pi(c)\,\eta = 0.$$

Pe de altă parte, conform corolariilor 2.3 şi 3.2, există $u \in A$, $\|u\| \leqslant 1$, astfel încît $\pi(u)$ este unitar şi

$$\pi(u)\xi = \eta.$$

Cum ξ, $\eta \in \pi(f_8(d))\,H$ şi $f_{28}(d)\; f_8(d) = f_8(d)$, $f_{45}(d)\; f_{28}(d) = f_{28}(d)$, rezultă că

$$\pi(f_{28}(d))\;\xi = \xi,$$
$$\pi(f_{28}(d))\;\eta = \eta,$$
$$\pi(f_{48}(d))\;\eta = \eta.$$

Astfel, cu c şi u alese mai sus, obţinem succesiv

$$\pi(d_0)\;\xi = \xi,$$
$$\pi(d_0)\eta = 0,$$
$$\pi(d_1)\;\eta = \eta,$$
$$\pi(v)\xi = \eta,$$
$$\pi(v^*v)\;\xi = \xi,$$
$$\pi(w)\;\xi = \xi,$$
$$\pi(w')\;\xi = \eta,$$
$$\pi(d')\;\xi = \xi.$$

Prin urmare $\|w\| = \|w'\| = \|d'\| = 1$.

q.e.d.

3.4. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate care nu satisface condiția lui Glimm. Atunci există elemente nenule $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ în bula unitate închisă a lui A*, unde $n = 0,1,2, \ldots$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, *astfel încît*:

(*i*) *pentru* $j \leqslant k$ și $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_j)$ *avem*

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)^* \, v(\beta_1, \ldots, \beta_k) = 0 ;$$

(*ii*) *pentru* $k \geqslant 1$, *notînd* $(0_{k-1}) = (\underbrace{0,\ldots 0}_{k-1})$, *avem*

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \, v(0_{k-1}, \alpha_k) ;$$

oricare ar fi $\alpha_1, \ldots \alpha_k$;

(*iii*) *pentru* $j < k$ *avem*

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)^* \, v(\alpha_1 \ldots, \alpha_j) \, v(0_{k-1}, \alpha_k) = v(0_{k-1}, \alpha_k) ;$$

oricare ar fi $\alpha_1, \ldots \alpha_j, \alpha_k$;

(*iv*) $v(\emptyset) = 1$, $v(0_k) \geqslant 0$;

(*v*) *există* $b(n) \in A$, $b(n) \geqslant 0$, $\|b(n)\| = 1$, $n = 0,1,2, \ldots$, *cu*

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* \, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, b(n) = b(n),$$

oricare ar fi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Demonstrație. Folosim inducția matematică. Pentru $n = 0$ punem

$$v(\emptyset) = b(0) = 1 .$$

Presupunem că am construit elementele $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ și $b(j)$ pentru $j \leqslant n$. Aplicînd lema 3.3 lui $d = b(n)$ și unui $\varepsilon \in (0,1)$ oarecare, obținem elementele $w = v(0_{n+1})$, $w' = v(0_n, 1)$, $d' = b(n + 1)$.

Notăm pentru $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0_n)$

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, v(0_n, \alpha_{n+1}).$$

Avem

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* \, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, b(n) = b(n),$$

deci

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* \, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) f_\varepsilon(b(n)) = f_\varepsilon(b(n)).$$

Astfel

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* \, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, v(0_n, \alpha_{n+1}) =$$

$$= v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* \, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, f_\varepsilon(b(n)) \, v(0_n, \alpha_{n+1}) =$$

$$= f_\varepsilon(b(n)) \, v(0_n, \alpha_{n+1}) = v(0_n, \alpha_{n+1}).$$

Analog, cum

$$v(0_n)^2\, b(n) = b(n),$$

avem

$$v(0_n)\, f_\varepsilon(b(n)) = f_\varepsilon(b(n)),$$

de unde

$$v(0_n)\, v(0_n, \alpha_{n+1}) = v(0_n)\, f_\varepsilon(b(n))\, v(0_n, \alpha_{n+1}) =$$

$$= f_\varepsilon(b(n))\, v(0_n, \alpha_{n+1}) = v(0_n, \alpha_{n+1}).$$

Folosind aceste egalități și egalitatea $v(0_n, 1)^*\, v(0_{n+1}) = 0$, se verifică ușor că elementele construite corespund.

q.e.d.

Spunem că o C^*-algebră cu unitate B este uniform hiperfinită de tip $(2,2^2, 2^3, \ldots)$, dacă există C^*-subalgebre

$$\mathbb{C} \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$

ale lui B, astfel încît B_n este $*$-izomorfă cu C^*-algebra $2^n \times 2^n$-matricelor, iar B este închiderea lui $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

3.5. Lemă. *Fie A o C^*-algebră cu unitate care nu satisface condiția lui Glimm. Atunci, există o C^*-subalgebră separabilă B a lui A, conținînd unitatea, astfel încît un cît al lui B este o C^*-algebră uniform hiperfinită de tip $(2,2^2,2^3, \ldots)$.*

Demonstrație. Fie $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$ definite ca în lema 3.4. Notăm

$$e(n) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in\{0,1\}} v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^*.$$

Pentru orice $k \geqslant 1$

$$v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, v(\beta_1, \ldots, \beta_n)^*\, e(n+k) =$$

$$= \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k \in\{0,1\}} v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, v(\beta_1, \ldots \beta_n)^*\, v(\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k) \times$$

$$\times\, v(\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)^* =$$

$$= \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k \in\{0,1\}} v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)\, v(\beta_1, \ldots. \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)^*.$$

Folosind această formulă fundamentală, se deduce ușor că $e(n+k)$ comută cu toate $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, v(\beta_1, \ldots, \beta_n)^*$, că elementele $v(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \times$ $\times\, v(\beta_1, \ldots, \beta_n)^*\, e(n+k)$ sînt sume de elemente $v(\alpha', \ldots, \alpha'_{m+k-1}) \times$

$\times v(\beta_1', \ldots, \beta_{n+k-1}')\ e(n+k)$, şi că $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ v(\beta_1, \ldots, \beta_n)^* \times$
$\times v(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')\ v(\beta_1', \ldots, \beta_n')^*\ e(n+1) = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1'} \ldots \delta_{\alpha_n}^{\beta_n'}\ v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \times$
$\times v(\beta_1', \ldots, \beta_n')^*\ e(n+1)$.

Fie $B(n)$ C^*-subalgebra lui A generată de elementele $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \times$ $\times v(\beta_1, \ldots, \beta_j)^*$ cu $j \leqslant n$, iar $\mathcal{I}(n) = \{b \mid b \in B(n), be(n+1) = 0\}$. Din cele de mai sus rezultă că $\mathcal{I}(n)$ este un ideal bilateral închis în $B(n)$, iar imaginile canonice ale elementelor $v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ v(\beta_1, \ldots, \beta_n)^*$ în $B(n)/\mathcal{I}(n)$ formează un sistem de unităţi matriceale. Astfel $B(n)/\mathcal{I}(n)$ este *-izomorfă cu C^*-algebra $2^n \times 2^n$ — matricelor.

Evident, $B(n) \subset B(n+1)$. Dacă $a \in A$ şi $ae(n+1) = 0$, atunci pentru orice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ avem $\|av(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})\|^2 = \|av(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \times$ $\times v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})^*\ a^*\| \leqslant \|ae(n+1)\ a^*\| = 0$, deci $av(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) =$ $= av(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})\ v(0_{n+1}, \alpha_{n+2}) = 0$. Rezultă că $ae(n+2) = 0$, deci $\mathcal{I}(n) \subset \mathcal{I}(n+1)$.

Notăm prin B închiderea lui $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(n)$, iar prin $\mathcal{I}$ închiderea lui $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(n)$. B este o C^*-subalgebră separabilă a lui A, conţinînd unitatea. Cum $\mathcal{I}(n)$ este ideal bilateral maximal în $B(n)$, avem $\mathcal{I} \cap B(n) = \mathcal{I}(n)$. Astfel $B/\mathcal{I}$ este o C^*-algebră uniform hiperfinită, de tip $(2, 2^2, 2^3, \ldots)$.

q.e.d.

Fie H un spaţiu Hilbert. O aplicaţie liniară Φ a unei C^*-algebre cu unitate A în $B(H)$ se numeşte complet pozitivă, dacă pentru orice întreg $n > 0$, orice elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ şi orice vectori $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ avem

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\Phi(a_i^* a_j)\ \xi_j \mid \xi_i) \geqslant 0.$$

Demonstrăm cîteva rezultate referitoare la aplicaţii complet pozitive, culminînd cu o teoremă de prelungire.

3.6. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate şi $\Phi : A \to B(H)$ o aplicaţie liniară. Φ este complet pozitivă dacă şi numai dacă există o *-reprezentare π a lui A într-un spaţiu Hilbert K şi un operator liniar mărginit $V : H \to K$ cu $\|V\|^2 = \|\Phi(1)\|$, astfel încît pentru orice $a \in A$*

$$\Phi(a) = V^* \cdot \pi(a)\ V.$$

În plus, K poate fi ales astfel încît $\pi(A)VH$ să fie totală în K.

Demonstraţie. Presupunem că Φ este complet pozitivă. Definim pe $A \otimes H$ forma biliniară $(\cdot|\cdot)_\Phi$ prin

$$(b_1 \otimes \eta_1 | b_2 \otimes \eta_2)_\Phi = (\Phi(b_2^* b_1)\ \eta_1 \mid \eta_2).$$

Cum Φ este complet pozitivă, forma biliniară $(\cdot|\cdot)_\Phi$ este pozitivă. Fie K completatul lui $A \otimes H$ în raport cu seminorma definită de $(\cdot|\cdot)_\Phi$. Atunci K este un spaţiu Hilbert.

Notăm imaginea canonică a lui $x \in A \otimes H$ în K prin $\hat{x}$.

Formulele

$$\pi(a)\,(\widehat{b \otimes \eta}) = \widehat{ab \otimes \eta},$$

$$V\,\xi = \widehat{1 \oplus \xi}$$

definesc o $*$-reprezentare $\pi : A \to B(K)$ şi un operator liniar mărginit $V : H \to K$, care satisfac cerinţele lemei.

Reciproca este imediată.

q.e.d.

Din lema 3.6 rezultă imediat, că dacă Φ este complet pozitivă, atunci $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\|$. De asemenea, din lema 3.6 se deduce uşor rezultatul principal din [24].

3.7. Lemă. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, B o C^*-subalgebră a lui A, conţinînd unitatea, iar $\Psi : B \to B(H)$ o aplicaţie complet pozitivă. Atunci, există o prelungire complet pozitivă $\Phi : A \to B(H)$ a lui Ψ.*

Demonstraţie. Conform lemei 3.6, există o $*$-reprezentare ρ a lui B într-un spaţiu Hilbert L şi un operator liniar mărginit $W : H \to L$, astfel încît

$$\Psi(b) = W^* \rho(b)\, W, \quad b \in B.$$

Mai departe, după un rezultat binecunoscut, există o $*$-reprezentare π a lui A într-un spaţiu Hilbert K şi o izometrie $V : L \to K$, astfel încît

$$\rho(b) = V^* \pi(b)\, V, \quad b \in B.$$

Punînd pentru orice $a \in A$

$$\Phi(a) = (VW)^* \pi(a)\; VW,$$

obţinem o prelungire complet pozitivă $\Phi : A \to B(H)$ a lui Ψ.

q.e.d.

Numim algebră von Neumann într-un spaţiu Hilbert H o $*$-subalgebră a lui $B(H)$, închisă în topologia operatorială slabă, care conţine operatorul identic. O $*$-algebră $M \subset B(H)$ este algebră von Neumann dacă şi numai dacă coincide cu bicomutantul său M''.

3.8. Lemă. *Fie $M \subset B(H)$ o algebră von Neumann cu comutant comutativ. Atunci există o aplicaţie complet pozitivă $P : B(H) \to B(H)$, astfel încît $PB(H) \subset M$ şi $Px = x$ pentru $x \in M$.*

Demonstraţie. Pentru orice $x \in B(H)$ notăm prin $C(x)$ anvelopa convexă închisă în topologia operatorială slabă a mulţimii $\{u^* x u \mid u \in M'$

unitar}. Folosind teorema de punct fix a lui Markov şi Kakutani, se vede uşor că $C(x) \cap M \neq \emptyset$, oricare ar fi $x \in B(H)$.

Definim pentru orice $u \in M'$ unitar operatorul $T_u \in B(B(H))$, prin

$$T_u(x) = u^* x u.$$

Fie τ topologia definită pe $B(B(H))$ de seminormele

$$T \to |(T(x)\ \xi \mid \eta)|,\ x \in B(H),\ \xi, \eta \in H.$$

Bula unitate închisă a lui $B(B(H))$ este τ-compactă. Notăm prin $\mathscr{F}$ anvelopa convexă τ-închisă a mulţimii $\{T_u \mid u \in M'$ unitar$\}$. Considerăm în $\mathscr{F}$ relaţia de preordine

$$T_1 \leqslant T_2 \Leftrightarrow C(T_1 x) \subset C(T_2 x) \text{ pentru orice } x \in B(H).$$

Fie $(T_\iota)_{\iota \in I}$ o parte total ordonată a lui $\mathscr{F}$. Notăm prin $\mathscr{F}_\iota$ τ-închiderea lui $\{T_k \mid T_k \leqslant T_\iota\}$. Atunci $\bigcap_{\iota \in I} \mathscr{F}_\iota$ nu e vidă şi orice $T \in \bigcap_{\iota \in I} \mathscr{F}_\iota$ este un minorant al lui $(T_\iota)_{\iota \in I}$. Aplicînd lema lui Zorn, există un element minimal P în $\mathscr{F}$.

Presupunem că pentru un $x_0 \in B(H)$ mulţimea $C(Px_0)$ conţine cel puţin două elemente. Fie $y \in C(Px_0) \cap M$. Atunci anvelopa convexă τ-închisă a lui $\{T_u P \mid u \in M'$ unitar$\}$ conţine un T cu $Tx_0 = y$, deci $C(Tx_0) \neq C(Px_0)$. Cum $T \leqslant P$, am ajuns la o contradicţie.

Astfel $C(Px)$ se reduce la un singur punct, oricare ar fi $x \in B(H)$. Cum $C(Px) \cap M \neq \emptyset$, avem $C(Px) \subset M$. Rezultă deci, că pentru orice $x \in B(H)$, $Px \in C(Px) \subset M$.

Cum operatorii T_u sînt complet pozitivi şi $T_u(x) = x$ pentru orice $x \in M$, aceleaşi afirmaţii sînt valabile şi pentru P.

q.e.d.

Vom da acum o caracterizare algebrică a aplicaţiilor complet pozitive.

Fie A o C^*-algebră şi $n > 0$ un întreg. Notăm prin A_n algebra tuturor $n \times n$ -matricelor cu elemente din A. Considerînd pe A ca o C^*-algebră de operatori liniari mărginiţi într-un spaţiu Hilbert H, A_n poate fi considerată operînd în $\underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{n}$. Norma operatorială pe A_n este o normă de C^*-algebră şi nu depinde de reprezentarea spaţială a lui A. Evident, orice aplicaţie liniară Φ a lui A într-o C^*-algebră B defineşte o aplicaţie liniară $\Phi_n : A_n \to B_n$.

3.9. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, H un spaţiu Hilbert şi $\Phi : A \to B(H)$ o aplicaţie liniară. Φ este complet pozitivă dacă şi numai dacă $\Phi_n : A_n \to B(H)_n$ este pozitivă pentru orice întreg $n > 0$.*

Demonstrație. Fie Φ complet pozitivă. Conform lemei 3.6, există o $*$-reprezentare π a lui A într-un spațiu Hilbert K și un operator liniar mărginit $V : H \to K$, astfel încît:

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V, \qquad a \in A.$$

Fie $n > 0$ un întreg și $(a_{ij}) \in A_n$ o matrice pozitivă. Atunci există $(b_{ij}) \in A_n$ cu $(a_{ij}) = (b_{ij})^* (b_{ij})$, adică $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}$. Avem

$$\Phi(a_{ij}) = V^*\pi(a_{ij}) V = \sum_{k=1}^{n} V^*\pi(b_{ki})^*\pi(b_{kj}) V,$$

deci pentru orice vector $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\Phi(a_{ij}) \xi_j | \xi_i) = \sum_{i,j,k=1}^{n} (\pi(b_{kj}) V \xi_j | \pi(b_{ki}) V \xi_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi(b_{ki}) V \xi_i \right\|^2 \geqslant 0.$$

Astfel matricea $(\Phi(a_{ij}))$ este pozitivă.

Reciproc, să admitem că Φ_n este pozitivă pentru orice n. Fie $a_1, \ldots, a_n \in A$ și $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$. Cum matricea $(a_i^* a_j)$ este pozitivă, rezultă că $(\Phi(a_i^* a_j))$ este pozitivă, deci

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\Phi(a_i^* a_j) \xi_j | \xi_i) \geqslant 0.$$

Astfel, Φ este complet pozitivă.

q.e.d.

3.10. Corolar. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, H și K spații Hilbert, $\Phi : A \to B(H)$ o aplicație complet pozitivă, B o C^*-algebră cu unitate, $\Phi A \subset B \subset B(H)$ și $\Psi : B \to B(K)$ o aplicație complet pozitivă. Atunci $\Psi \circ \Phi : A \to B(K)$ este complet pozitivă.*

Încheiem pregătirile referitoare la aplicațiile complet pozitive cu următoarea teoremă de prelungire.

3.11. Teoremă. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, B o C^*-subalgebră a lui A, conținînd unitatea, H un spațiu Hilbert, $(M_\iota)_{\iota \in I}$ o familie filtrată crescător de algebre von Neumann de tip I în H, M închiderea lui $\bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ în topologia operatorială slabă, și $\Psi : B \to B(H)$* o aplicație *complet pozitivă astfel încît $\Psi B \subset M$. Atunci există o aplicație complet pozitivă $\Phi : A \to B(H)$, astfel încît $\Phi A \subset M$ și Φ coincide cu Ψ pe $\bigcup_{\iota \in I} \Psi^{-1} M_\iota$.*

Demonstrație. Conform lemei 3.7 există o prelungire complet pozitivă $\Theta : A \to B(H)$ a lui Ψ.

Fie e'_ι un proiector abelian cu suport central 1 în M'_ι. După lema 3.8, există o aplicație complet pozitivă $P_\iota : B(e'_\iota H) \to B(e'_\iota H)$, astfel încît $P_\iota B(e'_\iota H) \subset M_\iota|_{e'_\iota H}$ și $P_\iota y = y$ pentru $y \in M_\iota|_{e'_\iota H}$. Aplicația $\rho_\iota : x \mapsto x|_{e'_\iota H}$ a lui M_ι pe $M_\iota|_{e'_\iota H}$ este un $*$-izomorfism, deci, conform corolarului 3.10, egalitatea

$$Q_\iota(x) = \rho_\iota^{-1} P_\iota e(\iota x|_{e'_\iota H})$$

definește o aplicație complet pozitivă $Q_\iota : B(H) \to B(H)$, astfel încît $Q_\iota B(H) \subset M_\iota$, și $Q_\iota\, x = x$ pentru $x \in M_\iota$.

Aplicînd din nou corolarul 3.10, $Q_\iota \circ \Theta$ este complet pozitivă, oricare ar fi $\iota \in I$. În plus $\|Q_\iota \circ \Theta\| \leqslant \|\Psi\|$.

Fie τ topologia definită în spațiul tuturor operatorilor liniari mărginiți din A în $B(H)$ de seminormele

$$T \mapsto |(T(a)\, \xi \mid \eta)|, \quad a \in A,\ \xi, \eta \in H.$$

Mulțimea operatorilor T cu $\|T\| \leqslant \|\Psi\|$ este τ-compactă. Notăm prin $\mathscr{F}_\iota$ τ-închiderea lui $\{Q_k \circ \Theta \mid M_k \supset M_\iota\}$. Intersecția mulțimilor $\mathscr{F}_\iota$, $\iota \in I$, nu este vidă, deci există $\Phi \in \bigcap_{\iota \in I} \mathscr{F}_\iota$.

Evident, Φ este complet pozitivă. Cum $Q_\iota \circ \Theta$ ia valori în $M_\iota \subset M$ și M este închisă în topologia operatorială slabă, avem $\Phi A \subset M$. Fie $\iota \in I$ oarecare și $x \in \Psi^{-1} M_\iota$. Atunci pentru orice $k \in I$ cu $M_k \supset M_\iota$ avem $\Theta(x) = \Psi(x) \in M_\iota \subset M_k$, deci $Q_k \Theta(x) = \Psi(x)$. Rezultă că $T(x) = \Psi(x)$, oricare ar fi $T \in \mathscr{F}_\iota$. În particular, $\Phi(x) = \Psi(x)$. Astfel Φ și Ψ coincid pe $\bigcup_{\iota \in I} \Psi^{-1} M_\iota$.

q.e.d.

Motivul pentru care ne ocupăm în acest paragraf cu aplicații complet pozitive este ca, avînd o C^*-algebră cu unitate A și o $*$-reprezentare ρ a unei C^*-subalgebre a lui A, să construim o $*$-reprezentare a lui A, pe cît posibil de același tip cu ρ. Acestea ne sînt necesare pentru a exploata lema 3.5. În acest context se încadrează lema care urmează.

Reamintim că o W^*-algebră se numește continuă dacă nu conține proiectori abelieni nenuli. Un factor este continuu dacă și numai dacă nu conține proiectori minimali.

3.12. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, B o C^*-subalgebră a lui A, conținînd unitatea, $\Phi : A \to B(H)$ o aplicație complet pozitivă și $M \subset B(H)$ un factor continuu, astfel încît Φ este multiplicativă pe B și închiderile în topologia operatorială slabă ale lci ΦB și ΦA coincid cu M. Atunci există o $*$-reprezentare factorială continuă a lui A.*

Demonstrație. Fie $\mathscr{F}$ mulțimea tuturor aplicațiilor complet pozitive $A \to B(H)$, care iau valori în M și pe B coincid cu $\Phi \cdot \mathscr{F}$ este o mulțime convexă compactă în topologia τ, definită în demonstrația teoremei 3.11. Fie Ψ un punct extremal al lui $\mathcal{F}$.

Conform lemei 3.6, există o $*$-reprezentare π a lui A într-un spațiu Hilbert K și un operator liniar mărginit $V : H \to K$, astfel încît

$$\Psi(a) = V^* \pi(a) V, \; a \in A,$$

și K este generat de $\pi(A) VH$. Cum $\Psi(1)$ este operatorul identic, V este o izometrie, deci VV^* este un proiector. Pe de altă parte, din multiplicabilitatea lui Ψ pe B rezultă că VV^* comută cu $\pi(B)$: $V^*\pi(b)^*\pi(b)V = V^* \pi(b^*b) V = \Phi(b^*b) = \Phi(b^*) \Phi(b) = V^* \pi(b)^* VV^* \pi(b) V$, etc.

Fie N închiderea lui $\pi(A)$ în topologia operatorială slabă, iar P un proiector central în N. Pentru orice $b \in B$

$$\begin{aligned}\Psi (b) V^* PV &= V^* \pi(b) VV^* PV = \\ &= V^* VV^* \pi(b) PV = \\ &= V^* P\pi(b) VV^* V = \\ &= V^* PVV^* \pi(b) V = \\ &= V^* PV \Psi (b).\end{aligned}$$

Cum $\Psi(B)$ este densă în M în topologia operatorială slabă, V^*PV aparține centrului lui M. Astfel există un scalar

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \text{ cu } V^*PV = \lambda id_H .$$

Presupunem că $0 < \lambda < 1$. Atunci egalitățile

$$\Psi_1(a) = \frac{1}{\lambda} V^*P \pi(a) V, \qquad a \in A,$$

$$\Psi_2(a) = \frac{1}{1-\lambda} V^*(id_k - P) \pi(a) V, \qquad a \in A,$$

definesc aplicații aparținînd lui $\mathcal{F}$. Cum $\Psi = \lambda\Psi_1 + (1 - \lambda)\Psi_2$, extremalitatea lui Ψ implică $\Psi = \Psi_1 = \Psi_2$. Astfel pentru orice $a \in A$ avem

$$V^* P\pi(a) V = \lambda V^* \pi(a) V.$$

Cum $\pi(A) VH$ generează pe K, de aici deducem

$$V^*P = \lambda V^* = V^* PV V^*.$$

Prin urmare $VV^*P = \lambda VV^*$, deci $0 < \| VV^*P \| < 1$. Pe de altă parte, $VV^*P = VV^*PVV^*$, de unde rezultă că VV^*P este un proiector, contrazicînd inegalitățile $0 < \| VV^*P \| < 1$.

În concluzie, $\lambda = 0$ sau 1. Dacă $\lambda = 0$, atunci $PV = 0$, deci pentru orice $a \in A$ avem $P\pi(a)V = \pi(a)PV = 0$. Cum $\pi(A)VH$ generează pe K, $P = 0$. Dacă $\lambda = 1$, raționînd analog deducem că $P = \mathrm{id}_K$. Astfel N este factor.

Aplicația $T \mapsto V^*TV$ este un $*$-homomorfism al închiderii în topologia operatorială slabă a lui $\pi(B)$ pe M, continuu în topologiile operatoriale slabe. Astfel există un $*$-homomorfism $\rho : M \to N$, continuu în topologiile operatoriale slabe, care ia valori în închiderea lui $\pi(B)$ în topologia operatorială slabă, și pentru care $V^*\rho(S)V = S$, oricare ar fi $S \in M$.

Presupunem că N nu este continuu. Atunci operatorul identic este o sumă de proiectori minimali ortogonali din N, deci există un proiector minimal $E \in N$ cu $V^*EV \neq 0$. Fie $F \in M$ un proiector spectral nenul al lui V^*EV și $\alpha > 0$, astfel încît $F \leqslant \alpha V^*EVF$. M fiind continuu, există un șir (F_n) de proiectori ortogonali nenuli în M, majorați de F. Notăm $E_n = \rho(F_n)$. Cum $F_n \to 0$ în topologia operatorială slabă, și $E_n \to 0$ în topologia operatorială slabă. E fiind minimal, $EE_nE \to 0$ în normă, deci $V^*EE_nEV \to 0$ în normă.

Pe de altă, E_n sînt în închiderea lui $\pi(B)$ în topologia operatorială slabă, deci comută cu VV^*. Rezultă că

$$V^*EVF_nV^*EV = V^*EVV^*E_nVV^*EV =$$

$$= V^*EE_nVV^*E_nEV \leqslant$$

$$\leqslant V^*EE_nEV,$$

de unde

$$\|F_nV^*EV\|^2 \leqslant \|V^*EE_nEV\|.$$

Astfel $F_nV^*EV \to 0$ în normă.

În sfîrșit, cum $F_n = F_nFF_n \leqslant \alpha F_nV^*EVF_n$, deducem că $F_n \to 0$ în normă, ceea ce este imposibil, fiecare F_n fiind nenul.

În concluzie, N este un factor continuu, deci π este o $*$-reprezentare factorială continuă a lui A.

q.e.d.

Completăm rezultatele preliminarii cu următoarea lemă:

3.13. LEMĂ. *O C^*-algebră uniform hiperfinită de tip* $(2, 2^2, 2^3, \ldots)$ *are o $*$-reprezentare factorială continuă.*

Demonstrație. Fie B o C^*-algebră cu unitate, conținînd C^*-subalgebrele

$$\mathbb{C} \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots,$$

astfel încît B_n este $*$-izomorfă cu C^*-algebra $2^n \times 2^n$-matricelor, iar B este închiderea lui $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Notăm prin ψ_n urma pe B_n cu $\psi_n(1) = 1$. Pentru orice n avem $\psi_{n+1}|_{B_n} = \psi_n$. Fie φ_n o prelungire pozitivă a lui ψ_n pe B, iar φ un punct limită al şirului (φ_n) în topologia slabă a lui B^*. Atunci φ este o urmă pe B şi pentru orice n avem $\varphi|_{B_n} = \psi_n$. Considerăm $*$-reprezentarea ρ a lui B, definită de φ, şi notăm prin M închiderea lui $\rho(B)$ în topologia operatorială slabă. Fie ξ un vector ciclic al lui ρ, astfel încît

$$\varphi(b) = (\rho(b)\xi\,|\,\xi), \qquad b \in B.$$

Dacă P este un proiector central netrivial în M, stunci $\|P\xi\| \neq 0,1$. Definim forma pozitivă φ_P pe B prin formula

$$\varphi_P(b) = \frac{1}{\|P\xi\|^2}(P\rho(b)\xi\,|\,\xi).$$

Cum φ_P este o urmă pe B cu $\varphi_P(1) = 1$, ea coincide cu φ pe orice B_n. Astfel $\varphi_P = \varphi$. Rezultă că pentru orice $T \in M$ avem $\|PT\xi\| = \|P\xi\|\,\|T\xi\|$, ceea ce pentru $T = \mathrm{id} - P$ nu este adevărată.

În concluzie, M este un factor. Aplicaţia $T \to (T\xi\,|\,\xi)$ este o urmă fidelă pe M, şi cum există în M proiectori cu urmă oricît de mică, M este continuu.

q.e.d.

Demonstrăm acum rezultatul principal al acestui paragraf.

3.14. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră, iar $\tilde{A} \subset A^{**}$ C^*-algebra generată de A şi de unitatea lui A^{**}. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(*i*) *A este de tip* I.

(*ii*) *Orice $*$-reprezentare factorială a lui A este de tip* I.

(*iii*) *Nici o C^*-subalgebră a lui $\tilde{A}$, conţinînd unitatea, nu are o C^*-algebră cît uniform hiperfinită de tip* $(2, 2^2, 2^3, \ldots)$.

(*iv*) *Orice C^*-algebră cît nenulă a lui A satisface condiţia lui Glimm.*

(*v*) *Există o familie $(z_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori centrali ortogonali în A^{**} şi o familie $(a_\iota)_{\iota \in I}$ de elemente în A, $0 \leqslant a_\iota \leqslant 1$, astfel încît $\sum\limits_{\iota \in I} a_\iota z_\iota$ este un proiector abelian cu suport central* 1 *în A^{**}.*

Demonstraţie. Evident, (*i*) implică pe (*ii*). Conform lemei 3.13, teoremei 3.11 şi lemei 3.12, (*ii*) implică pe (*iii*). Implicaţia (*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) rezultă din lema 3.5.

Presupunem acum că (*iv*) este adevărată. Fie $(z_\iota)_{\iota \in I}$ o familie maximală de proiectori centrali, cu proprietatea că pentru orice $\iota \in I$ există $a_\iota \in A$, $0 \leqslant a_\iota \leqslant 1$, astfel încît $a_\iota z_\iota$ este un proiector abelian cu suport central z_ι. Dacă $z_0 = 1 - \sum\limits_{\iota \in I} z_\iota \neq 0$, atunci egalitatea $\pi(a) = az_0$ defineşte un $*$-homomorfism nenul $\pi : A \to A^{**}$. Conform (*iv*), există un element pozitiv nenul $y \in \pi(A)$, astfel încît algebra $y\,A^{**}\,y$ este comutativă. Fie f funcţia continuă pe $(-\infty, +\infty)$, care se anulează pe $(-\infty, 0]$, este egală cu 1 pe $\left[\frac{\|y\|}{2}, +\infty\right)$ şi este liniară pe $\left[0, \frac{\|y\|}{2}\right]$. Notînd $x = f(y)$, x aparţine lui $\pi(A)$, $0 \leq x \leq 1$, şi există un proiector spectral nenul e al lui x, astfel încît $xe = e$. Dacă z este suportul central al lui e, atunci $xz = e$. Aplicînd corolarul 3.2, există $a \in A$, $0 \leq a \leq 1$, astfel încît $\pi(a) = a\,z_0 = x$. Rezultă că $az = e$ este un proiector abelian nenul cu suport central $z \leq z_0$, în contradicţie cu maximalitatea lui $(z_\iota)_{\iota \in I}$. În concluzie, $\sum_{\iota \in I} z_\iota = 1$, deci (v) este adevărată.

În sfîrşit, (v) implică faptul că A^{**} este o W^*-algebră de tip I, adică pe (i).

q.e.d.

Corolarul următor ne sugerează că pentru o C^*-algebră condiţia de a fi de tip I este foarte restrictivă.

3.15. Corolar. *Dacă o C^*-algebră este de tip I, atunci orice C^*-subalgebră a sa este de tip* I.

Teorema 3.1 îi aparţine lui G. K. Pedersen. O demonstraţie a ei a apărut în [6]. Aplicaţiile complet pozitive sînt cunoscute de multă vreme. Astfel lema 3.6 apare în lucrarea [43] a lui Stinespring, iar o generalizare puternică a lemei 3.7 a fost demonstrată de Arveson în [2]. Lema 3.8 aparţine în esenţă lui J. Schwartz (vezi [42]).

Ideea folosirii aplicaţiilor complet pozitive în demonstraţia teoremei lui Glimm şi Sakai este originală, la fel şi demonstraţia lemei 3.12. Lema 3.12 înlocuieşte teorema 1 din [37], care de asemenea poate fi demonstrată prin metodele noastre.

Teorema 3.14 a fost demonstrată în cazul separabil de Glimm (vezi [13]) iar în cazul general de Sakai (vezi [37] sau [40], § 4.6). Condiţia (v) apare explicit în [20].

Se cunoaşte că orice C^*-algebră care nu este de tip I, are o $*$-reprezentare factorială de tip III. În cazul separabil se ştie că o C^*-algebră care nu este de tip I, are o $*$-reprezentare factorială de tip II. În cazul neseparabil nu se ştie nici măcar existenţa unei $*$-reprezentări oarecare de tip II. Ne întrebăm dacă în demonstraţia lemei 3.12, pornind cu un factor M de tip II_1, factorul N va fi semifinit? Pe de altă parte, putem să ne aşteptăm că o C^*-algebră cu unitate, în care orice element nescalar este comutator, nu are $*$-reprezentări de tip II.

CAPITOLUL II

SPAŢII STONIENE ŞI HIPERSTONIENE

În acest capitol, dăm o trecere în revistă a proprietăţilor principale ale spaţiilor stoniene şi hiperstoniene. O atenţie deosebită este acordată teoremelor de selecţie continuă. Teoria expusă este o analoagă a analizei or eliene în spaţii metrizabile separabile, folosită în teoria reducerii a lui von Neumann. Punctul culminant al capitolului îl constituie ultimile trei paragrafe, care tratează module Banach peste AW^*-algebre şi W^*-algebre comutative. Topologia spaţiilor stoniene şi hiperstoniene stă la baza unor descompuneri ale modulelor Banach, care vor fi dezvoltate mai departe în cazul W^*-algebrelor. De aici provine şi denumirea de „reducere topologică a W^*-algebrelor".

§ 1. SPAŢII STONIENE

Numim spaţiu stonian un spaţiu topologic Hausdorff compact Ω, astfel încît închiderea oricărei părţi deschise a lui Ω este deschisă. Din definiţie rezultă imediat că într-un spaţiu stonian componenta conexă a oricărui punct se reduce la punctul respectiv, deci spaţiile stoniene sînt „total disconexe".

Fie Ω un spaţiu topologic. O mulţime $E \subset \Omega$ se numeşte rară dacă închiderea lui E nu are puncte interioare. Reuniunea unui număr finit de mulţimi rare este de asemenea rară. Spunem că $E \subset \Omega$ este de categoria întîi dacă E este reuniunea unui şir de mulţimi rare. Notăm mulţimea tuturor părţilor de categoria întîi ale lui Ω prin $\mathscr{C}$. Introducem în mulţimea tuturor părţilor lui Ω relaţia de echivalenţă

$$A \sim B \Leftrightarrow A \triangle B \in \mathscr{C}.$$

1.1. LEMĂ. *Dacă Ω este un spaţiu topologic, atunci orice parte boreliană a lui Ω este echivalentă cu o mulţime deschisă.*

Demonstraţie. Fie $\mathscr{F}$ mulţimea tuturor părţilor lui Ω, echivalente cu părţi deschise. Evident, $\mathscr{F}$ conţine toate părţile deschise ale lui Ω.

Dacă $A \in \mathscr{F}$, atunci există o mulţime deschisă U cu $A \sim U$. Cum $(\Omega \setminus A) \triangle (\Omega \setminus U) = A \triangle U$, avem $\Omega \setminus A \sim \Omega \setminus U$. Pe de altă parte, $\Omega \setminus U$ fiind închisă, este echivalentă cu interiorul său $\Omega \setminus \overline{U}$. Astfel $\Omega \setminus A \sim \Omega \setminus \overline{U}$, adică $\Omega \setminus A \in \mathscr{F}$.

Fie acum (A_n) un şir în $\mathscr{F}$. Există un şir (U_n) de mulţimi deschise, astfel încît $A_n \sim U_n$ pentru orice n. Cum

$$(\bigcup_n A_n) \setminus (\bigcup_n U_n) \subset \bigcup_n (A_n \setminus U_n) \in \mathscr{C}$$

şi

$$(\bigcup_n U_n) \setminus (\bigcup_n A_n) \subset \bigcup_n (U_n \setminus A_n) \in \mathscr{C},$$

avem $\bigcup_n A_n \sim \bigcup_n U_n$, deci $\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}$.

Din cele de mai sus rezultă că $\mathscr{F}$ conţine toate părţile boreliene ale lui Ω.

q.e.d.

Dacă Ω este un spaţiu topologic Hausdorff compact şi $E \subset \Omega$ este de categoria întîi, atunci, conform teoremei lui Baire, E nu are puncte interioare.

1.2. LEMĂ. *Fie Ω un spaţiu stonian. Atunci orice mulţime boreliană $A \subset \Omega$ este echivalentă cu o mulţime deschisă şi închisă unică $\tau(A) \subset \Omega$.*

Demonstraţie. Fie $A \subset \Omega$ boreliană. Conform lemei 1.1, există o mulţime deschisă $U \subset \Omega$ echivalentă cu A. Cum $\overline{U}$ este deschisă şi închisă şi $\overline{U} \sim U$, punînd $\tau(A) = \overline{U}$, $\tau(A)$ satisface cerinţele lemei.

Unicitatea lui $\tau(A)$ rezultă imediat din remarca dinaintea enunţului lemei.

q.e.d.

Remarcăm că aplicaţia $A \mapsto \tau(A)$ este o ridicare a claselor de echivalenţă de mulţimi boreliene. Teorema care urmează extinde această ridicare la funcţii boreliene mărginite.

Spunem că două funcţii complexe f şi g pe Ω sînt echivalente dacă $\{t | t \in \Omega,\ f(t) \neq g(t)\} \in \mathscr{C}$. Astfel două părţi ale lui Ω sînt echivalente dacă şi numai dacă funcţiile lor caracteristice sînt echivalente.

1.3. TEOREMĂ. *Fie Ω un spaţiu stonian. Atunci orice funcţie complexă boreliană mărginită f pe Ω este echivalentă cu o funcţie complexă continuă unică $\rho(f)$ pe Ω.*

Demonstraţie. Fie f o funcţie complexă boreliană mărginită pe Ω. Atunci f este limita uniformă a unui şir (f_n) de funcţii de forma

$$f_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \chi_{A_{n,j}},$$

unde $\alpha_{n,j}$ sînt scalari, $A_{n,j}$ sînt părţi boreliene mutual disjuncte ale lui Ω, iar $\chi_{A_{n,j}}$ sînt funcţiile caracteristice ale mulţimilor $A_{n,j}$.

Conform lemei 1.2, mulţimile $A_{n,j}$ sînt echivalente cu mulţimi deschise şi închise mutual disjuncte $\tau(A_{n,j})$. Punem

$$g_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \chi_{\tau(A_{n,j})}.$$

Atunci g_n sînt continue şi converg uniform către o funcţie continuă g. Punînd $\rho(f) = g$, $\rho(f)$ satisface condiţiile teoremei.

Unicitatea lui $\rho(f)$ rezultă din remarca dinaintea lemei 1.2.

q.e.d.

Teorema 1.3 ne permite să raţionăm în spaţiul claselor de echivalenţă de funcţii complexe boreliene mărginite pe Ω pe reprezentanţi canonici comozi.

Fie Ω un spaţiu topologic Hausdorff compact. Notăm prin $C(\Omega)$ C^*-algebra tuturor funcţiilor complexe continue pe Ω, iar prin $C^h(\Omega)$ laticea tuturor funcţiilor reale continue pe Ω. Laticea $C^h(\Omega)$ se numeşte relativ completă dacă orice familie mărginită superior din $C^h(\Omega)$ are suprem în $C^h(\Omega)$.

1.4. COROLAR. *Un spaţiu topologic Hausdorff compact Ω este stonian dacă şi numai dacă laticea $C^h(\Omega)$ este relativ completă.*

Demonstrație. Fie Ω un spațiu stonian, iar (f_ι) o familie mărginită superior în $C^h(\Omega)$. Atunci funcția f definită prin

$$f(t) = \sup_\iota f_\iota(t),\ t \in \Omega,$$

este inferior semicontinuă, deci boreliană. Se vede ușor că funcția $\rho(f)$ definită în teorema 1.3 este supremul lui (f_ι) în $C^h(\Omega)$.

Reciproc, să presupunem că laticea $C^h(\Omega)$ este relativ completă. Fie $U \subset \Omega$ o mulțime deschisă, iar (f_ι) familia tuturor funcțiilor continue $0 \leqslant f_\iota \leqslant 1$ care se anulează în afara lui U. Dacă f este supremul lui (f_ι) în $C^h(\Omega)$, atunci f ia valoarea 1 pe U și se anulează pe $\Omega \setminus \overline{U}$. Rezultă că $\chi_{\overline{U}} = f$ este continuă, deci $\overline{U} = \{t \mid t \in \Omega,\ \chi_{\overline{U}}(t) > 0\}$ este deschisă.

q.e.d.

Fie M o C^*-algebră. Pentru orice mulțime $S \subset M$ notăm

$$^{\perp}S = \{x \mid x \in M,\ xy = 0 \text{ pentru orice } y \in S\},$$
$$S^{\perp} = \{x \mid x \in M,\ yx = 0 \text{ pentru orice } y \in S\}.$$

Se vede ușor că următoarele condiții pentru M sînt echivalente:

1) pentru orice $S \subset M$, există un proiector $e \in M$ cu $^{\perp}S = Me$;

2) pentru orice $S \subset M$, există un proiector $f \in M$ cu $S^{\perp} = fM$.

Numim AW^*-algebră o C^*-algebră M care satisface condițiile de mai sus. Orice W^*-algebră este AW^*-algebră.

Teorema următoare stabilește o legătură între spațiile stoniene și AW^*-algebre.

1.5. TEOREMĂ. *Un spațiu topologic Hausdorff compact Ω este stonian dacă și numai dacă $C(\Omega)$ este o AW^*-algebră.*

Demonstrație. Fie Ω un spațiu stonian și $S \subset C(\Omega)$. Mulțimea

$$U = \bigcup_{f \in S} \{t \mid t \in \Omega,\ f(t) \neq 0\}$$

este deschisă, deci $\overline{U}$ este deschisă și închisă. Notăm prin e funcția caracteristică a lui $\Omega \setminus \overline{U}$. Se vede ușor că $^{\perp}S = C(\Omega)e$.

Reciproc, să presupunem că $C(\Omega)$ este o AW^*-algebră. Fie $U \subset \Omega$ o mulțime deschisă, iar S familia tuturor elementelor lui $C(\Omega)$ care se anulează în afara lui U. Există o mulțime deschisă și închisă $V \subset \Omega$ astfel încît $^{\perp}S = \{f \mid f \in C(\Omega),\ f \text{ se anulează pe } V\}$. Se verifică ușor că $\overline{U} = V$, deci $\overline{U}$ este deschisă.

q.e.d.

Cu alte cuvinte, teorema 1.5 afirmă că spațiile stoniene sînt tocmai spațiile idealelor maximale ale AW^*-algebrelor comutative.

Demonstrăm acum o proprietate remarcabilă a spațiilor stoniene, echivalentă cu faptul că spațiile stoniene sînt obiecte proiective în categoria spațiilor topologice Hausdorff compacte.

Fie Y un spațiu topologic Hausdorff compact, Ω un spațiu stonian și $f : Y \to \Omega$ o aplicație continuă surjectivă. Notăm pentru orice parte deschisă U a lui Y

$$\Omega_U = \{t \mid t \in \Omega,\ f^{-1}(t) \subset U\} = \Omega \setminus f(Y \setminus U).$$

Ω_U este deschisă, deci $\overline{\Omega_U}$ este deschisă şi închisă.

1.6. LEMĂ. *Fie $U_1, \ldots, U_n$ părţi deschise ale lui Y. Atunci*

$$\Omega_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{U_i}$$

şi

$$\overline{\Omega_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i}} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\Omega_{U_i}}.$$

Demonstraţie. Prima egalitate rezultă imediat din definiţia mulţimilor Ω_U. Ea implică incluziunea

$$\overline{\Omega_{\bigcap\limits_i U_i}} \subset \bigcap_i \overline{\Omega}_{U_i}.$$

Fie acum $t \in \bigcap\limits_i \overline{\Omega}_{U_i}$, iar W o vecinătate deschisă a lui t, inclusă în mulţimea deschisă $\bigcap\limits_i \overline{\Omega}_{U_i}$. Cum $W \subset \overline{\Omega}_{U_1}$, $W \cap \Omega_{U_1}$ este deschisă şi nevidă. Cum $W \cap \Omega_{U_1} \subset \overline{\Omega}_{U_2}$, $W \cap \Omega_{U_1} \cap \Omega_{U_2}$ este deschisă şi nevidă. Continuînd procedeul, obţinem că

$$W \cap \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{U_i} = W \cap \Omega_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i}$$

este nevidă. Astfel $t \in \overline{\Omega_{\bigcap\limits_i U_i}}$.

q.e.d.

Din lema 1.6 rezultă că pentru orice $t \in \Omega$ familia

$$\{\overline{U} \mid U \subset Y \text{ deschisă, } t \in \overline{\Omega}_U\}$$

este filtrată descrescător. Notăm intersecţia ei prin Y_t. Mulţimile Y_t sînt evident închise. Se vede uşor că $Y_t \subset f^{-1}(t)$.

1.7. LEMĂ. $\bigcup\limits_{t \in \Omega} Y_t$ *este o parte închisă a lui* Y.

Demonstraţie. Fie $y_0 \in Y \setminus \bigcup\limits_{t=\Omega} Y_t$ şi $t_0 = f(y_0)$. Cum $y_0 \notin Y_{t_0}$, există o vecinătate închisă V a lui y_0 cu

$$V \cap Y_{t_0} = \emptyset.$$

Y_{t_0} fiind intersecţia familiei filtrate descrescător de mulţimi compacte $\{\overline{U} \mid U \subset Y \text{ deschisă, } t_0 \in \overline{\Omega}_U\}$, există $U_0 \subset Y$ deschisă $t_0 \in \overline{\Omega}_{U_0}$, astfel încît

$$V \cap \overline{U}_0 = \emptyset.$$

Pentru orice $t \in \overline{\Omega}_{U_0}$ avem $Y_t \subset \overline{U}_0$, deci

$$V \cap Y_t = \emptyset.$$

Astfel

$$V \cap \bigcup_{t \in \overline{\Omega}_{U_0}} Y_t = \emptyset,$$

ceea ce implică că $V \cap f^{-1}(\overline{\Omega}_{U_0})$ este o vecinătate a lui y_0, disjunctă de $\bigcup_{t \in \Omega} Y_t$.

În concluzie, $Y \setminus \bigcup_{t \in \Omega} Y_t$ este deschisă, deci $\bigcup_{t \in \Omega} Y_t$ este închisă.

q.e.d.

Spunem că f are proprietatea de minimalitate, dacă imaginea oricărei mulţimi închise $K \subset Y$, $K \neq Y$, este diferită de Ω.

1.8. LEMĂ. *Dacă f are proprietatea de minimalitate, atunci ea este deschisă.*

Demonstraţie. Conform lemei 1.7, $\bigcup_{t \in \Omega} Y_t$ este o parte închisă a lui Y. Cum $f(\bigcup_{t \in \Omega} Y_t) = \Omega$, proprietatea de minimalitate a lui f implică că $Y = \bigcup_{t \in \Omega} Y_t$, deci $f^{-1}(t) = Y_t$, $t \in \Omega$.

Fie V o mulţime deschisă în Y. Arătăm că $f(V)$ este deschisă, adică orice $t_0 \in \overline{\Omega \setminus f(V)}$ aparţine lui $\Omega \setminus f(V)$.

Fie deci $t_0 \in \overline{\Omega \setminus f(V)}$. Fie de asemenea K o parte compactă oarecare a lui V. Pentru orice vecinătate W a lui t_0 există $t \in W \cap (\Omega \setminus f(V))$. Cum $t \notin f(V)$, avem

$$f^{-1}(t) = Y_t \subset Y \setminus V \subset Y \setminus K.$$

După definiţia lui Y_t există $U \subset Y$ deschisă, $t \in \overline{\Omega}_U$, astfel încît

$$f^{-1}(t) = Y_t \subset \overline{U} \subset Y \setminus K.$$

Rezultă că $t \in \Omega_{Y \setminus K}$, deci $W \cap \Omega_{Y \setminus K} \neq \emptyset$. Cum W este o vecinătate oarecare a lui t_0, deducem că $t_0 \in \overline{\Omega}_{Y \setminus K}$. Folosind definiţia lui Y_{t_0},

$$f^{-1}(t_0) = Y_{t_0} \subset \overline{Y \setminus K}.$$

K fiind o parte compactă oarecare a lui V, avem

$$f^{-1}(t_0) \subset Y \setminus V,$$

deci $t_0 \in \Omega \setminus f(V)$.

q.e.d.

Lema următoare caracterizează aplicațiile cu proprietatea de minimalitate.

1.9. Lemă. *f are proprietatea de minimalitate dacă și numai dacă este un homeomorfism.*

Demonstrație. Evident, dacă f este un homeomorfism, atunci ea are proprietatea de minimalitate.

Reciproc, presupunem că f are proprietatea de minimalitate. Conform lemei 1.8, f este deschisă.

Dacă f nu este injectivă, există $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, $f(y_1) = f(y_2) = t_0$. Fie V o vecinătate închisă a lui y_1, astfel încît $y_2 \notin V$. Cum f este deschisă, $f(V)$ este o vecinătate a lui t_0. Fie $W \subset f(v)$ o vecinătate deschisă și închisă a lui t_0. Atunci

$$(f^{-1}(W) \cap V) \cup f^{-1}(\Omega \setminus W)$$

este o parte închisă a lui Y, nu conține pe y_2, iar imaginea sa este Ω, ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a lui f.

Rezultă că f este injectivă, deci este un homeomorfism.

q.e.d.

Fie X un spațiu topologic. Notăm prin $\mathscr{F}(X)$ mulțimea tuturor părților închise nevide ale lui X. Spunem că o aplicație F a unui spațiu topologic Ω în $\mathscr{F}(X)$ este superior semicontinuă, dacă pentru orice parte închisă K a lui X mulțimea $\{t | t \in \Omega, F(t) \cap K \neq \emptyset\}$ este închisă.

Proprietatea următoare a spațiilor stoniene este o analoagă continuă a principiului selecției măsurabile în analiza boreliană.

1.10. Principiul selecției continue. *Fie X un spațiu topologic Hausdorff compact, iar Ω un spațiu stonian.*

(*i*) (în termeni de aplicații univoce). *Dacă $f : X \to \Omega$ este o aplicație continuă surjectivă, atunci există o aplicație continuă $s : \Omega \to X$ astfel încît*

$$f(s(t)) = t, \quad t \in \Omega.$$

(*ii*) (în termeni de aplicații multivoce). *Dacă $F : \Omega \to \mathscr{F}(X)$ este o aplicație superior semicontinuă, atunci există o aplicație continuă $s : \Omega \to X$ astfel încît*

$$s(t) \in F(t), \; t \in \Omega.$$

Demonstrație. (*i*) Fie $f : X \to \Omega$ o aplicație continuă surjectivă. Folosind lema lui Zorn, se arată ușor că mulțimea

$$\{Y | \; Y \subset X \text{ închisă}, \; f(Y) = \Omega\},$$

ordonată prin incluziune, conține un element minimal Y_0. Conform lemei 1.9, restricția lui f la Y_0 este un homeomorfism. Notînd prin s inversa acestei restricții, considerată ca aplicație a lui Ω în X, avem

$$f(s(t)) = t, \quad t \in \Omega.$$

(*ii*) Fie $F : \Omega \to \mathscr{F}(x)$ o aplicație superior semicontinuă. Atunci

$$\Gamma = \{(t, x) \mid t \in \Omega, \; x \in X, \; x \in F(t))\}$$

este o parte închisă a lui $\Omega \times X$, deci este compactă. Punînd $f((t, x)) = t$, obținem o aplicație continuă surjectivă $f : \Gamma \to \Omega$. Aplicînd (*i*), există o aplicație continuă $t \mapsto (t, s(t))$ a lui Ω în Γ. Atunci $s : \Omega \to X$ este continuă și

$$s(t) \in F(t), \quad t \in \Omega.$$

q.e.d.

Din forma (*ii*) a teoremei 1.10, rezultă imediat:

1.11. COROLAR. *Spațiile stoniene sînt obiecte proiective în categoria spațiilor topologice Hausdorff compact.*

Studiul spațiilor denumite ulterior stoniene a fost inițiat de Stone în [44]. Ele se mai numesc spații extremal disconexe. AW^* - algebrele au fost introduse de Kaplansky [26]. Corolarul 1.11 a fost demonstrat de Gleason în [11]. Gleason demonstrează și afirmația reciprocă: orice obiect proiectiv în categoria spațiilor topologice Hausdorff compacte este un spațiu stonian. Forma (*ii*) a principiului selecției continue a fost demonstrată de Hasumi în [23], independent de Gleason.

Referințele noastre de bază pentru teoria spațiilor stoniene sînt [7] și [3]. Pentru teoria AW^* algebrelor trimitem la [28] și [4], iar pentru un studiu amănunțit al proprietăților de continuitate ale aplicațiilor multivoce la [29].

§ 2. SPAȚII HIPERSTONIENE

Fie Ω un spațiu stonian. O măsură boreliană pozitivă regulată finită μ pe Ω se numește normală dacă pentru orice familie (f_ι) din $C^h(\Omega)$, filtrată crescător și mărginită superior, notînd prin $\bigvee_\iota f_\iota$ supremul său în $C^h(\Omega)$, avem

$$\sup_\iota \int f_\iota \, d\mu = \int (\bigvee_\iota f) \, d\mu.$$

2.1. LEMĂ. *Fie μ o măsură boreliană pozitivă regulată finită pe un spațiu stonian Ω. Atunci următoarele sînt echivalente:*

1) μ *este normală*;
2) *pentru orice mulțime boreliană rară E avem* $\mu(E) = 0$;
3) *pentru orice mulțime boreliană de categoria întîi E, avem* $\mu(E) = 0$.

Demonstrație. Echivalența afirmațiilor 2) și 3) este evidentă.

Fie μ normală. Dacă E este o mulțime boreliană rară, iar (f_ι) familia tuturor funcțiilor continue $0 \leq f_\iota \leq 1$ care se anulează pe E, atunci $\bigvee\limits_\iota f_\iota = 1$. Pentru orice ι.

$$\int f_\iota \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(X \setminus E),$$

deci

$$\mu(X) = \int (\bigvee_\iota f_\iota)\,\mathrm{d}\mu = \sup_\iota \int f_\iota \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(X \setminus E) \leq \mu(X).$$

Rezultă că $\mu(E) = 0$, deci 2) este adevărată.

Reciproc, presupunem pe 3) adevărată. Fie (f_ι) o familie din $C^h(\Omega)$, filtrată crescător și mărginită superior. Definim funcția f prin

$$f(t) = \sup_\iota f_\iota(t), \qquad t \in \Omega.$$

Conform teoremei 1.3, $f \sim \bigvee\limits_\iota f_\iota$. Folosind 3), avem

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int (\bigvee_\iota f_\iota)\,\mathrm{d}\mu.$$

Astfel

$$\sup_\iota \int f_\iota \,\mathrm{d}\mu = \int (\bigvee_\iota f_\iota)\,\mathrm{d}\mu.$$

q.e.d.

Conform lemei 2.1, dacă μ este o măsură normală pe Ω, iar A și B sînt mulțimi boreliene echivalente, atunci $\mu(A) = \mu(B)$. Astfel dacă $U \subset \Omega$ este deschisă, atunci $\mu(U) = \mu(\overline{U})$. În particular:

2.2. COROLAR. *Suportul unei măsuri normale pe un spațiu stonian, este o mulțime deschisă și închisă.*

Numim spațiu hiperstonian un spațiu stonian Ω, astfel încît reuniunea suporturilor tuturor măsurilor normale pe Ω este densă în Ω.

Lema următoare ne va permite să caracterizăm mulțimile neglijabile față de toate măsurile normale într-un spațiu hiperstonian.

2.3. Lemă. *Dacă* μ *este o măsură normală pe un spaţiu stonian* Ω, *iar* $A \subset \Omega$ *este boreliană, atunci*

$$\mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A}).$$

Demonstraţie. Cum μ este regulată, există un şir (U_n) de mulţimi deschise, conţinînd pe A, astfel încît

$$\mu(A) = \lim_n \mu(U_n).$$

Cum $U_n \sim \overline{U}_n \supset \overline{A}$, avem

$$\mu(U_n) = \mu(\overline{U}_n) \geqslant \mu(\overline{A}).$$

Astfel

$$\mu(A) = \lim_n \mu(U_n) = \lim_n \mu(\overline{U}_n) \geqslant \mu(\overline{A}) \geqslant \mu(A),$$

deci

$$\mu(A) = \mu(\overline{A}).$$

Pe de altă parte, cum

$$\mu(\Omega\setminus A) = \mu(\overline{\Omega\setminus A}) = \mu(\Omega\setminus\mathring{A}),$$

avem şi egalitatea

$$\mu(A) = \mu(\mathring{A}).$$

q.e.d.

2.4. Corolar. *Fie* Ω *un spaţiu hiperstonian şi* E *o parte a lui* Ω. *Atunci următoarele sînt echivalente:*

1) *E este neglijabilă faţă de orice măsură normală pe* Ω;
2) *E este rară*;
3) *E este de categoria întîia.*

Demonstraţie. Conform lemei 2.1, 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

Presupunem acum că E este neglijabilă faţă de orice măsură normală pe Ω. După lema 2.3 închiderea F a lui E are aceeaşi proprietate. De aici rezultă că interiorul lui F este disjunct de suportul oricărei măsuri normale pe Ω. Cum Ω este hiperstonian, interiorul lui F este vid, deci E este rară.

q.e.d.

În continuare, prin mulţime neglijabilă într-un spaţiu hiperstonian Ω vom înţelege o mulţime neglijabilă faţă de toate măsurile normale pe Ω.

Teorema următoare stabilește o legătură între spațiile hiperstoniene și W^*-algebrele. Ea este o analoagă a teoremei 1.5.

2.5. TEOREMĂ. *Un spațiu topologic Hausdorff compact Ω este hiperstonian dacă și numai dacă $C(\Omega)$ este o W^*-algebră.*

Demonstrație. Fie Ω hiperstonian. Conform lemei lui Zorn, există o familie maximală (μ_ι) de măsuri normale pe Ω, cu suporturile S_ι mutual disjuncte. S_ι sînt deschise și închise și $\bigcup_\iota S_\iota$ este densă în Ω.

Conform teoremei 1.3, pentru orice ι $C(S_\iota)$ este $*$-izomorfă cu $L^\infty(\mu)_\iota$, deci este o W^*-algebră. Folosind din nou teorema 1.3, se vede ușor că $C(\Omega)$ este $*$-izomorfă cu C^*-algebra $\prod_\iota C(S_\iota)$ a tuturor familiilor (f_ι) cu $f_\iota \in C(S_\iota)$ și $\sup_\iota \|f_\iota\| < +\infty$. Astfel $C(\Omega)$ este o W^*-algebră.

Reciproc, să presupunem că $C(\Omega)$ este o W^*-algebră. Atunci laticea $C^h(\Omega)$ este relativ completă, deci Ω este stonian. Pe de altă parte, cum orice formă pozitivă normală pe $C(\Omega)$ definește o măsură normală pe Ω și formele pozitive normale separă elementele lui $C(\Omega)$, rezultă că orice parte deschisă a lui Ω intersectează suportul unei măsuri normale. Astfel Ω este hiperstonian.

q.e.d.

Cu alte cuvinte, teorema 2.5 afirmă că spațiile hiperstoniene sînt tocmai spațiile idealelor maximale ale W^*-algebrelor comutative.

Fie Z o W^*-algebră comutativă. Numim partiție a unității în Z o familie (p_ι) de proiectori mutual ortogonali în Z, astfel încît $\sum_\iota p_\iota = 1$. Spunem că o partiție a unității (p_ι) este subordonată unei alte partiții (q_κ), dacă pentru orice ι există un număr finit de indici $k_1, \ldots, k_j$ astfel încît $p < \sum_{i=1}^{j} q_{k_i}$.

Rezultatul următor va fi des utilizat în capitolele următoare.

2.6. PRINCIPIUL ȘIRULUI DE PARTIȚII ALE UNITĂȚII. (*i*) (forma topologică). *Fie Ω un spațiu hiperstonian și (Ω_n) un șir de părți deschise dense ale lui Ω. Atunci $\bigcap_n \Omega_n$ conține o mulțime deschisă densă.*

(*ii*) (forma algebrică). *Fie Z o W^*-algebră comutativă și $((p_{\iota_n})_{\iota_n \in I_n})$ un șir de partiții ale unității în Z. Atunci există o partiție a unității în Z, subordonată fiecărei partiții $(p_{\iota_n})_{\iota_n \in I_n}$.*

Demonstrație. (*i*) Conform lemei 2.3, pentru orice măsură normală μ pe Ω avem

$$\mu(\overline{\bigcup_n (\Omega \setminus \Omega_n)}) = \mu(\bigcup_n (\Omega \setminus \Omega_n)) <$$

$$< \sum_n \mu(\Omega \setminus \Omega_n) =$$

$$= 0.$$

Folosind corolarul 2.4, $\overline{\bigcup_n (\Omega \setminus \Omega_n)}$ nu are puncte interioare, deci interiorul mulțimii $\bigcap_n \Omega_n$ este dens.

(ii) Folosind reprezentarea Ghelfand şi teorema 2.5, identificăm pe Z cu $C(\Omega)$, unde Ω este un spaţiu hiperstonian. Prin această identificare proiectorii p_{ι_n} se identifică cu funcţiile caracteristice $\chi_{A_{\iota_n}}$ ale unor mulţimi deschise şi închise A_{ι_n}. Mulţimile $\Omega_n = \bigcup_{\iota_n \in I_n} A_{\iota_n}$ sînt deschise şi dense, deci după punctul (i) $\bigcap_n \Omega_n$ conţine o mulţime deschisă densă. Folosind lema lui Zorn, există o familie $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de părţi deschise şi închise mutual disjuncte ale lui Ω astfel încît $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ este inclusă în $\bigcap_n \Omega_n$ şi este densă în Ω. Punînd $p_\iota = \chi_{A_\iota}$, se verifică uşor că $(p_\iota)_{\iota \in I}$ este o partiţie a unităţii, subordonată fiecărei partiţii $(p_{\iota_n})_{\iota_n \in I_n}$

q.e.d.

În expunerea materialului din acest paragraf, ne-am condus după [7] şi [3].

§ 3. MODULE NORMATE PESTE AW*-ALGEBRE COMUTATIVE

Fie Z o C^* - algebră comutativă cu unitate. Numim modul normat peste Z sau Z - modul normat un spaţiu normat complex $\mathfrak{X}$ care este modul peste Z, astfel încît

$$\|zx\| \leqslant \|z\| \, \|x\|, \qquad z \in Z, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Dacă în plus $\mathfrak{X}$ este complet, îl numim modul Banach peste Z sau Z-modul Banach. Noţiunile de Z-submodul, Z-formă şi Z-formă mărginită pe $\mathfrak{X}$ se introduc în mod natural.

Notăm mulţimea tuturor Z-formelor mărginite pe $\mathfrak{X}$ prin $\mathfrak{X}_Z^*$. $\mathfrak{X}_Z^*$ este un Z-modul Banach.

Fie t un ideal maximal al lui Z. Notăm prin $[t]$ închiderea Z-submodulului $t\mathfrak{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \,\middle\|\, z_i \in t,\ x_i \in \mathfrak{X} \right\}$, iar prin $\mathfrak{X}_t$ spaţiul normat cît $\mathfrak{X}/[t]$. În continuare analizăm descompunerea Z-modulului normat $\mathfrak{X}$ în familia de spaţii normate $(\mathfrak{X}_t)$.

Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Notăm pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ şi orice $t \in \Omega$ prin x_t imaginea canonică a lui x în $\mathfrak{X}_t$.

3.1. LEMĂ. *Pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ aplicaţia $t \mapsto \|x_t\|$ este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ şi orice scalar $\alpha \geqslant 0$, mulţimea $\{t \mid t \in \Omega,\ \|x_t\| \geqslant \alpha\}$ este închisă.

Fie (t_ι) un şir generalizat, convergent către t_0, astfel încît pentru orice ι avem $\|x_{t_\iota}\| \geqslant \alpha$. Pentru orice ι există $\varphi_\iota \in \mathfrak{X}^*$ cu

$$\varphi_\iota|_{[t_\iota]} = 0, \qquad \|\varphi_\iota\| \leqslant 1, \qquad \varphi_\iota(x) = \|x_{t_\iota}\|.$$

Cum bula unitate închisă a lui $\mathfrak{X}^*$ este $\mathfrak{X}$-compactă, există un punct limită φ_0 al şirului generalizat (φ_ι) în $\mathfrak{X}$-topologia.

Fie $z \in \tilde{t_0}$ şi $y \in \mathscr{X}$. Considerăm pentru orice întreg $n \geqslant 1$ o funcţie continuă f_n pe Ω, $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, astfel încît f_n se anulează pe o vecinătate a lui t_0 şi este egală cu 1 pe $\left\{t \,\middle|\, t \in \Omega,\ |z(t)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Pentru n fixat există un indice ι_0, astfel încît pentru $\iota \geqslant \iota_0$ elementul $f_n zy$ aparţine lui $t_\iota \mathscr{X}$, deci $\varphi_\iota(f_n zy) = 0$. Rezultă că pentru $\iota \geqslant \iota_0$ avem

$$|\varphi_\iota(zy)| = |\varphi_\iota((1 - f_n)zy)| \leqslant \|(1 - f_n)z\| \, \|y\| \leqslant \frac{1}{n} \|y\|.$$

Astfel

$$|\varphi_0(zy)| \leqslant \frac{1}{n} \|y\|.$$

Cum partea stîngă a inegalităţii de mai sus nu depinde de n, deducem că

$$\varphi_0(zy) = 0.$$

În concluzie, φ_0 se anulează pe $t_0\mathscr{X}$, deci pe $[t_0]$. Prin urmare

$$\|x_{t_0}\| \geqslant \varphi_0(x) \geqslant \liminf_\iota \varphi_\iota(x) = \liminf_\iota \|x_{t_\iota}\| \geqslant \alpha.$$

q.e.d.

În cazul cînd Z este o AW^*-algebră comutativă, adică Ω este un spaţiu stonian, putem spune mai mult despre proprietăţile de continuitate ale aplicaţiilor $t \mapsto \|x_t\|$.

3.2. LEMĂ. *Dacă Z este o AW^*-algebră comutativă, iar $\mathscr{X}$ un modul normat peste Z, atunci pentru orice $x \in \mathscr{X}$ există $\Phi \in \mathscr{X}_z^*$, $\|\Phi\| \leqslant 1$, şi o parte de categoria întîi E a lui Ω, astfel încît*

$$\|x_t\| = \Phi(x)(t), \quad t \in \Omega \setminus E.$$

Demonstraţie. Cum $t \mapsto \|x_t\|$ este superior semicontinuă, conform teoremei 1.3 există o funcţie pozitivă continuă g pe Ω şi o parte de categoria întîi E a lui Ω, astfel încît

$$\|x_t\| = g(t), \ t \in \Omega \setminus E.$$

$\Omega \setminus E$ fiind densă în Ω, iar $t \mapsto \|x_t\|$ fiind superior semicontinuă, avem

$$\|x_t\| \geqslant g(t), \quad t \in \Omega.$$

Notăm prin $\mathscr{X}_1^*$ bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}^*$, dotată cu $\mathscr{X}$-topologia. $\mathscr{X}_1^*$ este Hausdorff şi compact. Fie

$$X = \{(t, \varphi) \mid t \in \Omega,\ \varphi \in X_1^*,\ \varphi|_{[t]} = 0,\ \varphi(x) = g(t)\}.$$

Se verifică ușor că X este o parte închisă a lui $\Omega \times \mathscr{X}_1^*$, deci este compactă. Teorema Hahn-Banach și inegalitatea $\|x_t\| \geqslant g(t)$, $t \in \Omega$, implică că imaginea lui X prin proiecția canonică $\pi : \Omega \times \mathscr{X}_1^* \to \Omega$ este Ω. Conform principiului selecției continue, există o aplicație continuă $t \mapsto (t, \varphi_t)$ a lui Ω în X. Notăm pentru orice $y \in \mathscr{X}$ prin $\Phi(y)$ funcția continuă $t \mapsto \varphi_t(y)$, considerată ca element al lui Z. Atunci $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leqslant 1$, și pentru orice $t \in \Omega \setminus E$ avem

$$\|x_t\| = g(t) = \varphi_t(x) = \Phi(x)(t).$$

q.e.d.

Proprietățile de continuitate ale aplicațiilor $t \mapsto \|x_t\|$ prezintă un interes special. Ca un mijloc auxiliar, introducem pe fiecare $\mathscr{X}_t$ seminorma următoare:

$$|||x_t||| = \sup_{\substack{\Phi \in \mathscr{X}_Z^* \\ \|\Phi\| \leqslant 1}} |\Phi(x)(t)|.$$

3.3. TEOREMĂ (de descompunere a modulelor normate). *Fie Z o AW^*-algebră comutativă, Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul normat și $x \in \mathscr{X}$. Atunci*

1) *funcția $t \mapsto \|x_t\|$ este superior semicontinuă;*

2) *funcția $t \mapsto |||x_t|||$ este continuă;*

3) *există o parte de categoria întîia E a lui Ω, astfel încît în orice $t_0 \in \Omega \setminus E$ aplicația $t \mapsto \|x_t\|$ este continuă și $\|x_{t_0}\| = |||x_{t_0}|||$;*

4) *există $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leqslant 1$, astfel încît $|||x_t||| = \Phi(x)(t)$, $t \in \Omega$.*

Demonstrație. 1) este tocmai afirmația lemei 3.1.

Conform lemei 3.2, există $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leqslant 1$, și o parte de categoria întîia E a lui Ω, astfel încît

$$\|x_t\| = \Phi(x)(t), \quad t \in \Omega \setminus E.$$

Pentru orice $\Psi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Psi\| \leqslant 1$, și orice $t \in \Omega \setminus E$ avem

$$|\Psi(x)(t)| \leqslant \|x_t\| = \Phi(x)(t).$$

Cum $\Omega \setminus E$ este densă în Ω, $|\Psi(x)(t)| \leqslant \Phi(x)(t)$ oricare ar fi $t \in \Omega$. Astfel

$$|||x_t||| = \Phi(x)(t), \ t \in \Omega,$$

deci 4) este verificată. Evident, 4) implică pe 2).

Fie E mulțimea definită mai sus. În orice $t_0 \in \Omega \setminus E$

$$\|x_{t_0}\| = \Phi(x)(t_0) = |||x_{t_0}|||.$$

Rămîne să arătăm că $t \mapsto \|x_t\|$ este continuă în t_0. Cum $t \mapsto \|x_t\|$ este superior semicontinuă şi $t \mapsto |||x_t|||$ este continuă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui t_0 cu

$$\|x_t\| < \|x_{t_0}\| + \varepsilon, \quad t \in V,$$

$$|||x_{t_0}||| - \varepsilon < |||x_t|||, \quad t \in V.$$

Astfel pentru orice $t \in V$ avem

$$\|x_{t_0}\| - \varepsilon = |||x_{t_0}||| - \varepsilon < |||x_t||| \leqslant \|x_t\| < \|x_{t_0}\| + \varepsilon,$$

deci $t \mapsto \|x_t\|$ este continuă în t_0.

q.e.d.

Punctul 4) al teoremei 3.3 poate fi interpretat ca o teoremă de tip Hahn-Banach. Demonstrăm acum o teoremă de tip Hahn-Banach mai generală.

3.4. Lemă. *Fie Z o AW^*-algebră comutativă, $\mathscr{X}$ un Z-modul normat, $x \in \mathscr{X}$ şi t_0 un ideal maximal al lui Z. Atunci*

$$\|x_{t_0}\| = \inf_{\substack{p \text{ proiector în } Z \\ 1-p \in t_0}} \|px\|.$$

Demonstraţie. Evident,

$$\|x_{t_0}\| \leqslant \inf_{1-p \in t_0} \|px\|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Există $z_i \in t_0$ şi $x_i \in \mathscr{X}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, astfel încît

$$\|x_{t_0}\| \geqslant \|x - \sum_{i=1}^{n} z_i x_i\| - \varepsilon.$$

Fie V_0 închiderea mulţimii deschise $\{t \mid t \in \Omega,\ |z_i(t)| < \frac{\varepsilon}{n\|x_i\|},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

V_0 este o vecinătate deschisă şi închisă a lui t_0 şi $|z_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{n\|x_i\|}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pe V_0. Notînd prin p_0 funcţia caracteristică a lui V_0, considerată ca element al lui Z, $1 - p_0 \in t_0$ şi $\|p_0 z_i x_i\| \leqslant \|p_0 z_i\| \, \|x_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Astfel

$$\|x_{t_0}\| \geqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \right\| - \varepsilon \geqslant \left\| p_0 x - \sum_{i=1}^{n} p_0 z_i x_i \right\| - \varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \|p_0 x\| - \sum_{i=1}^{n} \|p_0 z_i x_i\| - \varepsilon \geqslant \inf_{1-p \in t_0} \|px\| - 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ fiind oarecare,

$$\|x_{t_0}\| \geqslant \inf_{1=p\in t_0} \|px\|.$$

q.e.d.

3.5. TEOREMĂ (de tip Hahn-Banach). *Fie Z o AW^* - algebră comutativă, $\mathscr{X}$ un Z - modul normat, $\mathscr{Y}$ un Z- submodul al lui $\mathscr{X}$ şi $\Psi \in \mathscr{Y}_Z^*$. Atunci există $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, astfel încît*

$$\|\Phi\| = \|\Psi\|,$$

$$\Phi(y) = \Psi(y), \; y \in \mathscr{Y}.$$

Demonstraţie. Fie Ω, $[t]$, $\mathscr{X}_t$ ca mai sus, iar $\mathscr{Y}_t$ imaginea lui $\mathscr{Y}$ prin aplicaţia canonică $\mathscr{X} \to \mathscr{X}_t$. Pentru orice $y \in \mathscr{Y}$, orice $t \in \Omega$ şi orice proiector p în Z cu $1 - p \in t$, avem

$$|\Psi(y)(t)| = |\Psi(py)(t)| \leqslant \|\Psi\|\cdot\|py\|.$$

Conform lemei 3.4,

$$|\Psi(y)(t)| \leqslant \|\Psi\|\cdot\|y_t\|.$$

Astfel, punînd

$$\Psi_t(y_t) = \Psi(y)(t),$$

Ψ_t este o formă liniară bine definită pe $\mathscr{Y}_t$ şi $\|\Psi_t\| \leqslant \|\Psi\|$.

Notăm prin $\mathscr{X}^*_{\|\Psi\|}$ bula închisă de rază $\|\Psi\|$ şi cu centrul în 0 a lui $\mathscr{X}^*$, dotată cu $\mathscr{X}$-topologia. Fie

$$X = \left\{(t, \varphi) \,\middle|\, \begin{array}{l} t \in \Omega, \; \varphi \in \mathscr{X}^*_{\|\Psi\|}, \; \varphi|_{[t]} = 0, \\ \varphi(y) = \Psi_t(y_t) \text{ pentru orice } y \in \mathscr{Y} \end{array}\right\}.$$

Se vede uşor că X este o parte închisă a lui $\Omega \times \mathscr{X}^*_{\|\Psi\|}$, deci este compactă. Teorema Hahn-Banach implică că imaginea lui X prin proiecţia canonică $\Pi : \Omega \times \mathscr{X}^*_{\|\Psi\|} \to \Omega$ este Ω. Conform principiului selecţiei continue, există o aplicaţie continuă $t \mapsto (t, \varphi_t)$ a lui Ω în X. Notăm pentru orice $x \in \mathscr{X}$ prin $\Phi(x)$ funcţia continuă $t \mapsto \varphi_t(x)$, considerată ca element al lui Z. Atunci $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leqslant \|\Psi\|$, şi pentru orice $y \in \mathscr{Y}$ şi orice $t \in \Omega$ avem

$$\Phi(y)(t) = \varphi_t(y) = \Psi_t(y_t) = \Psi(y)(t).$$

Astfel

$$\Phi(y) = \Psi(y), \; y \in \mathscr{Y}.$$

q.e.d.

Introducem acum o clasă de module normate pentru care afirmația teoremei 3.3 poate fi întărită. Spunem că un Z-modul normat $\mathscr{X}$ are proprietatea de dualitate, dacă pentru orice $x \in \mathscr{X}$ avem

$$\|x\| = \sup_{\substack{\Phi \in \mathscr{X}_Z^* \\ \|\Phi\| \leq 1}} \|\Phi(x)\|.$$

Remarcăm că, dacă $\mathscr{X}$ este un Z-modul normat oarecare, atunci $\mathscr{X}_Z^*$ este un Z-modul Banach cu proprietatea de dualitate.

3.6. Teoremă (de descompunere a modulelor normate cu proprietatea de dualitate). *Fie Z o AW^*-algebră comutativă, Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z și $\mathscr{X}$ un Z-modul normat. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

(*i*) *$\mathscr{X}$ are proprietatea de dualitate.*

(*ii*) *Pentru orice $x \in \mathscr{X}$*

$$\|x\| = \sup_{t \in \Omega} \|x_t\|$$

și aplicația $t \mapsto \|x_t\|$ este continuă.

(*iii*) *Pentru orice $x \in \mathscr{X}$ există $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leq 1$, astfel încît*

$$\|x\| = \|\Phi(x)\|$$

și $\|x_t\| = \Phi(x)(t)$, $t \in \Omega$.

Demonstrație. Din teorema 3.3 rezultă echivalența afirmațiilor (*ii*) și (*iii*). Evident, (*iii*) implică pe (*i*).

Presupunem acum că $\mathscr{X}$ are proprietatea de dualitate. Atunci pentru orice $x \in \mathscr{X}$ avem

$$\|x\| = \sup_{t \in \Omega} |||x_t|||.$$

Pentru a demonstra continuitatea aplicației $t \mapsto \|x_t\|$, este suficient să arătăm că pentru orice $t \in \Omega$ avem $|||x_t||| = \|x_t\|$. Într-adevăr, în caz contrar există $t_0 \in \Omega$ cu $\varepsilon = \|x_{t_0}\| - |||x_{t_0}||| > 0$. Cum $t \mapsto |||x_t|||$ este continuă, există o vecinătate deschisă și închisă V a lui t_0, astfel încît

$$|||x_t||| < |||x_{t_0}||| + \frac{\varepsilon}{2} = \|x_{t_0}\| - \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in V.$$

Notăm prin p funcția caracteristică a lui V, considerată ca element al lui Z. Atunci

$$\|px\| = \sup_{t \in V} |||x_t||| < \|x_{t_0}\| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|px\| - \frac{\varepsilon}{2},$$

ceea ce este absurd.

În concluzie, (*i*) implică pe (*ii*).

q.e.d.

3.7. COROLAR. *Dacă Z este o AW^*-algebră comutativă, $\mathcal{X}$ este un Z-modul normat cu proprietatea de dualitate, (p_ι) este o familie de proiectori mutual ortogonali cu suprem 1 în Z şi $x \in \mathcal{X}$, atunci*

$$\|x\| = \sup_\iota \|p_\iota x\|.$$

Vom arăta acum că AW^*-algebrele, considerate ca module peste centrul lor, au proprietatea de dualitate.

Fie M o AW^*-algebră. Din definiţia AW^*-algebrelor rezultă imediat că M are unitate. Numim AW^*- subalgebră a lui M o C^* - subalgebră N, astfel încît pentru orice parte S a lui N există un proiector $e \in N$ cu ${}^\perp S = Me$. Orice AW^*-subalgebră a lui M conţine unitatea lui M şi este AW^*-algebră.

Fie L o latice completă. O parte K a lui L se numeşte sublatice completă a lui L, dacă pentru orice familie din K, supremul şi infimul său în L aparţin lui K.

3.8. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră şi N o AW^*-subalgebră a lui M. Atunci proiectorii lui M formează o latice completă $\mathcal{P}_M$, iar proiectorii lui N formează o sublatice completă $\mathcal{P}_N$ a lui $\mathcal{P}_M$.*

Demonstraţie. Fie (e_ι) o familie oarecare de proiectori în M. Atunci există un proiector $e \in M$ astfel încît ${}^\perp(e_\iota) = Me$. Notăm $e_0 = 1 - e$. Pentru orice ι, e_ι şi e sînt ortogonali, deci $e_\iota \leqslant e_0$. Astfel e_0 este majorant al familiei (e_ι). Pe de altă parte, dacă $f \in M$ este un proiector astfel încît $e_\iota \leqslant f$, pentru orice ι, atunci $1 - f \in {}^\perp(e_\iota) = Me$, deci $1 - f$ şi e_0 sînt ortogonali. Prin urmare $e_0 \leqslant f$, deci e_0 este supremul familiei (e_ι).

Dacă f_0 este supremul familiei $(1 - e_\iota)$ în $\mathcal{P}_M$, se verifică uşor că $1 - f_0$ este infimul lui (e_ι).

Din construcţia supremului şi infimului familiei (e_ι) rezultă că dacă fiecare e_ι aparţine lui N, atunci $\bigvee_\iota e_\iota$ şi $\bigwedge_\iota e_\iota$ aparţin de asemenea lui N. Astfeă $\mathcal{P}_N$ este o sublatice completă a lui $\mathcal{P}_M$.

q.e.d.

Notăm pentru orice parte A a lui M

$$A'_M = \{x \mid x \in M,\ xy = yx \text{ pentru orice } y \in A\}.$$

Numim pe A'_M comutantul lui A în M. Notăm de asemenea

$$A''_M = (A'_M)'_M$$

şi îl numim bicomutantul lui A în M.

3.9. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră şi A o parte a lui M cu $A = A^*$. Atunci A'_M este o AW^*-subalgebră a lui M.*

Demonstraţie. Cum $A = A^*$, A'_M este o C^* -subalgebră a lui M.

Fie S o parte oarecare a lui A'_M şi $e \in M$ proiectorul cu ${}^\perp S = Me$. Pentru orice $a \in A$ şi $s \in S$ avem

$$as = sa,\ es = 0.$$

Astfel

$$ea(1-e)s = eas - eaes = esa = 0.$$

Cum $s \in S$ este oarecare, $ea(1-e) \in {}^{\perp}S = Me$, deci

$$ea(1-e) = ea(1-e)\,e = 0,$$

$$ea = eae.$$

A fiind autoadjunctă, $a^* \in A$. Prin urmare

$$ea^* = ea^*e,\ ae = eae.$$

Astfel $ea = ae$ şi $a \in A$ fiind oarecare, $e \in A'_M$.

q.e.d.

Din lema 3.9 rezultă că centrul M'_M al unei AW^*-algebre M este o AW^*-subalgebră. De asemenea, dacă A este o C^* — subalgebră comutativă maximală a lui M, cum $A = A'_M$, A este o AW^*-subalgebră a lui M. Avem astfel diferite posibilităţi de a considera pe M ca modul Banach peste o AW^*- algebră comutativă.

3.10. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră, a un element autoadjunct al lui M şi α un număr real. Atunci există un proiector $e \in \{a\}''_M$, astfel încît*

$$ae > \alpha e$$

$$a(1-e) < \alpha(1-e).$$

Demonstraţie. Conform lemei 3.9, $N = \{a\}''_M$ este o AW^*-subalgebră a lui M. Fie $(a-\alpha)^+$ şi $(a-\alpha)^-$ partea pozitivă respectiv partea negativă a lui $a - \alpha$. Există atunci un proiector $e \in N$ astfel încît ${}^{\perp}\{(a-\alpha)^-\} = Me$. Cum $(a-\alpha)^+ \in {}^{\perp}\{(a-\alpha)^-\}$, avem

$$(a-\alpha)^+e = (a-\alpha)^+.$$

Evident,

$$(a-\alpha)^-e = 0.$$

Astfel

$$(a-\alpha)e = (a-\alpha)^+e - (a-\alpha)^-e = (a-\alpha)^+ \geqslant 0,$$

$$(a-\alpha)(1-e) = (a-\alpha)^+(1-e) - (a-\alpha)^-(1-e) = -(a-\alpha)^- \leqslant 0,$$

deci

$$ae \geqslant \alpha e,$$

$$a(1-e) \leqslant \alpha(1-e).$$

q.e.d.

Mai avem nevoie de lema următoare :

3.11. LEMĂ. *Fie Z o AW^*-algebră comutativă şi $\mathscr{X}$ un Z-modul normat, astfel încît pentru orice $x \in \mathscr{X}$ şi orice proiectori ortogonali $p_1, \ldots$ $\ldots, p_n$ din Z cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ avem*

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|p_i x\|.$$

Atunci

$$\bigcap_{t \in \Omega} [t] = \{0\}.$$

Demonstraţie. Fie $x \in \bigcap_{t\in\Omega} [t]$ şi $\varepsilon > 0$. Conform lemei 3.4, pentru orice $t_0 \in \Omega$ există un proiector p_0 în Z cu $1 - p_0 \in t_0$, astfel încît

$$\|p_0 x\| \leqslant \|x_{t_0}\| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Astfel, folosind compacitatea lui Ω, există proiectori ortogonali $p_1, \ldots, p_n$ în Z cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, astfel încît pentru orice i

$$\|p_i x\| \leqslant \varepsilon.$$

Prin urmare

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|p_i x\| \leqslant \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ fiind oarecare, deducem că $\|x\| = 0$, deci $x = 0$.

q.e.d.

3.12. TEOREMĂ. *Fie M o AW^*-algebră şi Z o AW^*-subalgebră a centrului său. Atunci M, considerat ca modul Banach peste Z, are proprietatea de dualitate.*

Demonstraţie. Remarcăm, înainte de toate, că $[t]$ sînt ideale bilaterale închise ale lui M, iar M_t sînt C^*-algebre cît ale lui M. Condiţiile lemei 3.11 fiind împlinite, $\bigcap_{t\in\Omega} [t] = \{0\}$, deci $x \mapsto (x_t)_{t\in\Omega}$ este un $*$-homomorfism injectiv al lui M în C^*-algebra produs $\prod_{t\in\Omega} M_t$. Rezultă că pentru orice x avem

$$\|x\| = \sup_{t\in\Omega} \|x_t\|.$$

Fie $e \in M$ un proiector. Conform lemei 3.8, infimul în $\mathscr{P}_M$ al familiei

$$\{p \mid p \in Z \text{ proiector}, \ e \leqslant p\}$$

aparţine lui Z. Îl notăm $z(e)$ şi îl numim suportul în Z al lui e. Considerăm pe $z(e)$ ca funcţia caracteristică a unei părţi deschise şi închise V a lui Ω.

Cum fiecare e_t este un proiector în M_t, ori $\|e_t\| = 0$, ori $\|e_t\| = 1$. Conform teoremei 3.3,1), funcţia $t \mapsto \|e_t\|$ este superior semicontinuă, deci este funcţia caracteristică a unei părţi închise F a lui Ω. Evident, $F \subset V$.

Dacă $F \neq V$, atunci $V \setminus F$ conţine o mulţime deschisă, compactă, nevidă W. Funcţia caracteristică p a lui W este un proiector nenul în Z şi

$$\|pe\| = \sup_{t \in W} \|e_t\| = 0.$$

Rezultă că $e \leqslant z(e) - p$, ceea ce contrazice definiţia lui $z(e)$.

În concluzie, $t \mapsto \|e_t\|$ este funcţia caracteristică a lui V, deci este continuă.

Fie acum $a \in M$ un element pozitiv şi $t_0 \in \Omega$. Dacă $a_{t_0} = 0$, superior semicontinuitatea lui $t \mapsto \|a_t\|$ implică continuitatea sa în t_0.

Presupunem acum că $a_{t_0} \neq 0$. Fie ε un scalar oarecare cu $0 < \varepsilon < \|a_{t_0}\|$. Notăm $\alpha = \|a_{t_0}\| - \varepsilon$. Conform lemei 3.10, există un proiector $e \in M$ care comută cu a şi astfel încît

$$ae \geqslant \alpha e,$$

$$a(1 - e) \leqslant \alpha(1 - e).$$

Dacă am avea $e_{t_0} = 0$, atunci ar rezulta $0 \leqslant a_{t_0} \leqslant \alpha$, deci $\|a_{t_0}\| \leqslant \alpha = \|a_{t_0}\| - \varepsilon$, ceea ce este absurd. Astfel $\|e_{t_0}\| = 1$. Funcţia $t \mapsto \|e_t\|$ fiind continuă, există o vecinătate U a lui t_0 cu

$$\|e_t\| = 1, \qquad t \in U.$$

Prin urmare, pentru orice $t \in U$ avem

$$\|a_t\| \geqslant \|a_t e_t\| \geqslant \alpha \|e_t\| = \alpha = \|a_{t_0}\| - \varepsilon.$$

Cum funcţia $t \mapsto \|a_t\|$ este superior semicontinuă, ea este continuă în t_0.

În sfîrşit, fie $x \in M$ oarecare. Cum funcţia $t \mapsto \|(x^*x)_t\|$ este continuă, rezultă că funcţia $t \mapsto \|x_t\| = \|(x^*x)_t\|^{\frac{1}{2}}$ este de asemenea continuă.

Aplicînd teorema 3.6, deducem că M are proprietatea de dualitate.

q.e.d.

3.13. Corolar. *Orice AW^*-algebră, considerată ca modul Banach peste centrul ei, are proprietatea de dualitate.*

Teorema 3.6 ne dă posibilitatea de a reduce anumite probleme privind Z-module normate cu proprietatea de dualitate la probleme privind spaţii normate. Această reducere este esenţială dacă spaţiile normate $\mathscr{X}_\iota$ sînt de un anumit tip particular. Aceasta este cazul AW^*-algebrelor, considerate ca module peste centrul lor. Ar fi interesant de analizat şi alte cazuri de module peste AW^*-algebre comutative.

Teorema 3.5 a fost demonstrată pe o altă cale de Takesaki în [49]. Lema 3.1, în cazul cînd $\mathscr{X}$ este C^*-algebră, considerată modul peste centrul ei, şi corolarul 3.13, în cazul W^*-algebrelor, sînt demonstrate de Glimm în [12]. Lemele 3.8, 3.9 şi 3.10 se găsesc în orice tratat despre AW-algebre, de exemplu în [28] şi [4]. Restul materialului din acest paragraf, după cunoştinţele noastre, apare aici pentru prima oară.

§ 4. MODULE BANACH PESTE W*-ALGEBRE COMUTATIVE

Fie Z o AW^*-algebră comutativă şi $\mathscr{X}$ un modul normat peste Z. Spunem că $\mathscr{X}$ este finit decompozabil, dacă pentru orice $x \in \mathscr{X}$ şi orice proiectori mutual ortogonali $p_1, \ldots, p_n \in Z$ cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ avem

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|p_i x\|.$$

De asemenea, spunem că $\mathscr{X}$ este decompozabil, dacă pentru orice $x \in \mathscr{X}$ şi orice familie (p_ι) de proiectori mutual ortogonali cu suprem 1 în Z avem

$$\|x\| = \sup_\iota \|p_\iota x\|.$$

Conform corolarului 3.7, orice Z-modul normat cu proprietatea de dualitate este decompozabil.

Fie acum Z o W^*-algebră comutativă şi $\mathscr{X}$ un modul normat peste Z. Un Z-submodul $\mathscr{F}$ al lui $\mathscr{X}_Z^*$ se numeşte de tip predual dacă

1) $\mathscr{F}$ separă elementele lui $\mathscr{X}$;

2) bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$ este compactă în imaginea inversă prin $\mathscr{F}$ a topologiei w pe Z.

Spunem că $\mathscr{X}$ are proprietatea de predualitate, dacă este finit decompozabil şi $\mathscr{X}_Z^*$ conţine un Z-submodul de tip predual. Se vede uşor că, dacă $\mathscr{X}$ este un Z-modul normat oarecare, atunci $\mathscr{X}_Z^*$ are proprietatea de predualitate. Vom arăta că şi afirmaţia inversă este adevărată.

Fie Z o W^*-algebră comutativă, $\mathscr{X}$ un Z-modul normat cu proprietatea de predualitate, iar $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$. Notăm imaginea inversă prin $\mathscr{F}$ a topologiei w pe Z prin $\mathscr{F}^{-1}(w)$.

4.1. LEMĂ. *Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$ există $x_0 \in \mathscr{X}$, $\|x_0\| = 1$, astfel încît pentru orice $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| \leqslant 1$, avem*

$$|\Phi(x)| \leqslant \Phi(x_0).$$

Demonstraţie. Fie

$$\mathscr{Y} = \{y \mid y \in \mathscr{X}, \|y\| \leqslant 1, \Phi(y) \geqslant 0\}.$$

Dacă $y_1, y_2 \in \mathscr{Y}$ şi $\Phi(y_1) \geqslant \Phi(y_2)$, notăm $y_1 \geqslant y_2$. Cum $\mathscr{X}$ este finit decompozabil, pentru orice $y_1, y_2 \in \mathscr{Y}$ există $y_3 \in \mathscr{Y}$ cu $y_3 \geqslant y_1$ şi $y_3 \geqslant y_2$. Astfel $\mathscr{Y}$ cu relaţia de preordine „$\leqslant$" este un şir generalizat în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$. Fie x_0 un punct limită al lui $\mathscr{Y}$ în $\mathscr{F}^{-1}(w)$-topologia. Se vede uşor că pentru orice $y \in \mathscr{Y}$ avem

$$\Phi(y) \leqslant \Phi(x_0).$$

Fie acum $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| \leqslant 1$, oarecare, iar $\Phi(x) = v|\Phi(x)|$ descompunerea polară a lui $\Phi(x)$. Cum $\Phi(v^*x) = |\Phi(x)| \geqslant 0$, $v^*x \in \mathscr{Y}$. Astfel

$$|\Phi(x)| \leqslant \Phi(x_0).$$

q.e.d.

Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Notăm pentru orice $t \in \Omega$,

$$[t]^{\mathscr{F}} = \{x \mid x \in \mathscr{X},\ \Phi(x)(t) = 0 \text{ pentru orice } \Phi \in \mathscr{F}\}.$$

$[t]^{\mathscr{F}}$ este un Z-submodul închis al lui $\mathscr{X}$, care conţine pe $[t]$. Notăm prin $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ spaţiul normat cît $\mathscr{X}/[t]^{\mathscr{F}}$, iar prin $x_t^{\mathscr{F}}$ imaginea canonică în $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ a lui $x \in \mathscr{X}$. Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$ egalitatea

$$\Phi_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F}}) = \Phi(x)(t)$$

defineşte o formă liniară mărginită $\Phi_t^{\mathscr{F}}$ pe $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$. Notăm prin $\mathscr{F}_t$ spaţiul vectorial al tuturor $\Phi_t^{\mathscr{F}}$, $\Phi \in \mathscr{F}$.

4.2. LEMĂ. *Pentru orice* $\Phi \in \mathscr{F}$

$$\|\Phi\| = \sup_{t \in \Omega} \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$$

şi aplicaţia $t \mapsto \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$ *este continuă.*

Demonstraţie. Evident,

$$\|\Phi\| = \sup_{\substack{\|x\| < 1 \\ t \in \Omega}} |\Phi(x)(t)| = \sup_{\substack{\|x_t^{\mathscr{F}}\| < 1 \\ t \in \Omega}} |\Phi_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F}})| = \sup_{t \in \Omega} \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|.$$

Pe de altă parte, conform lemei 4.1, există $x_0 \in \mathscr{X}$, $\|x_0\| = 1$, astfel încît pentru orice $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| \leqslant 1$, avem

$$|\Phi(x)| \leqslant \Phi(x_0).$$

Rezultă că pentru orice $t \in \Omega$ şi orice $x_t^{\mathscr{F}} \in \mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, $\|x_t^{\mathscr{F}}\| < 1$, avem

$$|\Phi_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F}})| \leqslant \Phi_t^{\mathscr{F}}((x_0)_t^{\mathscr{F}}) \leqslant \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|,$$

de unde

$$\|\Phi_t^{\mathscr{F}}\| = \Phi_t^{\mathscr{F}}((x_0)_t^{\mathscr{F}}) = \Phi(x_0)(t).$$

Astfel aplicaţia $t \mapsto \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$ este continuă.

q.e.d.

4.3. LEMĂ. *Pentru orice* $\Phi \in \mathscr{F}$ *și orice* $t_0 \in \Omega$

$$\|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| = \inf_{\substack{p \text{ proiector în } Z \\ 1-p \in t_0}} \|p\Phi\|.$$

Demonstrație. Inegalitatea

$$\|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| \leqslant \inf_{1-p \in t_0} \|p\Phi\|$$

este trivială.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Conform lemei 4.2 aplicația $t \mapsto \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$ este continuă, deci mulțimea $\{t \mid t \in \Omega, \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\| < \|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| + \varepsilon\}$ este o vecinătate deschisă a lui t_0, iar pe închiderea sa V_0 $\|\Phi_t^{\mathscr{F}}\| \leqslant \|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| + \varepsilon$. Notăm prin p_0 funcția caracteristică a lui V_0, considerată ca element al lui Z. Atunci $1 - p_0 \in t_0$ și, folosind din nou lema 4.2,

$$\|p_0\Phi\| = \sup_{t \in V} \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\| \leqslant \|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| + \varepsilon.$$

Astfel

$$\inf_{1-p \in t_0} \|p\Phi\| \leqslant \|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\| + \varepsilon,$$

și cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar,

$$\inf_{1-p \in t_0} \|p\Phi\| \leqslant \|\Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}\|.$$

q.e.d.

Lema următoare nu va fi folosită în acest paragraf, dar o inserăm aici, fiind o consecință a lemei 4.3.

4.4. LEMĂ. *Dacă* $\mathscr{F}$ *este normic închis în* $\mathscr{X}_Z^*$, *atunci pentru orice* $t \in \Omega$ $\mathscr{F}_t$ *este normic închis în* $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^*$.

Demonstrație. Fie $t \in \Omega$ și $\varphi_t \in (\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^*$ un punct din închiderea lui $\mathscr{F}_t$ în normă. Atunci există un șir (Φ_n) în $\mathscr{F}$, astfel încît

$$\|(\Phi_n)_t^{\mathscr{F}} - (\Phi_{n+1})_t^{\mathscr{F}}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geqslant 1,$$

iar limita șirului $((\Phi_n)_t^{\mathscr{F}})$ este φ_t. Folosind lema 4.3, se vede ușor că există un șir descrescător (p_n) de proiectori în Z, pentru care

$$1 - p_n \in t,$$

$$\|p_n\Phi_n - p_n\Phi_{n+1}\| \leqslant \|(\Phi_n)_t^{\mathscr{F}} - (\Phi_{n+1})_t^{\mathscr{F}}\| + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Definim șirul (Ψ_n) în $\mathscr{F}$ prin recurență:

$$\Psi_1 = p_1\Phi_1,$$

$$\Psi_{n+1} = p_n\Phi_{n+1} + (1 - p_n)\Psi_n, \quad n \geqslant 1.$$

Atunci pentru orice $n \geqslant 1$

$$(\Psi_n)_t^{\mathscr{F}} = (\Phi_n)_t^{\mathscr{F}},$$

$$\|\Psi_n - \Psi_{n+1}\| = \|p_n\Phi_n - p_n\Phi_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

$\mathscr{F}$ fiind complet, şirul (Ψ_n) converge în normă către un $\Psi \in \mathscr{F}$. Evident,

$$\varphi_t = \lim_{n\to\infty} (\Phi_n)_t^{\mathscr{F}} = \lim_{n\to\infty} (\Psi_n)_t^{\mathscr{F}} = \Psi_t^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}_t.$$

q.e.d.

Notăm pentru orice $t \in \Omega$ prin $(\mathscr{F}_t)^0$ anulatorul lui $\mathscr{F}_t$ în $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$, iar prin $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ spaţiul Banach cît $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}/(\mathscr{F}_t)^0$. Atunci $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ se identifică cu dualul spaţiului normat $\mathscr{F}_t$. Cum $\mathscr{F}_t$ separă elementele lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, scufundarea canonică a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ în $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$ induce o aplicaţie liniară injectivă şi de normă $\leqslant 1$ a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$. Numim această aplicaţie scufundarea canonică a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$.

4.5. LEMĂ. *Pentru orice $t \in \Omega$, imaginea bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ prin scufundarea canonică a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ este $\mathscr{F}_t$-densă în bula unitate închisă a lui $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$.*

Demonstraţie. Fie $\tilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$, $\|\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}\| \leqslant 1$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \mathscr{F}$ şi $\varepsilon > 0$. Pentru orice întreg $k \geqslant 1$ există $x_t^{\mathscr{F},**,k} \in (\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$, $\|x_t^{\mathscr{F},**,k}\| \leqslant 1 + \frac{1}{k}$, astfel încît imaginea canonică a lui $x_t^{\mathscr{F},**,k}$ în $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ este $\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}$. Cum bulele închise ale lui $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$ sînt $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^*$-compacte, şirul $(x_t^{\mathscr{F},**,k})$ are un punct limită $x_t^{\mathscr{F},**} \in (\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$ în $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^*$-topologia. Atunci $\|x_t^{\mathscr{F},**}\| \leqslant 1$ şi imaginea canonică a lui $x_t^{\mathscr{F},**}$ în $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ este $\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}$. Bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ fiind $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^*$-densă în bula unitate închisă a lui $(\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}})^{**}$, există $x_t^{\mathscr{F}} \in \mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, $\|x_t^{\mathscr{F}}\| \leqslant 1$, astfel încît

$$|(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F},**})| \leqslant \varepsilon, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

deci

$$|(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(x_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}})| \leqslant \varepsilon, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

q.e.d.

Fie $f \in \mathscr{F}_{\mathscr{F}}^*$.

4.6. LEMĂ. *Pentru orice $t \in \Omega$ aplicaţia $f_t : \Phi_t^{\mathscr{F}} \mapsto f(\Phi)(t)$ este o formă liniară bine definită pe $\mathscr{F}_t$ şi $\|f_t\| \leqslant \|f\|$.*

Demonstraţie. Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$ şi orice proiector p în Z cu $1 - p \in t$ avem

$$|f(\Phi)(t)| = |f(p\Phi)(t)| \leqslant \|f\| \cdot \|p\Phi\|.$$

Folosind lema 4.3, deducem că

$$|f(\Phi)(t)| \leqslant \|f\| \cdot \|\Phi_t\|, \quad \Phi \in \mathscr{F}.$$

Prin urmare, f_t este o formă liniară bine definită pe $\mathscr{F}_t$ şi $\|f_t\| \leqslant \|f\|$.

q.e.d.

4.7. LEMĂ. *Pentru orice* $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \mathscr{F}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, *există un element* $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| \leqslant \|f\| + \delta$, *astfel încît*

$$\|f(\Phi_i) - \Phi_i(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Demonstrație. Fie $t_0 \in \Omega$ oarecare. Conform lemei 4.6, $f_{t_0} \in (\mathscr{F}_{t_0})^* \approx \approx \widetilde{\mathscr{X}}_{t_0}^{\mathscr{F}}$, $\|f_{t_0}\| \leqslant \|f\|$, deci există $\widetilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}} \in \widetilde{\mathscr{X}}_{t_0}^{\mathscr{F}}$, $\|\widetilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}\| = \|f_{t_0}\| \leqslant \|f\|$, astfel încît

$$f(\Phi)(t_0) = \Phi_{t_0}^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}), \quad \Phi \in \mathscr{F}.$$

Folosind lema 4.5, există $x_0 \in \mathscr{X}$, $\|x_0\| \leqslant \|f\| + \delta$, astfel încît

$$|(\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}((x_0)_{t_0}^{\mathscr{F}})| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

deci

$$|f(\Phi_i)\ (t_0) - \Phi_i(x_0)\ (t_0)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Fie acum V_0 o vecinătate deschisă închisă a lui t_0, astfel încît pentru orice $t \in V_0$

$$|f(\Phi_i)\ (t) - \Phi_i(x_0)(t)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Notînd prin p_0 funcția caracteristică a lui V_0, considerată ca element al lui Z,

$$\|p_0 f(\Phi_i) - p_0 \Phi_i(x_0)\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cum $t_0 \in \Omega$ este oarecare și Ω este compact, există $x_1, \ldots, x_m \in \in \mathscr{X}$, $\|x_j\| \leqslant \|f\| + \delta$, și proiectori mutual ortogonali $p_1, \ldots, p_m \in Z$ cu $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$, astfel încît

$$\|p_j f(\Phi_i) - p_j \Phi_i(x_j)\| \leqslant \varepsilon; \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Punem

$$x = \sum_{j=1}^{m} p_j x_j.$$

Cum $\mathscr{X}$ este finit decompozabil,

$$\|x\| \leqslant \|f\| + \delta.$$

Evident,

$$\|f(\Phi_i)) - \Phi_i(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

q.e.d.

Demonstrăm acum rezultatul de bază al acestui paragraf.

4.8. TEOREMĂ. *Fie Z o W^*-algebră comutativă, $\mathscr{X}$ un Z-modul normat cu proprietatea de predualitate, iar $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$. Atunci aplicația care asociază fiecărui $x \in \mathscr{X}$ Z-forma mărginită $\Phi \mapsto \Phi(x)$ pe $\mathscr{F}$, este un Z-izomorfism izometric al lui $\mathscr{X}$ pe $\mathscr{F}_Z^*$.*

Demonstrație. Fie $f \in \mathscr{F}_Z^*$. Notăm pentru orice $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$,

$$\mathscr{K}_{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \varepsilon, \delta}, = \{x \mid x \in \mathscr{X}, \|x\| \leqslant \|f\| + \delta, \|f(\Phi_i) - \Phi_i(x)\| \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Conform lemei 4.7, mulţimile $\mathscr{K}_{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \varepsilon, \delta}$ nu sînt vide. Cum ele sînt compacte în $\mathscr{F}^{-1}$ (w)-topologia şi familia lor este filtrată descrescător, intersecţia lor după toate părţile finite $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ ale lui $\mathscr{F}$, toţi $\varepsilon > 0$ şi toţi $\delta > 0$, este nevidă. Astfel există $x \in \mathfrak{X}$, $\|x\| \leq \|f\|$, astfel încît

$$f(\Phi) = \Phi(x), \ \Phi \in \mathscr{F}.$$

Aplicaţia care asociază fiecărui $x \in \mathfrak{X}$ Z-forma mărginită $\Phi \mapsto \Phi(x)$ pe $\mathscr{F}$, este evident Z-liniară. Cum $\mathscr{F}$ separă elementele lui $\mathfrak{X}$, ea este injectivă. Folosind afirmaţia demonstrată mai sus, se vede uşor că aplicaţia noastră este surjectivă şi izometrică.

q.e.d.

4.9. Corolar. *Fie Z o W^*-algebră comutativă şi $\mathfrak{X}$ un Z-modul normat. Atunci $\mathfrak{X}$ este Z-dualul unui Z-modul Banach, dacă şi numai dacă are proprietatea de predualitate.*

Remarcăm că, în cazul cînd Z este corpul numerelor complexe, corolarul 4.9 ne dă următorul rezultat bine cunoscut: un spaţiu vectorial normat $\mathfrak{X}$ este dualul unui spaţiu Banach, dacă şi numai dacă există în $\mathfrak{X}$ o topologie de spaţiu vectorial topologic local convex, cu care bula unitate închisă a lui $\mathfrak{X}$ devine un spaţiu topologic Hausdorff compact.

4.10. Corolar. *Fie Z o W^*-algebră comutativă şi $\mathfrak{X}$ un Z-modul normat cu proprietatea de predualitate. Atunci $\mathfrak{X}$ este un Z-modul Banach şi are proprietatea de dualitate. În particular, $\mathfrak{X}$ este decompozabil.*

Fie Z o W^*-algebră comutativă, $\mathfrak{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate şi $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathfrak{X}^*_Z$. Notăm

$$\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}} = \{(t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \mid t \in \Omega, \ \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t \in \widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_t\},$$

dotat cu cea mai slabă topologie pentru care aplicaţiile

$$(t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \mapsto t \in \Omega,$$

$$(t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \mapsto \Phi^{\mathscr{F}}_t(\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \in C, \ \Phi \in \mathscr{F},$$

sînt continue. $\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}$ este un spaţiu topologic Hausdorff. Notăm de asemenea

$$\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1 = \{(t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \mid t \in \Omega, \ \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t \in \widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_t, \ \|\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t\| \leq 1\},$$

adică „bula unitate închisă" a lui $\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}$.

4.11. Lemă. *$\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1$ este o parte compactă a lui $\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathscr{F}_1$ bula unitate închisă a lui $\mathscr{F}$, iar C_1 discul unitate închis complex. Asociem fiecărui $(t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t) \in \widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1$ pe

$$\rho((t, \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t)) = (t, (\Phi^{\mathscr{F}}_t(\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_t))_{\Phi \in \mathscr{F}_1} \in \Omega \times C_1^{\mathscr{F}_1}.$$

Atunci ρ este un homeomorfism al lui $\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1$ pe $\rho(\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1)$, deci este suficient să arătăm că $\rho(\widetilde{\mathfrak{X}}^{\mathscr{F}}_1)$ este o parte închisă a lui $\Omega \times C_1^{\mathscr{F}_1}$.

Fie $(t_\iota, (\Phi^{\mathscr{F}}_{t_\iota}(\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_\iota}))_{\Phi\in\mathscr{F}_1})$ un şir generalizat în $\rho(\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_1)$, convergent către $(t_0, (\alpha_\Phi)_{\Phi\in\mathscr{F}_1}) \in \Omega \times \mathbf{C}_1^{\mathscr{F}_1}$. Trebuie să arătăm că există $\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0} \in \mathscr{X}^{\mathscr{F}}_{t_0}$, $\|\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0}\| \leqslant 1$, astfel încît

$$\Phi^{\mathscr{F}}_{t_0} \widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0}) = \alpha_\Phi, \ \Phi \in \mathscr{F}_1.$$

Prin omogeneitate, putem defini pe α_Φ pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$. Conform lemei 4.2, avem

$$|\alpha_\Phi| = \lim_\iota |\Phi^{\mathscr{F}}_{t_\iota}(\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_\iota})| \leqslant \limsup_\iota \|\Phi^{\mathscr{F}}_{t_\iota}\| = \|\Phi^{\mathscr{F}}_{t_0}\|.$$

Se vede uşor că corespondenţa $\Phi^{\mathscr{F}}_{t_0} \mapsto \alpha_\Phi$ defineşte o formă liniară de normă $\leqslant 1$ pe $\mathscr{F}_{t_0}$, deci există $\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0} \in \widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_{t_0}$, $\|\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0}\| \leqslant 1$, astfel încît

$$\Phi_{t_0}(\widetilde{x}^{\mathscr{F}}_{t_0}) = \alpha_\Phi, \qquad \Phi \in \mathscr{F}.$$

q.e.d.

Notăm pentru orice $x \in \mathscr{X}$ şi orice $t \in \Omega$

$$|||x^{\mathscr{F}}_t|||^{\mathscr{F}} = \sup_{\substack{\Phi\in\mathscr{F}\\ \|\Phi\|\leqslant 1}} |\Phi(x)\ (t)|.$$

Folosind lema 4.3, se verifică uşor că $|||x^{\mathscr{F}}_t|||^{\mathscr{F}}$ este norma imaginii canonice a lui $x^{\mathscr{F}}_t$ în $\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_t$.

4.12. TEOREMĂ (de descompunere a modulelor Banach cu proprietatea de predualitate). *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate, iar $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}^*_Z$. Atunci următoarele afirmaţii sînt adevărate:*

1) *Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$,*

$$\|\Phi\| = \sup_{t\in\Omega} \|\Phi^{\mathscr{F}}_t\|$$

şi aplicaţia $t \mapsto \|\Phi^{\mathscr{F}}_t\|$ este continuă.

2) *Pentru orice $x \in \mathscr{X}$,*

$$\|x\| = \sup_{t\in\Omega} |||x^{\mathscr{F}}_t|||^{\mathscr{F}}$$

şi aplicaţia $t \mapsto |||x^{\mathscr{F}}_t|||^{\mathscr{F}}$ este inferior semicontinuă.

3) *Pentru orice $x \in \mathscr{X}$, există o parte rară E a lui Ω, astfel încît*

$$|||x^{\mathscr{F}}_t|||^{\mathscr{F}} = \|x^{\mathscr{F}}_t\| = \|x_t\|, \qquad t \in \Omega\setminus E.$$

4) *Pentru orice $t \in \Omega$, $\mathscr{F}_t$ separă elementele lui $\mathscr{X}^{\mathscr{F}}_t$, $\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_t$ se identifică cu dualul lui $\mathscr{F}_t$ şi imaginea bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}^{\mathscr{F}}_t$ prin scufundarea canonică a lui $\mathscr{X}^{\mathscr{F}}_t$ în $\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_t$ este $\mathscr{F}_t$-densă în bula unitate închisă a lui $\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}_t$. Dacă $\mathscr{F}$ este normic închis în $\mathscr{X}^*_Z$, atunci $\mathscr{F}_t$ este normic închis în $(\mathscr{X}^{\mathscr{F}}_t)^*$.*

5) *Pentru o familie* $(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}})_{t\in\Omega}$, $\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$, *există* $x \in \mathscr{X}$ *cu*

$$\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} = x_t^{\mathscr{F}}, \; t \in \Omega,$$

dacă și numai dacă $\sup\limits_{t\in\Omega} \|\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}\| < +\infty$ *și pentru orice* $\Phi \in \mathscr{F}$ *funcția* $t \mapsto \Phi_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}})$ *este continuă. Cu alte cuvinte, notînd prin* $\pi^{\mathscr{F}}$ *proiecția canonică a lui* $\widetilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}$ *pe* Ω, *elementele lui* $\mathscr{X}$ *se identifică cu secțiunile continue și mărginite ale lui* $\pi^{\mathscr{F}}$.

Demonstrație. Afirmația 1) a fost demonstrată în lema 4.2.

Prima parte a afirmației 2) rezultă din egalitatea

$$\|x\| = \sup_{\substack{\Phi\in\mathscr{F} \\ \|\Phi\|\leq 1}} \|\Phi(x)\|,$$

consecință a teoremei 4.8, iar partea a doua este trivială.

Fie acum $x \in \mathscr{X}$. Cum $t \to |||x_t^{\mathscr{F}}|||_t^{\mathscr{F}}$ este inferior semicontinuă, iar $t \mapsto \|x_t\|$ este continuă, pentru orice întreg $n \geq 1$ mulțimea

$$F_n = \left\{ t \,|\, t \in \Omega, \; |||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} < \|x_t\| - \frac{1}{n} \right\}$$

este închisă. Dacă interiorul lui F_n nu este vidă, notînd prin p_n funcția caracteristică a lui $\overset{\circ}{F}_n$, considerată ca element al lui Z, avem

$$|||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} < \|x_t\| - \frac{1}{n} < \|p_n x\| - \frac{1}{n}, \; t \in \overset{\circ}{F}_n.$$

Folosind afirmația 2), deducem

$$\|p_n x\| < \|p_n x\| - \frac{1}{n},$$

ceea ce este absurd. Prin urmare, mulțimile F_n sînt rare. Notînd $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$, conform corolarului 2.4, E este o mulțime rară. Evident,

$$|||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} = \|x_t\|, \; t \in \Omega \setminus E.$$

Astfel afirmația 3) este verificată.

În sfîrșit, afirmația 4) este o reenunțare a lemelor 4.5 și 4.4, iar afirmația 5) rezultă din teorema 4.8.

q.e.d.

Lema 4.11, principiul selecției continue, și teorema 4.12 ne permit să construim elemente cu anumite proprietăți ale lui $\mathscr{X}$, pornind de la existența elementelor cu proprietăți similare în spațiile $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$, analog cum se procedează în teoria reducerii a lui von Neumann. Demonstrația lemei care urmează este un exemplu de astfel de raționament.

4.13. LEMĂ. *Fie $\mathscr{Y}$ un subspațiu vectorial al lui $\mathscr{X}$, astfel încît bula unitate închisă a lui $\mathscr{Y}$ este $\mathscr{F}^{-1}(w)$-densă în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in \mathscr{F}$ și $\varepsilon > 0$. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω cu proprietatea următoare:*

Pentru orice $t \in D$ și orice $\tilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \tilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$, există $y \in \mathscr{Y}$, $\|y\| \leqslant \|\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}\|$, astfel încît

$$|(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(y_t^{\mathscr{F}})| < \varepsilon, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Demonstrație. Considerăm mulțimea

$$\Gamma = \left\{ (t, \tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) \in \tilde{\mathscr{X}}_1^{\mathscr{F}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pentru orice } y \in \mathscr{Y},\ \|y\| \leqslant 1, \text{ există un indice} \\ i,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ astfel încît} \\ \qquad |(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(y_t^{\mathscr{F}})| \geqslant \varepsilon. \end{array} \right\}$$

Arătăm că $\tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}} \setminus \Gamma$ este deschisă în $\tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}$. Într-adevăr, fie $(t_0, \tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}) \in \tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}} \setminus \Gamma$. Atunci există $y \in \mathscr{Y}$, $\|y\| \leqslant 1$ și $\delta > 0$, astfel încît

$$|(\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(y_{t_0}^{\mathscr{F}})| \leqslant \delta < \varepsilon, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Fie W o vecinătate deschisă a lui t_0 cu

$$|(\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(y_{t_0}^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(y_t^{\mathscr{F}})| < \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \ 1 \leqslant i \leqslant n, \ \ t \in W.$$

Mulțimea

$$V = \left\{ (t, \tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) \in \tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}} \mid |(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}})| < \frac{\varepsilon - \delta}{2}, \ 1 \leqslant i \leqslant n, t \in W \right\}$$

este o parte deschisă a lui $\tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}}$. Pentru orice $(t, \tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) \in V$ avem

$$|(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(y_t^{\mathscr{F}})| \leqslant |(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) -$$

$$- (\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}})| + |(\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(y_{t_0}^{\mathscr{F}})| + |(\Phi_i)_{t_0}^{\mathscr{F}}(y_{t_0}^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(y_t^{\mathscr{F}})| <$$

$$< \frac{\varepsilon - \delta}{2} + \delta + \frac{\varepsilon - \delta}{2} = \varepsilon, \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

deci

$$(t_0, \tilde{x}_{t_0}^{\mathscr{F}}) \in V \subset \tilde{\mathscr{X}}^{\mathscr{F}} \setminus \Gamma.$$

În concluzie, Γ este o parte închisă, deci compactă a lui $\tilde{\mathscr{X}}_1^{\mathscr{F}}$. Dacă proiecția canonică $\pi^{\mathscr{F}}(\Gamma)$ a lui Γ pe Ω are interior nevid, atunci, notînd prin p funcția caracteristică a lui $\overset{\circ}{\widehat{\pi^{\mathscr{F}}(\Gamma)}}$, considerată ca element al lui

Z, şi aplicînd principiul selecţiei continue şi teorema 4.12, există $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| < 1$, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i(x) - \Phi_i(y)|\, p \geq \varepsilon p, \; y \in \mathscr{Y}, \; \|y\| < 1.$$

Pe de altă parte, după un rezultat cunoscut din teoria spaţiilor vectoriale topologice local convexe, aplicaţiile $\Phi \in \mathscr{F}$ sînt continue cu topologiile Mackey asociate topologiilor $\mathscr{F}^{-1}(w)$ şi w. Cum bula unitate închisă a lui $\mathscr{Y}$ este densă în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$ în topologia Mackey asociată lui $\mathscr{F}^{-1}(w)$, există un şir generalizat (y_ι) în $\mathscr{Y}$, $\|y_\iota\| < 1$, astfel încît

$$\Phi_i(y_\iota) \to \Phi_i(x), \; 1 < i < n,$$

în topologia Mackey asociată lui w. În particular,

$$\Phi_i(y_\iota) \to \Phi_i(x), \; 1 \leq i \leq n,$$

în s-topologia, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus.

Astfel $\pi^{\mathscr{F}}(\Gamma)$ este o parte închisă rară a lui Ω, deci $D = \Omega \setminus \pi^{\mathscr{F}}(\Gamma)$ este o parte deschisă densă a lui Ω. Se vede uşor că D satisface cerinţele lemei.

q.e.d.

Ne punem problema pentru care subspaţii vectoriale $\mathscr{Y}$ ale lui $\mathscr{X}$ cu proprietatea din enunţul lemei 4.13, imaginile lui $\mathscr{Y}$ în spaţiile $\widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ sînt $\mathscr{F}_t$-dense. În cazul general avem doar rezultatul următor:

4.14. TEOREMĂ. (de densitate cu forme fixate). *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate, $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$, $(\Phi_i)_{i\geq 1}$ un şir în $\mathscr{F}$ şi $\mathscr{Y}$ un subspaţiu vectorial al lui $\mathscr{X}$, astfel încît bula unitate închisă a lui $\mathscr{Y}$ este $\mathscr{F}^{-1}(w)$-densă în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω cu proprietatea următoare:*

Pentru orice $t \in D$ şi orice $\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$, există un element $\widetilde{y}_t^{\mathscr{F}}$ în $\mathscr{F}_t$-închiderea imaginii lui $\{y \,|\, y \in \mathscr{Y}, \|y\| < \|\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}\|\}$ în $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, astfel încît

$$(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}) = (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{y}_t^{\mathscr{F}}), \qquad i \geq 1.$$

Demonstraţie. Pentru orice întreg $n \geq 1$, fie D_n o parte deschisă densă a lui Ω, corespunzătoare lui $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ şi $\varepsilon = \frac{1}{n}$ conform lemei 4.13. După principiul şirului de partiţii ale unităţii, $\bigcap_{n\geq 1} D_n$ conţine o parte deschisă densă D a lui Ω.

Fie acum $t \in D$ şi $\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$. Pentru orice întreg $n \geq 1$ există $y_n \in \mathscr{Y}$, $\|y_n\| \leq \|\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}\|$, astfel încît

$$|(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}) - (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}((y_n)_t^{\mathscr{F}})| \leq \frac{1}{n}, \; 1 \leq i \leq n.$$

Cum bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$ este $\mathscr{F}_t$-compactă, şirul $((y_n)_t^{\mathscr{F}})$ are un punct limită $\tilde{y}_t^{\mathscr{F}}$ în $\mathscr{F}_t$-topologia. Evident,

$$(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{x}_t^{\mathscr{F}}) = (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\tilde{y}_t^{\mathscr{F}}), \qquad i \geqslant 1.$$

q.e.d.

Spunem că un modul normat $\mathscr{X}$ peste o AW^*-algebră comutativă Z are proprietatea lipirii, dacă pentru orice familie $(p_\iota)_{\iota\in I}$ de proiectori mutual ortogonali în Z şi pentru orice familie $(x_\iota)_{\iota\in I}$ în $\mathscr{X}$ cu $\sup\limits_{\iota\in I}\|x_\iota\|<+\infty$, există $x\in X$ cu

$$p_\iota x = p_\iota x_\iota, \qquad \iota\in I.$$

Folosind teorema 4.8, se vede uşor că, dacă Z este W^*-algebră, iar $\mathscr{X}$ are proprietatea de predualitate, atunci $\mathscr{X}$ are proprietatea lipirii. Un alt exemplu este furnizat de lema următoare:

4.15. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră şi Z o AW^*-subalgebră a centrului lui M. Atunci M, considerat ca modul Banach peste Z, are proprietatea lipirii.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că, pentru orice familie (p_ι) de proiectori ortogonali în Z şi pentru orice familie (x_ι) de elemente autoadjuncte în M cu $\sup\limits_\iota\|x_\iota\| < +\infty$, există $x\in M$ cu

$$p_\iota x = p_\iota x_\iota, \text{ oricare ar fi } \iota.$$

Notăm $y_\iota = p_\iota x_\iota$. Fie N o C^*-subalgebră comutativă maximală a lui M, conţinînd Z şi familia (y_ι). După lema 3.9, N este o AW^*-subalgebră comutativă a lui M. Folosind reprezentarea Ghelfand a lui N şi teorema 1.3, se vede uşor că există $x\in N$ cu

$$p_\iota x = y_\iota = p_\iota x_\iota, \text{ oricare ar fi}_\iota.$$

q.e.d.

Pentru submodule $\mathscr{Y}$ cu proprietatea lipirii, teorema 4.14 poate fi întărită:

4.16. TEOREMĂ (de densitate a submodulelor cu proprietatea lipirii). *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate, $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$ şi $\mathscr{Y}$ un Z-submodul cu proprietatea lipirii al lui $\mathscr{X}$, astfel încît bula unitate închisă a lui $\mathscr{Y}$ este $\mathscr{F}^{-1}(w)$-densă în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$. Atunci pentru orice $t\in\Omega$, imaginea bulei unitate închise a lui $\mathscr{Y}$ în $\tilde{\mathscr{X}}_t^{\mathscr{F}}$ este $\mathscr{F}_t$-densă în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$.*

Demonstraţie. Conform teoremei 4.12, 4), este suficient să arătăm că, pentru orice $t\in\Omega$, bula unitate deschisă a lui $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, adică imaginea bulei unitate deschise a lui $\mathscr{X}$ în $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$, este inclusă în $\mathscr{F}_t$-închiderea imaginii bulei unitate închise a lui $\mathscr{Y}$ în $\mathscr{X}_t^{\mathscr{F}}$.

Vom demonstra o afirmaţie mai puternică: pentru orice $x\in\mathscr{X}$, $\|x\|\leqslant 1$, orice $\Phi_1,\ldots,\Phi_n\in\mathscr{F}$ şi orice $\varepsilon>0$, există $y\in\mathscr{Y}$, $\|y\|\leqslant 1$, cu

$$\|\Phi_i(x) - \Phi_i(y)\| \leqslant \varepsilon, \qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Conform lemei lui Zorn, există o familie maximală (V_ι) de părţi deschise, închise, nevide, mutual disjuncte ale lui Ω, astfel încît pentru orice ι există $y_\iota \in \mathscr{Y}$, $\|y_\iota\| \leqslant 1$, cu

$$|\Phi_i(x)(t) - \Phi_i(y_\iota)(t)| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad t \in V_\iota.$$

Presupunem că $\bigcup\limits_\iota V_\iota$ nu este densă în Ω. Fie D o parte deschisă densă a lui Ω, corespunzătoare lui $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ şi ε conform lemei 4.13. Dacă $t_0 \in D \setminus \overline{\bigcup\limits_\iota V_\iota}$, atunci există $y_0 \in \mathscr{Y}$, $\|y_0\| < \|x\| \leqslant 1$, astfel încît

$$|\Phi_i(x)(t_0) - \Phi_i(y_0)(t_0)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Alegînd o vecinătate deschisă şi închisă $V_0 \subset \Omega \setminus \overline{\bigcup\limits_\iota V_\iota}$ a lui t_0, pentru care

$$|\Phi_i(x)(t) - \Phi_i(y_0)(t)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad t \in V_0,$$

contrazicem maximalitatea familiei (V_ι).

Notăm prin p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι, considerată ca element al lui Z. Atunci $\sum\limits_\iota p_\iota = 1$ şi pentru orice ι

$$\|p_\iota \Phi_i(x) - p_\iota \Phi_i(y_\iota)\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cum $\mathscr{Y}$ are proprietatea lipirii, există $y \in \mathscr{Y}$ cu

$$p_\iota y = p_\iota y_\iota, \quad \text{oricare ar fi } \iota.$$

Conform corolarului 4.10, $\mathscr{X}$ este decompozabil, deci

$$\|y\| = \sup_\iota \|p_\iota y\| \leqslant \sup_\iota \|y_\iota\| \leqslant 1.$$

Evident,

$$\|\Phi_i(x) - \Phi_i(y)\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

q.e.d.

Arătăm acum că, pentru module Banach cu proprietatea de predualitate, descompunerile tratate în acest paragraf le cuprind pe cele tratate în paragraful precedent.

4.17. Teoremă. *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, iar $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate. Atunci există un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$, care are proprietatea lipirii. Dacă $\mathscr{F}$ este un astfel de Z-submodul, atunci*

$$[t]^{\mathscr{F}} = [t], \; t \in \Omega,$$

$$|||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} = \|x_t^{\mathscr{F}}\| = \|x_t\|, \quad x \in \mathscr{X}, \quad t \in \Omega.$$

Demonstrație. Fie $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual oarecare al lui $\mathscr{X}_Z^*$, iar $\mathscr{F}_0$ cel mai mic Z-submodul cu proprietatea lipirii al lui $\mathscr{X}_Z^*$, care conține pe $\mathscr{F}$. Dacă f este o Z-formă mărginită oarecare pe $\mathscr{F}_0$, atunci, conform teoremei 4.8, există $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| \leqslant \|f\|$, astfel încît

$$f(\Phi) = \Phi(x), \quad \Phi \in \mathscr{F}.$$

Cum

$$\{\Phi | \Phi \in \mathscr{F}_0, \; f(\Phi) = \Phi(x)\}$$

este un Z-submodul cu proprietatea lipirii al lui $\mathscr{F}_0$, care conține pe $\mathscr{F}$, deducem că coincide cu $\mathscr{F}_0$. Astfel

$$f(\Phi) = \Phi(x), \quad \Phi \in \mathscr{F}_0$$

de unde rezultă că $\mathscr{F}_0$ este de tip predual.

Fie acum $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$, avînd proprietatea lipirii. Este suficient să arătăm că, pentru orice $x \in \mathscr{X}$,

$$|||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} = \|x_t\|, \quad t \in \Omega.$$

Inegalitatea

$$|||x_t^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} \leqslant \|x_t\|, \quad t \in \Omega,$$

fiind trivială, rămîne de verificat inegalitatea inversă.

Fie $\varepsilon > 0$. Conform lemei lui Zorn, există o familie maximală (V_ι) de părți deschise, închise, nevide, mutual disjuncte ale lui Ω, astfel încît pentru orice ι există $\Phi_\iota \in \mathscr{F}$, $\|\Phi_\iota\| \leqslant 1$, cu

$$|\Phi_\iota(x)(t)| \geqslant \|x_t\| - \varepsilon, \quad t \in V_\iota.$$

Presupunem că $\bigcup_\iota V_\iota$ nu este densă în Ω. Conform teoremei (4.12.3), există $t_0 \in \Omega \setminus \overline{\bigcup_\iota V_\iota}$ cu

$$|||x_{t_0}^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} = \|x_{t_0}\|.$$

Fie $\Phi_0 \in \mathscr{F}$, $\|\Phi_0\| \leqslant 1$, astfel încît

$$|\Phi_0(x)(t_0)| > |||x_{t_0}^{\mathscr{F}}|||^{\mathscr{F}} - \varepsilon = \|x_{t_0}\| - \varepsilon.$$

Aplicațiile $t \to \Phi_0(x)(t)$ și $t \to \|x_t\|$ fiind continue, există o vecinătate deschisă și închisă $V_0 \subset \Omega / \overline{\bigcup_\iota V_\iota}$ a lui t_0, pentru care

$$|\Phi_0(x)(t)| > \|x_t\| - \varepsilon, \; t \in V_0,$$

în contradicție cu maximalitatea familiei (V_ι).

Fie p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι, considerată ca element al lui Z, şi

$$\Phi = \sum_\iota p_\iota \Phi.$$

Cum $\mathscr{F}$ are proprietatea lipirii, $\Phi \in \mathscr{F}$, şi cum $\sum_\iota p_\iota = 1$, $\|\Phi\| \leqslant 1$. Astfel avem succesiv

$$|\Phi(x)(t)| \geqslant \|x_t\| - \varepsilon, \quad t \in \bigcup_\iota V_\iota,$$

$$|\Phi(x)(t)| \geqslant \|x_t\| - \varepsilon, \quad t \in \Omega,$$

$$\||x_t^{\mathscr{F}}|\|^{\mathscr{F}} \geqslant \|x_t\| - \varepsilon, \quad t \in \Omega.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem că

$$\||x_t^{\mathscr{F}}|\|^{\mathscr{F}} = \|x_t\|, \quad t \in \Omega.$$

q.e.d.

În sfîrşit, arătăm că orice W^*-algebră, considerată ca modul Banach peste centrul său, are proprietatea de predualitate.

Fie M o W^*-algebră, iar Z o W^*-subalgebră a centrului lui M. Notăm prin M_*^Z mulţimea tuturor Z-formelor mărginite w-continue pe M. Se vede uşor că M_*^Z este un Z-submodul normic închis şi cu proprietatea lipirii al lui M_Z^*.

4.18. Lemă. *Pentru orice formă pozitivă normală* φ *pe* M, *notînd prin* $z(\varphi)$ *suportul restricţiei lui* φ *la* Z, *există un unic* $\Phi \in M_*^Z$ *cu proprietăţile*

$$\Phi = z(\varphi)\,\Phi,$$

$$\varphi(x) = \varphi(\Phi(x)), \quad x \in M.$$

Demonstraţie. Fie $x \in M$. Pentru orice $z \in Z$, notînd prin $z = v|z|$ descompunerea sa polară în Z şi aplicînd succesiv inegalitatea lui Schwartz, avem

$$|\varphi(xz)| = |\varphi(x\, v|z|^{\frac{1}{2}}|z|^{\frac{1}{2}})| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(xx^*vv^*|z|)^{\frac{1}{2}}\, \varphi(|z|)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi((xx^*vv^*)^2|z|)^{\frac{1}{4}}\, \varphi(|z|)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\leqslant \varphi((xx^*vv^*)^{2^n}|z|)^{\frac{1}{2^n}}\, \varphi(|z|)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|^{\frac{1}{2^{n+1}}}\|x\|\cdot\|z\|^{\frac{1}{2^{n+1}}}\, \varphi(|z|)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}},$$

deci

$$|\varphi(xz)| \leqslant \|x\|\varphi(|z|).$$

Folosind descompunerea polară a formei $z \mapsto \varphi\,(xz)$ pe Z şi teorema de tip Radon-Nikodym pentru forme pozitive normale pe Z, se arată uşor că există un unic $\Phi\,(x)\ \in Z$ cu proprietăţile

$$\Phi(x) = z(\varphi)\ \ \Phi(x),$$

$$\varphi(xz) = \varphi\,(\Phi(x)z)\,;\quad z \in Z.$$

Se verifică uşor că aplicaţia $x \mapsto \Phi\,(x)$ aparţine lui M_*^Z şi satisface proprietăţile din enunţ. Unicitatea lui Φ este imediată.

q.e.d.

4.19. TEOREMĂ. *Fie M o W^*-algebră şi Z o W^*-subalgebră a centrului său. Atunci M, considerată ca modul Banach peste Z, are proprietatea de predualitate, iar M_*^Z este un Z-submodul normic închis, cu proprietatea lipirii şi de tip predual al lui M_Z^*.*

Demonstraţie. Evident, M este finit decompozabil. Conform lemei 4.18, M_*^Z separă punctele lui M. În sfîrşit, bula unitate închisă a lui M fiind w-compactă, ea este compactă în imaginea inversă prin M_*^Z a topologiei w pe Z.

q.e.d.

Analog cu cazul modulelor Banach cu proprietatea de dualitate, teorema 4.12 ne dă posibilitatea de a reduce anumite probleme privind module Banach cu proprietatea de predualitate la probleme privind duale de spaţii Banach. Se pune problema unei alegeri convenabile a lui $\mathscr{F}$, astfel încît spaţiile $\widetilde{\mathscr{X}}_f^{\mathscr{F}}$ să rezulte cît mai particulare. Această problemă va fi analizată în cazul W^*-algebrelor, considerate ca module Banach peste centrele lor.

Lema 4.18 apare în [16] cu o altă demonstraţie. Restul materialului din acest paragraf constituie o extensie pentru module Banach a unor rezultate anunţate în [45], [46] şi expuse în [47], [48]. Aceste extensii apar aici pentru prima oară.

Remarcăm că Z-module normate decompozabile şi cu proprietatea lipirii au fost considerate sub alte denumiri în [35].

§ 5. Z-CONVEXITATE ÎN Z-MODULE

Fie Z o C^*-algebră comutativă cu unitate, iar $\mathscr{X}$ un Z-modul. o parte $\mathscr{K}$ a lui $\mathscr{X}$ se numeşte Z-convexă, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in \mathscr{K}$ şi orice $z \in Z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, avem

$$zx_1 + (1 - z)x_2 \in \mathscr{K}.$$

Spunem că o C^*-algebră A este cu descompunerea spectrală, dacă are unitate şi pentru orice element autoadjunct $a \in A$ şi orice număr real α există un proiector $e \in A$, care comută cu a şi pentru care

$$ae \geqslant \alpha\, e,$$

$$a(1 - e) \leqslant \alpha(1 - e).$$

Conform lemei 3.10, orice AW^*-algebră este cu descompunerea spectrală.

5.1. TEOREMĂ. *Fie Z o C^*-algebră comutativă cu descompunerea spectrală, $\mathfrak{X}$ un Z-modul normat şi $\mathscr{K}$ o parte convexă închisă a lui X. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(*i*) *$\mathscr{K}$ este Z-convexă.*

(*ii*) *Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathscr{K}$ şi orice proiector $p \in Z$ avem*

$$px_1 + (1 - p)\, x_2 \in \mathscr{K}.$$

(*iii*) *Pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{K}$ şi orice elemente pozitive $z_1, \ldots, z_n \in \in Z$ cu $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$, avem*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \in \mathscr{K}.$$

Dacă Z este o W^*-algebră comutativă, $\mathfrak{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate, $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathfrak{X}^*_Z$ şi *$\mathscr{K}$ o parte convexă $\mathscr{F}^{-1}$ (w)-compactă a lui $\mathfrak{X}$, atunci afirmaţiile precedente sînt echivalente cu următoarea:*

(*iv*) *Pentru orice familie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ în $\mathscr{K}$ şi orice familie $(z_\iota)_{\iota \in I}$ de elemente pozitive în Z cu $\sum_{\iota \in I} z_\iota = 1$, familia $(z_\iota x_\iota)_{\iota \in I}$ este $\mathscr{F}^{-1}$ (w)-sumabilă şi*

$$\sum_{\iota \in I} z_\iota x_\iota \in \mathscr{K}.$$

Demonstraţie. Evident, (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*).

Fie K Z-convexă, $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{K}$ şi $z_1, \ldots, z_n$ elemente pozitive în Z cu $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ definim prin inducţie

$$y_1(\varepsilon) = x_1,$$

$$y_k(\varepsilon) = \frac{(k-1)\,\varepsilon + \sum_{i=1}^{k-1} z_i}{k\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} z_i}\, y_{k-1}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon + z_k}{k\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} z_i}\, x_k,\ 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Evident, $y_k(\varepsilon) \in \mathscr{K}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, şi

$$y_n(\varepsilon) = \frac{1}{n\varepsilon + 1} \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon + z_i) x_i.$$

Cum $\lim_{\varepsilon \to 0} y_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} z_i\, x_i$ şi $\mathscr{K}$ este închisă, deducem că

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \in \mathscr{K}.$$

Astfel (*i*) este echivalentă cu (*iii*).

Presupunem acum că (ii) este adevărată. Fie $x_1, x_2 \in \mathscr{K}$ şi $z \in Z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Cum Z este cu descompunerea spectrală, pentru orice $\varepsilon > 0$ există proiectori mutual ortogonali $p_1, \ldots, p_n \in Z$ cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ şi numere reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ între 0 şi 1, astfel încît

$$\left\| z - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \right\| \leqslant \varepsilon.$$

$\mathscr{K}$ fiind convexă, pentru orice i

$$y_i = \lambda_i x_1 + (1 - \lambda_i)\, x_2 \in \mathscr{K}.$$

Folosind (ii), se vede uşor că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\right) x_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\right) x_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \in \mathscr{K}.$$

Cum

$$\left\| (zx_1 + (1 - z)\, x_2) - \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\right) x_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\right) x_2\right)\right\| \leqslant \varepsilon\, (\|x_1\| + \|x_2\|)$$

$\varepsilon > 0$ este oarecare şi $\mathscr{K}$ este închisă, deducem că

$$zx_1 + (1 - z)\, x_2 \in \mathscr{K}.$$

Astfel $\mathscr{K}$ este Z-convexă.

Fie acum Z o W^*-algebră comutativă, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach cu proprietatea de predualitate, $\mathscr{F}$ un Z-submodul de tip predual al lui $\mathscr{X}_Z^*$ şi $\mathscr{K}$ o parte convexă $\mathscr{F}^{-1}$ (w)-compactă a lui $\mathscr{X}$. Evident, (iv) implică afirmaţiile echivalente (i), (ii) şi (iii).

Reciproc, presupunem pe $\mathscr{K}$ Z-convexă. Fie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ o familie în $\mathscr{K}$, iar $(z_\iota)_{\iota \in I}$ o familie de elemente pozitive în Z cu $\sum_{\iota \in I} z_\iota = 1$. Alegem un x_0 în $\mathscr{K}$ şi notăm pentru orice parte finită F a lui I

$$y_F = \sum_{\iota \in F} z_\iota x_\iota + (1 - \sum_{\iota \in F} z_\iota)\, x_0.$$

Conform afirmaţiei (iii), $y_F \in \mathscr{K}$. Cum $\mathscr{K}$ este $\mathscr{F}^{-1}$ (w)-compactă şirul generalizat (y_F) are un punct limită $y_0 \in \mathscr{K}$ în $\mathscr{F}^{-1}(w)$-topologia.

Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$, orice formă pozitivă normală φ pe Z şi orice $F \subset I$ finită, avem

$$|\varphi(\Phi((1 - \sum_{\iota \in F} z_\iota)\, x_0))| = |\varphi((1 - \sum_{\iota \in F} z_\iota)\,\Phi(x_0))| \leqslant \varphi(1 - \sum_{\iota \in F} z_\iota)\, \|\Phi(x_0)\|.$$

Cum $\sum_{\iota\in F} z_\iota \to 1$, deducem că şirul generalizat $(\varphi(\Phi((1-\sum_{\iota\in F} z_\iota)\, x_0)))_F$ converge către 0.

Astfel şirul generalizat $((1-\sum_{\iota\in F} z_\iota)\, x_0)$ converge către o în $\mathscr{F}^{-1}(w)$—topologia, deci y_0 este un punct limită al şirului generalizat $(\sum_{\iota\in F} z_\iota x_\iota)_F$ în $\mathscr{F}^{-1}(w)$-topologia.

Fie din nou $\Phi \in \mathscr{F}$ şi φ o formă pozitivă normală pe Z. Cum mulţimea $\Phi(\mathscr{K})$ este w-compactă, conform principiului mărginirii uniforme

$$\alpha = \sup_{x\in\mathscr{K}} \|\Phi(x)\| < +\infty.$$

Familia (z_ι) fiind w-sumabilă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $F_\varepsilon \subset I$ finită, astfel încît pentru orice $F \subset I$ finită cu $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$ avem

$$\varphi\left(\sum_{\iota\in F} z_\iota\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Pentru orice astfel de F

$$|\varphi(\Phi(\sum_{\iota\in F} z_\iota x_\iota)) = |\sum_{\iota\in F} \varphi(z_\iota)\Phi(x_\iota))| \leqslant \sum_{\iota\in F} \varphi(z_\iota)\|\Phi(x_\iota)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(\sum_{\iota\in F} z_\iota)\,\alpha \leqslant \varepsilon_1$$

deci şirul generalizat $(\varphi(\Phi(\sum_{\iota\in F} z_\iota x_\iota)))_F$ converge. Cum $\varphi(\Phi(y_0))$ este un punct limită al său, deducem că şirul generalizat $(\varphi(\Phi(\sum_{\iota\in F} z_\iota x_\iota)))_F$ converge către $\varphi(\Phi(y_0))$.

În concluzie, $(\sum_{\iota\in F} z_\iota x_\iota)$ converge către y_0 în $\mathscr{F}^{-1}(w)$-topologia, deci familia $(z_\iota x_\iota)$ este $\mathscr{F}^{-1}(w)$-sumabilă şi

$$\sum_{\iota\in I} z_\iota x_\iota = y_0 \in \mathscr{K}.$$

q.e.d.

Fie Z o C^*-algebră comutativă cu unitate, $\mathscr{X}$ un Z-modul şi $\mathscr{K}$ o parte Z-convexă a lui $\mathscr{X}$. Un element x al lui $\mathscr{K}$ se numeşte Z-extremal, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in \mathscr{K}$ şi orice $z \in Z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, z şi $1-z$ invertibile, astfel încît

$$x = zx_1 + (1-z)\,x_2,$$

avem

$$x_1 = x_2 = x.$$

Rezultatul surprinzător care urmează, ne arată că într-o mulţime Z-convexă noţiunile de element Z-extremal şi element extremal coincid.

5.2. TEOREMĂ. *Fie Z o C^*-algebră comutativă cu unitate, $\mathcal{X}$ un Z-modul, $\mathcal{K}$ o parte Z-convexă a lui $\mathcal{X}$ și $x \in \mathcal{K}$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente :*

(i) x este un element Z-extremal al lui $\mathcal{K}$.

(ii) Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ cu

$$x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2,$$

avem

$$x_1 = x_2 = x.$$

Demonstrație. Evident, $(i) \Rightarrow (ii)$.

Presupunem acum că (ii) este adevărată. Fie $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ și $z \in Z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, z și $1 - z$ invertibile, astfel încît

$$x = z x_1 + (1 - z) x_2.$$

Cum z și $1 - z$ sînt invertibile. există scalari α și β cu

$$0 < \alpha \leqslant z \leqslant \beta < 1.$$

Notăm

$$z_1 = (2z - 1)^+, \; z_2 = (2z - 1)^-.$$

Atunci

$$0 \leqslant z_1 + z_2 \leqslant \max \{|2\alpha - 1|, |2\beta - 1|\} < 1,$$

deci $0 \leqslant z_1, z_2 \leqslant 1$ și $1 - z_1 - z_2$ este invertibil.

$\mathcal{K}$ fiind Z - convexă, elementele

$$y_1 = z_1 x_1 + (1 - z_1) x_2,$$

$$y_2 = (1 - z_2) x_1 + z_2 x_2 \quad .$$

aparțin lui $\mathcal{K}$. Cum

$$x = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2,$$

conform afirmației (ii),

$$y_1 = y_2,$$

$$(1 - z_1 - z_2) \; x_1 = (1 - z_1 - z_2) \; x_2.$$

Folosind invertibilitatea lui $1 - z_1 - z_2$, deducem că

$$x_1 = x_2.$$

q.e.d.

Fie acum Z o W^*-algebră comutativă şi $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach. Considerînd pe $\mathscr{X}_Z^*$ topologia definită de seminormele

$$\Phi \to |\varphi(\Phi(x))|,$$

unde $x \in \mathscr{X}$ şi φ trece prin toate formele w-continue pe Z, bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}_Z^*$ devine compactă. Astfel, folosind teorema Krein-Milman, elementele extremale ale bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}_Z^*$ sînt „cărămizile" din care este construit $\mathscr{X}_Z^*$. Notînd prin Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, ne punem problema de a caracteriza punctele extremale Φ ale bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}_Z^*$ în termeni „punctuali", adică în termenii formelor liniare $x \to \Phi(x)(t)$, $t \in \Omega$, pe $\mathscr{X}$.

Fie X un spaţiu vectorial normat, S o parte a lui X, iar K o parte convexă a lui X^*. Spunem că $\varphi \in K$ este un element extremal al lui K relativ la S, dacă

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2, \ \varphi_1, \varphi_2 \in K,$$

implică

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S = \varphi|_S.$$

Dacă S este o mulţime totală în X, atunci noţiunile de element extremal al lui K şi element extremal al lui K relativ la S coincid.

5.3. Teoremă. *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach şi $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$ $\|\Phi\| \leqslant 1$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(i) Φ este un element extremal al bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}_Z^*$.

(ii) Pentru orice şir (x_n) din $\mathscr{X}$ există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ forma $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe $\mathscr{X}$ este un element extremal al mulţimii $\{\varphi \mid \varphi \in \mathscr{X}^*, \|\varphi\| \leqslant 1, \varphi|_{[t]} = 0\}$ relativ la (x_n).

Demonstraţie. Se vede uşor că (*ii*) implică pe (*i*).

Presupunem acum că Φ este un element extremal al bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}_Z^*$. Fie (x_n) un şir în $\mathscr{X}$.

Notăm prin $\mathscr{X}_1^*$ bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}^*$, dotată cu $\mathscr{X}$-topologia. Pentru orice întregi $n, k \geqslant 1$ definim

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ (t, \varphi_1, \varphi_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{X}_1^*, \ \varphi_1|_{[t]} = \varphi_2|_{[t]} = 0, \ |\varphi_1(x_n) - \varphi_2(x_n)| \geqslant \dfrac{1}{k} \\ \Phi(x)(t) = \dfrac{1}{2}\varphi_1(x) + \dfrac{1}{2}\varphi_2(x) \text{ pentru orice } x \in \mathscr{X} \end{array} \right\}$$

$\Gamma_{n,k}$ este o parte închisă, deci compactă, a lui $\Omega \times \mathscr{X}_1^* \times \mathscr{X}_1^*$. Dacă proiecţia lui $\Gamma_{n,k}$ pe Ω ar avea interior nevid, aplicînd principiul selecţiei continue, am putea construi $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi_1\| \leqslant 1$, $\|\Phi_2\| \leqslant 1$, $\Phi_1(x_n) \neq \Phi_2(x_n)$, astfel încît

$$\Phi = \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_2,$$

în contradicţie cu ipoteza noastră asupra lui Φ.

Astfel complementara $D_{n,k}$ a proiecţiei lui $\Gamma_{n,k}$ pe Ω este o parte deschisă densă a lui Ω. Conform principiului şirului de partiţii ale unităţii, $\bigcap_{n,k} D_{n,k}$ conţine o parte deschisă densă D a lui Ω. Evident, D satisface condiţiile din afirmaţia (*ii*).

q.e.d.

5.4. COROLAR. *Fie Z o W^*-algebră comutativă, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$ un Z-modul Banach, generat ca Z-modul Banach de un şir de elemente şi $\Phi \in \mathscr{X}_Z^*$, $\|\Phi\| \leqslant 1$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(*i*) Φ *este un element extremal al bulei unitate închise a lui* $\mathscr{X}_Z^*$.

(*ii*) *Există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ forma $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe $\mathscr{X}$ este un element extremal al mulţimii*

$$\{\varphi \mid \varphi \in \mathscr{X}^*, \|\varphi\| \leqslant 1, \varphi|_{[t]} = 0\}.$$

Fie A o C^*-algebră cu unitate. Numim stare pe A orice formă pozitivă φ pe A cu $\varphi(1) = 1$. O formă φ pe A este stare dacă şi numai dacă $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$. Un element extremal al mulţimii tuturor stărilor pe A se numeşte stare pură. O stare φ pe A este pură dacă şi numai dacă, oricare ar fi forma pozitivă $\Psi \leqslant \varphi$ pe A, există un scalar pozitiv λ pentru care $\Psi = \lambda\varphi$.

Fie acum Z o C^*-subalgebră a centrului lui A, conţinînd unitatea. Numim Z-stare pe A orice Z-formă pozitivă Φ pe A cu $\Phi(1) = 1$.

5.5. LEMĂ. *O Z-formă Φ pe A este Z-stare, dacă şi numai dacă* $\|\Phi\| \leqslant 1$ *şi* $\Phi(1) = 1$.

Demonstraţie. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi Φ o Z-formă pe A.

Dacă Φ este o Z-stare, atunci pentru orice $t \in \Omega$ forma $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe A este o stare. Astfel, pentru orice $t \in \Omega$

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |\Phi(x)(t)| = 1,$$

deci

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\Phi(x)\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ t \in \Omega}} |\Phi(x)(t)| = 1.$$

Reciproc, dacă $\|\Phi\| \leqslant 1$ şi $\Phi(1) = 1$, atunci pentru orice $t \in \Omega$ norma formei $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe A este $\leqslant 1$ şi $\Phi(1)(t) = 1$. Astfel, fiecare formă $x \mapsto \Phi(x)(t)$ este o stare, de unde se deduce uşor că Φ este o Z-stare.

q.e.d.

Din lema 5.5 rezultă că mulţimea tuturor Z-stărilor pe A este o parte extremală a bulei unitate închise a lui A_Z^*. Un element extremal al mulţimii tuturor Z-stărilor pe A se numeşte Z-stare pură.

5.6. LEMĂ. *O Z-stare Φ pe A este pură dacă şi numai dacă, oricare ar fi Z-forma pozitivă $\Psi \leqslant \Phi$ pe A, există un element pozitiv $z \in Z$ pentru care $\Psi = z\Phi$.*

Demonstrație. Fie Φ o Z-stare pură pe A și $\Psi \in A_Z^*$, $0 \leqslant \Psi \leqslant \Phi$. Considerăm Z-forma

$$\Theta = \frac{1}{2}\Psi + \frac{1}{4}\Phi.$$

Atunci

$$0 \leqslant \Theta \leqslant \Phi,$$

$$\frac{1}{4} \leqslant \Theta(1) \leqslant \frac{3}{4},$$

deci, punînd

$$\Phi_1 = \frac{1}{\Theta(1)}\Theta, \ \Phi_2 = \frac{1}{1-\Theta(1)}(\Phi - \Theta),$$

Φ_1 și Φ_2 sînt Z-stări bine definite pe A. Evident,

$$\Phi = \Theta(1)\Phi_1 + (1 - \Theta(1))\Phi_2.$$

Φ fiind, după teorema 5.2, un element Z-extremal al mulțimii tuturor Z-stărilor, deducem

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi.$$

Astfel

$$\Theta = \Theta(1)\Phi,$$

$$\frac{1}{2}\Psi + \frac{1}{4}\Phi = \left(\frac{1}{2}\Psi(1) + \frac{1}{4}\right)\Phi,$$

$$\Psi = \Psi(1)\Phi.$$

Reciproc, presupunem că pentru orice Z-formă pozitivă $\Psi \leqslant \Phi$ pe A există un element pozitiv $z \in Z$ cu $\Psi = z\Phi$. Fie Φ_1 și Φ_2 Z-stări pe A astfel încît

$$\Phi = \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_2.$$

Cum $\frac{1}{2}\Phi_1 \leqslant \Phi$, există un element pozitiv $z_1 \in Z$ pentru care

$$\frac{1}{2}\Phi_1 = z_1\Phi.$$

Atunci

$$z_1 = z_1\Phi(1) = \frac{1}{2}\Phi_1(1) = \frac{1}{2},$$

deci

$$\Phi_1 = \Phi.$$

Astfel Φ este o Z-stare pură.

q.e.d.

În continuare ne ocupăm de caracterizarea „punctuală" a Z-stărilor pure pe cîteva tipuri particulare de C^*-algebre.

Considerăm întîi cazul unei C^*-algebre comutative. Remarcăm că o stare pe o C^*-algebră comutativă este pură dacă şi numai dacă este multiplicativă.

5.7. COROLAR. *Fie A o C^*-algebră comutativă cu unitate, Z o C^*-subalgebră a lui A, conţinînd unitatea, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi Φ o Z-stare pe A. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) Φ este o Z-stare pură.

(ii) Φ este multiplicativă.

(iii) Pentru orice $t \in \Omega$, forma $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe A este o stare pură.

Demonstraţie. Presupunem că Φ este o Z-stare pură. Fie $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Prin formula

$$\Psi(x) = \Phi(ax)$$

se defineşte o Z-formă pozitivă $\Psi \leqslant \Phi$ pe A. Conform lemei 5.6, pentru orice $x \in A$

$$\Psi(x) = \Psi(1)\,\Phi(x),$$

adică

$$\Phi(ax) = \Phi(a)\,\Phi(x).$$

Astfel Φ este multiplicativă.

Implicaţiile $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ sînt imediate.

q.e.d.

Remarca dinaintea corolarului 5.7 se extinde la cazul general în felul următor : o stare pe o C^*-algebră este pură dacă şi numai dacă $*$-reprezentarea asociată este ireductibilă. Pentru a obţine o extensie a corolarului 5.7 la cazul necomutativ, căutăm să asociem Z-stărilor $*$-reprezentări, recurgînd la teoria aplicaţiilor complet pozitive, folosită şi în cap. I, § 3.

5.8. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră, Z o C^*-algebră comutativă şi $\Phi : A \to Z$ o aplicaţie liniară pozitivă. Atunci aplicaţia $\Phi_n : A_n \to Z_n$ este pozitivă pentru orice întreg $n \geqslant 1$.*

Demonstraţie. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Pentru orice $t \in \Omega$ definim $*$-reprezentarea $\pi_{t,n}$ a lui Z_n în spaţiul Hilbert n-dimensional C^n prin formula

$$\pi_{t,n}((z_{ij})) = (z_{ij}(t)).$$

Notăm

$$\Psi_{t,n} = \pi_{t,n} \circ \Phi_n .$$

Cum $\bigoplus_{t \in \Omega} \pi_{t,n}$ este o $*$-reprezentare injectivă a lui Z_n, pentru a arăta pozitivitatea lui Φ_n, este suficient să arătăm pozitivitatea lui $\Psi_{t,n}$ pentru orice $t \in \Omega$.

Fie $t \in \Omega$ şi $(a_{ij}) \in A_n$ o matrice pozitivă. Atunci există $(b_{ij}) \in A_n$ cu $(a_{ij}) = (b_{ij})^* (b_{ij})$, adică $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pentru orice $(\lambda_i) \in \mathbf{C}^n$ avem

$$(\Psi_{t,n}((a_{ij}))(\lambda_i) \mid (\lambda_i)) = (\pi_{t,n}((\Phi(a_{ij})))(\lambda_i) \mid (\lambda_i)) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Phi(a_{ij})(t)\lambda_j \overline{\lambda}_i =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \Phi(b_{ki}^* b_{kj})(t)\lambda_j \overline{\lambda}_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ki}\right)^* \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{kj}\right)(t) \geqslant$$
$$\geqslant 0.$$

Astfel matricea $(\Psi_{t,n}((a_{ij})))$ este pozitivă.

q.e.d.

Din lema 5.8 şi din lema I 1.3.9 rezultă imediat:

5.9. Corolar. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, H un spaţiu Hilbert şi $\Phi : A \to B(H)$ o aplicaţie liniară pozitivă, astfel încît elementele lui ΦA comută între ele. Atunci Φ este o aplicaţie complet pozitivă.*

Afirmaţia următoare este bine cunoscută:

5.10. Lemă. *Fie Z o W^*-algebră comutativă. Atunci există un spaţiu Hilbert* H *şi o $*$-reprezentare injectivă w-continuă $\pi : Z \to B(H)$, astfel încît πZ este o subalgebră comutativă maximală a lui $B(H)$, adică $(\pi Z)' = \pi Z$.*

Demonstraţie. Fie (φ_ι) o familie maximală de stări normale cu suporturi mutual ortogonale pe Z. Notăm prin π_ι $*$-reprezentarea asociată lui φ_ι. Se verifică uşor că $*$-reprezentarea $\pi = \bigoplus_\iota \pi_\iota$ verifică condiţiile din enunţ.

q e.d.

Fie A o C^*-algebră cu unitate, Z o W^*-algebră comutativă, $\Phi : A \to Z$ o aplicaţie liniară pozitivă, H_1, H_2 spaţii Hilbert, $\pi_1 : Z \to B(H)$, $\pi_2 ; Z \to B(H_2)$ $*$-reprezentări injective w-continue, astfel încît $(\pi_1 Z)' = \pi_1 Z$, $(\pi_2 Z)' = \pi_2 Z$ şi $\Phi_1 = \pi_1 \Phi$, $\Phi_2 = \pi_2 \Phi$. După corolarul 5.9, Φ_1 şi Φ_2 sînt aplicaţii complet pozitive, deci, conform lemei 1.3.6, li se asociază $*$-reprezentări π_{Φ_1} respectiv π_{Φ_2} ale lui A.

5.11. Lemă. *$*$-reprezentările π_{Φ_1} şi π_{Φ_2} sînt unitar echivalente.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că există un operator unitar $U : H_1 \to H_2$, astfel încît

$$U \pi_1(z) U^* = \pi_2(z), z \in Z$$

Fie $H = H_1 \oplus H_2$ şi $M = \{\pi_1(z) \oplus \pi_2(z) \mid z \in Z\}$. M este o algebră von Neumann comutativă în H, deci centrul lui M' este M. Definim izometriile $U_1 : H_1 \to H$ şi $U_2 : H_2 \to H$ prin

$$U_1(\xi_1) = \xi_1 \oplus 0, \quad U_2(\xi_2) = 0 \oplus \xi_2 .$$

Se vede uşor că $U_1 U_1^*$ şi $U_2 U_2^*$ sînt proiectori abelieni cu suport central 1 în M', deci sînt echivalente în M'. Astfel există o izometrie parţială $V \in M'$ cu

$$V^* V = U_1 U_1^*, \quad V V^* = U_2 U_2^* .$$

Notînd $U = U_2^* V U_1 : H_1 \to H_2$, U este un operator unitar şi pentru orice $z \in Z$

$$\begin{aligned} U\pi_1(z)U^* &= U_2^* V U_1 \pi_1(z) U_1^* V^* U = \\ &= U_2^* V(\pi_1(z) \oplus 0) V^* U_2 = \\ &= U_2^* V(\pi_1(z) \oplus \pi_2(z)) V^* U_2 = \\ &= U_2^*(\pi_1(z) \oplus \pi_2(z)) V V^* U_2 = \\ &= U_2^*(\pi_1(z) \oplus \pi_2(z)) U_2 = \\ &= \pi_2(z). \end{aligned}$$

q.e.d.

Conform lemelor 5.10 şi 5.11, la orice aplicaţie liniară pozitivă $\Phi : A \to Z$ i se poate asocia o clasă de echivalenţă unitară de $*$-reprezentări ale lui A. Orice $*$-reprezentare din această clasă o vom numi $*$-reprezentare asociată lui Φ.

Analizăm acum reducerea din §4 în cazul unei W^*-algebre de tip I, considerată modul peste centrul său.

Fie M o W^*-algebră de tip I, Z centrul său şi $e \in M$ un proiector abelian cu suport central 1. Atunci $eMe = Zz$ şi aplicaţia $\pi_e : Z \to Ze$, definită prin

$$\pi_e(z) = ze,$$

este un $*$-izomorfism. Notăm

$$\Phi_e(x) \pi_e^{-1}(exe), \; x \in M .$$

Atunci Φ_e este o Z-stare w-continuă. Fie $\mathscr{F}_e$ subspaţiul vectorial normic închis al lui M_*^Z generat de Z-formele

$$x \mapsto \Phi_e(axb), \; a, \; b \in M.$$

5.12. LEMĂ. *$\mathscr{F}_e$ este un Z-submodul normic închis, invariant la translaţii şi de tip predual al lui M_Z^*.*

Demonstraţie. Evident, $\mathscr{F}_e$ este un Z-submodul normic închis şi ~~invariant la translaţii al lui M_Z^*.~~

Deoarece $\mathscr{F}_e$ este invariant la translații și $\mathscr{F}_e \subset M_*^z$, mulțimea

$$\operatorname{Ker} \mathscr{F}_e = \{x \mid x \in M, \ \Phi(x) = 0 \text{ pentru orice } \Phi \in \mathscr{F}_e\}$$

este un ideal bilateral w-închis al lui M. Astfel există un proiector central p cu

$$\operatorname{Ker} \mathscr{F}_e = Mp.$$

Cum $p = \Phi_e(p) = 0$, $\operatorname{Ker} \mathscr{F}_e$ se reduce la elementul nul, deci $\mathscr{F}_e$ separă elementele lui M.

În sfîrșit, bula unitate închisă a lui M fiind w-compactă, ea este compactă în imaginea inversă prin $\mathscr{F}_e$ a w-topologiei pe Z.

Fie Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z. Cum $\mathscr{F}_e$ este invariant la translații, $[t]^{\mathscr{F}_e}$ sînt ideale bilaterale normic închise ale lui M, $M_t^{\mathscr{F}_e}$ sînt C^*-algebre cît, $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_e}$ sînt W^*-algebre, iar scufundarea canonică a lui $M_t^{\mathscr{F}_e}$ în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_e}$ este un $*$-homomorfism injectiv.

5.13. LEMĂ. *Pentru orice $t \in \Omega$, $[t]^{\mathscr{F}_e} = [t]$, $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_e}$ este un factor de tip I, iar $e_t^{\mathscr{F}_e}$ este un proiector minimal în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_e}$.*

Demonstrație. Evident, $[t]^{\mathscr{F}_e} \supset [t]$.

Presupunem că există un element x în $[t]^{\mathscr{F}_e}$, care nu aparține lui $[t]$. Atunci aceeași afirmație este adevărată pentru $|x|$, deci există un proiector spectral f al lui $|x|$, astfel încît

$$f \in [t]^{\mathscr{F}_e},$$

$$f \notin [t].$$

Fie $z(f)$ suportul central al lui f. Atunci $z(f)\, e \prec f$, deci există o izometrie parțială $v \in M$ cu

$$v^*v = z(f)\, e,$$

$$vv^* \leqslant f.$$

Astfel

$$z(f)e = v^*fv \in [t]^{\mathscr{F}_e},$$

de unde

$$z(f)(t) = \Phi_e(z(f)e)(t) = 0,$$

$$f_t = (z(f)f)_t = z(f)(t) f_t = 0,$$

în contradicție cu condiția $f \notin [t]$.

În concluzie, $[t]^{\mathscr{F}_e} = [t]$.

Mai departe, e fiind abelian,

$$eMe = Ze,$$

deci

$$e_t^{\mathcal{F}_e} M_t^{\mathcal{F}_e} e_t^{\mathcal{F}_e} = \mathbf{C}\, e_t^{\mathcal{F}_e},$$

$$e_t^{\mathcal{F}_e} \widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e} e_t^{\mathcal{F}_e} = \mathbf{C}\, e_t^{\mathcal{F}_e}.$$

Astfel $e_t^{\mathcal{F}_e}$ este un proiector minimal în $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$.

În sfîrşit, deoarece suportul central al lui $e_t^{\mathcal{F}_e}$ în $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$ este 1, $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$ este un factor de tip I.

q.e.d.

Dacă A este un Z-submodul al lui M, pentru a evita confuzii, notăm prin $[t]_A$ închiderea normică în A a mulţimii

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i\, a_i \,|\, z_i \in t,\ a_i \in A \right\},$$

iar prin $[t]_M$ închiderea normică în M a mulţimii

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \,\middle|\, z_i \in t,\quad x_i \in M \right\}.$$

Folosind lema 3.4, se vede uşor că $[t]_A = [t]_M \cap A$.

5.14. LEMĂ. *Fie A o C^*-subalgebră w-densă a lui M, care conţine pe Z şi care, considerat ca Z-modul, are proprietatea lipirii. Atunci, pentru orice $t \in \Omega$, starea $a \mapsto \Phi_e(a)(t)$ pe A este pură şi nucleul $*$-reprezentării asociate este $[t]_A$.*

Demonstraţie. Fie $t \in \Omega$. Conform lemei 5.13, starea $\widetilde{x}_t^{\mathcal{F}_e} \mapsto (\Phi_e)_t^{\mathcal{F}_e}(\widetilde{x}_t^{\mathcal{F}_e})$ pe $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$ este pură. Astfel această stare defineşte o $*$-reprezentare ireductibilă w-continuă injectivă $\widetilde{\pi}_t$ a lui $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$ într-un spaţiu Hilbert H_t. Fie ξ_t un vector în H pentru care

$$(\Phi_e)_t^{\mathcal{F}_e}(\widetilde{x}_t^{\mathcal{F}_e}) = (\widetilde{\pi}_t(\widetilde{x}_t^{\mathcal{F}_e})\, \xi_t \,|\, \xi_t), \quad \widetilde{x}_t^{\mathcal{F}_e} \in \widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}.$$

Conform teoremei de densitate a lui Kaplansky, bula unitate închisă a lui A este w-densă în bula unitate închisă a lui M. Aplicînd teorema 4.16, imaginea $A_t^{\mathcal{F}_e}$ a lui A în $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$ este w-densă în $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}_e}$. Astfel restricţia lui $\widetilde{\pi}_t$ la $A_t^{\mathcal{F}_e}$ este o $*$-reprezentare ireductibilă injectivă a lui $A_t^{\mathcal{F}_e}$.

Definim $*$-reprezentarea π_t a lui A în H_t prin formula

$$\pi_t(a) = \widetilde{\pi}(a_t^{\mathcal{F}_e}).$$

Atunci π_t este ireductibilă, nucleul său este $[t]^{\mathcal{F}_e} \cap A = [t]_M \cap A = [t]_A$ şi

$$\Phi_e(a)(t) = (\pi_t(a)\, \xi_t \,|\, \xi_t), \quad a \in A.$$

Astfel starea $a \mapsto \Phi_e(a)\ (t)$ pe A este pură şi nucleul $*$-reprezentării asociate este $[t]_A$.

q.e.d.

Mai avem nevoie de un rezultat general:

5.15. LEMĂ. *Fie Z o C^*-algebră comutativă cu unitate, Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{X}$* și *$\mathscr{Y}$ Z-module Banach, iar $\pi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ o aplicație Z-liniară mărginită surjectivă. Atunci pentru orice $t \in \Omega$, π^{-1} $[t]_{\mathscr{Y}}$ este închiderea mulțimii $[t]_{\mathscr{X}} + \mathrm{Ker}\ \pi$.*

Demonstrație. Evident, $\pi^{-1}[t]_{\mathscr{Y}}$ include închiderea mulțimii $[t]_{\mathscr{X}} + \mathrm{Ker}\ \pi$.

Conform teoremei aplicației deschise, imaginea prin π a bulei unitate închise a lui $\mathscr{X}$ conține o bulă închisă cu centrul în 0 și de rază $\alpha > 0$.

Fie $x \in \pi^{-1}[t]_{\mathscr{Y}}$ și $\varepsilon > 0$. Cum $\pi(x) \in [t]_{\mathscr{Y}}$, există $z_1, \ldots, z_n \in t$ și $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{Y}$ cu

$$\left\| \pi(x) - \sum_{i=1}^{n} z_i y_i \right\| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

Dacă V este o vecinătate a lui t pe care $|z_i| \leqslant \dfrac{\alpha\varepsilon}{2n \|y_i\|}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, iar z este un element al lui Z; $0 \leqslant z \leqslant I$, care ia valoarea 1 în t și se anulează în afara lui V, atunci

$$\begin{aligned} \|\pi(zx)\| &= \|z\pi(x)\| \leqslant \\ &\leqslant \left\| z\pi(x) - z\sum_{i=1}^{n} z_i y_i \right\| + \left\| z \sum_{i=1}^{n} z_i y_i \right\| \leqslant \\ &\leqslant \left\| \pi(x) - \sum_{i=1}^{n} z_i y_i \right\| + \sum_{i=1}^{n} \|z z_i\| \, \|y_i\| \leqslant \\ &\leqslant \alpha\varepsilon \end{aligned}$$

Astfel $\left\| \dfrac{1}{\varepsilon} \pi(zx) \right\| \leqslant \alpha$, deci există x_0 în bula unitate închisă a lui $\mathscr{X}$ pentru care $\dfrac{1}{\varepsilon}\pi(zx) = \pi(x_0)$. În concluzie, avem

$$(1 - z)\,\mathscr{X} \in [t]_{\mathscr{X}},$$

$$zx - \varepsilon\, x_0 \in \mathrm{Ker}\,\pi,$$

$$\| x - ((1 - z)x + zx - \varepsilon x_0)\| = \| \varepsilon x_0\| \leqslant \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ fiind oarecare, deducem că x aparține închiderii mulțimii $[t]_{\mathscr{X}} + \mathrm{Ker}\ \pi$.

q.e.d.

Demonstrăm acum următoarea versiune necomutativă a corolarului 5.7:

5.16. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, Z o C^*-subalgebră a centrului lui A, conținînd unitatea, și Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z. Presupunem că Z este o W^*-algebră, iar A, considerat ca Z-modul,* *are proprietatea lipirii. Atunci pentru orice Z-stare Φ pe A următoarele afirmații sînt echivalente :*

(*i*) *Φ este o Z-stare pură.*

(*ii*) *Pentru orice $*$-reprezentare π_Φ asociată lui Φ avem $(\pi_\Phi A)' = \pi_\Phi Z$.*

(*iii*) *Pentru orice $t \in \Omega$ forma $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe A este o stare pură. În plus, dacă afirmațiile de mai sus sînt adevărate, atunci pentru orice $t \in \Omega$ nucleul $*$-reprezentării ireductibile asociată formei $x \mapsto \Phi(x)(t)$ este închiderea mulțimii $[t] + \mathrm{Ker}\, \pi_\Phi$.*

Demonstrație. Fie Φ o Z-stare pe A, $\pi: Z \to B(H)$ o $*$-reprezentare injectivă w-continuă cu $(\pi Z)' = \pi Z$, $\Psi = \pi\Phi$, iar $\pi_\Psi : A - B(K)$ $*$-reprezentarea asociată lui Ψ conform lemei I.3 6. Atunci există un operator liniar mărginit $V : H \to K$ astfel încît

$$\Psi(x) = V^* \pi_\Psi(x) V, \quad x \in A,$$

și K este generat de $\pi(A)VH$. Cum Ψ (1) = id, V este o izometrie, deci VV^* este un proiector. Multiplicativitatea lui Ψ pe Z implică că VV^* comută cu $\pi_\Psi Z$.

Presupunem că Φ este o Z-stare pură. Evident, $(\pi_\Psi A)' \supset \pi_\Psi Z$.

Fie $T_0 \in (\pi_\Psi A)'$, $0 \leqslant T_0 \leqslant \mathrm{id}_K$. Pentru orice $x \in A$ și orice $z \in Z$

$$\begin{aligned}\pi(z)V^*T_0\pi_\Psi(x)V &= \Psi(z)V^*T_0\pi_\Psi(x)V = \\ &= V^*\pi_\Psi(z)VV^*T_0T_\Psi(x)V = \\ &= V^*VV^*\pi_\Psi(z)T_0\pi_\Psi(x)V = \\ &= V^*T_0\pi_\Psi(x)\pi_\Psi(z)VV^*V = \\ &= V^*T_0\pi_\Psi(x)VV^*\pi_\Psi(z)V = \\ &= V^*T_0\pi_\Psi(x)V\pi(z).\end{aligned}$$

Astfel, pentru orice $x \in A$

$$V^*T_0\pi_\Psi(x)V \in (\pi Z)' = \pi Z.$$

Punem

$$\Theta(x) = \pi^{-1}(V^*T_0\pi_\Psi(x)V).$$

Se verifică ușor că Θ este o Z- formă pozitivă pe A și $\Theta \leqslant \Phi$. Conform lemei 5.6, există $z_0 \in Z$ cu

$$\Theta = z_0\Phi.$$

Prin urmare, pentru orice $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}V^*\pi_\Psi(y)^*T_0\pi_\Psi(x)V &= V^*T_0\pi_\Psi(y^*x)V = \\ &= \pi\Theta(y^*x) = \\ &= \pi(z_0)\pi(\Phi(y^*x)) = \\ &= \Psi(z_0)\Psi(y^*x) = \\ &= V^*\pi_\Psi(z_0)VV^*\pi_\Psi(y^*x)V = \\ &= V^*VV^*\pi_\Psi(z_0)\pi_\Psi(y^*x)V = \\ &= V^*\pi_\Psi(y)^*\pi_\Psi(z_0)\pi_\Psi(x)V,\end{aligned}$$

adică

$$V^*\pi_\Psi(y)^*(T_0 - \pi_\Psi(z_0))\pi_\Psi(x)V = 0.$$

Rezultă că, pentru orice $x, y \in A$ şi orice $\xi, \eta \in H$,

$$((T_0 - \pi_\Psi(z_0))\pi_\Psi(x)V\xi | \pi_\Psi(y)V\eta) = 0,$$

şi cum K este generat de $\pi_\Psi(A)\ VH$, deducem

$$T_0 = \pi_\Psi(z_0).$$

În concluzie, $(\pi_\Psi A)' = \pi_\Psi Z$.

Presupunem acum că relaţia de mai sus este adevărată. Atunci $\pi_\Psi Z$ este o algebră von Neumann şi comutantul său este închiderea M a lui $\pi_\Psi A$ în topologia operatorială slabă. În particular, $E = VV^* \in M$. Pentru orice $x \in A$

$$\begin{aligned} E\pi_\Psi(x)E &= VV^*\pi_\Psi(x)VV^* = \\ &= V\Psi(x)V^* = \\ &= V\pi(\Phi x))V^* = \\ &= V\Psi(\Phi x))V = \\ &= VV^*\pi_\Psi(\Phi(x))VV^* = \\ &= \pi_\Psi(\Phi(x))\,E. \end{aligned}$$

Astfel $EME = \pi_\Psi(Z)E$, deci E este un proiector abelian al lui M.

Fie P un proiector central al lui M pentru care

$$PE = 0.$$

Atunci

$$PVV^*P = 0,$$

$$PV = 0.$$

Pentru orice $x \in A$ şi orice $\xi \in H$

$$P\pi_\Psi(x)V\xi = \pi_\Psi(x)PV\xi = 0,$$

şi cum K este generat de $\pi_\Psi(A)\ VH$, deducem

$$P = 0.$$

Astfel suportul central al lui E este id_K.

Considerăm pe M π_Ψ Z-starea Φ_E definită prin egalitatea

$$\Phi_E(t)E = ETE.$$

După cele de mai sus, pentru orice $x \in A$

$$\Phi_E(\pi_\Psi(x)) = \pi_\Psi(\Phi(x)).$$

Cum $\pi_\Psi A$ este o C^*-subalgebră w-densă a lui M, conţine centrul $\pi_\Psi Z$ al lui M şi, considerat ca π_Ψ Z-modul, are proprietatea lipirii, conform lemei 5.14, pentru orice $t \in \Omega$ starea $\pi_\Psi(x) \mapsto \Phi_E(\pi_\Psi(x))\ (\pi_\Psi t) = \Phi(x)(t)$ pe $\pi_\Psi A$ este pură şi nucleul $*$-reprezentării asociate este $[\pi_\Psi t]_{\Pi_\Psi A}$. Astfel pentru orice $t \in \Omega$ starea $x \mapsto \Phi(x)(t)$ pe A este pură şi, folosind lema 5.15, nucleul $*$-reprezentării asociate este închiderea mulţimii $[t]_A + \operatorname{Ker} \pi_\Psi$.

În sfîrşit, afirmaţia (*iii*) implică evident pe (*i*).

q.e.d.

Corolarul următor ilustrează puterea proprietăţii lipirii.

5.17. Corolar. *Fie A o C^*-algebră cu unitate, Z o C^*-subalgebră a centrului lui A, conţinînd unitatea, şi Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Presupunem că Z este o W^*-algebră, iar A, considerat ca Z-modul, are proprietatea lipirii. Fie, mai departe, $(\varphi_t)_{t\in\Omega}$ o familie de forme pozitive pe A, astfel încît*

1) *pentru orice $t \in \Omega$ $\varphi_t|_{[t]} = 0$;*

2) *pentru orice $x \in A$ aplicaţia $t \mapsto \varphi_t(x)$ este continuă. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(*i*) *Există o parte densă D a lui Ω, astfel încît pentru $t \in D$, φ_t este o stare pură.*

(*ii*) *Pentru orice $t \in \varphi_t$ este o stare pură.*

În legătură cu cele precedente remarcăm că are loc următoarea extensie a teoremei de tranzitivitate a lui Kadison la cazul global:

5.18. Teoremă (de tranzitivitate). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, A o C^*- subalgebră w-densă a lui M, care este modul peste Z şi care, considerat ca Z-modul, are proprietatea lipirii, şi $\tilde{A}$ C^*-algebra generată de A şi de unitatea lui M.*

(*i*) *Dacă $x \in M$, e este o sumă finită de proiectori abelieni mutual ortogonali din M şi $\delta > 0$, atunci există $a \in A$ cu*

$$\|a\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$ae = xe, \quad ea = ex.$$

(*ii*) *Dacă $x \in M$ este autoadjunct, iar e şi δ sînt ca în (i), atunci există $a \in A$ autoadjunct cu*

$$\|a\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$ae = xe.$$

(*iii*) *Dacă $u \in M$ este unitar, iar e este ca în (i), atunci există $v \in \tilde{A}$ unitar cu*

$$ve = ue, \quad ev = eu.$$

Demonstraţie. Fie $x \in M$, e o sumă finită de proiectori abelieni mutual ortogonali din M şi $\delta > 0$. Considerăm o familie maximală (p_ι)

de proiectori centrali mutual ortogonali, astfel încît pentru orice ι există $a_\iota \in A$ cu

$$\|a_\iota\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$a_\iota p_\iota e = x p_\iota e, \quad p_\iota e a_\iota = p_\iota e x.$$

Presupunînd că $1 - \sum_\iota p_\iota \neq 0$ și urmînd un raționament analog cu cel din demonstrația corolarului I.2.3, există un proiector central nenul $p_0 \leqslant 1 - \sum_\iota p_\iota$ și un element $a_0 \in A$ pentru care

$$\|a_0\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$a_0 p_0 e = x p_0 e, \quad p_0 e a_0 = p_0 e x,$$

în contradicție cu maximalitatea familiei (p_ι). Astfel $\sum_\iota p_\iota = 1$. Cum A are proprietatea lipirii,

$$a = \sum_\iota a_\iota p_\iota \in A.$$

Evident,

$$\|a\| \leqslant (1+\delta)\|x\|,$$

$$ae = xe, \quad ea = ex.$$

Punctul (*ii*) rezultă din (*i*), iar punctul (*iii*) se demonstrează asemănător cu (*i*).

q.e.d.

Remarcăm că teorema 3.5, teorema Krein-Milman și colorarul 5.7 implică principiul selecției continue în cazul spațiilor hiperstoniene. Cum teorema 3.5 poate fi demonstrată fără a recurge la principiul selecției continue (vezi [49] și [32]), această cale poate fi folosită pentru demonstrația principiului selecției continue în cazul spațiilor hiperstoniene.

Remarcăm de asemenea că, dacă A este o AW^*-algebră al cărui centru Z este o W^*-algebră, atunci, conform lemei 4.15., A și Z satisfac condițiile teoremei 5.16. Kaplansky a conjecturat că asemenea AW^*-algebre sînt W^*-algebre, dar Dyer a dat în [10] un contraexemplu. Este interesant de văzut dacă teorema 5.16 rămîne valabilă presupunînd pe Z doar AW^*-algebră.

Acest paragraf extinde unele rezultate ale lui H. Halpern din [16] și [17]. Lema 5.6 și teorema 5.16 au fost demonstrate de Halpren în cazul cînd A este o W^*-algebră, iar Z centrul său. De asemenea, în [17] apare o formă mai slabă a teoremei 5.18. Lema 5.8 a fost demonstrată în [2], lemele 5.10 și 5.11 au fost cunoscute încă de von Neumann, iar lemele 5.12, 5.13, 5.14, care particularizează rezultate din [47] și [48] se găsesc în esență în [12]. Teoremele 5.2, 5.3 și lema 5.15 apar aici pentru prima dată.

DESCOMPUNERI TOPOLOGICE ALE W^*-ALGEBRELOR. II[1]

DE

LÁSZLÓ ZSIDÓ

III. TEORIA C^*-REDUCERII

Scopul acestui capitol este de a analiza descompunerea din capitolul II, § 3, în cazul unor C^*-algebre cu o geometrie a proiectorilor suficient de bogată. În primul paragraf expunem cîteva teoreme de bază din geometria proiectorilor unei AW^*-algebre. În paragraful următor considerăm nişte axiome pentru C^*-algebre, satisfăcute de AW^*-algebrele, care în diferite combinaţii se păstrează prin treceri la cîturi. Ne îndreptăm atenţia în special spre structura de ideale bilaterale închise ale C^*-algebrelor, satisfăcînd axiomele noastre. În al treilea paragraf dezvoltăm descompunerea din capitolul II, § 3, în cazul acestor C^*-algebre, iar în ultimul paragraf dăm cîteva aplicaţii.

§ 1. GEOMETRIA PROIECTORILOR UNEI AW*-ALGEBRE

Fie M o C^*-algebră, iar e şi f proiectori în M. Reamintim că e şi f se numesc echivalenţi şi se notează $e \sim f$, dacă există o izometrie parţială $u \in M$ cu

$$u^*u = e,$$

$$uu^* = f.$$

Dacă e este echivalent cu un subproiector al lui f, se notează $e \prec f$ sau $f \succ e$.

Pentru AW^*-algebre avem demonstrate lemele II.3.8, II.3.9, II. 3.10, teorema II. 3.12 şi lema II.4.15. Astfel, într-o AW^*-algebră avem mulţi proiectori, iar mulţimea tuturor proiectorilor ai unei AW^*-algebre formează o latice completă. În acest paragraf studiem legăturile operaţiilor laticiale ale acestei latici cu echivalenţa.

[1] Partea I a lucrării a apărut în nr. 6/1973.

ST. CERC. MAT., TOM. 25, NR. 7, P. 1037–1112, BUCUREŞTI, 1973

1.1. LEMĂ. *Fie L o latice completă și $\Phi : L \to L$ o aplicație crescătoare. Atunci Φ are un punct fix.*

Demonstrație. Fie

$$L_0 = \{l \mid l \in L,\ l \leqslant \Phi(l)\},$$

iar l_0 supremul lui L_0.

Pentru orice $l \in L_0$ avem

$$l \leqslant l_0,$$

deci

$$\Phi(l) \leqslant \Phi(l_0).$$

Cum $l \leqslant \Phi(l)$, deducem

$$l \leqslant \Phi\,(l_0).$$

$l \in L_0$ fiind oarecare, avem

$$l_0 \leqslant \Phi(l_0).$$

Pe de altă parte, inegalitatea de mai sus implică

$$\Phi(l_0) \leqslant \Phi(\Phi(l_0)),$$

deci $\Phi(l_0) \in L_0$. Astfel

$$\Phi(l_0) \leqslant l_0.$$

În concluzie, $\Phi(l_0) = l_0$.

q. e. d.

1.2. TEOREMĂ. *Fie M o AW^*-algebră, iar e și f proiectori în M, astfel încît*

$$e \prec f,$$

$$e \succ f.$$

Atunci

$$e \sim f.$$

Demonstrație. Cum $e \prec f$, există o izometrie parțială $u \in M$ cu

$$u^*u = e,$$

$$uu^* \leqslant f,$$

şi cum $e \succ f$, există o izometrie parţială $v \in M$ cu

$$v^*v = f,$$

$$vv^* \leqslant e.$$

Conform lemei II.3.8.,

$$L = \{l \mid l \in M \text{ proiector, } l \leqslant e\}$$

este o latice completă. Definim aplicaţia $\Phi : L \to L$ prin formula

$$\Phi(l) = e - v(f - ulu^*)v^*.$$

Cum Φ este crescătoare, conform lemei 1.1. are un punct fix l_0.

Astfel

$$e - v(f - ul_0u^*)\, v^* = l_0,$$

$$e - l_0 = v(f - ul_0u^*)\, v^*,$$

de unde

$$l_0u^*v^*(e - l_0)\, vul_0 = l_0u^*v^*v(f - ul_0u^*)\, v^*vul_0 = 0,$$

$$(e - l_0)\, vul_0 = 0,$$

şi

$$e - l_0 = v(f - ul_0u^*)\, v^* \leqslant vv^*,$$

$$(e - l_0)\, vv^*(e - l_0) = e - l_0.$$

Notăm

$$w = ul_0 + v^*(e - l_0).$$

Folosind relaţiile de mai sus,

$$w^*w = (l_0u^* + (e - l_0)v)\,(ul_0 + v^*(e - l_0)) = l_0u^*ul_0 + $$
$$+ (e - l_0)\, vul_0 + ((e - l_0)vul_0)^* + (e - l_0)vv^*(e - l_0) = e,$$

şi

$$ww^* = (ul_0 + v^*(e - l_0))\,(l_0\, u^* + (e - l_0)\, v) = ul_0u^* + v^*(e - l_0)\, v =$$
$$= ul_0u^* + v^*v(f - ul_0u^*)\, v^*v = f.$$

Astfel $e \sim f$.

q. e. d.

Cercetăm acum proprietățile de "lipire" ale echivalenței în AW^*-algebre, proprietăți care reduc problemele privind echivalențe la probleme locale.

Fie M o AW^*-algebră și $\mathscr{P}_M$ laticea tuturor proiectorilor lui M. Notăm pentru orice familie (e_ι) de proiectori din M prin $\bigvee_\iota e_\iota$ supremul său în $\mathscr{P}_M$, iar prin $\bigwedge_\iota e_\iota$ infimul său în $\mathscr{P}_M$. Conform lemelor II. 3. 9 și II. 3. 8, dacă e_ι sînt proiectori centrali atunci la fel sînt și proiectorii $\bigvee_\iota e_\iota$, $\bigwedge_\iota e_\iota$.

1.3. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră, $(p_\iota)_{\iota\in I}$ o familie de proiectori centrali ortogonali din M și $v_\iota \in Mp_\iota$ izometrii parțiale. Atunci există o izometrie parțială $v \in M$, astfel încît pentru orice $\iota \in I$*

$$vp_\iota = v_\iota$$

și

$$v^*v = \bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota, \quad vv^* = \bigwedge_{\iota\in I} v_\iota v_\iota^*.$$

Demonstrație. Conform lemei II.4.15., există $x \in M$, astfel încît pentru orice $\iota \in I$

$$xp_\iota = v_\iota.$$

Fie $p = \bigvee_{\iota\in I} p_\iota$ și $v = xp$. Atunci pentru orice $\iota \in I$

$$vp_\iota = v_\iota$$

și

$$v(1 - p) = 0.$$

Pentru orice $\varkappa \in I$ avem

$$\Big(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\Big) p_\varkappa \geqslant v_\varkappa^* v_\varkappa.$$

Cum pentru orice $\lambda \in I$

$$v_\lambda^* v_\lambda \leqslant \bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota - \Big(\Big(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\Big) p_\varkappa - v_\varkappa^* v_\varkappa\Big),$$

deducem

$$\bigvee_{\lambda\in I} v_\lambda^* v_\lambda \leqslant \bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota - \Big(\Big(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\Big) p_\varkappa - v_\varkappa^* v_\varkappa\Big),$$

$$\Big(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\Big) p_\varkappa \leqslant v_\varkappa^* v_\varkappa.$$

Astfel

$$\Big(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\Big) p_\varkappa = v_\varkappa^* v_\varkappa.$$

Evident,

$$(\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota)(1-p) = 0.$$

În concluzie, pentru orice $\varkappa \in I$

$$\|v^*vp_\varkappa - (\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota)p_\varkappa\| = \|v_\varkappa^* v_\varkappa - v_\varkappa^* v_\varkappa\| = 0$$

şi

$$\|v^*v(1-p) - (\bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota)(1-p)\| = \|0-0\| = 0.$$

Cum $(\bigvee_{\varkappa\in I} p_\varkappa) \vee (1-p) = 1$, conform teoremei II.3.12 şi corolarului II.3.7, avem

$$\|v^*v - \bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota\| = 0,$$

$$v^*v = \bigvee_{\iota\in I} v_\iota^* v_\iota.$$

Analog se arată că

$$vv^* = \bigvee_{\iota\in I} v_\iota v_\iota^*.$$

q. e. d.

1.4. Corolar. *Fie M o AW^*-algebră, $(p_\iota)_{\iota\in I}$ o familie de proiectori centrali ortogonali din M şi $(e_\iota)_{\iota\in I}$, $(f_\iota)_{\iota\in I}$ familii de proiectori din M, astfel încît pentru orice $\iota \in I$*

$$e_\iota \leqslant p_\iota,\ f_\iota \leqslant p_\iota,\ e_\iota \sim f_\iota.$$

Atunci

$$\bigvee_{\iota\in I} e_\iota \sim \bigvee_{\iota\in I} f_\iota.$$

1.5. Lemă. *Fie M o AW^*-algebră şi $(v_\iota)_{\iota\in I}$ o familie de izometrii parţiali din M, astfel încît proiectorii $e_\iota = v_\iota^* v_\iota$, $f_\varkappa = v_\varkappa v_\varkappa^*$, $\iota, \varkappa \in I$, sînt ortogonali. Atunci există o izometrie parţială $v \in M$, astfel încît pentru orice $\iota \in I$*

$$ve_\iota = f_\iota v = v_\iota$$

şi

$$v^*v = \bigvee_{\iota\in I} e_\iota,\quad vv^* = \bigvee_{\iota\in I} f_\iota.$$

Demonstraţie. Notăm $p_\iota = e_\iota + f_\iota$. Conform lemei II.3.9,

$$N = \{p_\iota \mid \iota \in I\}'_M$$

este o AW^*-subalgebră a lui M. Evident, proiectorii p_ι aparţin centrului lui N şi $v_\iota \in Np_\iota$. Folosind lema 1.3, există o izometrie parţială $v \in N$, astfel încît pentru orice $\iota \in I$

$$vp_\iota = v_\iota,$$

deci

$$ve_\iota = f_\iota v = v_\iota,$$

şi

$$v^*v = \bigvee_{\iota \in I} v_\iota^* v_\iota = \bigvee_{\iota \in I} e_\iota, \quad vv^* = \bigvee_{\iota \in I} v_\iota v_\iota^* = \bigvee_{\iota \in I} f_\iota.$$

q. e. d.

1.6. COROLAR. *Fie M o AW^*-algebră şi $(e_\iota)_{\iota \in I}$, $(f_\iota)_{\iota \in I}$ familii de proiectori ortogonali din M, astfel încît proiectorii $\bigvee_{\iota \in I} e_\iota$, $\bigvee_{\iota \in I} f_\iota$ sînt ortogonali şi pentru orice $\iota \in I$*

$$e_\iota \sim f_\iota.$$

Atunci

$$\bigvee_{\iota \in I} e_\iota \sim \bigvee_{\iota \in I} f_\iota.$$

Remarcăm că în AW^*-algebre echivalenţa are proprietăţi de „lipire" mai puternice decît lemele 1.3 şi 1.5, însă nouă ne ajung acestea.

1.7. LEMĂ. *Fie M o C^*-algebră cu unitate şi $e, f \in M$ proiectori, astfel încît $ef - fe$ este invertibil. Atunci*

$$e \sim f \sim 1 - e \sim 1 - f,$$

$e \vee f$, $e \wedge f$ există şi

$$e \vee f = 1, \quad e \wedge f = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$(ef - fe)^2 = -ef(1-e)fe - (1-e)fef(1-e),$$

elementul $ef(1-e)fe$ este invertibil în eMe. Mai departe,

$$ef(1-e)fe \leqslant efe,$$

deci efe este invertibil în eMe. Astfel, există un element pozitiv $a \in eMe$, care comută cu efe şi pentru care $efea = e$.

Notăm

$$u = fa^{\frac{1}{2}}.$$

Atunci

$$u^*u = a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} efea^{\frac{1}{2}} = efea = e.$$

Pe de altă parte,

$$uu^*f = (faf)f = faf = uu^*,$$

$$uu^*ef = (faf)ef = f(aefe)f = fef,$$

deci

$$(uu^* - f)(ef - fe) = uu^*ef - fef - uu^*fe + fe =$$

$$= fef - fef - uu^*e + fe = fe - uu^* e,$$

$$(uu^* - f)(ef - fe)^2 = (fe - uu^* e)(ef - fe) =$$

$$= fef - uu^*ef - fefe + uu^*efe =$$

$$= fef - fef - fefe + fefe = 0.$$

Cum $(ef - fe)^2$ este invertibil, deducem

$$uu^* = f.$$

Astfel $e \sim f$.

Cum

$$f(1 - e) - (1 - e)f = ef - fe$$

şi

$$(1 - e)(1 - f) - (1 - f)(1 - e) = ef - fe,$$

aplicînd cele de mai sus, deducem

$$f \sim 1 - e \sim 1 - f.$$

Fie acum $g \in M$ un proiector cu $e < g, f < g$. Atunci

$$g(ef - fe) = ef - fe,$$

şi invertibilitatea lui $ef - fe$ implică $g = 1$. Astfel $e \vee f$ există şi este 1.

Analog se arată că $e \wedge f$ există şi este 0.

q. e. d.

1.8. Teoremă (regula paralelogramului). *Fie M o AW^*-algebră şi $e, f \in M$ proiectori. Atunci*

$$e \vee f - f \sim e - e \wedge f.$$

Demonstrație. Conform lemei II.3.9,

$$N = \{(ef - fe)^2\}'_M$$

este o AW^* - subalgebră a lui M. Evident, $(ef - fe)^2$ este un element central negativ al lui N și se verifică ușor că $e, f \in N$.

Conform lemei II.3.10, există un șir $p_1, p_2, \ldots$ de proiectori centrali ortogonali în N, astfel încît

$$(ef - fe)^2 p_1 \leqslant -\frac{1}{2} p_1,$$

$$-\frac{1}{n} p_n \leqslant (ef - fe)^2 p_n \leqslant -\frac{1}{n+1} p_n, \quad n \geqslant 2,$$

$$(ef - fe)^2 (1 - \bigvee_{n=1}^{\infty} p_n) = 0.$$

Notăm $p_0 = 1 - \bigvee_{n=1}^{\infty} p_n$.

Cum $(ef - fe)^2 p_0 = 0$, proiectorii ep_0 și fp_0 comută, deci

$$\begin{aligned}(e \vee f - f)p_0 &= (ep_0) \vee (fp_0) - fp_0 = \\ &= ep_0 + fp_0 - efp_0 - fp_0 = \\ &= ep_0 - (ep_0) \wedge (fp_0) = \\ &= (e - e \wedge f)p_0.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, pentru $n \geqslant 1$ elementul $(ef - fe)^2 p_n$ este invertibil în Np_n. Aplicînd lema 1.7,

$$\begin{aligned}(e \vee f - f)p_n &= (ep_n) \vee (fp_n) - fp_n = \\ &= p_n - fp_n \sim ep_n = \\ &= ep_n - (ep_n) \wedge (fp_n) = \\ &= (e - e \wedge f)p_n.\end{aligned}$$

Conform corolarului 1.4.

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} (e \vee f - f)p_n \sim \bigvee_{n=0}^{\infty} (e - e \wedge f)p_n.$$

Se vede uşor că

$$e\vee f - f = (e\vee f - f)\bigvee_{n=0}^{\infty} p_n = \bigvee_{n=0}^{\infty} (e\vee f - f)p_n$$

şi

$$e - e\wedge f = (e - e\wedge f)\bigvee_{n=0}^{\infty} p_n = \bigvee_{n=0}^{\infty} (e - e\wedge f)\, p_n,$$

deci

$$e\vee f - f \sim e - e\wedge f.$$

q. e. d.

În sfîrşit, arătăm că modulo proiectori centrali, proiectorii unei AW^* - algebre sînt comparabili.

Reamintim că, pentru orice proiector e al unei AW^* - algebre M, notăm infimul familiei

$$\{p \mid p \in M \text{ proiector central, } e \leqslant p\}$$

prin $z(e)$ şi îl numim suportul central al lui e.

1.9. LEMĂ. *Fie M o AW^* - algebră şi $e, f \in M$ proiectori. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(i) $eMf \neq \{0\}$.

(ii) $z(e)z(f) \neq 0$.

(iii) *Există proiectori nenuli $e_1, f_1 \in M$, astfel încît*

$$e \geqslant e_1 \sim f_1 \leqslant f.$$

Demonstraţie. Presupunem că eMf conţine un element nenul x. Fie α un scalar cu $0 < \alpha < \| x^*x \|$. Conform lemei II.3.10., există un proiector $f_1 \in M$ care comută cu x^*x şi pentru care

$$x^*xf_1 \geqslant \alpha f_1,$$

$$x^*x(1 - f_1) \leqslant \alpha(1 - f_1).$$

Cum $\alpha < \| x^*x \|$, f_1 este nenul, şi cum $0 < \alpha$, x^*xf_1 are o inversă $a \geqslant 0$ în f_1Mf_1. Punem $u = a^{\frac{1}{2}}x^*$. Cum

$$uu^* = a^{\frac{1}{2}}x^*xa^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}x^*xf_1a^{\frac{1}{2}} = x^*xf_1a = f_1,$$

u este o izometrie parţială, deci $e_1 = u^*u$ este un proiector. Evident, $e_1 \sim f_1$.

Avem succesiv

$$ex = x,$$
$$exax^* = xax^*,$$
$$eu^*u = u^*u,$$
$$ee_1 = e_1,$$

deci $e_1 \leqslant e$. Analog,

$$xf = x,$$
$$ax^*xf = ax^*x,$$
$$af_1x^*xf = af_1x^*x,$$
$$f_1f = f_1,$$

deci $f_1 \leqslant f$.

Astfel (i) implică pe (iii).

Presupunînd pe (iii) (adevărată, avem $z(e) \geqslant z(e_1) = z(f_1) \leqslant z(f)$, deci $z(e)\, z(f) \geqslant z(e_1) \neq 0$.

În sfîrșit, presupunem că $eMf = \{0\}$. Fie $p_1 \in M$ proiectorul pentru care

$$^{\perp}(Mf) = Mp_1.$$

Cum $^{\perp}(Mf)$ este un ideal drept în M, pentru orice $x \in M$ există $y \in M$ cu

$$p_1x = yp_1.$$

Astfel, pentru orice $x \in M$,

$$p_1x(1 - p_1) = 0,$$
$$p_1x = p_1xp_1.$$

Rezultă că p_1 este central și, cum $e \in {}^{\perp}(Mf)$, adică $e \leqslant p_1$, avem

$$z(e) \leqslant p_1.$$

Prin urmare $z(e)Mf = \{0\}$. Fie acum $p_2 \in M$ proiectorul pentru care

$$(z(e)M)^{\perp} = p_2M.$$

Atunci p_2 este central, și, cum $f \leqslant p_2$, avem

$$z(f) \leqslant p_2.$$

Rezultă că $z(e)\, Mz(f) = \{0\}$, deci

$$z(e)\, z(f) = 0.$$

Astfel (ii) implică pe (i).

q. e. d.

1.10. LEMĂ. *Fie M o AW^*-algebră și $e, f \in M$ proiectori ortogonali. Atunci există un proiector central p în M, pentru care*

$$ep \prec fp,$$
$$e(1-p) \succ f(1-p).$$

Demonstrație. Fie $((e_\iota, f_\iota))_{\iota \in I}$ o familie maximală de perechi de proiectori cu

$$e_{\iota_1}e_{\iota_2} = f_{\iota_1}f_{\iota_2} = 0, \quad \iota_1, \iota_2 \in I, \quad \iota_1 \neq \iota_2,$$
$$e \geq e_\iota \sim f_\iota \leq f, \quad \iota \in I.$$

Notăm

$$e_0 = \bigvee_{\iota \in I} e_\iota, \quad f_0 = \bigvee_{\iota \in I} f_\iota.$$

Conform corolarului 1.6.

$$e_0 \sim f_0,$$

iar maximalitatea familiei $((e_\iota, f_\iota))_{\iota \in I}$ și lema 1.9. implică

$$z(e-e_0)\, z(f-f_0) = 0.$$

Notăm

$$p = z(f-f_0).$$

Atunci

$$ep = e_0p + (e-e_0)\,p = e_0p \sim f_0p \leq fp,$$
$$f(1-p) = f_0(1-p) + (f-f_0)\,(1-p) = f_0(1-p) \sim$$
$$\sim e_0(1-p) \leq e(1-p).$$

q.e.d.

1.11. TEOREMĂ (de comparație). *Fie M o AW^* - algebră și $e, f \in M$ proiectori. Atunci există un proiector central p în M, pentru care*

$$ep \prec fp,$$
$$e(1-p) \succ f(1-p).$$

Demonstrație. Fie

$$e_0 = e - e \wedge f,$$
$$f_0 = f - e \wedge f.$$

Atunci $e_0 \wedge f_0 = 0$, deci, conform teoremei 1.8.,

$$e_0 \vee f_0 - f_0 \sim e_0.$$

Cum $e_0 \vee f_0 - f_0$ şi f_0 sînt ortogonali, aplicînd lema 1.10, există un proiector central p în M cu

$$(e_0 \vee f_0 - f_0)\, p \prec f_0 p,$$
$$(e_0 \vee f_0 - f_0)\,(1-p) \succ f_0\,(1-p).$$

Atunci

$$e_0 p \sim (e_0 \vee f_0 - f_0)\, p \prec f_0 p,$$

deci

$$ep = e_0 p + (e \wedge f)p \prec f_0 p + (e \wedge f)p = fp.$$

Analog,

$$e(1-p) \succ f(1-p).$$

q.e.d.

Materialul acestui paragraf este bine cunoscut. Ca referinţe indicăm tratatele [28] şi [4]. Demonstraţia elegantă a teoremei 1.2. aparţine lui Lebow şi se găseşte în [30].

§ 2. AXIOMELE REDUCTIBILE

În acest paragraf considerăm nişte axiome pentru C^* - algebre, despre care arătăm că în diferite combinaţii se păstrează prin treceri la cîturi. Astfel, în cadrul C^*-algebrelor satisfăcînd aceste axiome, vom putea dezvolta reducerea din capitolul II, § 3. Acest paragraf poate fi considerat şi ca o tratare axiomatică a cîturilor de AW^* - algebre.

Fie A o C^* - algebră. Axioma care urmează a fost considerată şi în capitolul II, § 5.

(S) (axioma spectrală) *A are unitate şi oricare ar fi elementul autoadjunct $a \in A$ şi numărul real α, există un proiector $e \in A$, care comută cu a şi pentru care*

$$ae \geqslant \alpha e,$$
$$a(1-e) \leqslant \alpha(1-e).$$

Conform lemei II.3.10, orice AW^* - algebră satisface pe (S).

2.1. LEMĂ. *Fie A o C^* - algebră cu (S) şi $e \in A$ un proiector. Atunci eAe satisface de asemenea pe (S).*

Demonstraţie. Evident, eAe are unitate.

Fie $a \in eAe$ un element autoadjunct şi α un număr real. Alegem un număr real $\beta > max\,(\|a\|,\ |\alpha|)$ şi notăm

$$b = a + \beta e.$$

Atunci b este un element pozitiv în eAe. Cum A satisface pe (S), există un proiector $f \in A$, care comută cu b şi pentru care

$$bf \geqslant (\alpha + \beta)\, f,$$
$$b(1-f) \leqslant (\alpha + \beta)\,(1-f).$$

Rezultă că f comută cu $b^{\frac{1}{2}}$, deci

$$(\alpha + \beta) f \leqslant bf = b^{\frac{1}{2}} f b^{\frac{1}{2}} = e b^{\frac{1}{2}} f b^{\frac{1}{2}} e \leqslant \|b\| e,$$

$$f \leqslant \frac{\|b\|}{\alpha + \beta} e,$$

$$(1 - e) f (1 - e) = 0,$$

$$f(1 - e) = 0,$$

$$f = fe.$$

Astfel f este un proiector în eAe, comută cu a și

$$af = bf - \beta f \geqslant (\alpha + \beta) f - \beta f = \alpha f,$$

$$a(e - f) = b(e - f) - \beta(e - f) \leqslant (\alpha + \beta)(e - f) - \beta(e - f) = \alpha(e - f).$$

q.e.d.

2.2. Corolar. *Fie A o C^*-algebră cu (S), a un element autoadjunct în A și $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ numere reale. Atunci există proiectori ortogonali $e_0, e_1, \ldots, e_n \in A$ cu $\sum_{i=0}^{n} e_i = 1$, care comută cu a și pentru care*

$$ae_0 \geqslant \alpha_1 e_0,$$

$$\alpha_1 e_1 \geqslant ae_1 \geqslant \alpha_2 e_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} e_{n-1} \geqslant ae_{n-1} \geqslant \alpha_n e_{n-1},$$

$$\alpha_n e_n \geqslant ae_n.$$

2.3. Lemă. *Fie A o C^*-algebră cu (S) și $\mathcal{I}$ un ideal bilateral închis în A. Atunci $\mathcal{I}$ este anvelopa liniară închisă a tuturor proiectorilor din $\mathcal{I}$.*

Demonstrație. Fie a un element pozitiv în $\mathcal{I}$, $\varepsilon > 0$ și

$$\|a\| = \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \alpha_{n+1} = 0,$$

astfel încît

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \leqslant \varepsilon.$$

Conform corolarului 2.2, există proiectori ortogonali $e_0, e_1, \ldots, e_n \in A$ cu $\sum_{i=0}^{n} e_i = 1$, care comută cu a și pentru care

$$ae_0 \geqslant \alpha_1 e_0,$$

$$\alpha_1 e_1 \geqslant ae_1 \geqslant \alpha_2 e_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} e_{n-1} \geqslant ae_{n-1} \geqslant \alpha_n e_{n-1},$$

$$\alpha_n e_n \geqslant ae_n.$$

Atunci

$$\left\| a - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} e_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} (ae_i - \alpha_{i+1} e_i) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \| ae_i - \alpha_{i+1} e_i \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon.$$

Pentru $i \leqslant n - 1$, elementul ae_i fiind invertibil în $e_i A e_i$, $e_i \in \mathscr{I}$. Cum $\varepsilon > 0$ este oarecare, a aparține anvelopei liniare închise a proiectorilor din $\mathscr{I}$.

Fie acum x un element autoadjunct în $\mathscr{I}$. Există un proiector e care comută cu x și pentru care

$$xe \geqslant 0,$$

$$x(1 - e) \leqslant 0.$$

Astfel

$$x^+ = xe \in \mathscr{I},$$

$$x^- = -x(1 - e) \in \mathscr{I},$$

deci, conform primei părți a demonstrației, x aparține anvelopei liniare închise a proiectorilor din $\mathscr{I}$.

Cum orice ideal bilateral închis într-o C^* - algebră este autoadjunct, cazul general se reduce la cazul autoadjunct.

q.e.d.

2.4. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu (S), B o C^*-algebră, $\pi : A \to B$ un $*$-homomorfism surjectiv, $e, f \in A$ proiectori și $v \in B$ o izometrie parțială, astfel încît*

$$v^*v \leqslant \pi(e),$$

$$vv^* \leqslant \pi(f).$$

Atunci există o izometrie parțială $u \in A$ pentru care

$$u^*u \leqslant e,$$

$$uu^* \leqslant f,$$

$$\pi(u) = v.$$

Demonstrație. Fie $x \in A$, astfel încît

$$\pi(x) = v.$$

Notăm

$$y = fxe.$$

Cum $y^*y \in eAe$, conform lemei 2.1, există un proiector $e_1 \leqslant e$ în A, care comută cu y^*y şi pentru care

$$y^*ye_1 \geqslant \frac{1}{2} e_1,$$

$$y^*y(1 - e_1) \leqslant \frac{1}{2}(1 - e_1).$$

Fie $a \geqslant 0$ inversa lui y^*ye_1 în e_1Ae_1. Notăm

$$u = ya^{\frac{1}{2}}.$$

Avem

$$u^*u = a^{\frac{1}{2}}y^*ya^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y^*ye_1a^{\frac{1}{2}} = y^*ye_1a = e_1 \leqslant e.$$

Astfel u este o izometrie parţială. Cum

$$uu^* = yay^* = fxeaex^*f \leqslant \|x\|^2\|a\|f,$$

rezultă

$$uu^* \leqslant f.$$

Cum $v^*v \leqslant \pi(e)$ şi $vv^* \leqslant \pi(f)$,

$$\begin{aligned}\pi(y^*y) &= \pi(e)\,\pi(x^*)\,\pi(f)\,\pi(x)\,\pi(e) = \\ &= \pi(e)\,v^*\,\pi(f)\,v\,\pi(e) = \\ &= \pi(e)\,v^*vv^*\,\pi(f)\,vv^*v\,\pi(e) = \\ &= v^*vv^*vv^*v = \\ &= v^*v.\end{aligned}$$

Mai departe, cum e_1 comută cu y^*y şi $y^*ye_1 \geqslant \frac{1}{2}e_1$, deducem că $\pi(e_1)$ comută cu $\pi(y^*y) = v^*v$ şi $v^*v\pi(e_1) \geqslant \frac{1}{2}\pi(e_1)$. Astfel

$$\pi(e_1) = v^*v\pi(e_1),$$

$$\pi(e_1) \leqslant v^*v.$$

Analog, cum $y^*y(1 - e_1) \leqslant \frac{1}{2}(1 - e_1)$, deducem că $v^*v(1 - \pi(e_1)) \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(1 - \pi(e_1))$, de unde

$$v^*v(1 - \pi(e_1)) = 0,$$

$$\pi(e_1) \geqslant v^*v.$$

În concluzie,

$$\pi(e_1) = v^*v.$$

În sfîrşit, cum $a = ae_1$ şi $ay^*y = e_1$, deducem $\pi(a) = \pi(a)\,\pi(e_1) = \pi(a)\,v^*v = \pi(a)\,\pi(y^*y) = \pi(e_1) = v^*v$. Astfel

$$\begin{aligned}\pi(u) &= \pi(y)\,\pi(a^{\frac{1}{2}}) = \\ &= \pi(f)\,\pi(x)\,\pi(e)\,\pi(a)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \pi(f)\,v\,\pi(e)v^*v = \\ &= \pi(f)\,vv^*v = \\ &= vv^*v = \\ &= v.\end{aligned}$$

q.e.d.

2.5. COROLAR. *Fie A o C^* - algebră cu (S), B o C^* - algebră, $\pi : A \to B$ un $*$ - homomorfism surjectiv şi $e \in A$, $g \in B$ proiectori, astfel încît*

$$g \leqslant \pi(e).$$

Atunci există un proiector $f \in A$ pentru care

$$f \leqslant e,$$

$$\pi(f) = g.$$

Fie acum A o C^*-algebră cu unitate şi Z o C^*-subalgebră a centrului lui A, conţinînd unitatea. Spunem că A satisface teorema comparaţiei modulo Z, dacă pentru orice proiectori $e, f \in$ A există un proiector $p \in Z$ pentru care

$$ep \prec fp,$$

$$e(1-p) \succ f(1-p).$$

În următoarele trei leme presupunem că A şi Z sînt ca mai sus, iar A satisface pe (S) şi teorema comparaţiei modulo Z.

2.6. LEMĂ. *Pentru orice $a \in A$ pozitiv există $u \in A$ unitar şi $z \in Z$ pozitiv, astfel încît*

$$0 \leqslant \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u^*au - z \leqslant \frac{3}{4}\|a\|.$$

Demonstraţie. Cum A satisface pe (S), există un proiector $e \in A$, care comută cu a şi pentru care

$$ae \geqslant \frac{\|a\|}{2}e,$$

$$a(1-e) \leqslant \frac{\|a\|}{2}(1-e).$$

Mai departe, cum A satisface teorema comparației modulo Z, există un proiector $p \in Z$, astfel încît

$$ep \prec (1-e)\,p,$$
$$e(1-p) \succ (1-e)\,(1-p).$$

Fie $v, w \in A$ izometrii parțiale verificînd relațiile

$$v^*v = ep,$$
$$vv^* \leqslant (1-e)p,$$
$$w^*w = (1-e)\,(1-p),$$
$$ww^* \leqslant e(1-p),$$

Notăm

$$u = v + v^* + w + w^* + (1 - v^*v - vv^* - w^*w - ww^*).$$

Se verifică ușor că u este unitar.

Avem

$$\begin{aligned} ap &= aep + a(1-e)\,p \leqslant \\ &\leqslant \|a\|\,ep + \frac{\|a\|}{2}(1-e)\,p = \\ &= \|a\|\,v^*v + \frac{\|a\|}{2}\,vv^* + \frac{\|a\|}{2}((1-e)\,p - vv^*). \end{aligned}$$

De aici

$$(u^*au)\,p \leqslant \|a\|\,v^*v + \frac{\|a\|}{2}\,v^*v + \frac{\|a\|}{2}((1-e)\,p - v^*v),$$

deci

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,u^*au\right)p &\leqslant \frac{3\,\|a\|}{4}\,v^*v + \frac{\|a\|}{2}(1-e)\,p + \frac{\|a\|}{4}\,vv^* \leqslant \\ &\leqslant \frac{3\,\|a\|}{4}\,ep + \frac{\|a\|}{2}(1-e)p + \frac{\|a\|}{4}(1-e)\,p = \\ &= \frac{3\,\|a\|}{4}\,p. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} a(1-p) &\geqslant ae(1-p) \geqslant \\ &\geqslant \frac{\|a\|}{2}\,e(1-p) = \\ &= \frac{\|a\|}{2}\,ww^* + \frac{\|a\|}{2}(e(1-p) - ww^*), \end{aligned}$$

de unde

$$(u^* au)(1-p) \geqslant \frac{\|a\|}{2} w^*w + \frac{\|a\|}{2} (e(1-p) - ww^*).$$

Astfel

$$\left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} u^*au\right)(1-p) \geqslant \frac{\|a\|}{4} w^*w + \frac{\|a\|}{2} e(1-p) - \frac{\|a\|}{4} w^*w \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\|a\|}{4} (1-e)(1-p) + \frac{\|a\|}{2} e(1-p) - \frac{\|a\|}{4} e(1-p) =$$

$$= \frac{\|a\|}{4} (1-p).$$

Punem

$$z = \frac{\|a\|}{4} (1-p).$$

Se vede uşor că

$$0 \leqslant \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} u^*au - z \leqslant \frac{3}{4} \|a\|.$$

q. e. d.

2. 7. LEMĂ. *Pentru orice* $a \in A$ *pozitiv şi orice* $\varepsilon > 0$ *există un element* a_ε *în anvelopa convexă a mulţimii*

$$\{u^*au \mid u \in A \text{ unitar}\}$$

şi un element pozitiv $z_\varepsilon \in Z$, *astfel încît*

$$0 \leqslant a_\varepsilon - z_\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

Demonstraţie. Aplicînd succesiv lema 2.6, există un şir $u_1, u_2, \ldots$ de elemente unitare în A şi un şir de elemente pozitive $z_1, z_2, \ldots$ în Z, astfel încît, notînd

$$a_1 = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} u_1^* a u_1,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} u_{n+1}^* a_n u_{n+1}, \quad n \geqslant 1,$$

avem

$$0 \leqslant a_n - z_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \|a\|, \quad n \geqslant 1.$$

Cum elementele a_n aparţin anvelopei convexe a mulţimii

$$\{u^*au \mid u \in A \text{ unitar}\},$$

dacă alegem un n_ε cu

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n_\varepsilon} \|a\| < \varepsilon$$

şi notăm $a_\varepsilon = a_{n_\varepsilon}$, $z_\varepsilon = z_{n_\varepsilon}$, atunci elementele a_ε, z_ε satisfac condiţiile lemei.

q. e. d.

2.8. LEMĂ. *Pentru orice $x \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un element x_ε în anvelopa convexă a mulţimii*

$$\{u^*xu \mid u \in A \text{ unitar}\}$$

şi un element $z_\varepsilon \in Z$, astfel încît

$$\|x_\varepsilon - z_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Notăm prin $\mathscr{U}$ mulţimea tuturor elementelor unitare ale lui A, iar prin $\mathscr{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor pozitive cu suport finit φ pe $\mathscr{U}$, pentru care $\sum_{u \in \mathscr{U}} \varphi(u) = 1$. Fie pentru orice $\varphi \in \mathscr{F}$ şi orice $y \in A$

$$\varphi \circ y = \sum_{u \in \mathscr{U}} \varphi(u) u^* y u.$$

Scriem pe x sub forma

$$x = x_1 - x_2 + \mathrm{i}x_3 - \mathrm{i}x_4, \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

Aplicînd succesiv lema 2.7, există $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \mathscr{F}$ şi $z_1, z_2, z_3, z_4 \in Z$, astfel încît

$$\|\varphi_1 \circ x_1 - z_1\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ x_2) - z_2\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ x_3)) - z_3\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|\varphi_4 \circ (\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ x_4))) - z_4\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Punînd

$$x_\varepsilon = \varphi_4 \circ (\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ x)))$$

şi

$$z_\varepsilon = z_1 - z_2 + \mathrm{i} z_3 - \mathrm{i} z_4,$$

se vede uşor că elementele x_ε şi z_ε satisfac condiţiile lemei.

q. e. d.

2.9. Teoremă. *Fie A o C^* - algebră cu (S) şi Z o C^* - subalgebră a centrului lui A, conţinînd unitatea, astfel încît A satisface teorema comparaţiei modulo Z. Atunci*

1) *Z este centrul lui A;*

2) *Z satisface pe (S);*

3) *Pentru orice $x \in A$ intersecţia $\mathcal{K}(x)$ a anvelopei convexe închise a mulţimii $\{u^*xu \mid u \in A \text{ unitar}\}$ cu Z este o parte Z — convexă închisă nevidă a lui Z.*

Demonstraţie. Începem cu demonstraţia punctului 2).

Fie $z \in Z$ autoadjunct şi α un număr real. Cum A satisface pe (S), există un proiector $e \in A$ cu

$$ze \geqslant \alpha e,$$

$$z(1-e) \leqslant \alpha(1-e),$$

şi, cum A satisface teorema comparaţiei modulo Z, există un proiector $p \in Z$, pentru care

$$(1-e)\, p \prec ep,$$

$$(1-e)\,(1-p) \succ e(1-p),$$

Fie $v, w \in A$ izometrii parţiale, astfel încît

$$v^*v = (1-e)p,$$

$$vv^* \leqslant ep,$$

$$w^*w = e(1-p),$$

$$ww^* \leqslant (1-e)\,(1-p).$$

Cum $ze \geqslant \alpha e$, avem

$$vv^*(ze)vv^* \geqslant vv^*(\alpha e)\, vv^*,$$

$$zvv^* \geqslant \alpha vv^*,$$

$$v^*(zvv^*)v \geqslant v^*(\alpha vv^*)\, v,$$

$$zv^*v \geqslant \alpha v^*v,$$

$$z(1-e)p \geqslant \alpha(1-e)p.$$

Pe de altă parte, cum $z(1-e) \leqslant \alpha(1-e)$, avem

$$z(1-e)\,p \leqslant \alpha(1-e)\,p.$$

Astfel

$$z(1-e)\,p = \alpha(1-e)\,p,$$

deci

$$zp = zep + z(1-e)\,p \geqslant \alpha ep + \alpha(1-e)\,p = \alpha p.$$

Analog, cum $z(1-e) \leqslant \alpha(1-e)$, rezultă

$$zww^* \leqslant \alpha ww^*,$$

$$w^*(zww^*)\,w \leqslant w^*(\alpha ww^*)\,w,$$

$$ze(1-p) \leqslant \alpha e(1-p).$$

Deoarece $ze \geqslant \alpha e$, şi inegalitatea reciprocă este adevărată, deci

$$ze(1-p) = \alpha e(1-p).$$

Astfel

$$z(1-p) = ze(1-p) + z(1-e)\;(1-p) \leqslant \alpha e(1-p) +$$

$$+ \alpha(1-e)\;(1-p) = \alpha(1-p).$$

Demonstrăm acum punctul 3).

Fie $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ şi notaţia $\varphi \circ y$, $\varphi \in \mathscr{F}$, $y \in A$ ca în demonstraţia lemei 2.8. Conform lemei 2.8, pentru orice $x \in A$ există un şir $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ de funcţii din $\mathscr{F}$ şi un şir $z_1, z_2 \ldots$, de elemente din Z, astfel încît, punînd

$$x_1 = \varphi_1 \circ x,$$

$$x_{n+1} = \varphi_{n+1} \circ x_n, \quad n \geqslant 1,$$

avem

$$\| x_{n+1} - z_n \| \leqslant 2^{-n}, \quad n \geqslant 1.$$

Pentru orice $n \geqslant 1$

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \| x_{n+1} - z_n \| + \| z_n - x_n \| =$$

$$= \| \varphi_{n+1} \circ x_n - \varphi_{n+1} \circ z_n \| + \| z_n - x_n \| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| x_n - z_n \| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n+1}.$$

Prin urmare, şirul (x_n) converge, deci şirul (z_n) converge de asemenea şi cele două şiruri au aceeaşi limită $z \in Z$. Cum fiecare x_n este în anvelopa convexă a mulţimii $\{u^*xu \mid u \in \mathcal{U}\}$, deducem că $z \in \mathcal{K}(x)$. Astfel $\mathcal{K}(x)$ este nevidă.

Cum Z satisface pe (S) şi $\mathcal{K}(x)$ este convexă şi închisă, aplicînd teorema II.5. 1, se arată uşor că $\mathcal{K}(x)$ este Z - convexă.

În sfîrşit, fie x un element central al lui A. Atunci anvelopa convexă închisă a mulţimii $\{u^* xu \mid u \in \mathcal{U}\} = \{x\}$ se reduce la x. Conform punctului 3), $\{x\} \cap Z \neq \emptyset$, deci $x \in Z$.

q.e.d.

Teorema 2.9 justifică considerarea următoarei axiome pentru o C^* - algebră A:

(C) (axioma comparaţiei) *A are unitate şi, oricare ar fi proiectorii $e, f \in A$, există un proiector central p în A, pentru care*

$$ep \prec fp,$$

$$e(1-p) \succ f(1-p).$$

Conform teoremei 1.11, orice AW^* - algebră satisface pe (C).

2.10. Corolar. *Fie A o C^* - algebră cu (S), (C), Z centrul lui A* şi *$e \in A$ un proiector. Atunci centrul lui eAe este Ze.*

Demonstraţie. Conform lemei 2.1, eAe satisface pe (S) şi, evident, eAe satisface teorema comparaţiei modulo Ze. Aplicînd teorema 2.9., Ze este centrul lui eAe.

q.e.d.

2.11. Corolar. *Fie A o C^*-algebră cu (S), (C), Z centrul lui A, B o C^*-algebră şi $\pi : A \to B$ un $*$-homomorfism surjectiv. Atunci centrul lui B este πZ.*

Demonstraţie. Evident, B satisface pe (S). Folosind corolarul 2.5, se vede uşor că B satisface teorema comparaţiei modulo πZ. Aplicînd teorema 2.9, rezultă că πZ este centrul lui B.

q.e.d.

Numim C^*-factor o C^*-algebră cu unitate, centrul căreia se reduce la multiplii scalari ai unităţii.

2.12. Teoremă. *Fie A un C^*-factor cu (S), (C). Atunci mulţimea tuturor idealelor bilaterale închise ale lui A este total ordonată prin incluziune.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ ideale bilaterale închise ale lui A. Presupunem că $\mathcal{I}_1$ nu este inclus în $\mathcal{I}_2$. Conform lemei 2.3, există un proiector $e \in \mathcal{I}_1$ care nu este în $\mathcal{I}_2$.

Fie $f \in \mathcal{I}_2$ un proiector. Cum A satisface pe (C) şi singurii proiectori centrali în A sînt 0 şi 1, avem ori

$$e \prec f,$$

ori

$$e \succ f.$$

În primul caz există o izometrie parţială $v \in A$ cu

$$v^*v = e,$$

$$vv^* < f.$$

Astfel

$$e = v^*fv \in \mathscr{I}_2,$$

ceea ce ne contrazice.

Prin urmare $e \succ f$. Fie $w \in A$ o izometrie parţială cu

$$w^*w = f,$$

$$ww^* \leqslant e.$$

Atunci

$$f = w^*ew \in \mathscr{I}_1.$$

În concluzie, orice proiector din $\mathscr{I}_2$ aparţine lui $\mathscr{I}_1$, deci, aplicînd din nou lema 2.3, $\mathscr{I}_2 \subset \mathscr{I}_1$.

q.e.d.

2.13. Corolar. *Fie A un C^*-factor cu (S), (C). Atunci A are un singur ideal bilateral maximal, egal cu*

$$\{x \mid x \in A,\ \mathscr{K}(x^*x) = \{0\}\}.$$

Demonstraţie. Existenţa unui singur ideal bilateral maximal este o consecinţă imediată a teoremei 2.12. Fie $\mathfrak{M}$ idealul bilateral maximal al lui A.

Dacă $x_1, x_2 \in A$, $\mathscr{K}(x_1^*x_1) = \mathscr{K}(x_2^*x_2) = \{0\}$, cum

$$(x_1 + x_2)^* (x_1 + x_2) \leqslant 2x_1^*x_1 + 2x_2^*x_2,$$

se verifică uşor că $\mathscr{K}((x_1+x_2)^* (x_1+x_2))=\{0\}$. Dacă $x \in$ A, $\mathscr{K}(x^*x)=\{0\}$, şi $u \in A$ este unitar, atunci

$$\mathscr{K}((ux)^* ux) = \mathscr{K}(x^*x) = \{0\},$$

$$\mathscr{K}((xu)^*xu) = \mathscr{K}(u^*x^*xu) = \mathscr{K}(x^*x) = \{0\}.$$

Cum orice element al lui A este o combinaţie liniară de elemente unitare, rezultă că mulţimea

$$\{x \mid x \in A, \mathscr{K}(x^*x) = \{0\}\}$$

este un ideal bilateral. Neconţinînd pe 1, ea este inclusă în $\mathfrak{M}$.

Reciproc, dacă $x \in \mathfrak{M}$, atunci anvelopa convexă închisă a lu $\{u^*x^*xu \mid u \in A \text{ unitar}\}$ este conținută în $\mathfrak{M}$, deci $\mathscr{K}(x^*x) \subset \mathfrak{M}$. Cum singurul multiplu scalar al unității, conținut în $\mathfrak{M}$, este 0, deducem

$$\mathscr{K}(x^*x) = \{0\}.$$

q.e.d.

Folosind C^*-reducerea, vom extinde corolarul 2.13 la cazul global.

Lema 2.3 ne sugerează să căutăm o descriere a idealelor bilaterale închise în termeni de proiectori. În acest scop dăm următoarea definiție:

Fie A o C^*-algebră. Numim p-ideal al lui A o familie $\mathscr{P}$ de proiectori din A, care satisfac condițiile:

1) Dacă $e \in \mathscr{P}$ și $f \in A$ este un proiector cu $f \prec e$, atunci $f \in \mathscr{P}$.

2) Dacă $e, f \in \mathscr{P}$, atunci există $g \in \mathscr{P}$ cu $e, f \leqslant g$.

2.14. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu unitate și $\mathscr{P}$ un p-ideal în A. Atunci orice proiector din idealul bilateral închis generat de $\mathscr{P}$ aparține lui $\mathscr{P}$.*

Demonstrație. Notăm

$$\mathscr{I} = \{x \mid x \in A, \text{ există } f \in \mathscr{P} \text{ cu } x = xf\}.$$

Dacă $x_1, x_2 \in \mathscr{I}$ și $f_1, f_2 \in \mathscr{P}$, $x_1 = x_1 f_1, x_2 = x_2 f_2$, atunci există $f \in \mathscr{P}$ cu $f_1, f_2 \leqslant f$. Cum $x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)f$, rezultă $x_1 + x_2 \in \mathscr{I}$. Pe de altă parte, fie $x \in \mathscr{I}$ și $u \in A$ unitar. Dacă $f \in \mathscr{P}$, $x = xf$, atunci

$$ux = (ux)f,$$

deci $ux \in \mathscr{I}$. Notînd $g = u^*fu$, cum $g \sim f$, deducem $g \in \mathscr{P}$. Cum

$$xu = xfu = xuu^*fu = (xu)g,$$

$xu \in \mathscr{I}$. Astfel $\mathscr{I}$ este un ideal bilateral. Deoarece $\mathscr{I}$ conține pe $\mathscr{P}$ și este conținut în idealul bilateral generat de $\mathscr{P}$, deducem că $\mathscr{I}$ este idealul bilateral generat de $\mathscr{P}$.

Fie e un proiector în închiderea lui $\mathscr{I}$. Atunci există un șir (x_n) în $\mathscr{I}$, care converge către e. Începînd de un rang ex_nx_ne este invertibil în eAe, deci $e \in \mathscr{I}$. Din definiția lui $\mathscr{I}$ rezultă că $e \in \mathscr{P}$.

q.e.d.

Considerăm acum următoarea axiomă pentru o C^*-algebră A:

(O) (axioma ortogonalizării). *Pentru orice proiectori $e_1, e_2 \in A$ există proiectori ortogonali $f_1, f_2 \in A$, astfel încît $f_1 \prec e_1, f_2 \prec e_2$ și $e_1, e_2 \leqslant f_1 + f_2$.*

Dacă A este o AW^*-algebră, conform teoremei 1.8, (O) este satisfăcută cu $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 \vee e_2 - e_1$.

2.15. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră cu (S), (O). Notăm pentru orice ideal bilateral închis $\mathscr{I} \subset A$ prin $\mathscr{P}_{\mathscr{I}}$ mulțimea tuturor proiectorilor din $\mathscr{I}$, iar pentru orice p-ideal $\mathscr{P} \subset A$ prin $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}$ anvelopa liniară închisă a lui $\mathscr{P}$. Atunci aplicațiile*

$$\mathscr{I} \mapsto \mathscr{P}_{\mathscr{I}}$$

$$\mathscr{P} \mapsto \mathscr{I}_{\mathscr{P}}$$

stabilesc o corespondență biunivocă între idealele bilaterale închise ale lui A și p-idealele lui A.

Demonstrație. Fie $\mathscr{I}$ un ideal bilateral închis al lui A. Dacă $e \in \mathscr{P}_{\mathscr{I}}$ și $f \prec e$, atunci există o izometrie parțială $v \in A$ cu

$$v^*v = f$$

$$vv^* \leqslant e.$$

Astfel

$$f = v^*ev \in \mathscr{I}.$$

Dacă $e, f \in \mathscr{P}_{\mathscr{I}}$, conform (O) există proiectori ortogonali $g_1, g_2 \in A$, astfel încît $g_1 \prec e$, $g_2 \prec f$ și $e, f \leqslant g_1 + g_2$. Conform celor de mai sus, $g_1, g_2 \in \mathscr{P}_{\mathscr{I}}$, deci $g_1 + g_2 \in \mathscr{P}_{\mathscr{I}}$. Astfel $\mathscr{P}_{\mathscr{I}}$ este un p-ideal.

De asemenea, dacă $\mathscr{P}$ este un p-ideal al lui A, conform lemelor 2.14 și 2.3, idealul bilateral închis generat de $\mathscr{P}$ coincide cu $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}$. Astfel $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}$ este un ideal bilateral închis.

În sfîrșit, folosind lemele 2.3 și 2.14, se verifică ușor că

$$\mathscr{I}_{\mathscr{P}_{\mathscr{I}}} = \mathscr{I},$$

$$\mathscr{P}_{\mathscr{I}_{\mathscr{P}}} = \mathscr{P}.$$

q.e.d.

În unele aplicații prezintă interes și axioma următoare:

(E) (axioma echivalenței) *Dacă $e, f \in A$ sînt proiectori astfel încît $e \prec f$ și $e \succ f$, atunci $e \sim f$.*

Conform teoremei 1.2, AW^*-algebrele satisfac pe (E).

2.16. TEOREMĂ (de conservare a axiomelor). *Fie A, B C^*-algebre, $e \in A$ un proiector și $\pi : A \to B$ un $*$-homomorfism surjectiv.*

(i) *Dacă A satisface una din combinațiile de axiome*

$$(S);$$

$$(C);$$

$$(S),\ (O);$$

$$(E);$$

atunci și eAe o satisface.

ii) *Dacă A satisface una din combinațiile de axiome*

$$(S);$$

$$(S),\ (C);$$

$$(S),\ (O);$$

$$(S),\ (C),\ (E);$$

atunci şi B o satisface.

Demonstraţie. (i) Cazul lui (S) rezultă din lema 21, iar cazurile (C) şi (E) sînt triviale.

Presupunem acum că A satisface axiomele (S), (O). Cum eAe satisface pe (S), rămîne de arătat că satisface şi pe (O).

Fie $e_1, e_2 \in A$ proiectori, $e_1, e_2 \leqslant e$. Cum A satisface pe (O), există proiectori ortogonali $f_1, f_2 \in A$, astfel încît $f_1 \prec e_1, f_2 \prec e_2$ şi $e_1, e_2 \leqslant f_1+f_2$. Cum eAe satisface pe (S), există un proiector $g \in A$, $g \leqslant e$, care comută cu $e(f_1+f_2)e$ şi pentru care

$$e(f_1 + f_2)eg \geqslant \frac{1}{2} g,$$

$$e(f_1 + f_2) e(1 - g) \leqslant \frac{1}{2} (1 - g).$$

În sfîrşit, cum gAg satisface pe (S), există un proiector $g_1 \in A$, $g_1 \leqslant g$, care comută cu gf_1g şi pentru care

$$gf_1gg_1 \geqslant \frac{1}{4} g_1,$$

$$gf_1g(1 - g_1) \leqslant \frac{1}{4} (1 - g_1).$$

Notăm $g_2 = g - g_1$. Evident, g_1 şi g_2 sînt proiectori ortogonali în eAe.

Cum $g_1f_1g_1 \geqslant \frac{1}{4} g_1$, $g_1f_1g_1$ are o inversă $a_1 \geqslant 0$ în g_1Ag_1. Punînd $v_1 = f_1g_1a_1^{\frac{1}{2}}$,

$$v^*{}_1v_1 = a_1^{\frac{1}{2}} g_1f_1g_1 a_1^{\frac{1}{2}} = g_1.$$

Astfel v_1 este o izometrie parţială. Cum

$$v_1v_1^* = f_1g_1a_1g_1f_1 \leqslant \|a_1\| f_1,$$

deducem

$$v_1v_1^* \leqslant f_1.$$

Prin urmare

$$g_1 \prec f_1 \prec e_1.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$g(f_1 + f_2) g \geqslant \frac{1}{2} g,$$

$$g_2f_1g_2 + g_2f_2g_2 \geqslant \frac{1}{2} g_2$$

și

$$g_2 f_1 g_2 \leqslant \frac{1}{4} g_2,$$

deducem

$$g_2 f_2 g_2 \geqslant \frac{1}{4} g_2.$$

Raționînd ca mai sus, rezultă

$$g_2 \prec f_2 \prec e_2.$$

În sfîrșit, avem

$$e(f_1 + f_2)\, e(1 - g) \leqslant \frac{1}{2}(1 - g),$$

$$e_1 e(f_1 + f_2)\, e(1 - g) e_1 \leqslant \frac{1}{2}\, e_1(1 - g)\, e_1,$$

$$e_1(1 - g)\, e_1 \leqslant \frac{1}{2}\, e_1(1 - g)\, e_1,$$

$$e_1(1 - g)\, e_1 = 0,$$

$$(1 - g)\, e_1 = 0,$$

$$e_1 \leqslant g = g_1 + g_2.$$

Analog,

$$e_2 \leqslant g_1 + g_2.$$

(ii) Cazul (S) este trivial, iar cazurile (S), (C) și (S), (O) se tratează ușor, folosind corolarul 2.5.

Presupunem acum că A satisface axiomele (S), (C), (E). Cum B satisface pe (S) , (C), rămîne de arătat că satisface și pe (E).

Fie g, $h \in B$ proiectori, astfel încît $g \prec h \prec g$. Atunci există proiectori $g_0, h_0 \in B$, astfel încît

$$g_0 \leqslant h_0 \leqslant g \sim g_0,$$

$$h_0 \sim h.$$

Conform corolarului 2.5, există un proiector $e \in A$, pentru care

$$\pi(e) = g.$$

Aplicînd lema 2.4, există o izometrie parţială $v \in A$, astfel încît

$$v^*v \leqslant e,$$

$$vv^* \leqslant e,$$

$$\pi(v^*v) = g,$$

$$\pi(vv^*) = g_0.$$

Cum A satisface pe (C), există un proiector central $p \in A$, pentru care

$$(e - v^*v)p \prec (e - vv^*)p,$$

$$(e - v^*v)(1 - p) \succ (e - vv^*)(1 - p).$$

Fie $w \in A$ o izometrie parţială, astfel încît

$$w^*w = (e - v^*v)p,$$

$$ww^* \leqslant (e - vv^*)p.$$

Notăm

$$u = vp + w + e(1 - p).$$

Se verifică uşor că

$$u^*u = e,$$

$$uu^* \leqslant e.$$

Fie $e_0 = uu^*$.

Egalitatea

$$\pi(w)^*\pi(w) = \pi(w^*w) = (\pi(e) - \pi(v^*v))\,\pi(p) = 0$$

implică

$$\pi(w) = 0.$$

Pe de altă parte, cum

$$(e - v^*v)(1 - p) \succ (e - vv^*)(1 - p),$$

avem

$$(\pi(e) - \pi(v^*v))\,(1 - \pi(p)) \succ (\pi(e) - \pi(vv^*))\,(1 - \pi(p)),$$

$$0 \succ (g - g_0)\,(1 - \pi(p)),$$

$$(g - g_0)\,(1 - \pi(p)) = 0,$$

$$g(1 - \pi(p)) = g_0(1 - \pi(p)).$$

Astfel

$$\pi(e_0) = \pi(uu^*) =$$

$$= \pi(vv^*)\pi(p) + \pi(ww^*) + \pi(e)(1 - \pi(p)) =$$

$$= g_0\pi(p) + g(1 - \pi(p)) =$$

$$= g_0\pi(p) + g_0(1 - \pi(p)) =$$

$$= g_0.$$

Cum

$$e_0 \leq e,$$

$$\pi(e) = g,$$

$$\pi(e_0) = g_0,$$

$$g_0 \leq h_0 \leq g,$$

aplicînd corolarul 2.5, găsim un proiector $f_0 \in A$ cu

$$e_0 \leq f_0 \leq e,$$

$$\pi(f_0) = h_0.$$

Deoarece $e \sim e_0$, axioma (E) în A implică $e \sim f_0$. Astfel

$$g = \pi(e) \sim \pi(f_0) = h_0 \sim h,$$

q.e.d.

Axiomele introduse în acest paragraf își au originea în dorința de a elimina complicațiile în tratarea C^*-algebrelor cît ale AW^*-algebrelor. Considerăm interesantă problema de a găsi o caracterizare intrinsecă a acelor C^*-algebre, care sînt cîturi de AW^*-algebre.

Pe de altă parte, principiul selecției continue implică că orice AW^*-algebră comutativă este un cît al bidualului său, adică al unei W^*-algebre comutative. Ne întrebăm dacă orice AW^*-algebră este un cît al unei W^*-algebre. Un răspuns pozitiv la această întrebare ar constitui o variantă necomutativă a principiului selecției continue și ar implica, de exemplu, că orice AW^*-factor finit este W^*-factor. Această afirmație nu contrazice rezultatul lui Dyer din [10], deoarece Dyer a construit un AW^*-factor de tip III care nu este W^*-factor. Conjecturăm că, orice AW^*-algebră semifinită, al cărei centru este W^*-algebră, este W^*-algebră.

Corolarul 2.5 a fost demonstrat în cazul A AW^*-algebră de Wright în [51]. Lema 2.4 apare în cazul AW^*-algebră în [48], iar în cazul A C^*-algebră Rickart (pentru orice $x \in A$ există un proiector $e \in A$ cu ${}^{\perp}\{x\} = Ae$) într-un manuscris nepublicat al lui S. Teleman. Remarcăm că demonstrația lui S. Teleman este în esență aceeași cu a noastră.

Afirmația 3) din teorema 2.9 în cazul W^*-algebrelor aparține lui Dixmier și este expusă de exemplu în [8]. Demonstrația noastră este aproape identică cu cea a lui Dixmier. Remarcăm că într-un cadru apropiat de al nostru, acest rezultat este expus în [15].

Pentru teorema 2.12 în cazul AW^*-factorilor trimitem la [41] și [52], iar pentru aceeași teoremă în cazul C^*-factorilor, care sînt cîturi de W^*-algebre, cităm pe [1]. Corolarul 2.13 este inspirat din [8], Chap. III, § 5, ex. 3.

În AW^*-algebre p-idealele au fost introduse și teorema 2.15 a fost demonstrată de Wright în [51]. Definiția noastră este ușor modificată față de cea a lui Wright. În legătură cu p-ideale mai cităm [53] și capitolul 5 din [4].

§ 3. C^*-REDUCEREA ȘI AXIOMA CENTRALĂ

Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z are unitate, și Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z. Reamintim că, pentru orice $t \in \Omega$, notăm prin $[t]$ idealul închis al lui A, generat de t, prin A_t C^*-algebra cît $A/_{[t]}$ și prin x_t imaginea lui $x \in A$ în A_t.

3.1. TEOREMĂ (de C^* — reducere generală). *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z satisface pe (S), Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z și $x \in A$. Atunci*

1) *aplicația $t \mapsto \|x_t\|$ este superior semicontinuă și*

2) $\|x\| = \sup\limits_{t \in \Omega} \|x_t\|$.

Demonstrație. 1) este tocmai afirmația lemei II. 3.1.

Arătăm acum că $\bigcap\limits_{t \in \Omega} [t] = \{0\}$, raționînd analog ca în cazul demonstrației lemei II.3.11.

Fie $a \in \bigcap\limits_{t \in \Omega} [t]$ și $\varepsilon > 0$.

Pentru orice $t_0 \in \Omega$ există $z_1, \ldots, z_n \in t$ și $a_1, \ldots, a_n \in A$, astfel încît

$$\left\| a - \sum_{i=1}^{n} z_i \, a_i \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Mulțimea

$$V_0 = \left\{ t \mid t \in \Omega, \quad |z_i(t)| < \frac{\varepsilon}{n \, \| a_i \|}, \, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

este o vecinătate deschisă a lui t_0. Fie f_0 o funcție continuă pe Ω, $0 \leqslant f_0 \leqslant 1$, care ia valoarea 1 în t_0 și se anulează în afara lui V_0. Cum Z satisface pe (S), există un proiector $p_0 \in Z$ cu

$$f_0 p_0 \geqslant \frac{1}{2} p_0 ,$$

$$f_0(1 - p_0) \leqslant \frac{1}{2} (1 - p_0).$$

Atunci p_0 este funcţia caracteristică a unei vecinătăţi deschise şi închise a lui t_0, inclusă în V_0. Astfel pentru orice i

$$\|p_0 z_i a_i\| \leqslant \|p_0 z_i\| \, \|a_i\| \leqslant$$

$$< \sup_{t \in V_0} |z_i(t)| \, \|a_i\| \leqslant$$

$$< \frac{\varepsilon}{n},$$

deci

$$\|p_0 a\| < \|p_0 a - \sum_{i=1}^{n} p_0 z_i a_i\| + \|\sum_{i=1}^{n} p_0 z_i a_i\| <$$

$$\leqslant \|a - \sum_{i=1}^{n} z_i a_i\| + \sum_{i=1}^{n} \|p_0 z_i a_i\| <$$

$$\leqslant 2\varepsilon.$$

Folosind compacitatea lui Ω, există proiectori ortogonali $p_1 \ldots, p_k \in Z$, $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$, astfel încît pentru orice j

$$\|p_j a\| < 2\varepsilon.$$

Prin urmare

$$\|a\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \|p_j a\| < 2\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, $\|a\| = 0$, deci $a = 0$. Astfel $\bigcap_{t \in \Omega} [t] = \{0\}$.

Definim $*$ — homomorfismul $\pi : A \to \prod_{t \in \Omega} A_t$ prin

$$\pi(x) = (x_t)_{t \in \Omega}.$$

Cum $\bigcap_{t \in \Omega} [t] = \{0\}$, π este injectiv, deci este o izometrie. Astfel pentru orice $x \in A$

$$\|x\| = \sup_{t \in \Omega} \|x_t\|.$$

q.e.d.

Teorema următoare ne furnizează criterii pentru ca aplicaţiile $t \to \|x_t\|$ să fie continue.

3.2. Teoremă (de C^*-reducere continuă). *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră şi Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(i) *Pentru orice $x \in A$ aplicaţia $t \to \|x_t\|$ este continuă.*

(ii) *A, considerat ca Z-modul are proprietatea de dualitate.*

(iii) *Dacă $x \in A$ şi există o familie $(p_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori ortogonali cu suprem 1 în Z, astfel încît*

$$xp_\iota = 0, \quad \iota \in I,$$

atunci

$$x = 0.$$

Demonstraţie. Conform teoremelor 3.1. şi II.3.6., (i) implică pe (ii). Folosind corolarul II.3.7., se vede uşor că (ii) implică pe (i). Rămîne să arătăm că (iii) implică pe (i).

Presupunem deci că (iii) este adevărată.

Fie $a \in A$ pozitiv, $t_0 \in \Omega$ şi $\varepsilon > 0$. Conform teoremei 3.1, aplicaţia $t \to \|a_t\|$ este superior semicontinuă, deci mulţimea

$$U = \{t \mid t \in \Omega\,,\ \|a_t\| < \|a_{t_0}\| - \varepsilon\}$$

este deschisă.

Presupunem că t_0 aparţine închiderii $\overline{U}$ a lui U. Considerăm o familie maximală (V_ι) de părţi deschise, închise, disjuncte ale lui Ω, incluse în U. Notăm prin p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι. Atunci $p_0 = \bigvee_\iota p_\iota$ este funcţia caracteristică a lui $\overline{U}$. Conform teoremei 3.1, pentru orice ι

$$\|ap_\iota\| = \sup_{t \in V_\iota} \|a_t\| \leqslant \|a_{t_0}\| - \varepsilon,$$

deci

$$ap_\iota \leqslant \|a_{t_0}\| - \varepsilon,$$

$$(\|a_{t_0}\| - \varepsilon - a)^- p_\iota = 0.$$

Folosind (iii), deducem

$$(\|a_{t_0}\| - \varepsilon - a)^- p_0 = 0,$$

$$(\|a_{t_0}\| - \varepsilon - a) p_0 \geqslant 0,$$

$$ap_0 \leqslant \|a_{t_0}\| - \varepsilon.$$

Cum $t_0 \in \overline{U}$, rezultă

$$\|a_{t_0}\| \leqslant \|a_{t_0}\| - \varepsilon,$$

ceea ce este absurd.

Astfel t_0 aparţine complementarei V_1 a lui $\overline{U}$ în Ω.

Deoarece $t \to \|a_t\|$ este superior semicontinuă.

$$V_2 = \{t \mid t \in \Omega,\ \|a_t\| < \|a_{t_0}\| + \varepsilon\}$$

este o vecinătate deschisă a lui t_0. Notînd $V = V_1 \cap V_2$, V este o vecinătate deschisă a lui t_0 şi pentru orice $t \in V$,

$$\|a_{t_0}\| - \varepsilon < \|a_t\| \leq \|a_{t_0}\| + \varepsilon.$$

În concluzie, aplicaţia $t \to \|a_t\|$ este continuă.

În sfîrşit, dacă $x \in A$ este oarecare, folosind afirmaţia precedentă, aplicaţia $t \to \|x_t\| = \|(x^*x)_t\|^{\frac{1}{2}}$ este continuă.
Astfel afirmaţia (i) este adevărată.

q. e. d.

Fie A o C^*-algebră, centrul căreia este o AW^*-algebră Z. Considerăm pentru A următoarea axiomă:

(Z) (Axioma centrală). *Dacă $(p_\iota)_{\iota \in I}$ este o familie de proiectori ortogonali cu suprem 1 în Z şi*

$$x_\iota \in Ap_\iota, \quad \iota \in I,$$

$$\sup_{\iota \in I} \|x_\iota\| < +\infty,$$

atunci există un $x \in A$ unic cu

$$xp_\iota = x_\iota, \quad \iota \in I.$$

Conform teoremei 3.2, axioma (Z) este echivalentă cu faptul că A, considerat ca Z-modul, are proprietatea lipirii şi proprietatea de dualitate. Conform lemei II.4.15 şi teoremei II.3.12, orice AW^*-algebră satisface pe (Z).

Fie A şi Z ca mai sus şi presupunem că A satisface axioma (Z). Dacă $(p_\iota)_{\iota \in I}$ este o familie de proiectori ortogonali în Z, p_0 este supremul ei în Z şi

$$x_\iota \in Ap_\iota, \quad \iota \in I,$$

$$\sup_{\iota \in I} \|x_\iota\| < +\infty,$$

atunci există un $x \in A$ unic cu

$$xp_\iota = x_\iota, \quad \iota \in I,$$

$$xp_0 = x.$$

Notăm

$$x = \sum_{\iota \in I} x_\iota.$$

Dacă x este un element al lui A, atunci, conform teoremei 3.2, mulţimea

$$\Omega(x) = \{t \mid t \in \Omega, \ \|x_t\| > 0\}$$

este deschisă. Notăm funcţia caracteristică a închiderii lui $\Omega(x)$ prin $z(x)$ şi o numim suportul central al lui x. $z(x)$ este infimul în Z al mulţimii

$$\{p \mid p \in Z \text{ proiector}, \ xp = x\}.$$

Dacă $e \in A$ este un proiector, cum

$$\Omega(e) = \{t \mid t \in \Omega, \ \|e_t\| > 0\} = \{t \mid t \in \Omega, \ \|e_t\| = 1\},$$

deducem că $\Omega(e)$ este deschisă şi închisă. Astfel $z(e)$ este funcţia caracteristică a lui $\Omega(e)$.

Remarcăm că, pentru orice proiector $e \in A$, aplicaţia $z \mapsto ze$ este un $*$ — izomorfism al lui $Zz(e)$ pe Ze.

Tăria axiomei centrale este ilustrată de teorema următoare:

3.3. Teoremă. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră şi A satisface pe (S), (Z), Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $e, f, \in A$ proiectori şi $\Gamma \subset \Omega$.*
Dacă

$$e_t \sim f_t, \ t \in \Gamma,$$

atunci există o parte deschisă şi închisă $V \supset \Gamma$ a lui Ω, astfel încît, notînd prin p funcţia caracteristică a lui V,

$$ep \sim fp.$$

Demonstraţie. Fie $(V_\iota)_{\iota \in I}$ o familie maximală de părţi deschise, închise, disjuncte ale lui Ω, astfel încît, notînd prin p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι,

$$ep_\iota \sim fp_\iota, \quad \iota \in I.$$

Notăm prin V închiderea lui $\bigcup_{\iota \in I} V_\iota$, iar prin p funcţia caracteristică a lui V.

Presupunem că există $t_0 \in \Gamma \setminus V$. Conform lemei 2.4, există o izometrie parţială $v_0 \in A$, astfel încît

$$v_0^* v_0 \leqslant e,$$

$$v_0 v_0^* \leqslant f,$$

$$(v_0^* v_0)_{t_0} = e_{t_0},$$

$$(v_0 v_0^*)_{t_0} = f_{t_0}.$$

Cum A satisface pe (Z), aplicînd teorema 3.2, există o vecinătate deschisă şi închisă V_0 a lui t_0, $V_0 \cap V = \emptyset$, astfel încît

$$\|e_t - (v_0^* v_0)_t\| < 1 > \|f_t - (v_0 v_0^*)_t\|, \quad t \in V_0.$$

$e_t - (v_0^* v_0)_t$ şi $f_t - (v_0 v_0^*)_t$ fiind proiectori,

$$\|e_t - (v_0^* v_0)_t\| = \|f_t - (v_0 v_0^*)_t\| = 0, \ t \in V_0.$$

Notînd prin p_0 funcţia caracteristică a lui V_0 şi aplicînd teorema 3.1,

$$v_0^* v_0 p_0 = ep_0,$$

$$v_0 v_0^* p_0 = fp_0,$$

deci

$$ep_0 \sim fp_0,$$

în contradicţie cu maximalitatea familiei $(V_\iota)_{\iota \in I}$.

Astfel $\Gamma \subset V$. Dacă $v_\iota \in Ap_\iota$ sînt izometrii parţiale cu

$$v_\iota^* v_\iota = ep_\iota,$$

$$v_\iota v_\iota^* = fp_\iota,$$

atunci, notînd $v = \sum_{\iota \in I} v_\iota$, avem

$$v^* v = ep,$$

$$vv^* = fp.$$

Prin urmare,

$$ep \sim fp.$$

q.e.d.

Ca o urmare a teoremei 3.3, remarcăm că dacă $\{t \mid t \in \Omega, A_t$ satisface pe $(E)\}$ este densă în Ω, atunci A satisface pe (E).

Fie $\mathcal{I}$ un ideal bilateral închis al lui A. Atunci imaginea $\mathcal{I}_t$ a lui $\mathcal{I}$ în A_t este un ideal bilateral închis al lui A_t. Considerînd pe $A/\mathcal{I}$ ca Z-modul, definim $(A/\mathcal{I})_t$ ca în capitolul II, § 3. Notăm prin $x_\mathcal{I}$ imaginea lui $x \in A$ în $A/\mathcal{I}$, prin $(x_\mathcal{I})_t$ imaginea lui $x_\mathcal{I}$ în $(A/\mathcal{I})_t$ şi prin $x_{\mathcal{I}_t}$ imaginea lui x_t în $A_t/\mathcal{I}_t$. Se verifică uşor că, pentru orice t,

$$\|(x_\mathcal{I})_t\| = \|x_{\mathcal{I}_t}\|.$$

Teoremele următoare extind teoremele 3.1. şi 3.2, iar demonstraţiile lor sînt similare.

3.4. Teoremă (relativizată de C^*-reducere generală). *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z satisface pe (S), Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathcal{I}$ un ideal bilateral al lui A şi $x \in A$. Atunci*

1) *aplicaţia $t \to \|x_{\mathcal{I}_t}\|$ este superior semicontinuă şi*
2) $\|x_\mathcal{I}\| = \sup_{t \in \Omega} \|x_{\mathcal{I}_t}\|$.

3.5. TEOREMĂ (relativizată de C^* — reducere continuă). *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi $\mathscr{I}$ un ideal bilateral închis al lui A. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) *Pentru orice $x \in A$ aplicaţia $t \to \|x_{\mathscr{I}_t}\|$ este continuă,*

(ii) *$A/\mathscr{I}$, considerat ca Z-modul, are proprietatea de dualitate.*

(iii) *Dacă $x \in A$ şi există o familie $(p_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori ortogonali cu suprem 1 în Z, astfel încît*

$$xp_\iota \in \mathscr{I}, \qquad \iota \in I,$$

atunci

$$x \in \mathscr{I}.$$

Fie A o C^*-algebră, centrul căreia Z este o AW^*-algebră şi care satisface pe (Z). Spunem că un ideal bilateral închis $\mathscr{I}$ al lui A are proprietatea lipirii centrale, dacă pentru orice familie $(p_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori ortogonali în Z şi orice

$$y_\iota \in \mathscr{I} p_\iota, \qquad \iota \in I,$$

$$\sup_{\iota \in I} \|y_\iota\| < +\infty,$$

avem

$$\sum_{\iota \in I} y_\iota \in \mathscr{I}.$$

Cu alte cuvinte, $\mathscr{I}$ are proprietatea lipirii centrale dacă, considerat ca Z-modul, are proprietatea lipirii.

3.6. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^* — algebră şi A satisface pe (Z), Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{I} \subset A$ un ideal bilateral închis cu proprietatea lipirii centrale, $e \in A$ un proiector şi $\Gamma \subset \Omega$. Dacă*

$$e_t \in \mathscr{I}_t, \qquad t \in \Gamma,$$

atunci există o parte deschisă şi închisă $V \supset \Gamma$ a lui Ω, astfel încît, notînd prin p funcţia caracteristică a lui V,

$$ep \in \mathscr{I}.$$

Demonstraţie. Fie $(V_\iota)_{\iota \in I}$ o familie maximală de părţi deschise, închise, disjuncte ale lui Ω, astfel încît, notînd prin p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι,

$$ep_\iota \in \mathscr{I}, \qquad \iota \in I.$$

Notăm prin V închiderea lui $\bigcup_{\iota \in I} V_\iota$, iar prin p funcţia caracteristică a lui V.

Presupunem că există $t_0 \in \Gamma \setminus V$. Cum

$$\|e_{\mathscr{I}_{t_0}}\| = 0,$$

conform teoremei 3.5, există o vecinătate deschisă şi închisă V_0 a lui t_0, $V_0 \cap V = \emptyset$, astfel încît

$$\|e_{\mathscr{I}_t}\| < 1, \ t \in V_0,$$

deci

$$\|e_{\mathscr{I}_t}\| = 0, \ t \in V_0.$$

Notăm prin p_0 funcţia caracteristică a lui V_0. Conform teoremei 3.4,

$$\|(ep_0)_{\mathscr{I}}\| = \sup_{t \in V_0} \|e_{\mathscr{I}_t}\| = 0,$$

$$(ep_0)_{\mathscr{I}} = 0,$$

$$ep_0 \in \mathscr{I},$$

în contradicţie cu maximalitatea familiei $(V_\iota)_{\iota \in I}$.

Astfel $\Gamma \subset V$. Deoarece

$$ep = \sum_{\iota \in I} ep_\iota$$

şi $\mathscr{I}$ are proprietatea lipirii centrale,

$$ep \in \mathscr{I}.$$

q. e. d.

Rezultatul următor, o teoremă de comparaţie pentru ideale cu proprietatea lipirii centrale, este o extensie globală a teoremei 2.12. Demonstraţia sa este o aplicaţie tipică a C^*-reducerii.

3.7. Corolar. *Fie A o C^* — algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră şi A satisface pe (S), (C), (Z). Atunci pentru oricare ideale bilaterale închise cu proprietatea lipirii centrale $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2 \subset A$ există un proiector central p, pentru care*

$$\mathscr{I}_1 p \subset \mathscr{I}_2 p,$$

$$\mathscr{I}_1(1 - p) \supset \mathscr{I}_2(1 - p).$$

Demonstraţie. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Conform corolarului 2.11, A_t sînt C^*-factori şi, conform teoremei 2.16, A_t satisfac pe (S), (C).

Fie

$$\Gamma_1 = \{t \mid t \in \Omega, (\mathscr{I}_1)_t \subset (\mathscr{I}_2)_t\}.$$

Aplicînd teorema 3.6, pentru orice proiector $e \in \mathscr{I}_1$ există o parte închisă $F_1(e) \supset \Gamma_1$ a lui Ω, astfel încît

$$e_t \in (\mathscr{I}_2)_t, \quad t \in F_1(e).$$

Aplicînd lema 2.3,

$$(\mathscr{I}_1)_t \subset (\mathscr{I}_2)_t, \qquad t \in \bigcap_{\substack{e \in \mathscr{I}_1 \\ \text{proiector}}} F_1(e).$$

Cum $\Gamma_1 \subset \bigcap\limits_{\substack{e \in \mathscr{I}_1 \\ \text{proiector}}} F_1(e)$, deducem

$$\Gamma_1 = \bigcap_{\substack{e \in \mathscr{I}_1 \\ \text{proiector}}} F_1(e),$$

deci Γ_1 este închisă.

Notăm $\Gamma_2 = \Omega \setminus \Gamma_1$. Conform teoremei 2.12,

$$(\mathscr{I}_2)_t \subset (\mathscr{I}_1)_t, \qquad t \in \Gamma_2.$$

Raționînd ca mai sus, deducem

$$(\mathscr{I}_2)_t \subset (\mathscr{I}_1)_t, \qquad t \in \overline{\Gamma}_2 = \Omega \setminus \mathring{\Gamma}_1.$$

Cum Γ_1 este închisă, $\mathring{\Gamma}_1$ este deschisă și închisă.

Notînd prin p funcția caracteristică a lui $\mathring{\Gamma}_1$, lema 2.3 și teorema 3.6 implică

$$\mathscr{I}_1 p \subset \mathscr{I}_2 p,$$

$$\mathscr{I}_1(1-p) \supset \mathscr{I}_2(1-p).$$

q.e.d.

3.8. Corolar. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră și A satisface pe (S), (Z), iar $\mathscr{I} \subset A$ un ideal bilateral închis cu proprietatea lipirii centrale. Atunci există proiectori centrali ortogonali unici p_1, p_2 cu proprietățile*

$$\mathscr{I} p_1 = \{0\},$$

$$\mathscr{I} p_2 = A p_2,$$

$\{0\} \neq \mathscr{I}_p \neq Ap$, *oricare ar fi proiectorul central nenul* $p \leqslant 1 - p_1 - p_2$.

Demonstrație. Fie Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z.

Notăm

$$\Gamma_1 = \{t \mid t \in \Omega,\ \mathscr{I}_t = \{0\}\},$$

$$\Gamma_2 = \{t \mid t \in \Omega,\ \mathscr{I}_t = A_t\}.$$

Fie $(V_\iota)_{\iota \in I}$ o familie maximală de părţi deschise, închise disjuncte ale lui Ω, astfel încît pentru orice $\iota \in I$ există un proiector $e_\iota \in \mathscr{I}$ cu

$$(e_\iota)_t \neq 0, \; t \in V_\iota .$$

Notăm prin V închiderea lui $\bigcup\limits_{\iota \in I} V_\iota$.

Presupunem că există $t_0 \in (\Omega \setminus \Gamma_1) \setminus V$. Atunci există $a \in \mathscr{I}$ pozitiv cu

$$a_{t_0} \neq 0.$$

Fie $e_0 \in A$ un proiector care comută cu a şi pentru care

$$ae_0 \geqslant \frac{\| a_{t_0} \|}{2} e_0 ,$$

$$a(1 - e_0) \leqslant \frac{\| a_{t_0} \|}{2} (1 - e_0).$$

Cum ae_0 este invertibil în e_0Ae_0, $e_0 \in \mathscr{I}$. Evident,

$$(e_0)_{t_0} \neq 0.$$

Conform teoremei 3.2 , există o vecinătate deschisă şi închisă V_0 a lui t_0, $V_0 \cap V = \emptyset$, astfel încît

$$(e_0)_t \neq 0 \qquad t \in V_0 ,$$

în contradicţie cu maximalitatea lui $(V_\iota)_{\iota \in I}$.

Astfel $\Omega \setminus \Gamma_1 \subset V$. Fie p_ι funcţia caracteristică a lui V_ι şi

$$e = \sum_{\iota \in I} e_\iota \, p_\iota .$$

Deoarece $\mathscr{I}$ are proprietatea lipirii centrale, $e \in \mathscr{I}$, iar conform teoremei 3.2,

$$e_t \neq 0, \qquad t \in V. \qquad ,$$

Prin urmare $\Omega \setminus \Gamma_1 = V$ este deschisă şi închisă, deci la fel este şi Γ_1.

Pe de altă parte, conform teoremei 3.5, mulţimea

$$\Gamma_2 = \{ t \mid t \in \Omega, \| 1_{\mathscr{I}_t} \| > 0\} = \{t \mid t \in \Omega, \; \| 1_{\mathscr{I}_t} \| = 1\}$$

este de asemenea deschisă şi închisă. Notînd prin p_1 funcţia caracteristică a lui Γ_1, iar prin p_2 funcţia caracteristică a lui Γ_2, se verifică uşor că afirmaţiile lemei sînt adevărate.

q. e. d.

În condiţiile corolarului 3.8, proiectorul $1 - p_1$ se numeşte suportul lui $\mathscr{I}$ şi se notează $z(\mathscr{I})$. Proiectorul p_2 îl notăm $z_s(\mathscr{I})$ şi îl numim suportul tare al lui $\mathscr{I}$.

Remarcăm că, dacă A satisface pe (Z), atunci orice ideal bilateral închis $\mathscr{I} \subset A$ este conținut într-un cel mai mic ideal bilateral închis cu prioritatea lipirii centrale $<\mathscr{I}>$. În anumite cazuri $<\mathscr{I}>$ se descrie ușor :

3.9. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este W^*-algebră și A satisface pe (Z), iar $\mathscr{I} \subset A$ un ideal bilateral închis. Atunci*

$$<\mathscr{I}> = \left\{ \sum_{\iota\in I} y_\iota \,\middle|\, \begin{array}{l} y_\iota \in \mathscr{I} p_\iota, \sup\limits_{\iota\in I} \|y_\iota\| < +\infty, (p_\iota)_{\iota\in I} \text{ o familie de proiec-} \\ \text{tori ortogonali din } Z. \end{array} \right\}$$

Demonstrație. Notăm partea dreaptă a egalității de mai sus prin $\mathscr{I}_0$. Se vede ușor că $\mathscr{I}_0$ este un ideal bilateral.

Fie (y_n) un șir din $\mathscr{I}_0$, care converge în normă către un $y \in A$. Pentru orice n există o partiție $(p_{\iota_n})_{\iota_n} \in I_n$ a unității în Z, în sensul din capitolul II, § 2, astfel încît

$$y_n\, p_{\iota_n} \in \mathscr{I}, \quad \iota_n \in I_n.$$

Conform principiului șirului de partiții al unității există o partiție $(p_\iota)_{\iota\in I}$ a unității în Z, subordonată fiecărei partiții $(p_{\iota_n})_{\iota_n\in I_n}$. Pentru orice n

$$y_n\, p_\iota \in \mathscr{I}, \quad \iota\in I,$$

deci

$$y p_\iota \in \mathscr{I}, \quad \iota \in I.$$

Astfel $y \in \mathscr{I}_0$.

Prin urmare $\mathscr{I}_0$ este un ideal bilateral închis, care conține pe $\mathscr{I}$ și este conținut în $<\mathscr{I}>$. Se vede ușor că $\mathscr{I}_0$ are proprietatea lipirii centrale, deci

$$<\mathscr{I}> = \mathscr{I}_0.$$

q. e. d.

Fie A o C^*-algebră și Z centrul său. Presupunem că Z este AW^*-algebră și A satisface pe (Z). Spunem că un p-ideal $\mathscr{P}$ în A are proprietatea lipirii centrale, dacă pentru orice familie $(p_\iota)_{\iota\in I}$ de proiectori ortogonali în Z și orice

$$e_\iota \in \mathscr{P} p_\iota, \quad \iota \in I$$

avem

$$\sum_{\iota\in I} e_\iota \in \mathscr{P}.$$

3.10. TEOREMĂ. Fie A *o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră și A satisface pe (S), (O), (Z). Fie mai departe $\mathscr{P} \subset A$ un p-ideal, iar $\mathscr{I} \subset A$ idealul bilateral închis, corespunzător lui $\mathscr{P}$ conform teoremei* 2.15. *Atunci $\mathscr{I}$ are proprietatea lipirii centrale dacă și numai dacă $\mathscr{P}$ o are.*

Demonstrație. Evident, dacă $\mathscr{I}$ are proprietatea lipirii centrale, atunci și $\mathscr{P}$ o are.

Presupunem acum că $\mathscr{P}$ are proprietatea lipirii centrale. Este suficient să arătăm că, dacă $(p_\iota)_{\iota\in I}$ este o familie de proiectori ortogonali în Z, și $a_\iota \in \mathscr{I} p_\iota$ sînt elemente pozitive cu $\sup\limits_{\iota\in I} \|a_\iota\| < +\infty$, atunci $\sum\limits_{\iota\in I} a_\iota \in \mathscr{I}$.

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru orice $\iota \in I$ există un proiector $e_\iota \in A$, care comută cu a_ι şi pentru care

$$a_\iota e_\iota \geqslant \varepsilon e_\iota,$$

$$a_\iota(1 - e_\iota) \leqslant \varepsilon(1 - e_\iota).$$

$a_\iota e_\iota$ fiind invertibil în $e_\iota A e_\iota$, $e_\iota \in \mathscr{P}p_\iota$. Cum $\mathscr{P}$ are proprietatea lipirii centrale, deducem

$$e = \sum_{\iota \in I} e_\iota \in \mathscr{P}.$$

Astfel

$$\left(\sum_{\iota \in I} a_\iota\right) e \in \mathscr{I}.$$

Deoarece

$$\| \sum_{\iota \in I} a_\iota - \left(\sum_{\iota \in I} a_\iota\right) e \| \leqslant \varepsilon$$

şi $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem

$$\sum_{\iota \in I} a_\iota \in \mathscr{I}.$$

q. e. d.

Dacă A satisface axiomele (S), (C), atunci, conform corolarului 2.11, A_ι sînt C^*- factori. Ne întrebăm în ce condiţii C^*- factorii A_ι au $*$- reprezentări ireductibile injective, analog W^*- factorilor.

Fie A o C^*- algebră. Un proiector $e \in A$ se numeşte finit, dacă orice familie de proiectori ortogonali, echivalenţi, nenuli, mai mici sau egali ca e, este finită.

3.11. Lemă. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*- - algebră şi A satisface pe (Z). Atunci există un proiector finit $e \in A$, astfel încît $A(1 - z(e))$ nu conţine proiectori finiţi nenuli.*

Demonstraţie. Fie (e_ι) o familie maximală de proiectori finiţi cu suporturi centrale ortogonale din A. Notăm

$$e = \sum_\iota e_\iota.$$

Se verifică uşor că e este finit, iar din maximalitatea familiei (e_ι) rezultă că $A(1 - z(e))$ nu conţine proiectori finiţi nenuli.

q. e. d.

Fie A o C^*- algebră, al cărei centru este AW^*- algebră şi care satisface pe (Z). Un proiector $e \in A$ se numeşte abelian, dacă pentru orice proiector $f < e$ avem $f = ez(f)$. Evident, orice proiector abelian este finit.

Dacă A satisface în plus pe (S), (C), atunci $e \in A$ este abelian dacă şi numai dacă eAe este comutativă. Prin analogie, numim un proiector $e \in A$ abelian modulo echivalenţă, dacă pentru orice proiector $f \prec e$ avem $f \sim ez(f)$.

3.12. LEMĂ. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^* - algebră şi A satisface pe (Z). Atunci există un proiector abelian modulo echivalenţă $e \in A$, astfel încît $A(1 - z(e))$ nu conţine proiectori abelieni modulo echivalenţă nenuli.*

Demonstraţie. Fie (e_ι) o familie maximală de proiectori abelieni modulo echivalenţă cu suporturi centrale orotogonale din A. Notăm

$$e = \sum_\iota e_\iota.$$

Se arată uşor că e este abelian modulo echivalenţă, iar din maximalitatea familiei (e_ι) rezultă că $A(1 - z(e))$ nu conţine proiectori abelieni modulo echivalenţă nenuli.

q. e. d.

Presupunînd axioma (Z) satisfăcută, spunem că A este semifinită, dacă există un proiector finit $e \in A$ cu $z(e) = 1$. Dacă există un proiector abelian $e \in A$ cu $z(e) = 1$, spunem că A este de tip I sau discretă, iar dacă există un proiector abelian modulo echivalenţă $e \in A$ cu $z(e) = 1$, spunem că A este discretă modulo echivalenţă.

3.13. LEMĂ. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*- - algebră şi A satisface pe (C), (Z). Dacă A este semifinită şi discretă modulo echivalenţă, atunci A este discretă.*

Demonstraţie. Fie $e_1 \in A$ un proiector finit cu $z(e_1) = 1$ şi $e_2 \in A$ un proiector abelian modulo echivalenţă cu $z(e_2) = 1$.
Conform axiomei (C), există un proiector $p \in Z$, astfel încît

$$e_1 p \prec e_2 p,$$

$$e_1(1 - p) \succ e_2(1 - p).$$

Notăm

$$e = e_1 p + e_2(1 - p).$$

Deoarece $e \prec e_1$, e este finit. Pe de altă parte, cum $e \prec e_2$ şi $z(e) = 1$, $e \sim e_2 z(e) = e_2$. Astfel e este abelian modulo echivalenţă.

Fie $f \leqslant e$ un proiector. Atunci $f \sim ez(f)$. Fie $v \in A$ o izometrie parţială cu

$$v^* v = f$$

$$vv^* = ez(f).$$

Definim prin inducţie

$$f_1 = ez(f) - f,$$

$$f_{n+1} = v^* f_n v, \qquad n \geqslant 1.$$

Proiectorii $f_1, f_2, \ldots$ sînt ortogonali, echivalenţi şi mai mici sau egali ca e. Cum e este finit, $f_1 = 0$, adică $f = ez(f)$.

Astfel e este un proiector abelian cu $z(e) = 1$, deci A este discretă.

q. e. d.

Presupunînd axioma (Z) satisfăcută, spunem că A este de tip II, dacă A este semifinită şi nu conţine proiectori abelieni modulo echivalenţă nenuli. Spunem că A este de tip III, dacă A este discretă modulo echivalenţă şi nu conţine proiectori finiţi nenuli. În sfîrşit, spunem că A este excepţională, dacă nu conţine proiectori finiţi nenuli şi proiectori abelieni modulo echivalenţă nenuli.

Din lemele 3.11, 3.12 şi 3.13 se deduce uşor:

3.14. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră şi A satisface pe (C), (Z). Atunci există proiectori centrali ortogonali unici p_1, p_2, p_3, astfel încît*

$$Ap_1 \text{ este de tip I},$$
$$Ap_2 \text{ este de tip II},$$
$$Ap_3 \text{ este de tip III},$$
$$A(1 - p_1 - p_2 - p_3) \text{ este excepţională}.$$

Dacă A nu are parte excepţională, spunem că A este clasificabilă. Conform [8], Chap. III, § 8, Corp. 5, orice W^*- algebră este clasificabilă.

3.15. LEMĂ. *Fie A o C^*- algebră cu (C), $e \in A$ un proiector finit şi $f \in A$ un proiector nenul oarecare. Atunci există un proiector central nenul p şi proiectori ortogonali $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$, astfel încît*

$$f_i \prec f, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$ep = \sum_{i=0}^{n} f_i.$$

Demonstraţie. Fie (e_i) o familie maximală de proiectori ortogonali $\leqslant e$ echivalenţi cu f. e fiind finit, această familie conţine doar un număr finit de proiectori $e_1, \ldots, e_n$. Notăm $e_0 = e - \sum_{i=1}^{n} e_i$. Conform axiomei (C), există un proiector central p cu

$$e_0 p \prec fp,$$

$$e_0 (1 - p) \succ f(1 - p).$$

Dacă p ar fi nul, am avea $e_0 \succ f$, în contradicţie cu maximalitatea familiei $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Astfel p este nenul. Notînd

$$f_i = e_i p, \; 0 \leqslant i \leqslant n,$$

proiectorii $f_0, f_1 \ldots, f_n$ sînt ortogonali, $f_i \prec f$, $0 \leqslant i \leqslant n$, şi $ep = \sum_{i=0}^{n} f_i$.

q. e. d.

3.16. Lemă. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^* - algebră şi A satisface pe (C), (Z), $e \in A$ un proiector abelian modulo echivalenţă şi $f \in A$ un proiector oarecare. Atunci*

$$ez(f) \prec f.$$

Demonstraţie. Conform axiomei (C), există un proiector $q \in Z$ astfel încît

$$eq \prec fq,$$

$$e(1-q) \succ f(-q).$$

Evident

$$ez(f)q \prec fq.$$

Pe de altă parte, e fiind abelian modulo echivalenţă,

$$f(1-q) \sim ez(f(1-q)) = ez(f)(1-q).$$

Astfel

$$ez(f) = ez(f)q + ez(f)(1-q) \prec fq + f(1-q) = f.$$

q. e. d.

Din teorema 3.14 şi lemele 3.15, 3.16., rezultă uşor :

3.13. Corolar. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*- algebră şi A satisface pe (S), (C), (Z). Presupunem că A este clasificabilă. Atunci există un proiector $e \in A$ cu $z(e) = 1$, astfel încît pentru orice ideal bilateral închis nenul $\mathcal{I} \subset A$ există un proiector central nenul p cu*

$$ep \in \mathcal{I}.$$

3.18. Teoremă. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este W^* - algebră şi A satisface pe (S), (C), (Z), iar Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Presupunem că A este clasificabilă. Atunci există o familie $(\varphi_t)_{t \in \Omega}$ de stări pure pe A, astfel încît*

1) *pentru orice $x \in A$ aplicaţia $t \mapsto \varphi_t(x)$ este continuă*

2) *pentru orice $t \in \Omega$ nucleul *- reprezentării ireductibile asociată lui φ_t este $[t]$.*

Demonstraţie. Fie $e \in A$ un proiector ca în corolarul 3.17.
Cum $z(e) = 1$, pentru orice $t \in \Omega$

$$\|e_t\| = 1,$$

deci există o stare ψ pe A cu

$$\psi | [t] = 0,$$

$$\psi (e) = 1.$$

Fie $\mathscr{S}$ mulţimea tuturor stărilor pe A, dotată cu A - topologia şi

$$\Gamma = \{(t, \psi) \mid t \in \Omega, \psi \in \mathscr{S}, \psi|_{[t]} = 0, \psi (e) = 1\}.$$

Se verifică uşor că Γ este o parte compactă a lui $\Omega \times \mathscr{S}$. Conform celor de mai sus, imaginea lui Γ prin proiecţia canonică a lui $\Omega \times \mathscr{S}$ pe Ω este Ω. Astfel, aplicînd principiul selecţiei continue, există o aplicaţie continuă $t \mapsto (t, \Psi_t)$ a lui Ω în Γ. Punînd pentru orice $x \in A$

$$\Psi(x) (t) = \psi_t (x), \; t \in \Omega,$$

obţinem o Z — stare Ψ pe A cu $\Psi(e) = 1$.

Fie Φ un element extremal al mulţimii tuturor

$$\{\Psi \mid \Psi \; Z\text{- stare pe } A, \; \Psi(e) = 1\}.$$

Cum mulţimea de mai sus este o parte extremală a mulţimii tuturor Z - stărilor pe A, Φ este o Z — stare pură.

Considerăm o $*$ - reprezentare π_Φ a lui A, asociată lui Φ. Dacă π_Φ nu ar fi injectivă, conform alegerii lui e ar exista un proiector central nenul p cu $\pi_\Phi (ep) = 0$. Atunci

$$p = \Phi (e) p = \Phi (ep) = 0,$$

ceea ce este absurd. Prin urmare, π_Φ este injectivă.

Notăm pentru orice $t \in \Omega$

$$\varphi_t (x) = \Phi (x) (t), \quad x \in A.$$

Conform teoremei II.5.16 φ_t sînt stări pure şi nucleul $*$ — reprezentării ireductibile asociată lui φ_t este $[t]$. Astfel familia $(\varphi_t)_{t \in \Omega}$ satisface condiţiile teoremei.

q. e. d.

3.19. Corolar. *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este W^*- algebră şi A satisface pe (S), (C), (Z), iar Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Presupunem că A este clasificabilă. Atunci pentru orice $t \in \Omega$ A_t are $*$- reprezentări ireductibile injective.*

Încheiem şi acest paragraf cu o teoremă de conservare, a cărei demonstraţie nu prezintă nici o dificultate.

3.20. Teoremă (de conservare a axiomei centrale). *Fie A o C^*- algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*- algebră şi A satisface pe (S), (C), (Z),*

$e \in A$ un proiector şi $\mathscr{I} \subset A$ un ideal bilateral închis cu proprietatea lipirii centrale. Atunci:

(i) *Centrul lui eAe este $*$ - izomorf cu $Zz(e)$ şi eAe satisface pe (Z).*

ii) *Centrul lui $A/\mathscr{I}$ este $*$ - izomorf cu $Z(1 - z_s)(\mathscr{I}))$ şi $A/\mathscr{I}$ satisface pe (Z).*

Reducerea dezvoltată în acest paragraf ne aduce aminte de rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. Într-adevăr, în rezolvarea unor probleme globale procedăm astfel: rezolvăm problema în cadrul „infinitezimal", adică în C^* - factorii A_t; folosind teoreme de „existenţă a soluţiilor", cum ar fi teoremele 3.3 şi 3.6 , găsim soluţii pe porţiuni mici din Ω; în sfîrşit folosind compacitatea lui Ω sau proprietăţi de lipire, „lipim" soluţiile locale într-o soluţie globală.

În cazul W^* - algebrelor, teorema 3.3 este demonstrată în [48], echivalenţa afirmaţiilor (i) şi (iii) din teorema 3.5 în [1], iar teorema 3.9 în [34]. Idealele cu proprietatea lipirii centrale sînt introduse în [1] sub denumirea de ideale continue şi în [22] sub denumirea de ideale centrale. Teorema 3.18 este demonstrată în cazul W^* - algebrelor în [17].

Remarcăm că o parte din rezultatele expuse în acest paragraf se extind pentru Z-module normate generale, fără ca demonstraţiile să se modifice esenţial.

§ 4. APLICAŢII: RADICALUL TARE

Pentru C^* - algebre, satisfăcînd axiome convenabile din cele introduse în acest capitol, se pot extinde rezultatele privind derivările interioare din [54], cele privind spectrul central, imaginea centrală şi mulţimile $\mathscr{K}(x)$ din [48] şi [22], caracterizările funcţiilor numerice din [1], rezultatele privind comutatorii din [5], [18] şi [19] etc. În toate aceste extensii C^*- reducerea joacă un rol cheie.

În acest paragraf ne restrîngem la expunerea unor rezultate privind ideale bilaterale maximale.

Teorema următoare este o extensie a corolarului 2.13.

4.1. TEOREMĂ. *Fie A o C^*- algebră cu (S), (C), Z o centrul lui A şi Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Atunci aplicaţiile*

$$\mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M} \cap Z,$$

$$t \to \{x \mid x \in A,\ \mathscr{K}(x^*x) \subset t\}$$

stabilesc o corespondenţă biunivocă între idealele bilaterale maximale ale lui A şi Ω.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{M}$ un ideal bilateral maximal al lui A. Dacă φ este o stare pură pe A care se anulează pe $\mathfrak{M}$, atunci nucleul $*$ - reprezentării ireductibile π_φ, asociată lui φ, este $\mathfrak{M}$. Astfel nucleul lui $\pi_\varphi|_Z$ este $\mathfrak{M} \cap Z$. Deoarece $\pi_\varphi|_Z$ se identifică cu un caracter al lui Z, $\mathfrak{M} \cap Z \in \Omega$.

Fie acum $t \in \Omega$. Raţionînd ca în demonstraţia corolarului 2.13 se arată că

$$\{x \mid x \in A,\ \mathscr{K}(x^*x) \subset t\}$$

este un ideal bilateral. Evident, intersecţia acestui ideal cu Z este t. Fie $\mathfrak{M}$ un ideal bilateral maximal, care îl conţine. Pentru orice $x \in \mathfrak{M}$, $\mathscr{K}(x^* x) \subset \mathfrak{M} \cap Z = t$, deci

$$\{x \mid x \in A,\ \mathscr{K}(x^* x) \subset t\} = \mathfrak{M}.$$

Astfel $\{x \mid x \in A, \mathscr{K}(x^*x) \subset t\}$ este un ideal bilateral maximal.

Demonstraţia egalităţilor

$\{x \mid x \in A, \mathscr{K}(x^*x) \subset \mathfrak{M} \cap Z\} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ ideal bilateral maximal în A,

$$\{x \mid x \in A,\ \mathscr{K}(x^*x) \subset t\} \cap Z = t,\ t \in \Omega,$$

nu prezintă dificultăţi.

q. e. d.

Spunem că o C^* - algebră A este comutativă modulo echivalenţă dacă orice proiector din A este echivalent cu un proiector central. Se vede uşor că dacă A este o C^* - algebră comutativă modulo echivalenţă, centrul căruia este AW^* - algebră şi care satisface pe (S), (Z), atunci există un proiector central unic p, astfel încît Ap este comutativă şi $A(1-p)$ este de tip III. Conform [8], Chap. III, § 8, Corp. 5, orice W^* - algebră de tip III şi de gen numărabil este comutativă modulo echivalenţă.

4.3. Lemă. *Fie A o C^* - algebră comutativă modulo echivalenţă, care satisface pe (S), iar Ω spaţiul idealelor maximale ale centrului lui A. Atunci pentru orice $t \in \Omega$ $[t]$ este un ideal bilateral maximal al lui A.*

Demonstraţie. Fie $t \in \Omega$ şi $\mathfrak{M}$ un ideal bilateral maximal al lui A, care conţine pe $[t]$. Dacă $\mathfrak{M} \neq [t]$, conform lemei 2.3., există un proiector $e \in \mathfrak{M}$ cu $e_t \neq 0$. Cum A este comutativă modulo echivalenţă, există un proiector central p cu $e \sim p$. Atunci, pe de o parte

$$p \in \mathfrak{M},$$

iar pe de altă parte

$$p_t \neq 0$$

$$1 - p \in [t].$$

Astfel

$$1 = p + (1-p) \in \mathfrak{M}$$

ceea ce este absurd.

q. e. d.

Din lema 4.2 rezultă următoarea variantă a teoremei 4.1 pentru C^* - algebre comutative modulo echivalenţă;

4.3. Corolar. *Fie A o C^* - algebră comutativă modulo echivalenţă, care satisface pe (S), iar Ω spaţiul idealelor maximale ale centrului lui A. Atunci aplicaţiile*

$$\mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M} \cap Z,$$

$$t \mapsto [t]$$

stabilesc o corespondență biunivocă între idealele bilaterale maximale ale lui A și Ω.

Fie A o C^*- algebră cu unitate. Intersecția tuturor idealelor bilaterale maximale ale lui A o notăm $\mathscr{I}$ și o numim radicalul tare al lui A. Dacă $\mathscr{I} = \{0\}$, A se numește tare semisimplă.

Teorema următoare, consecință imediată a teoremei 4.1, este de asemenea o extensie a corolarului 2.13.

4.4. Teoremă. *Fie A o C^*- algebră cu (S), (C), Z centrul lui A și $\mathscr{I}$ radicalul tare al lui A. Atunci*

$$\mathscr{I} = \{x \mid x \in A, \mathscr{K}(x^*x) = \{0\}\}.$$

În particular, $\mathscr{I}$ este cel mai mare element al mulțimii

$$\{\mathscr{I} \mid \mathscr{I} \subset A \text{ ideal bilateral}, \mathscr{I} \cap Z = \{0\}\}.$$

Spunem că o C^* - algebră cu unitate A este finită, dacă 1 este proiector finit.

4.5. Corolar. *Orice C^*- algebră A, care satisface pe (S), (C) și este finită este tare semisimplă.*

Demonstrație. Presupunem că A nu este tare semisimplă. Conform lemei 2.3, radicalul tare $\mathscr{I}$ al lui A conține un proiector nenul f, iar conform lemei 3.15, există un proiector central nenul p și proiectorii ortogonali $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$, astfel încît

$$f_i \prec f, \; 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$p = \sum_{i=0}^{n} f_i$$

Atunci

$$p \in \mathscr{I},$$

în contradicție cu teorema 4.4.

q. e. d.

4.6. Corolar. *Orice C^*- algebră A, care satisface pe (S) și este comutativă modulo echivalență, este tare semisimplă.*

Demonstrație Presupunem că A nu este tare semisimplă. Conform lemei 2.3., radicalul tare $\mathscr{I}$ al lui A conține un proiector nenul f. Cum A este comutativă modulo echivalență, f este echivalent cu un proiector central p. Atunci p este nenul și

$$p \in \mathscr{I}.$$

Se vede ușor că A satisface pe (C), deci incluziunea de mai sus contrazice teorema 4.4.

q. e. d.

4.7. TEOREMĂ. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său Z este AW^*-algebră și A satisface pe (S), (C), (Z). Atunci radicalul tare al lui A are proprietatea lipirii centrale.*

Demonstrație. Fie Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z, π_t aplicația canonică $A \mapsto A_t$ și $\mathfrak{M}_t$ idealul bilateral maximal al lui A_t. Atunci idealul bilateral maximal al lui A, corespunzător lui t, este $\pi_t^{-1}\mathfrak{M}_t$. Astfel $y \in A$ aparține radicalului tare $\mathcal{J}$ al lui A dacă și numai dacă

$$y_t \in \mathfrak{M}_t, \quad t \in \Omega.$$

Fie $(p_\iota)_{\iota\in I}$ o familie de proiectori ortogonali în Z și

$$y_\iota \in \mathcal{J}p_\iota, \qquad \iota \in I$$

$$\sup_{\iota\in I} \| y_\iota \| < +\infty.$$

Notăm

$$y = \sum_{\iota\in I} y_\iota$$

Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$

$$y_t \in \mathfrak{M}_t.$$

Conform celor de mai sus, rămîne să arătăm că incluziunea de mai sus rămîne adevărată pentru orice $t \in \Omega$.

Notăm prin $\mathcal{S}$ mulțimea tuturor stărilor pe A, dotată cu A — topologia. Se verifică ușor că

$$\Gamma = \left\{ (t, \varphi) \,\middle|\, \begin{array}{l} t \in \Omega, \ \varphi \in \mathcal{S}, \ \varphi\,|_{(t)} = 0, \\ \varphi(ayb) = 0 \ \text{pentru orice } a, b \in A \end{array} \right\}$$

este o parte compactă a lui $\Omega \times \mathcal{S}$. Imaginea lui Γ prin proiecția canonică a lui $\Omega \times \mathcal{S}$ pe Ω este compactă și conține pe D, deci coincide cu Ω. Aplicînd principiul selecției continue, există o aplicație continuă $t \mapsto (t, \varphi_t)$ a lui Ω în Γ.

Pentru orice $t \in \Omega$ idealul bilateral generat de y_t este inclus în nucleul formei $x_t \mapsto \varphi_t(x)$, deci nu coincide cu A_t.
Astfel

$$y_t \in \mathfrak{M}_t, \ t \in \Omega.$$

q. e. d.

Din teoremele 4.4 și 4.7 rezultă:

4.8. COROLAR. *Fie A o C^*-algebră, astfel încît centrul său este AW^*-algebră și A satisface pe (S), (C), (Z). Atunci A este tare semisimplă dacă și numai dacă pentru orice ideal bilateral închis cu proprietatea lipirii centrale $\mathcal{J} \subset A$ avem*

$$z(\mathcal{J}) = z_j(\mathcal{J}).$$

Teorema 4.1 a fost demonstrată în cazul W^*- algebrelor finite în [14], în cazul W^* - algebrelor oarecare în [31] si în cazul AW^* - algebrelor în [51]. Lema 4.2. apare în cazul W^* - algebrelor de tip III şi de gen numărabil în [48]. Pentru corolarul 5.5. în cazul W^* - şi AW^* - algebrelor trimitem la [14], [28], iar pentru teoremele 4.4 şi 4.7. în cazul W^*- algebrelor cităm pe [5], [18].

IV. TEORIA W^* - REDUCERII

În acest capitol analizăm în cazul W^* - algebrelor descompunerile din capitolul II, § 4. Ne ocupăm în special cu problema factorialităţii W^*- algebrelor $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}}$ şi cu studiul imaginii $A_t^{\mathcal{F}}$ a unei C^* - subalgebre w - dense A a lui M în $\widetilde{M}_t^{\mathcal{F}}$. Ca o aplicaţie, demonstrăm teorema de tip Stone-Weierstrass pentru C^* - algebre de tip I.

§ 1. SPAŢIUL M_*^Z

Fie M o W^* - algebră şi Z o W^* - subalgebră a centrului lui M. Am notat prin M_*^Z mulţimea tuturor Z - formelor w — continue pe M. Extindem pentru M_*^Z cîteva rezultate privind M_*.

1.1. LEMĂ. (inegalitatea lui Schwarz generalizată). *Fie A o C^* - algebră, Z o C^* - algebră comutativă şi $\Phi : A \to Z$ o aplicaţie liniară pozitivă. Atunci pentru orice $x, y \in A$ avem*

$$|\Phi(xy)|^2 \leqslant \Phi(xx^*)\,\Phi(y^*y).$$

Demonstraţie. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z. Pentru orice $t \in \Omega$, $\Phi(\cdot)(t)$ este o formă pozitivă pe A, deci aplicînd inegalitatea lui Schwarz,

$$|\Phi(xy)(t)|^2 \leqslant \Phi(xx^*)(t)\,\Phi(y^*y)(t),$$

$$|\Phi(xy)|^2(t) \leqslant (\Phi(xx^*)\,\Phi(y^*y))(t).$$

$t \in \Omega$ fiind arbitrar,

$$|\Phi(xy)|^2 \leqslant \Phi(xx^*)\,\Phi(y^*y).$$

q. e. d.

Fie $\Phi \in M_*^Z$, $\Phi \geqslant 0$. Folosind lema 1.1. se arată că în cazul scalar că

$$\{x \mid x \in M,\ \Phi(x^*x) = 0\}$$

este un ideal stîng w - închis. Astfel există un proiector $e \in M$ cu

$$\{x \mid x \in M,\ \Phi(x^*x) = 0\} = Me.$$

e este cel mai mare element al mulțimii

$$\{f \mid f \in M \text{ proiector}, \ \Phi(f) = 0\}.$$

Notăm supp $\Phi = 1 - e$ și îl numim suportul lui Φ.

Dacă $\Phi \in M_*^Z$ și $a \in M$, notăm

$$(L_a\Phi)\ (x) = \Phi(ax), \qquad x \in M,$$

$$(R_a\Phi)\ (x) = \Phi(xa), \qquad x \in M.$$

Evident, $L_a\Phi$, $R_a\Phi \in M_*^Z$.

1.2. TEOREMĂ (de descompunere polară). *Fie M o W^* — algebră, Z o W^* — subalgebră a centrului lui M și $\Phi \in M_*^Z$. Atunci există $|\Phi| \in M_*^Z$, $|\Phi| \geqslant 0$ și o izometrie parțială $v \in M$ unic determinate de condițiile*

$$1)\ \Phi = R_v \mid \Phi \mid,$$

$$2)\ v^*v = \text{supp} \mid \Phi \mid.$$

Demonstrație. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că există o stare normală φ_0 pe Z cu supp $\varphi_0 = 1$.

Conform descompunerii polare a formelor w - continue pe M, există $|\varphi_0\ \Phi| \in M_*$, $|\varphi_0\ \Phi| \geqslant 0$ și o izometrie parțială $v \in M$, astfel încît

$$\varphi_0\Phi = R_v \mid \varphi_0\Phi \mid,$$

$$v^*v = \text{supp} \mid \varphi_0\Phi \mid.$$

Notăm

$$|\Phi| = R_{v^*}\Phi.$$

Fie φ o stare normală oarecare pe Z. Deoarece

$$\varphi_0 \leqslant \varphi_0 + \varphi,$$

conform teoremei de tip Radon-Nikodym pentru formele pozitive normale pe Z, există $z_0 \in Z$, $0 \leqslant z_0 \leqslant 1$, pentru care

$$\varphi_0(z) = \varphi_0(z_0z) + \varphi(z_0z), \qquad z \in Z$$

$$\varphi_0((1 - z_0)z) = \varphi(z_0z), \qquad z \in Z.$$

Suportul lui z_0 în Z este mai mare sau egal ca suportul lui φ_0, deci este 1. Fie (p_n) un şir crescător de proiectori din Z, astfel încît pentru orice întreg $n \geqslant 1$

$$z_0 p_n \geqslant \frac{1}{n} p_n$$

şi

$$\sup_n p_n = 1.$$

Pentru orice n există $z_n \in zp_n$ pozitiv cu

$$z_0 z_n = p_n.$$

Avem

$$\varphi_0((1 - z_0)z_n z) = \varphi(p_n z), \qquad z \in Z,$$

$$\varphi_0((1 - z_0)z_n \Phi(xv^*)) = \varphi(p_n \Phi(xv^*)), \qquad x \in M,$$

$$\varphi_0 \Phi((1 - z_0)z_n xv^*) = \varphi\Phi(p_n xv^*), \qquad x \in M$$

$$|\varphi_0 \Phi|((1 - z_0)z_n x) = \varphi|\Phi|(p_n x), \qquad x \in M.$$

Astfel pentru orice $a \in M$ pozitiv

$$\varphi|\Phi|(a) = \lim_n \varphi|\Phi|(p_n a) \geqslant 0,$$

deci $\varphi|\Phi| \geqslant 0$.

În concluzie, $|\Phi| \geqslant 0$.

Deoarece $|\Phi|(1 - v^*v) = \Phi(v^* - v^*vv^*) = 0$, supp $|\Phi| \leqslant v^*v$. Pe de altă parte, dacă $e \leqslant v^*v = \mathrm{supp}\,|\varphi_0\Phi|$ este un proiector nenul, atunci

$$\varphi_0|\Phi|(e) = |\varphi_0\Phi|(e) > 0,$$

$$|\Phi|(e) \neq 0,$$

deci

$$v^*v = \mathrm{supp}\,|\Phi|.$$

În sfîrşit, pentru orice $x \in M$ şi orice stare normală φ pe Z, definind z_0, p_n, z_n ca mai sus, avem

$$\begin{aligned}\varphi\Phi(p_n x) &= \varphi(p_n \Phi(x)) = \\ &= \varphi_0((1 - z_0)z_n \Phi(x)) = \\ &= \varphi_0\Phi((1 - z_0)z_n x) = \\ &= |\varphi_0\Phi|((1 - z_0)z_n xv) = \\ &= \varphi|\Phi|(p_n xv),\end{aligned}$$

oricare ar fi n. Prin urmare

$$\varphi\Phi(x) = \varphi|\Phi|(xv).$$

Cum x şi φ sînt arbitrari, deducem

$$\Phi = R_v|\Phi|.$$

Astfel $|\Phi|$ şi v satisfac condiţiile 1), 2).

Unicitatea se arată uşor, folosind unicitatea din cazul scalar.

q.e.d.

1.3. Corolar. (de descompunere Jordan). *Fie M o W^*-algebră, Z o W^*-subalgebră a centrului lui M şi $\Phi \in M_*^Z$ autoadjunct. Atunci există un proiector $e \in M$ unic determinat de condiţiile*

$$1)\ R_e\Phi \geqslant 0,\ R_{1-e}\Phi \leqslant 0,$$

$$2)\ e = \operatorname{supp} R_e\Phi.$$

1.4. Teoremă (de tip Radon-Nikodym). *Fie M o W^*-algebră, Z o W^*-subalgebră a centrului lui M, $\Phi, \Psi \in M_*^Z$, $0 \leqslant \Phi \leqslant \Psi$. Atunci există $a \in M$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, unic determinat de condiţiile*

$$1)\ \Phi = L_a R_a \Psi,$$

$$2)\ \operatorname{supp} a \leqslant \operatorname{supp} \Psi.$$

Demonstraţie. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că există o stare normală φ_0 pe Z cu $\operatorname{supp} \varphi_0 = 1$.

Conform teoremei de tip Radon-Nikodym pentru cazul scalar, există $a \in M$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, astfel încît

$$\varphi_0\Phi = L_a R_a (\varphi_0\Psi),$$

$$\operatorname{supp} a \leqslant \operatorname{supp} \varphi_0\Psi = \operatorname{supp} \Psi.$$

Pentru orice $x \in M$ şi orice $z \in Z$

$$\varphi_0(z\,\Phi(x)) = \varphi_0(z(L_a R_a \Psi)(x)),$$

deci

$$\Phi = L_a R_a \Psi.$$

Unicitatea rezultă uşor, folosind unicitatea din cazul scalar.

q.e.d.

În expunerea materialului din acest paragraf am urmat [47]. Cazurile scalare ale teoremelor 1.2 şi 1.4 aparţin lui Sakai şi se găsesc de exemplu în [55].

§ 2. W^* - REDUCEREA

Fie M o W^* — algebră, Z centrul său şi $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial al lui M_*^Z. Spunem că $\mathscr{F}$ este invariant, dacă pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$ şi orice $a \in M$

$$L_a\Phi, \; R_a\Phi \in F.$$

Conform lemei II.4.18, M_*^Z conţine Z - stări. Numim un subspaţiu vectorial $\mathscr{F}$ al lui M_*^Z de tip stare, dacă $\mathscr{F}$ conţine Z — stări.

2.1. Lemă. *Orice subspaţiu vectorial invariant de tip stare al lui M_*^Z este un Z — submodul de tip predual al lui M_Z^*.*

Demonstraţie. Deoarece $\mathscr{F}$ este invariant,

$Ker\ \mathscr{F} = \{x \mid x \in M,\ \Phi \mid (x) = 0$ pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}\}$ este un ideal bilateral w — închis al lui M. Astfel există un proiector central p cu

$$\operatorname{Ker} \mathscr{F} = Mp.$$

Cum $\mathscr{F}$ conţine o Z - stare, $p = 0$, deci $\mathscr{F}$ separă elementele lui M.

Pe de altă parte, bula unitate închisă a lui M fiind w - compactă, ea este $\mathscr{F}^{-1}(w)$ - compactă.

q.e.d.

Reformulăm pentru cazul de mai sus teorema II.4.12 :

2.2. Teoremă (de W^* - reducere). *Fie M o W^* -algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui M_*^Z. Atunci următoarele afirmaţii sînt adevărate :*

1) *Pentru orice $\Phi \in \mathscr{F}$*

$$\|\Phi\| = \sup_{t\in\Omega} \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$$

şi aplicaţia $t \mapsto \|\Phi_t^{\mathscr{F}}\|$ este continuă.

2) *Pentru orice $x \in M$*

$$\|x\| = \sup_{t\in\Omega} \|x_t^{\mathscr{F}}\|$$

şi aplicaţia $t \mapsto \|x_t^{\mathscr{F}}\|$ este inferior semicontinuă.

3) *Pentru orice $x \in M$ există o parte rară E a lui Ω, astfel încît*

$$\|x_t^{\mathscr{F}}\| = \|x_t\|, \quad t \in \Omega \setminus E.$$

4) *Pentru orice $t \in \Omega$, $[t]^{\mathscr{F}}$ este un ideal bilateral normic închis al lui M, $M_t^{\mathscr{F}}$ este o C^* - algebră cît a lui M, $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ este o W^* - algebră cu predual $\mathscr{F}_t$, scufundarea canonică a lui $M_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ este un $*$ - homomorfism injectiv şi imaginea lui $M_t^{\mathscr{F}}$ prin această scufundare este w - densă în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$.*

5) *Pentru o familie* $(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}})_{t\in\Omega}$, $\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$, *există* $x \in M$, *cu*

$$\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} = x_t^{\mathscr{F}}, \quad t \in \Omega,$$

dacă și numai dacă $\sup\limits_{t\in\Omega} \|\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}\| < +\infty$ *și pentru orice* $\Phi \in \mathscr{F}$ *aplicația* $t \mapsto \Phi_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}})$ *este continuă. Cu alte cuvinte, notînd prin* $\Pi^{\mathscr{F}}$ *proiecția canonică a lui* $\widetilde{M}^{\mathscr{F}}$ *pe* Ω, *elementele lui* M *se identifică cu secțiunile continue și mărginite ale lui* $\Pi^{\mathscr{F}}$.

Studiem la început cît de aproape este $M_t^{\mathscr{F}}$ de $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$.

2.3. Teoremă. *Fie* M *o* W^**-algebră,* Z *centrul său,* Ω *spațiul idealelor maximale ale lui* Z *și* $\mathscr{F}$ *un subspațiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui* M_*^Z. *Fie, mai departe,* $e, f \in M$ *proiectori,* $t \in \Omega$ *și* $\widetilde{v}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ *o izometrie parțială, astfel încît proiectorii*

$$\widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} = (\widetilde{v}_t^{\mathscr{F}})^* \widetilde{v}_t^{\mathscr{F}},$$

$$\widetilde{f}_t^{\mathscr{F}} = \widetilde{v}_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{v}_t^{\mathscr{F}})^*$$

sînt de gen numărabil și

$$\widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} \leqslant e_t^{\mathscr{F}},$$

$$\widetilde{f}^{\mathscr{F}} \leqslant f_t^{\mathscr{F}}.$$

Atunci există o izometrie parțială $v \in M$, *pentru care*

$$v^*v \leqslant e,$$

$$vv^* \leqslant f,$$

$$v_t^{\mathscr{F}}\, \widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} = \widetilde{f}_t^{\mathscr{F}}\, v_t^{\mathscr{F}} = \widetilde{v}_t^{\mathscr{F}}.$$

Demonstrație. Cum $\widetilde{e}_t^{\mathscr{F}}$ este de gen numărabil și $\mathscr{F}_t$ este predualul lui $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$, aplicînd corolarul 1.3, există $\Phi \in \mathscr{F}$, $\Phi \geqslant 0$, astfel încît

$$\operatorname{supp} \Phi_t^{\mathscr{F}} = \widetilde{e}_t^{\mathscr{F}}.$$

De asemenea, cum $\mathscr{F}_t$ este predualul lui $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$, există $\Psi \in \mathscr{F}$ cu

$$\Psi_t^{\mathscr{F}} = R_{\widetilde{v}_t^{\mathscr{F}}}\, \Phi_t^{\mathscr{F}}.$$

Notăm

$$\Theta = L_e R_f \Psi.$$

Conform teoremei 1.2, există $|\Theta| \in \mathscr{F}$, $|\Theta| \geqslant 0$ și o izometrie parțială

$v \in M$, astfel încît

$$\Theta = R_v |\Theta|,$$
$$v^* v = \operatorname{supp} |\Theta|.$$

Deoarece

$$0 = \Theta((1-e)v^*) = |\Theta|((1-e)v^* v) = |\Theta|(1-e),$$

deducem

$$(1-e) \operatorname{supp} |\Theta| = 0,$$
$$(1-e) v^* v = 0,$$
$$v^* v \leqslant e.$$

Pe de altă parte, cum

$$0 = \Theta(v^*(1-f)) = |\Theta|(v^*(1-f)v),$$

avem

$$v^*(1-f)v = 0,$$
$$(1-f)v = 0,$$
$$(1-f)\ vv^* = 0,$$
$$vv^* \leqslant f.$$

Mai departe,

$$|\Theta|_i^{\mathcal{F}} = R_{(v^*)_i^{\mathcal{F}}} \Theta_i^{\mathcal{F}} = L_{e_i^{\mathcal{F}}} R_{(v^*)_i^{\mathcal{F}}} \Psi_i^{\mathcal{F}} = R_{(v^*)_i^{\mathcal{F}}} \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} \Phi_i^{\mathcal{F}}$$

şi

$$\Phi_i^{\mathcal{F}} = R_{(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^*} \Psi_i^{\mathcal{F}} = R_{(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^*} \Theta_i^{\mathcal{F}} = R_{(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* v_i^{\mathcal{F}}} |\Theta|_i^{\mathcal{F}}.$$

Astfel

$$\operatorname{supp} |\Theta|_i^{\mathcal{F}} = \operatorname{supp} \Phi_i^{\mathcal{F}} = \widetilde{e}_i^{\mathcal{F}}.$$

Cum

$$\Phi_i^{\mathcal{F}} = R_{(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* (vv^*)_i^{\mathcal{F}} \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}}} \Phi_i^{\mathcal{F}},$$

deducem

$$(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* (vv^*)_i^{\mathcal{F}} \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} = \operatorname{supp} \Phi_i^{\mathcal{F}} = (\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* v_i^{\mathcal{F}},$$
$$(\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* (1 - (vv^*)_i^{\mathcal{F}}) \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} = 0,$$
$$(1 - (vv^*)_i^{\mathcal{F}}) \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} = 0,$$
$$(1 - (vv^*)_i^{\mathcal{F}}) \widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} (\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* = 0,$$
$$\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}} (\widetilde{v}_i^{\mathcal{F}})^* \leqslant (vv^*)_i^{\mathcal{F}}$$

deci $(\tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}})^* v_\iota^{\mathscr{F}}$ este o izometrie parțială. Rezultă că $(v^*)_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}$ este o izometrie parțială și

$$|\Theta|_\iota^{\mathscr{F}} = R_{(v^*)_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}} \Phi_\iota$$

este descompunerea polară a lui $|\Theta|_\iota^{\mathscr{F}}$. Din unicitatea descompunerii polare

$$|\Theta|_\iota^{\mathscr{F}} = \Phi_\iota^{\mathscr{F}},$$

$$(v^*)_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}},$$

$$(\tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}})^* v_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}}.$$

Astfel

$$\tilde{f}_\iota^{\mathscr{F}} v_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}} (\tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}})^* v_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}.$$

Pe de altă parte, cum $|\Theta|_\iota^{\mathscr{F}} = \Phi_\iota^{\mathscr{F}}$ avem

$$R_{v_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}} \Phi_\iota^{\mathscr{F}} = \Theta_\iota^{\mathscr{F}} = \Psi_\iota^{\mathscr{F}} = R_{\tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}} \Phi_\iota^{\mathscr{F}},$$

de unde

$$v_\iota^{\mathscr{F}} \iota_\iota^{\mathscr{F}} = \tilde{v}_\iota^{\mathscr{F}}.$$

q.e.d.

2.4. Corolar. (de tranzitivitate). *Fie M, Z, Ω, $\mathscr{F}$ ca în teorema 2.3. Atunci pentru orice $t \in \Omega$ și orice proiector de gen numărabil $\tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}}$ în $\tilde{M}_\iota^{\mathscr{F}}$ avem*

$$\tilde{M}_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}} = M_\iota^{\mathscr{F}} \tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}}.$$

2.5. Corolar. (de separare). *Fie M, Z, Ω, F ca în teorema 2.3. Atunci pentru orice proiector $g \in M$, orice $t \in \Omega$ și orice proiectori de gen numărabil ortogonali $\tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}}$ și $\tilde{f}_\iota^{\mathscr{F}}$ în $\tilde{M}_\iota^{\mathscr{F}}$, $\tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}}\ \tilde{f}_\iota^{\mathscr{F}}, \leqslant g_\iota^{\mathscr{F}}$, există proiectori orotognali $e, f \in M$, $e, f \leqslant g$, astfel încît*

$$\tilde{e}_\iota^{\mathscr{F}} \leqslant e_\iota^{\mathscr{F}},$$

$$\tilde{f}_\iota^{\mathscr{F}} \leqslant f_\iota^{\mathscr{F}}.$$

Fie M o W^*-algebră, Z centrul său și Φ o Z-stare din M_*^Z. Notăm prin $\mathscr{F}_\Phi$ subspațiul vectorial normic închis invariant al lui M_*^Z, generat de Φ.

2.6. Teoremă (de unicitate a W^*-reducerii). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, iar Φ și Ψ Z — stări din M_*^Z. Atunci există o familie $(p_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori centrali ortogonali cu suprem 1, astfel încît*

$$p_\iota \mathscr{F}_\Phi = p_\iota \mathscr{F}_\Psi, \quad \iota \in I.$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că pentru orice proiector central nenul p există un proiector central nenul $q \leqslant p$ cu

$$q\Psi \in \mathscr{F}_{\Phi}.$$

Fie

$$e = \operatorname{supp} \Psi.$$

Există un proiector central nenul $p_1 \leqslant p$, astfel încît ep_1 este de gen numărabil. Fie $(e_i)_{i\geqslant 1}$ o familie maximală de proiectori ortogonali nenuli $\leqslant ep_1$, astfel încît pentru orice i

$$e_i \prec \operatorname{supp} \Phi.$$

Deoarece Φ este Z-stare, suportul central al lui supp Φ este 1. Aplicînd lema III. 1.9, deducem

$$ep_1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i.$$

Pentru orice i există $\Phi_i \in \mathscr{F}_{\Phi}$, $\Phi_i \geqslant 0$ cu

$$\operatorname{supp} \Phi_i = e_i.$$

Notăm

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \| \Phi_i \|} \Phi_i.$$

Atunci $\Phi_0 \in \mathscr{F}_{\Phi}$, $\Phi_0 \geqslant 0$ și

$$\operatorname{supp} \Phi_0 = ep_1.$$

Cum $\Phi_0 \leqslant \Phi_0 + p_1 \Psi$, conform teoremei 1.4. există $a \in M$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, supp $a = ep_1$, astfel încît

$$\Phi_0 = L_a R_a \Phi_0 + L_a R_a \Psi,$$

deci

$$L_a R_a \Psi \in \mathscr{F}_{\Phi}.$$

Folosind descompunerea spectrală a lui a, există un șir crescător (f_n) de proiectori în M, care comută cu a și pentru care

$$af_n \geqslant \frac{1}{n} f_n, \quad n \geqslant 1,$$

$$\sup_n f_n = ep_1.$$

Pentru orice n

$$L_{f_n} R_{f_n} \Psi \in \mathscr{F}_{\Phi}.$$

Şirul $(\Psi(f_n))$ este crescător şi $\sup\limits_n \Psi(f_n) = \Psi(ep_1) = p_1$. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi V_1 partea deschisă şi închisă a lui Ω, a cărei funcţie caracteristică este p_1. Aplicînd teorema II.1.3 şi corolarul II.2.4, există o parte deschisă densă D_1 a lui V_1, astfel încît

$$\sup_n \Psi(f_n)(t) = 1, \qquad t \in D_1.$$

Fie W o parte deschisă închisă nevidă a lui V_1, inclusă în D_1, şi q funcţia caracteristică a lui W. Conform teoremei lui Dini

$$\lim_{n\to\infty} \| q - q\Psi(f_n) \| = 0.$$

Folosind inegalitatea lui Schwarz, pentru orice $x \in M$ şi orice n

$$\| q\Psi(x) - q(L_{f_n} R_{f_n} \Psi)(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Psi(xq(1-f_n)) \| + \| \Psi(q(1-f_n)xf_n) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Psi(q(1-f_n)) \|^{\frac{1}{2}} (\| \Psi(xx^*) \|^{\frac{1}{2}} + \| \Psi(f_n x^* x f_n) \|^{\frac{1}{2}}) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| q - q\Psi(f_n) \|^{\frac{1}{2}} \| x \|.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} \| q\Psi - qL_{f_n} R_{f_n} \Psi \| = 0,$$

deci

$$q\Psi \in \mathscr{F}_\Phi.$$

q.e.d.

Teorema 2.6 ne arată că W^*-reducerea „unic generată" nu depinde de „generator".

2.7. Corolar. *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, iar Φ şi Ψ Z-stări din $M_*^\sharp$. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ aplicaţia identică a lui M induce un *-izomorfism al lui $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_\Phi}$ pe $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_\Psi}$.*

Corolarul 2.7 face plauzibilă să credem că, dacă Φ este o Z—stare din $M_*^\sharp$, atunci aproape pentru orice $t \in \Omega$ W^*-algebra $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}_\Psi}$ este un factor. Deocamdată la această întrebare putem răspunde doar în cazul cînd M este semifinită.

2.8. Teoremă (de factorialitate în cazul semifinit). *Fie M o W^*—algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, Φ o Z — stare din $M_*^\sharp$, e suportul lui Φ şi $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\Phi$. Presupunem că, pentru un $t \in \Omega$, restricţia lui $\Phi_t^{\mathscr{F}}$ la $e_t^{\mathscr{F}} M_t^{\mathscr{F}} e_t^{\mathscr{F}}$ este o urmă. Atunci*

1) *$e_t^{\mathscr{F}}$ este suportul lui $\Phi_t^{\mathscr{F}}$;*
2) *$\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ este un factor semifinit;*
3) *orice proiector finit din $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ aparţine lui $M_t^{\mathscr{F}}$.*

Demonstrație. Evident,

$$\operatorname{supp} \Phi_i^{\mathcal{F}} \leqslant e_i^{\mathcal{F}}.$$

Fie $\tilde{f}_i^{\mathcal{F}} \leqslant e_i^{\mathcal{F}}$ un proiector în $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$, astfel încît

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}}) = 0.$$

Folosind inegalitatea lui Schwarz, pentru orice $\tilde{a}_i^{\mathcal{F}} \in \tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(\tilde{a}_i^{\mathcal{F}} \tilde{f}_i^{\mathcal{F}}) = 0.$$

Cum $\Phi_i^{\mathcal{F}}$ este urmă pe $e_i^{\mathcal{F}} \tilde{M}_i^{\mathcal{F}} e_i^{\mathcal{F}}$, $\operatorname{supp} \Phi_i^{\mathcal{F}} \leqslant e_i^{\mathcal{F}}$ și $\tilde{f}_i^{\mathcal{F}} \leqslant e_i^{\mathcal{F}}$, pentru orice $\tilde{a}_i^{\mathcal{F}}, \tilde{b}_i^{\mathcal{F}} \in M_i^{\mathcal{F}}$

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(\tilde{a}_i^{\mathcal{F}} \tilde{f}_i^{\mathcal{F}} \tilde{b}_i^{\mathcal{F}}) = 0,$$

deci pentru orice $a, b \in M$

$$(L_a R_b \Phi)_i^{\mathcal{F}}(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}}) = 0.$$

Astfel

$$\Psi_i^{\mathcal{F}}(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}}) = 0, \quad \Psi_i^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_i = (\tilde{M}_i^{\mathcal{F}})_*,$$

adică $\tilde{f}_i^{\mathcal{F}} = 0$.

În concluzie $e_i^{\mathcal{F}} = \operatorname{supp} \Phi_i^{\mathcal{F}}$.

Din egalitatea, de mai sus rezultă că $\Phi_i^{\mathcal{F}}$ este o urmă normală finită fidelă pe $e_i^{\mathcal{F}} \tilde{M}_i^{\mathcal{F}} e_i^{\mathcal{F}}$, deci $e_i^{\mathcal{F}}$ este un proiector finit în $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$. $e_i^{\mathcal{F}}$ fiind de gen numărabil în $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$, conform corolarului 2.4,

$$e_i^{\mathcal{F}} \tilde{M}_i^{\mathcal{F}} e_i^{\mathcal{F}} = e_i^{\mathcal{F}} M_i^{\mathcal{F}} e_i^{\mathcal{F}}.$$

Aplicînd corolariile III.2.11 și III.2.10, deducem că $e_i^{\mathcal{F}} \tilde{M}_i^{\mathcal{F}} e_i^{\mathcal{F}}$ este un factor finit. Cum suportul central al lui $e_i^{\mathcal{F}}$ în $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$ este 1, rezultă că $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$ este un factor semifinit.

În sfîrșit, fie $\tilde{f}_i^{\mathcal{F}}$ un proiector finit în $\tilde{M}_i^{\mathcal{F}}$. Considerăm o familie maximală $((\tilde{f}_i^{\mathcal{F}})_\iota)_{1 \leqslant \iota \leqslant n}$ de proiectori ortogonali, $\leqslant \tilde{f}_i^{\mathcal{F}}$, echivalenți cu $e_i^{\mathcal{F}}$. Notînd

$$(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}})_0 = \tilde{f}_i^{\mathcal{F}} - \sum_{\iota=1}^{n} (\tilde{f}_i^{\mathcal{F}})_\iota,$$

maximalitatea familiei de mai sus implică

$$(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}})_0 \prec e_i^{\mathcal{F}}.$$

Aplicînd teorema 2.3, deducem

$$(\tilde{f}_i^{\mathcal{F}})_\iota \in M_i^{\mathcal{F}}, \qquad 0 \leqslant \iota \leqslant n,$$

deci

$$\tilde{f}_\iota^{\mathcal{F}} \in M_\iota^{\mathcal{F}}.$$

q.e.d.

Fie acum M o W^*-algebră semifinită, Z centrul său şi $e \in M$ un proiector finit cu $z(e) = 1$. Atunci aplicaţia $\pi : z \to ze$ este un izomorfism al lui Z pe centrul Ze al lui eMe. Notăm prin $\natural$ urma centrală canonică a W^*-algebrei finite eMe şi punem

$$\Phi_e(x) = \pi^{-1}(exe)^\natural, \qquad x \in M.$$

Atunci Φ_e este o Z-stare din M_*^Z. Notăm $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_{\Phi_e}$.

2.9. Corolar. *Fie M o W^*-algebră semifinită, Z centrul său şi $e \in M$ un proiector finit cu $z(e) = 1$. Atunci pentru orice ideal maximal ι al lui Z, $\widetilde{M}_\iota^{\mathcal{F}_e}$ este un factor semifinit şi orice proiector finit din $\widetilde{M}_\iota^{\mathcal{F}_e}$ aparţine lui $M_\iota^{\mathcal{F}_e}$.*

2.10. Corolar. *Fie M o W^*-algebră finită şi Z centrul său. Atunci pentru orice ideal maximal ι al lui Z, $\widetilde{M}_\iota^{\mathcal{F}_1} = M_\iota^{\mathcal{F}_1}$ este un factor finit.*

Remarcăm că, cazul M de tip I a fost analizat în capitolul II, § 5.

În cazul M de tip III problema factorialităţii W^*-algebrelor $\widetilde{M}_\iota^{\mathcal{F}_\Phi}$ este deschisă. Demonstrăm doar următoarea variantă a teoremei II.4.17 :

2.11. Teoremă. *Fie M o W^*-algebră de tip III, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi $\mathcal{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui M_*^Z. Atunci pentru orice $\iota \in \Omega$*

$$[\iota]^{\mathcal{F}} = [\iota].$$

Demonstraţie. Fie Φ o Z-stare din $\mathcal{F}$, e suportul său şi $\iota \in \Omega$. Atunci

$$e_\iota^{\mathcal{F}} \neq 0.$$

Dacă f este un proiector care nu aparţine lui $[\iota]$, atunci

$$z(f)(\iota) = 1.$$

Aplicînd [8], Chap. III, § 8, Cor. 5, deducem

$$ez(f) \prec f,$$

$$e_\iota^{\mathcal{F}} \prec f_\iota^{\mathcal{F}}$$

$$f_\iota^{\mathcal{F}} \neq 0.$$

Astfel f nu aparţine lui $[\iota]^{\mathcal{F}}$. Conform lemei III.2.3,

$$[\iota]^{\mathcal{F}} \subset [\iota].$$

Incluziunea reciprocă fiind trivială,

$$[t]^{\mathscr{F}} = [t].$$

q.e.d.

Teoremele 2.2 şi 2.11 sînt demonstrate în [48], corolariile 2.5 şi 2.9 în [47], corolarul 2.7 în [21], iar corolarul 2.10 în [39]. Corolarul 2.9 a fost demonstrat independent şi în [21]. Teorema 2.6, demonstrată în esenţă în [21], este prezentată după [48].

§ 3. W^*-REDUCEREA C^*-ALGEBRELOR

Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare a lui M_*^Z. Notăm pentru orice C^*-subalgebră A a lui M şi orice $t \in \Omega$ prin $A_t^{\mathscr{F}}$ imaginea lui A în $M_t^{\mathscr{F}}$, iar prin $\widetilde{A}_t^{\mathscr{F}}$ w-închiderea lui $A_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$. Ne propunem să analizăm condiţiile în care $\widetilde{A}_t^{\mathscr{F}}$ nu diferă mult de $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ aproape pentru orice $t \in \Omega$.

În legătură cu această problemă demonstrăm trei teoreme. Prima dintre ele rezultă din teorema II.4.14 şi din teorema de densitate a lui Kaplansky :

3.1. TEOREMĂ (de densitate cu forme fixate). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui M_*^Z, $(\Phi_i)_{i\geq 1}$ un şir în $\mathscr{F}$ şi A o C^*-subalgebră w-densă a lui M. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ şi orice $\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$ există $\widetilde{a}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{A}_t^{\mathscr{F}}$, $\|\widetilde{a}_t^{\mathscr{F}}\| \leq \|\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}\|$, cu*

$$(\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{x}_t^{\mathscr{F}}) = (\Phi_i)_t^{\mathscr{F}}(\widetilde{a}_t^{\mathscr{F}}), \qquad i \geq 1.$$

3.2. COROLAR *Fie M o W^*-algebră de tip $I_{\aleph_0}$, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$, unde $e_n \in M$ sînt proiectori abelieni ortogonali cu $z(e_n) = 1$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{e_1}$ şi A o C^*-subalgebră w-densă a lui M. Notăm pentru orice $t \in \Omega$*

$$\widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n)_t^{\mathscr{F}}.$$

Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$

$$\widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} \widetilde{A}_t^{\mathscr{F}} \widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} = \widetilde{e}_t^{\mathscr{F}} \widetilde{M}_t^{\mathscr{F}} \widetilde{e}_t^{\mathscr{F}}.$$

Demonstraţie. Fie $\Phi = \Phi_{e_1}$. Există izometrii parţiale $v_n \in M$ cu

$$v_n^* v_n = e_1,$$
$$v_n v_n^* = e_n.$$

Definim pentru orice întregi n, $m \geqslant 1$

$$\Phi_{n,m} = L_{v_n^*} R_{v_m} \Phi$$

şi aplicăm teorema 3.1 şirului $(\Phi_{n,m})_{n,m\geqslant 1}$.

q.e.d.

3.3. LEMĂ. *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, A o C^*-subalgebră w-densă a lui M, $\Phi \in M_*^z$, $\Phi \geqslant 0$, $x \in M$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci pentru orice proiector central nenul p există un proiector central nenul $q \leqslant p$ şi $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, astfel încît*

$$\|q\Phi(|x-a|^2)^{\frac{1}{2}}\| \leqslant \varepsilon.$$

Demonstraţie. Fie A_1^+ mulţimea tuturor elementelor $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Conform teoremei I. 1.8,

$$x \in (((A_1^+)^m)_m)^m.$$

Există o familie filtrată crescător (c_ι) în $((A_1^+)^m)_m$, astfel încît

$$x = \sup_\iota c_\iota.$$

Atunci $(|x - c_\iota|^2)$ tinde către 0 în w-topologia, deci $(\Phi(|x - c_\iota|^2))$ tinde către 0 în w-topologia. Fie Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, iar V partea deschisă şi închisă a lui Ω, a cărei funcţie caracteristică este p. Aplicînd teorema II.1.3 şi corolarul II.2.4, există o parte deschisă densă D_1 a lui V, astfel încît

$$\inf \Phi(|x - c_\iota|^2)(t) = 0, \ t \in D_1.$$

Dacă $t_1 \in D_1$, există $c \in ((A_1^+)^m)_m$ cu

$$\Phi(|x-c|^2)^{\frac{1}{2}}(t_1) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie V_1 o vecinătate deschisă şi închisă a lui t_1, inclusă în V, astfel încît

$$\Phi(|x-c|^2)^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \ t \in V_1,$$

iar p_1 funcţia caracteristică a lui V_1. Atunci p_1 este un proiector central nenul, $p_1 \leqslant p$ şi

$$\|p_1\Phi(|x-c|^2)^{\frac{1}{2}}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Raţionînd analog, există un proiector central nenul $p_2 \leqslant p_1$ şi $b \in (A_1^+)^m$ cu

$$||p_2\Phi(|c - b|^2)^{\frac{1}{2}}|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

iar apoi un proiector central nenul $p_3 \leqslant p_2$ şi $a \in A_1^+$ cu

$$||p_3\Phi(|b - a|^2)^{\frac{1}{2}}|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Punînd $q = p_3$, avem

$$||q\Phi(|x - a|^2)^{\frac{1}{2}}|| \leqslant \varepsilon.$$

q. e. d.

3.4. Teoremă (de densitate cu elemente fixate). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui M_*^Z, $\Phi \in \mathscr{F}$, $\Phi \geqslant 0$, $\tilde{e}_t^{\mathscr{F}}$ suportul lui $\Phi_t^{\mathscr{F}}$ în $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$, $t \in \Omega$, $(x_i)_{i\geqslant 1}$ un şir în M şi A o C^*-subalgebră w-densă a lui M. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$*

$$(x_i)_t^{\mathscr{F}}\, \tilde{e}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{A}_t^{\mathscr{F}}\, \tilde{e}_t^{\mathscr{F}}, \qquad i \geqslant 1.$$

Demonstraţie. Conform principiului şirul de partiţii ale unităţii, putem presupune că şirul $(x_i)_{i\geqslant 1}$ constă dintr-un singur element $x \in M$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Aplicînd lema 3.3 şi principiul şirului de partiţii ale unităţii, există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $a \in A_1^+$ cu

$$\Phi_t^{\mathscr{F}}(|(x - a)_t^{\mathscr{F}}|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon.,$$

Fie $t \in D$. Alegem pentru orice întreg $n \geqslant 1$ un $a_n \in A_1^+$ cu

$$\Phi_t^{\mathscr{F}}(|(x - a_n)_t^{\mathscr{F}}|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Fie $\tilde{a}_t^{\mathscr{F}}$ un punct limită al şirului $((a_n)_t^{\mathscr{F}})$ în w-topologia lui $\widetilde{M}_t^{\mathscr{F}}$. Atunci $\tilde{a}_t^{\mathscr{F}} \in \widetilde{A}_t^{\mathscr{F}}$. Cum pentru orice n

$$|\Phi_t^{\mathscr{F}}((x_t^{\mathscr{F}} - \tilde{a}_t^{\mathscr{F}})^* (x_t^{\mathscr{F}} - (a_n)_t^{\mathscr{F}}))| \leqslant \Phi_t^{\mathscr{F}}(|x_t^{\mathscr{F}} - \tilde{a}_t^{\mathscr{F}}|^2)^{\frac{1}{2}}\, \Phi_t^{\mathscr{F}}(|(x - a_n)_t^{\mathscr{F}}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{n} ||\Phi||^{\frac{1}{2}},$$

deducem

$$\Phi^{\mathscr{F}}(|x_t^{\mathscr{F}} - \tilde{a}_t^{\mathscr{F}}|^2) = 0,$$

$$|x_t^{\mathscr{F}} - \tilde{a}_t^{\mathscr{F}}|^2 \tilde{e}_t^{\mathscr{F}} = 0,$$

$$x_t^{\mathscr{F}} \tilde{e}_t^{\mathscr{F}} = \tilde{a}_t^{\mathscr{F}} \tilde{e}_t^{\mathscr{F}} \in \tilde{A}_t^{\mathscr{F}} \tilde{e}_t^{\mathscr{F}}.$$

q.e.d.

3.5. Corolar. *Fie M o W^*-algebră finită, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$ şi A o C^*-subalgebră w-densă a lui M. Atunci pentru orice şir $(x_i)_{i\geq 1}$ în M există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$*

$$(x_i)_t^{\mathscr{F}} \in \tilde{A}_t^{\mathscr{F}}, \qquad i \geq 1.$$

A treia teoremă de densitate rezultă din teorema II.4.16 şi din teorema de densitate a lui Kaplansky:

3.6. Teoremă (de densitate a C^*-subalgebrelor cu proprietatea lipirii centrale). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, $\mathscr{F}$ un subspaţiu vectorial normic închis, invariant, de tip stare al lui M_*^Z şi A o C^*-subalgebră w-densă a lui M, astfel încît A este un Z-submodul cu proprietatea lipirii al lui M. Atunci pentru orice $t \in \Omega$*

$$\tilde{A}_t^{\mathscr{F}} = \tilde{M}_t^{\mathscr{F}}.$$

Remarcăm că teorema 3.6 a fost folosită în capitolul II, § 5.

Cum nu putem să ne aşteptăm ca pentru orice C^*-algebră A luînd $M = A^{**}$ şi un $\mathscr{F}$ unic generat, aproape orice $\tilde{A}_t^{\mathscr{F}}$ să fie factor, pentru W^*-reducerea C^*-algebrelor propunem un alt procedeu, schiţat deja în introducere.

Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, A o C^*-subalgebră a lui M şi Φ o Z-stare din M_*^Z. Notăm prin $\mathscr{F}_\Phi^A$ Z-submodulul normic închis, invariant la translaţii cu elemente din A al lui M_*^Z, generat de Φ. Fie pentru orice $t \in \Omega$ A_t^Φ C^*-algebra cît al lui A prin idealul bilateral închis

$$\{a \mid a \in A,\ \Psi(a)\,(t) = 0 \text{ pentru orice } \Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A\},$$

a_t^Φ imaginea lui $a \in A$ în A_t^Φ, iar Ψ_t^Φ forma pe A_t^Φ indusă de $\Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A$ prin formula

$$\Psi_t^\Phi(a_t^\Phi) = \Psi(a)\,(t).$$

Anulatorul $\{\Psi_t^\Phi \mid \Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A\}^0$ al lui $\{\Psi_t^\Phi \mid \Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A\}$ în $(A_t^\Phi)^{**}$ este un ideal bilateral w-închis. Fie $\tilde{A}_t^\Phi$ W^*-algebra cît al lui $(A_t^\Phi)^{**}$ prin $\{\Psi_t^\Phi \mid \Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A\}^0$. Deoarece $\{\Psi_t^\Phi \mid \Psi \in \mathscr{F}_\Phi^A\}$ separă elementele lui A_t^Φ, scufundarea canonică a lui A_t^Φ în $(A_t^\Phi)^{**}$ induce un $*$-homomorfism injectiv al lui A_t^Φ în $\tilde{A}_t^\Phi$. Imaginea lui A_t^Φ prin această scufundare este w-densă în $\tilde{A}_t^\Phi$.

Demonstrăm următoarea extensie a teoremei 2.6 :

3.7. TEOREMĂ (de unicitate a W^*-reducerii C^*-algebrelor). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, A o C^*-subalgebră w-densă a lui M, iar Φ şi Ψ Z-stări din M_*^Z. Atunci există o familie $(p_\iota)_{\iota \in I}$ de proiectori centrali orotogonali cu suprem* 1, *astfel încît*

$$p_\iota \mathscr{F}_\Phi^A = p_\iota \mathscr{F}_\Psi^A, \qquad \iota \in I.$$

Demonstraţie. Conform principiului şirului de partiţii ale unităţii, este suficient să arătăm că, pentru orice proiector central nenul p şi orice $\varepsilon > 0$, există un proiector central nenul $q \leqslant p$ şi $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, astfel încît

$$\left\| q\Psi - q \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{b_i} \Phi \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Folosind teorema 2.6, există un proiector central nenul $p_1 \leqslant p$ şi elemente pozitive $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in M$, pentru care

$$\left\| p_1 \Psi - p_1 \sum_{i=1}^{n} L_{c_i} R_{d_i} \Phi \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicînd succesiv lema 3.3, există un proiector central nenul $q \leqslant p_1$ şi elemente pozitive $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, astfel încît pentru orice i

$$\| q \Phi(|c_i - a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \, \|d_i\|},$$

$$\| q \Phi(|d_i - b_i|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \, \|a_i\|}.$$

Atunci

$$\left\| q\Psi - q \sum_{i=1}^{n} L_{a_i} R_{b_i} \Phi \right\| \leqslant \varepsilon.$$

q.e.d.

3.8. COROLAR. *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z, A o C^*-subalgebră w-densă a lui M, iar Φ şi Ψ Z-stări din M_*^Z. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ aplicaţia identică a lui A induce un $*$-izomorfism al lui $\widetilde{A}_t^\Phi$ pe $\widetilde{A}_t^\Psi$.*

Corolarul 3.8 face plauzibilă să credem că dacă Φ este o Z-stare din M_*^Z, atunci aproape pentru orice $t \in \Omega$ W^*-algebra $\widetilde{A}_t^\Phi$ este un factor. Deocamdată la această întrebare putem răspunde doar în cazul cînd A este o C^*-algebră de tip I.

3.9. TEOREMĂ (de W^*-reducere a C^*-algebrelor de tip I). *Fie M o W^*-algebră, Z centrul său, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui M, A o C^*-subalgebră de tip* I *w-densă a lui M şi Φ o Z-stare din M_*^Z. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$*

1) *$\widetilde{A}_t^\Phi$ este un factor de tip* I;

2) *orice proiector minimal din $\widetilde{A}_t^\Phi$ aparţine lui A_t^Φ.*

Demonstraţie. Conform teoremei I.3.14, există un proiector abelian e cu suport central 1 în M, o familie $(p_\iota)_{\iota\in I}$ de proiectori ortogonali cu suprem 1 în Z şi o familie $(a_\iota)_{\iota\in I}$, $0 \leqslant a_\iota \leqslant 1$, în A, astfel încît

$$ep_\iota = a_\iota p_\iota, \qquad \iota \in I.$$

Notăm prin Φ_e Z-stare din M_*^Z, definită prin formula

$$\Phi_e(x)\, e = exe.$$

După corolarul 3.8 putem presupune că $\Phi = \Phi_e$. Fie V_ι partea deschisă şi închisă a lui Ω, a cărei funcţie caracteristică este p_ι iar $D = \bigcup_{\iota\in I} V_\iota$. D este o parte deschisă densă a lui Ω.

Fie $t \in D$. Există $\iota \in I$, astfel încît $t \in V_\iota$. Cum $a_\iota p_\iota = ep_\iota$, deducem că $(a_\iota)_t^\Phi$ este un proiector. Mai departe, cum $a_\iota A a_\iota p_\iota = eAep_\iota \subset Zep_\iota = Za_\iota p_\iota$, rezultă că $(a_\iota)_t^\Phi A_t^\Phi (a_\iota)_t^\Phi = \mathbf{C}(a_\iota)_t^\Phi$, deci $(a_\iota)_t^\Phi \widetilde{A}_t^\Phi (a_\iota)_t^\Phi = \mathbf{C}(a_\iota)_t^\Phi$. Astfel $(a_\iota)_t^\Phi$ este un proiector minimal al lui $\widetilde{A}_t^\Phi$. Se vede uşor că suportul central al lui $(a_\iota)_t^\Phi$ în $\widetilde{A}_t^\Phi$ este 1, deci $\widetilde{A}_t^\Phi$ este un factor de tip I.

Cum A_t^Φ conţine proiectorul minimal $(a_\iota)_t^\Phi$, aplicînd corolarul I.2.3, se deduce uşor că orice proiector minimal al lui $\widetilde{A}_t^\Phi$ aparţine lui A_t^Φ.

q.e.d.

3.10. COROLAR. *Fie A o C^*-algebră de tip* I, *$M = A^{**}$, Z centrul lui M, Ω spaţiul idealelor maximale ale lui Z şi Φ o Z-stare din M_*^Z. Atunci există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ forma pozitivă*

$$a \mapsto \Phi(a)\,(t)$$

pe A defineşte o $*$-reprezentare factorială de tip I.

Teoremele 3.1, 3.4 şi corolariile 3.2, 3.5 sînt demonstrate în [48], iar corolariile 3.8, 3.10 în [21]. Teorema 3.7 demonstrată în esenţă în [21], este prezentată cu demonstraţia din [48].

§ 4. APLICAŢII: TEOREMA DE TIP STONE – WEIERSTRASS PENTRU C^*-ALGEBRE DE TIP I

W^*-reducerea a fost deja folosită în demonstraţia teoremei II.5.16. În acest paragraf utilizăm W^*-reducerea în demonstraţia teoremei de tip Stone — Weiestrass pentru C^*-algebre de tip I.

Fie A o C^*-algebră şi $S \subset A^*$. Spunem că o C^*-subalgebră B a lui A separă S, dacă pentru orice $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ cu

$$\varphi_1|_B = \varphi_2|_B$$

avem

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Notăm prin $P(A)$ mulţimea tuturor formelor pozitive ireductibile φ pe A cu $\|\varphi\| = 1$. $P(A) \cup \{0\}$ coincide cu mulţimea tuturor punctelor extremale ale mulţimii

$$\{\varphi \mid \varphi \text{ formă pozitivă pe } A, \ \|\varphi\| \leqslant 1\}.$$

4.1. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră şi B o C^*-subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A)$. Atunci pentru orice $*$-reprezentare ireductibilă π a lui A, restricţia lui π la B este o $*$-reprezentare ireductibilă a lui B.*

Demonstraţie. Presupunem că comutantul lui πB conţine un proiector E' diferit de proiectorul nul şi de proiectorul identic. Atunci există vectori nenuli ξ_1, ξ_2 cu

$$E'\xi_1 = \xi_1,$$

$$E'\xi_2 = 0.$$

Definim formele pozitive φ_1, φ_2 pe A prin formulele

$$\varphi_1(a) = \frac{1}{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} (\pi(a)(\xi_1 + \xi_2) \mid \xi_1 + \xi_2),$$

$$\varphi_2(a) = \frac{1}{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} (\pi(a)(\xi_1 - \xi_2) \mid \xi_1 - \xi_2).$$

φ_1 şi φ_2 sînt ireductibile şi $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$. Pentru $b \in B$

$$\varphi_1(b) = \frac{1}{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} ((\pi(b)\xi_1 \mid \xi_1) + (\pi(b)\xi_2 \mid \xi_2)) =$$

$$= \frac{1}{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} ((\pi(b)\xi_1 \mid \xi_1) + (\pi(b)(-\xi_2) \mid -\xi_2)) = \varphi_2(b).$$

Cum B separă $P(A)$, deducem $\varphi_1 = \varphi_2$. Astfel pentru orice $a \in A$

$$\|\pi(a)(\xi_1 + \xi_2)\| = \|\pi(a)(\xi_1 - \xi_2)\|,$$

deci asocierea

$$\pi(a)(\xi_1 + \xi_2) \mapsto \pi(a)(\xi_1 - \xi_2)$$

definește un operator unitar U'. Se vede ușor că U' comută cu πA deci este un multiplu scalar al operatorului identic. Prin urmare ξ_1 este un multiplu scalar al lui ξ_2, ceea ce este imposibil.

q. e. d.

4.2. Corolar. *Fie A o C^*-algebră și B o C^*-subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A)$. Atunci A este de tip* I *dacă și numai dacă B este de tip* I.

Demonstrație. Conform corolarului I.3.15, dacă A este de tip I, atunci și B este de tip I.

Presupunem acum că B este de tip I. Fie $\mathscr{I}$ un ideal bilateral închis al lui A, diferit de A.

Conform lemei 4.1, $\mathscr{I} \cap B$ este diferit de B. După teorema I.3.14, $B/\mathscr{I} \cap B$ satisface condiția lui Glimm, deci există un element pozitiv $b \in B$, imaginea căruia în $B/\mathscr{I} \cap B$ nu este nulă și astfel încît imaginea lui b prin orice $*$-reprezentare ireductibilă a lui B, nucleul căreia conține pe $\mathscr{I} \cap B$, este de rang $\leqslant 1$.

Evident, imaginea lui b în $A/\mathscr{I}$ nu este nulă. Fie π o $*$-reprezentare ireductibilă a lui A, nucleul căreia conține pe $\mathscr{I}$. Atunci nucleul restricției lui π la B conține pe $\mathscr{I} \cap B$. Aplicînd lema 4.1, deducem că rangul lui $\pi(b)$ este $\leqslant 1$.

Astfel $A/\mathscr{I}$ satisface condiția lui Glimm. Conform teoremei 3.14, A este de tip I.

q. e. d.

Fie A o C^*-algebră. O formă pozitivă φ pe A se numește factorială, dacă $*$-reprezentarea π_φ asociată lui φ este factorială. φ se numește de tip I, dacă π_φ este de tip I.

4.3. Lemă. *Fie A o C^*-algebră și B o C^*-subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A)$. Atunci pentru orice formă pozitivă factorială de tip* I *φ pe A, restricția lui φ la B este factorială și de tip* I.

Demonstrație. Fie π_φ $*$-reprezentarea asociată lui φ. Cum w-închiderea lui $\pi_\varphi A$ este un factor de tip I, există un $*$-izomorfism π al său pe $B(H)$, unde H este un spațiu Hilbert. Cum $\pi\pi_\varphi$ este o $*$-reprezentare ireductibilă a lui A, conform lemei 4.1., $\pi\pi_\varphi B$ este w-densă în $B(H)$. Rezultă că w-închiderea lui $\pi_\varphi B$ coincide cu cea a lui $\pi_\varphi A$. Astfel restricția lui φ la B este factorială și de tip I.

q. e. d.

4.4. Lemă. *Fie A o C^*-algebră și B o C^*-subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A) \cup \{0\}$. Atunci w-închiderea lui B în A^{**} conține unitatea lui A^{**}.*

Demonstrație. Fie u unitatea w-închiderii lui B în A^{**}. Dacă $u \neq 1$, atunci mulțimea $\{\theta \mid \theta$ formă pozitivă pe $A, \|\theta\| \leqslant 1, \theta|_B = 0\}$ nu se reduce la forma identic nulă, deci are un punct extremal nenul. Astfel există un element al lui $P(A)$ care se anulează pe B, în contradicție cu faptul că B separă $P(A) \cup \{0\}$.

q. e. d.

4.5. COROLAR *Fie A o C^*-algebră, B o C^*-subalgebră a lui A care separă $P(A) \cup \{0\}$ şi ψ o formă pozitivă pe B. Atunci*

1) *orice prelungire liniară pozitivă a lui ψ pe A are aceeaşi normă cu ψ;*

2) *orice prelungire liniară φ a lui ψ pe A cu $\|\varphi\| = \|\psi\|$ este pozitivă.*

Demonstrăm acum reciproca lemei 4.3:

4.6. LEMĂ. *Fie A o C^*-algebră şi B o C^*-subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A) \cup \{0\}$. Atunci orice formă pozitivă factorială de tip* I ψ pe *B are o singură prelungire liniară pozitivă pe A, care este factorială şi de tip* I.

Demonstraţie. Fie φ_1, φ_2 două forme pozitive pe A, astfel încît

$$\varphi_1|_B = \varphi_2|_B = \psi.$$

Notăm

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Fie $\pi_\varphi : A \to B(H)$ $*$-reprezentarea asociată lui φ, iar $\xi \in H$ un vector ciclic cu

$$\varphi(a) = (\pi(a)\xi \mid \xi) \quad , \quad a \in A.$$

Conform lemei 4.4, w-închiderea lui $\pi_\varphi B$ conţine id_H, deci este o algebră von Neumann. Fie E' proiectorul ortogonal pe închiderea lui $\pi_\varphi(B)\xi$. Evident, $E' \in \pi_\varphi(B)'$ şi $\xi \in E'H$. Cum $\varphi|_B$ este factorială şi de tip I, $\pi_\varphi(B)''E'$ este un factor de tip I. Dacă P este suportul central al lui E' în $\pi_\varphi(B)'$, atunci $\pi_\varphi(B)''E'$ este $*$-izomorfă cu $\pi_\varphi(B)''P$, deci $\pi_\varphi(B)''P$ este un factor de tip I. Prin urmare $\pi_\varphi(B)'P$ este un factor de tip I.

Fie F' un proiector minimal al lui $\pi_\varphi(B)'P$. Pentru $\eta \in F'H$, $\|\eta\| = 1$, definim formă pozitivă φ_η pe A prin formula

$$\varphi_\eta(a) = (\pi_\varphi(a)\eta \mid \eta.$$

Cum $*$-reprezentarea

$$b \mapsto F'\pi_\varphi(b)|_{F'H} \in B(F'H)$$

a lui B este ireductibilă, $\varphi_\eta|_B \in P(B)$. Deoarece B separă $P(A)$, mulţimea

$$\{\rho \mid \rho \text{ formă pozitivă pe } A, \ \|\rho\| \leqslant 1, \ \rho|_B = \varphi_\eta|_B\}$$

nu poate avea două puncte extremale diferite, deci se reduce la un punct, care aparţine lui $P(A)$. Cum φ_η aparţine acestei mulţimi, rezultă că $\varphi_\eta \in P(A)$.

Notînd prin G' proiectorul ortogonal pe închiderea lui $\pi_\varphi(A)\eta$, $G' \in \pi_\varphi(A)'$ şi $*$-reprezentarea

$$a \mapsto G'\pi_\varphi(a)|_{G'H} \in B(G'H)$$

a lui A este echivalentă cu $*$-reprezentarea definită de φ_η, deci este ireductibilă. Conform lemei 4.1, $G' \pi_\varphi (B)|_{G'H}$ este w-densă în $B(G'H)$, deci închiderea lui $\pi_\varphi(B)\eta$ coincide cu închiderea lui $\pi_\varphi (A)\eta$. Astfel

$$F' = G' \in \pi_\varphi(A)'.$$

Cum F' este un proiector minimal oarecare în factorul de tip I $\pi_\varphi(B)'P$, deducem că

$$\pi_\varphi (B)'P \subset \pi_\varphi (A)'.$$

Deoarece

$$\xi \in E'H \subset PH$$

şi P comută cu $\pi_\varphi A$, rezultă

$$\pi_\varphi (A)\xi \subset PH.$$

ξ fiind ciclic pentru π_φ,

$$H \subset PH,$$

$$P = id_H.$$

Astfel

$$\pi_\varphi (B)' \subset \pi_\varphi (A)'$$

deci

$$\pi_\varphi(B)' = \pi_\varphi(A)',$$

$$\pi_\varphi(B)'' = \pi_\varphi(A)''.$$

Deoarece $\varphi_1, \varphi_2 \leqslant 2\varphi$, aplicînd teorema de tip Radon-Nikodym, există $\xi_1, \xi_2 \in H$, astfel încît pentru orice $a \in A$

$$\varphi_1(a) = (\pi_\varphi(a)\xi_1 | \xi_1),$$

$$\varphi_2(a) = (\pi_\varphi(a) \xi_2 | \xi_2).$$

Cum pentru orice $a \in A$ $\pi_\varphi(a)$ aparţine w - închiderii $\pi_\varphi(B)''$ a lui $\pi_\varphi B$, iar φ_1 şi φ_2 coincid pe B, deducem

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

În sfîrşit, cum $P = id_H$, $\pi_\varphi(A)' = \pi_\varphi(B)' = \pi_\varphi(B)'P$ este un factor de tip I, deci $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ este factorială şi de tip I.

q.e.d.

Lema 4.3, corolarul 4.5. şi lema 4.6 implică :

4.7. Corolar. *Fie A o C^* - algebră şi B o C^* - subalgebră a lui A, astfel încît B separă $P(A) \cup \{0\}$. Dacă φ_1 este o formă pozitivă factorială de tip* I *pe A, φ_2 este o formă pe A, $\| \varphi_2 \| \leqslant \| \varphi_1 \|$ şi*

$$\varphi_1|_B = \varphi_2|_B,$$

atunci

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

4.8. LEMĂ. *Fie A o C^* - algebră, $M = A^{**}$, B o C^* - subalgebră de tip I a lui A care separă $P(A) \cup \{0\}$ și $T : A \to M$ o aplicație liniară, $\|T\| \leqslant 1$, astfel încît*

$$Tb = b, \quad b \in B.$$

Atunci

$$Ta = a, \quad a \in A.$$

Demonstrație. Presupunem că există $a_0 \in A$, astfel încît $Ta_0 \neq a_0$. Fie Z centrul lui M și Ω spațiul idealelor maximale ale lui Z. Conform lemei II.4.18, există o Z - stare Φ în M_*^Z, pentru care

$$\Phi(Ta_0) \neq \Phi(a_0).$$

Notăm pentru orice $t \in \Omega$ prin Φ_t starea pe M definită prin formula

$$\Phi_t(x) = \Phi(x)(t).$$

După corolarul 4.2, A este de tip I. Aplicînd corolarul 3.10, există o parte deschisă densă D a lui Ω, astfel încît pentru orice $t \in D$ restricția lui Φ_t la A este factorială și de tip I. Cum $\Phi(Ta_0) \neq \Phi(a_0)$, există $t_0 \in D$ pentru care

$$\Phi_{t_0}(Ta_0) \neq \Phi_{t_0}(a_0)$$

și, notînd prin φ_1 restricția lui Φ_{t_0} la A, avem $\|\varphi_1\| = 1$.

Definim pe $B + \mathbb{C}a_0$ formă liniară ψ_2 prin formula

$$\psi_2(b + \lambda a_0) = \Phi_{t_0}(b + \lambda Ta_0).$$

Avem

$$|\psi_2(b + \lambda a_0)| \leqslant \|b + \lambda Ta_0\| =$$

$$= \|Tb + \lambda Ta_0\| =$$

$$= \|T(b + \lambda a_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|b + \lambda a_0\|,$$

deci ψ_2 este bine definită și $\|\psi_2\| \leqslant 1$. Conform teoremei Hahn-Banach ψ_2 are o prelungire liniară φ_2 pe A, astfel încît $\|\varphi_2\| = \|\psi_2\| \leqslant 1$.

Cum $\varphi_1|_B = \varphi_2|_B$, conform corolarului 4.7, $\varphi_1 = \varphi_2$. În particular

$$\Phi_{t_0}(a_0) = \varphi_1(a_0) = \varphi_2(a_0) = \Phi_{t_0}(Ta_0),$$

în contradicție cu alegerea lui t_0.

q.e.d.

4.9. Teoremă (de tip Stone — Weierstrass pentru C^* - algebre de tip I). *Fie A o C^* — algebră și B o C^* - subalgebră de tip I a lui A, astfel încît B separă $P(A) \cup \{0\}$. Atunci*

$$B = A.$$

Demonstrație. Fie $M = A^{**}$ și N w - închiderea lui B în M. Cum B este o C^* - algebră de tip I, N este o W^* - algebră de tip I. Aplicînd teorema I.3.11 și remarca de după lema I.3.6, aplicația identică a lui N se prelungește pînă la o aplicație liniară $\Phi : M \to N$ cu $\|\Phi\| = 1$. Notăm prin T restricția lui Φ la A. Cum $\|T\| \leqslant 1$ și

$$Tb = b, \quad b \in B,$$

conform lemei 4.8

$$Ta = a, \qquad a \in A.$$

Astfel

$$A \subset TA \subset N$$

deci

$$M = N.$$

Aplicînd teorema Hahn — Banach, se deduce ușor că $B = A$.

q. e. d.

Teorema 4.9 a fost demonstrată pentru așa zisele „GCR algebre" de Kaplansky în [27]. Conform teoremei de caracterizare a C^* - algebrelor de tip I a lui Glimm și Sakai, GCR algebrele sînt tocmai C^* - algebrele de tip I.

În [38] Sakai a dat o nouă demonstrație teoremei 4.9 în cazul cînd A este separabilă, folosind teoria reducerii a lui von Neumann. Demonstrația lui Sakai a fost extinsă la cazul general în [48], utilizînd reducerea topologică. Expunerea noastră se bazează pe [48].

Lema 4.1 se găsește de exemplu în [9], iar lema 4.6 în [38].

Un test important al unei dezvoltări ulterioare a reducerii topologice ar fi obținerea lemei 4.8 fără condiția ca B să fie de tip I. În cazul separabil, acest rezultat este demonstrat în [38].

Este conjecturat ca teorema 4.9 să fie adevărată fără condiția ca B să fie de tip I. Ne pare mai plauzibilă următoarea conjectură:

Fie A o C^* - algebră. Notăm prin $F(A)$ mulțimea tuturor formelor pozitive factoriale φ pe A cu $\|\varphi\| = 1$. Dacă B este o C^* - subalgebră a lui A, astfel încît B separă $F(A) \cup \{0\}$, atunci $B = A$.

Este posibil ca conjectura de mai sus să poată fi abordată folosind reducerea topologică și tehnici de aplicații complet pozitive, utilizate în capitolul I, § 3.

Primită la redacție la 12 iunie 1972.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Calea Griviței nr. 21, București 12

TOPOLOGICAL DECOMPOSITIONS OF W^*-ALGEBRAS

(ABSTRACT)

Under reduction theory of W^* — algebras it is understood a representation of W^* — algebras, using families of factors. John von Neumann gave a reduction of W^* — algebras with separable predual, using measurable families of factors. For the reduction theory of von Neumann we refer to [8], [39], [40] and [55]. In this paper we develop a reduction theory, which uses continuous families of factors and which was initiated in the common works with S. Strătilă [47], [48].

We explain briefly the topological reduction theory. Let π be a $*$— representation of a C^* — algebra with unit A, Z the center of $\overline{\pi A}^{wo}$ and Ω the maximal ideal space of Z. There exist normal positive Z — linear maps $\Phi : \overline{\pi A}^{wo} \to Z$, such that $\Phi(1) = 1$. For every $t \in \Omega$

$$a \mapsto \Phi\,(\pi(a))\,(t)$$

is a state on A. Denote by π_t^Φ the associated $*$— representation of A. The family $(\pi_t^\Phi)_{t\in\Omega}$ realizes the topological reduction of π. If π is injective, the C^* — reduction of A means the study of the family $(\pi_t^\Phi\, A)_{t\in\Omega}$ of C^* — algebras, and the W^*—reduction of A means the study of the family $(\overline{\pi_t^\Phi\, A}^{wo})_{t\in\Omega}$ of W^* — algebras.

Conversely, let Ω be a hyperstonean space and $(\pi_t)_{t\in\Omega}$ a continuous family of $*$—representations of A, that is every π_t is associated to a state φ_t on A, such that for every $a \in A$

$$t \to \varphi_t\,(a)$$

is continuous. Putting

$$\Phi(a)\,(t) = \varphi_t(a),$$

we define a positive map $\Phi : A \to C(\Omega)$. $C(\Omega)$ can be represented uniquely as a maximal Abelian selfadjoint algebra in some Hilbert space. Since Φ is completely positive, by Stinespring theorem ([43]) it defines a $*$— representation π of A. π realizes the synthesis of the family $(\tau_t)_{t\in\Omega}$.

The first chapter has an auxiliary character. In the first paragraph we present the monotone closure theorem of G. K. Pedersen, following the sketch of the proof given in [33], in the second paragraph we give a strong transitivity theorem and in the third paragraph the characterisation theorem of type I C^* — algebras of J. Glimm and S. Sakai is presented. In the third paragraph we use completely positive maps, one of the fundamental tools in this paper.

In the first two paragraphs of chapter II we present briefly the fundamental properties of stonean and hyperstonean spaces. In the following two paragraphs we develop topological decompositions for normed moduls over commutative AW^* — and W^* — algebras. Finally, in the last paragraph we study extreme points of Z — convex subsets of normed modules over a commutative C^* — algebra Z with unit.

In the third chapter we study classes of C^* — algebras with a geometry of projections close to the geometry of projections of an AW^* — algebra. The considered C^* — algebras contain all quotient C^* — algebras of AW^* — algebras. In this context we develop a C^* — reduction theory. In the last paragraph some applications are mentioned.

In the fourth chapter we present the W^* — reduction theory from [47] and [48], with slight improvements. As an application, we prove the Stone — Weierstrass theorem of I. Kaplansky, following the sketch of the proof given in [48].

BIBLIOGRAFIE

1. Apostol, C. şi Zsidó, L., *Ideals in W^* — algebras and the function η of A. Brown and C. Pearcy*, Revue Roum. Math. Pures et Appl. (va apare).
2. Arveson, W. B., *Subalgebras of C^* — algebras*, Acta Math., **123**, 141—224 (1969).
3. Bade, W. G., *The Banach space $C(S)$*, Aarhus Universitet, Lecture Notes, **26** (1971).
4. Berberian, S. K., *Baer * — rings*, Springer — Verlag, 1972.
5. Brown, A., Pearcy, C. şi Topping, D., *Commutators and the strong radical*, Duke Math. J., **35**, 853—859 (1968).
6. Combes, F., *Sur les faces d'une C^* — algèbre*, Bull. Sci. Math., **93**, 37—62 (1969).
7. Dixmier, J., *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasiliensis Math., **2**, 151—182 (1951).
8. Dixmier, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Gauthier — Villars, 1957 (1969).
9. Dixmier, J., *Les C^* — algèbres et leurs représentations*, Gauthier — Villars, 1964(1968).
10. Dyer, J., *Concerning AW^* — algebras*, Notices Amer. Math. Soc., **17**, 788 (1970), Abstract 677 — 47 — 5.
11. Gleason, A. M., *Projective topological spaces*, Illinois J. Math. **2**, 482—489 (1958).
12. Glimm, J. *A Stone Weierstrass theorem for C^* — algebras*. Ann. of Math., **72**, 216—244 (1960).
13. Glimm, J., *Type I. C^* — algebras*, Ann. of Math., **73**, 572—612 (1961).
14. Godement, R, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires*, J. Math. Pures Appl., 30 (1951), 1 — 110.
15. Goldman, M., *Structure of AW^* — algebras, I.* Duke Math. J., **23** 23—34 (1956).
16. Halpern, H. *Module homomorphisms of a von Neumann algebra into its center*, Trans. Amer. Math. Soc., **140**, 183—193 (1969).
17. Halpern, H., *Irreducible module homomorphisms of a von Neumann algebra into its center* Trans. Amer. Math. Soc., **140** (1969), 195—221.
18. Halpern, H., *Commutators in properly infinite von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **139**, 55 — 73 (1969).
19. Halpern, H., *Commutators modulo the center in a properly infinite von Neumann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., **150**, 55—68 (1970).
20. Halpern, H. *A generalized dual for a C^* — algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., **153**, 139—156 (1971).
21. Halpern, H., *Decomposition of functionals on C^* — algebras* (va apare).
22. Halpern, H., *Essential central spectrum and range for elements of a von Neumann algebra* (va apare).
23. Hasumi, M., *The extension property of complex Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **10**, 135—142 (1958).
24. Kadison, R. V., *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras*, Ann. of Math., **56**, 494—503 (1953).
25. Kadison, R. V., *Operator algebras with a faithful weakly closed reprezentation*, Ann. of Math., **64**, 175—181 (1956).
26. Kaplansky, I., *Projections in Banach algebras*, Ann. of Math., **53**, 235—249 (1951).
27. Kaplansky, I., *The structure of certain operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **70**, 219—255 (1951).
28. Kaplansky, I., *Rings of operators*, Benjamin, 1968.
29. Kuratowski, K., *Topology*, Vol. II. New York, London, Warszawa, 1968.
30. Lebow, A., *A Schroeder — Bernstein theorem for projections*, Proc. Amer. Math. Soc., **19**, 144—145 (1968).

31. MISONOU, Y., *On a weakly central operator algebra*, Tôhoku Math. J., *4*, 194–202 (1952).
32. NAKAI, M., *Some expectations in a W*–algebras*, Proc. Jap. Acad. Sci, **34**, 411–416 (1958).
33. PEDERSEN, G. K., *The „Up – Down" problem for operator algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **68**, 1896–1897 (1971).
34. PELIGRAD, C. şi ZSIDÓ, L., *A Riesz decomposition theorem in W* – algebras*, Acta Univ. Szeged (va apare) .
35. RENSHAW, B., *On the reduction theory for W* – algebras* (preprint).
36. SAITÔ, K., *Non-commutative extension of Lusin's theorem*, Tôhoku Math. J., **19**, 332–340, (1967).
37. SAKAI, S., *On a characterization of type I C* –algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 508–512 (1966).
38. SAKAI, S., *On a Stone – Weierstrass theorem for C* – algebras*, Tôhoku Math. J., **22**, 191–199 (1970).
39. SAKAI, S., *The theory of W* – algebras*, Yale University, Lecture Notes, 1962.
40. SAKAI, S., *C* – algebras and W* – algebras*, Springer – Verlag, 1971.
41. SASAKI, U., *Lattices of projections in AW* – algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A Math. **19**, 1–30 (1955).
42. SCHWARTZ, J., *Two finite, non-hyperfinite, nonisomorphic factors*, Comm. Pure Appl. Math. **16**, 19–26 (1963)
43. STINESPRING, W. F., *Positive functions on C* – algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., *6*, 211–216 (1955).
44. STONE, M. H., *Boundedness properties in function–lattices*, Canadian J. Math., *1*, 176 – 186 (1949).
45. STRĂTILĂ, S. şi ZSIDÓ, L., *Une théorie algébrique de la réduction pour les W* – algèbres* C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 272, 1453–1456 (1971).
46. STRĂTILĂ, S. şi ZSIDÓ, L., *Sur la théorie algébrique de la réduction pour les W* – algèbres*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 275, 451–454 (1972).
47. STRĂTILĂ, S. şi ZSIDÓ, L., *An algebraic reduction theory for W* – algebras I*. J.Funct. An., *11*, 295–313 (1972).
48. STRĂTILĂ, S. şi ZSIDÓ, L., *An algebraic reduction theory for W* – algebras II*, Revue Roum. Math. Pures et Appl., **18**, 406–460 (1973).
49. TAKESAKI, M., *On the Hahn-Banach type theorem and the Jordan decomposition of module linear mappings over some operator algebras*, Kōdai Math. Sem. Rep., **12**, 1–10 (1960).
50. TOMITA, M., *Spectral theory of operator algebras I*, Math. J. Okayama Univ., *9*, 63–98 (1959).
51. WRIGHT, F. B, *A reduction for algebras of finite type*, Ann. of Math., **60**, 560–570 (1954).
52. WRIGHT, F. B., *The ideals in a factor*, Ann. of Math., **68**, 475–483 (1958).
53. YEN, T., *Quotient algebra of a finite AW* – algebra*, Pacific J. Math, *6*, 389–395 (1956).
54. ZSIDÓ, L., *The norm of a derivation in a W* – algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **38**, 147–150 (1973).
55. ZSIDÓ, L., *Teoria reducerii pentru W* – algebre*, în „Seminar de algebre de operatori", Editura Academiei, 1973.