

Zadania z mechaniki kwantowej

1. Załóż, że z jądrem oddziałuje wyłącznie neutron fali s (czyli $l = 0$). Stwierdzono, że całkowity przekrój czynny na rozproszenie elastyczne neutronu o pewnej energii jest identyczny co do wartości z przekrojem czynnym na reakcję i wynosi połowę maksymalnej wartości przekroju czynnego na reakcję dla tej energii. Przyjmij parametr $\eta_0 = r \cdot e^{i\varphi}$. Na podstawie tych informacji wyznacz wartość r i wartość φ . Ile istnieje rozwiązań?

2. Neutrony o energii $T = 50$ keV zderzały się z jądrami ^8Be . Uzasadnij, że do rozważań można stosować model fal parcjalnych ograniczony do fali s .

Dla powyższych oddziaływań, przekrój czynny na reakcję wyniósł $2/3$ wartości maksymalnej dozwolonej dla reakcji. Jednocześnie stosunek całkowitego przekroju na rozpraszanie do przekroju na reakcję wyniósł $1 : 2$. Wyznacz na podstawie tych informacji współczynnik rozpraszania (osobno: moduł i fazę).

Na koniec podaj postać wyznaczonej amplitudy rozpraszania $f(\theta)$, tak że otrzymane parametry są wpisane liczbowo.

3. Rozpatrujemy oddziaływanie niskoenergetycznych neutronów z jądrem atomowym. Przyjmij, że energia kinetyczna jest taka, że wyrażenie $1/k^2$ ma wartość A , gdzie $A = \text{const}$. Pewien model teoretyczny przewiduje następujące wartości parametrów η :

	η_0	η_1	η_2 i następne
Model	-1	$(1-i)/2$	1

- Wyznacz wartość całkowitego przekroju czynnego na rozproszenie i na reakcję. Omów uzyskane wyniki.
- Wyznacz przewidywaną zależność kątową różniczkowego przekroju czynnego.
- Dla jakiego kąta rozproszenia różniczkowy przekrój czynny będzie miał wartość najmniejszą?

4. W rozpraszaniu neutronów na pewnym jądrze zaobserwowano, że:

(a) Gdy pęd w układzie zredukowanym był niewielki i wynosił $\hbar k_0$, to całkowite przekroje czynne na reakcję i rozpraszanie były identyczne i równe maksymalnej wartości całkowitego przekroju na reakcję. Ponieważ różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie był jednorodny, to przyjęto, że oddziałuje jedynie fala parcjalna $\ell = 0$. Wyznacz na tej podstawie współczynnik η_0 .

(b) Gdy jednak pęd zwiększono do $2 \cdot \hbar k_0$, to okazało się, że różniczkowy przekrój czynny wykazuje silną paraboliczną zależność od $x = \cos \theta$, taką że:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = \frac{1}{4k_0^2} \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 \right],$$

co uzasadnia włączenie w modelu fali parcjalnej $\ell = 1$.

Wyznacz współczynnik η_1 , zakładając że w nowej sytuacji postać η_0 się nie zmieniła.

Wskazówka: warto rozłożyć $\eta_1 = r_1 + iu_1$.

5. Z reaktora wyselekcjonowano wiązkę neutronów o pędzie odpowiadającym wartości $k_a = 0,1 \text{ fm}^{-1}$. W wyniku oddziaływań tych neutronów z jądrem atomowym o $A = 100$, zaobserwowano, że:

- [a₁] reakcje nie zachodzą, oraz
- [a₂] rozpraszanie posiada całkowity przekrój czynny $\sigma_{s,a} = 4\pi \text{ [b]}$.
- Sprawdź jakościowo, czy model fal parcjalnych można ograniczyć do $\ell = 0$.
- wyznacz współczynnik rozpraszania η_0 (zarówno jego moduł, jak i fazę).

Następnie z tym samym jądrem zderzano neutrony o $2\times$ większym pędzie. Zaobserwowano wówczas, że:

- [b₁] zachodzą reakcje z całkowitym przekrojem czynnym $\sigma_{R,b} = \pi \cdot 9/16 \text{ [b]}$, oraz
- [b₂] zachodzi rozpraszanie z całkowitym przekrojem czynnym $\sigma_{s,b} = \pi \cdot 31/16 \text{ [b]}$.
- Sprawdź jakościowo, czy ma sens rozważenie modelu fal parcjalnych ograniczonego do $\ell \in \{0, 1\}$.
- Przyjmując, że współczynnik η_0 się nie zmienił, ale dodatkowo pojawił się η_1 , wyznacz ten drugi współczynnik (zarówno jego moduł, jak i fazę).

6. Zderzając neutrony o energii $T = 1 \text{ keV}$ z jądrami ^{10}B stwierdzono, że przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne wynosi $\sigma_{\text{El}} = 22 \text{ b}$.

- Przyjmując masę nukleonu $m_N = 938.5 \text{ MeV}/c^2$, oblicz masę zredukowaną μ .
- Łącząc hipotezę de Broglie'a z modelem silnej absorpcji sprawdź, że opis rozpraszania można bezpiecznie zawęzić do fali s.
- Wyznacz δ_0 , czyli przesunięcie fazowe dla fali s.

7. W eksperymencie rozpędzone neutrony zderzały się z jądrami deuteru (^2H). Pęd w układzie zredukowanym wynosił $p^c = 0.1973 \text{ MeV}/c$. Zaobserwowano, że rozpraszanie elastyczne neutronów zachodzi z przekrojem czynnym $\sigma_{\text{El}} = 1.48 \text{ b}$.

- Sprawdź, czy opisanie tego rozpraszania w ramach modelu fal parcjalnych ograniczonego do fali s jest uzasadnione. Wyznacz przesunięcie fazowe δ_0 . Przyjmując masę każdego z nukleonów za 938.5 MeV , oblicz masę zredukowaną μ układu.
- Na podstawie równania wynikającego z warunków zszycia funkcji falowej na brzegu prostokątnego potencjału, wyznacz głębokość studni potencjału jądrowego V_0 . Przyjmij, że dla deuteronu studnia ma promień $R_0 = 2,1 \text{ fm}$.

Wskazówka: możesz napotkać na równanie typu $ax = \tan bx$. Rozwiąż je numerycznie.

Uwaga: formalnie zadanie ma wiele rozwiązań. Aby otrzymać wartość zbliżoną do prawdziwej, należy:

- (a) Przyjąć, że przesunięcie fazowe δ_0 jest ujemne.
- (b) Spośród rozwiązań $ax = \tan bx$, należy wybrać pierwszą dodatnią wartość x .

Pozostałe rozwiązania są sprzeczne z faktem doświadczalnym, że deuteron posiada dokładnie jeden stan energetyczny. Jest to stan podstawowy i jego energia wiązania wynosi $B = 2,245 \text{ MeV}$.

8. W eksperymencie neutrony o energii kinetycznej $T^L = 14,5$ MeV nakierowano na jądra ^{208}Pb . Okazało się, że otrzymany doświadczalnie różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie daje się z umiarkowaniem dobrym skutkiem opisać w ramach przybliżenia Borna dla rozpraszania na jednorodnej kulistej studni potencjału^[*]. Zaobserwowano, że pierwsze minimum tej zależności zachodzi przy $\theta^c = 31,3^\circ$. Wyznacz w ramach przyjętych założeń efektywny promień jądra ^{208}Pb .

Wskazówka: Pierwszym dodatnim rozwiązaniem równania $x = \tan x$ jest: $x \approx 4,5$.

[*] T. Mayer-Kuckuk „Fizyka Jądrowa”, Wydanie II (1987), rys. 59

9. W eksperymencie opisanym w poprzednim zadaniu zaobserwowano, że doświadczalny różniczkowy przekrój czynny dla rozpraszania pod kątem $\theta^c = 60^\circ$ wynosi $s = 4000$ mb/sr. Znając promień jądra ^{208}Pb wyliczony w poprzednim zadaniu w ramach przybliżenia Borna, zastosuj ponownie to podejście i wyznacz głębokość studni potencjału V_0 .

10. W rozpraszaniu elastycznym neutronów o pędzie $p = 215,5$ MeV/c na jądrach ^{56}Fe , różniczkowy przekrój czynny pod kątem $\theta = 0^\circ$ wyniósł $s_0 = 35,31$ b/sr. Zaobserwowano też, że pierwsze minimum dyfrakcyjne zachodzi przy kącie $\theta^c = 60^\circ$.

Zakładając przybliżenie Borna oraz, że potencjał jądra Fe ma kształt prostokątnej studni, znajdź promień oraz głębokość V_0 potencjału. Przyjmij $m_N = 938,5$ MeV/c².

Wskazówki: może się przydać np. Wolfram Alpha, aby znaleźć:

- wartość $\lim [\sin x - x \cdot \cos x]^2 / x^6$ przy $x \rightarrow 0$
- pierwsze dodatnie rozwiązanie równania $x = \tan x$

11* Stosując przybliżenie Borna, wyznacz różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie neutronu o pędzie $\hbar k$ na potencjale:

$$V(\vec{r}) = C \exp(-|\vec{r}|/r_0), \quad \text{gdzie } r_0 > 0, \quad C = 1/(8\pi r_0^3).$$

Wskazówki:

- Warto zacząć od całki po 3 wymiarach i rozpocząć całką po r , a następnie po θ' .
- całkując po r , warto zastosować podstawienie: $u = -r \left(i \frac{q}{\hbar} \cos \theta - \frac{1}{r_0} \right)$
- w całce po $d\theta'$, warto podstawić: $t = i \frac{q}{\hbar} \cos \theta' - \frac{1}{r_0}$.

12. W zderzeniach deuteronu o energii kinetycznej $T^L = 200$ MeV na ^3H zmierzono emisję w kanale wyjściowym $p + ^4\text{He}$ (jest to tzw. stripping deuteronu). Wykorzystując detektor umieszczony pod kątem 0° , otrzymano, że przekrój czynny na to zjawisko wynosi $d\sigma/d\Omega|_c = 1,92$ mb/sr. Rozważ proces odwrotny.

- Ile wynosi różniczkowy przekrój czynny dla protonu o takim samym pędzie, jak pęd deuteronu (wartości w środku masy)?
- Dla jakiego pędu protonu w środku masy przekrój czynny na proces odwrotny będzie taki sam, jak na proces pierwotny?

Uczestnicy mają następujące spiny: $I(d) = 1$, $I(^3\text{He}) = \frac{1}{2}$, $I(p) = \frac{1}{2}$, $I(^4\text{He}) = 0$.

Uwaga: w zadaniu zakładamy, że procesy zachodzą poprzez oddziaływania silne, które są odwracalne. Dla uproszczenia przyjmujemy: kinematykę nierelatywistyczną i stosowalność złotej reguły Fermiego.

13. Wykres na [str. 54 wykładu](#) ilustruje rozkłady różniczkowego przekroju czynnego na rozpraszanie ^{12}C na ^{28}Si przy trzech kolejnych energiach wiązki T^{L} : 24 MeV, 49.3 MeV i 186.4 MeV. Sprawdź, czy dla tych przypadków spełnione są warunki na dyfrakcję Fresnela i/lub Fraunhofera.

Wskazówki:

- Potrzebne wielkości fizyczne warto wyznaczyć w jednostkach MeV i fm.
- Wzory warto tak przedstawić, aby móc użyć $\hbar c = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$:

$$T^{\text{C}} = \frac{(\hbar k^{\text{C}})^2}{2\mu} = \frac{(\hbar c \cdot k^{\text{C}})^2}{2 \cdot \mu c^2} \quad \rightarrow \quad k^{\text{C}} = \dots$$

$$\hbar l_{\text{gr}} = L_{\text{gr}} = R_{\text{C}} \sqrt{2\mu E_{\text{C}}} \sqrt{\frac{T^{\text{C}}}{E_{\text{C}}} - 1} \quad \rightarrow \quad \hbar c \cdot l_{\text{gr}} = R_{\text{C}} \sqrt{2 \cdot \mu c^2 \cdot E_{\text{C}}} \sqrt{\frac{T^{\text{C}}}{E_{\text{C}}} - 1} \quad \rightarrow \quad l_{\text{gr}} = \dots$$