

ZAKŁAD FIZYKI JĄDROWEJ
UNIwersYTET WARSZAWSKI



Fizyka jądrowa

Rozproszenia i reakcje

Ujęcie nierelatywistyczne

Krzysztof Piasecki

Wykład w oparciu o materiały prof. Tomasza Matulewicza

Kody USOS: 1101-4FJ14 / 1100-1ENFIZJAD5



krzysztof.piasecki@fuw.edu.pl

Zasady zaliczenia

- Prace domowe : 35%
Kolokwium : 65%
- Niebecności : do 2 nieusprawiedliwionych – ok
każda następna = - 8 pkt
- Data kolokwium : 29.01.2024 (do ustalenia)
Dostępny wykład. Wolno mieć materiały.
- Korzystanie z sieci neuronowych (na krzemie i białku ☺) :
PD : wolno się konsultować, ale gros pracy musi być własny.
Kolokwium : nie wolno się konsultować w żaden sposób
- Punkty zostaną przeskalowane do 50% i dodane do punktów u prof. Urbana.

Część I

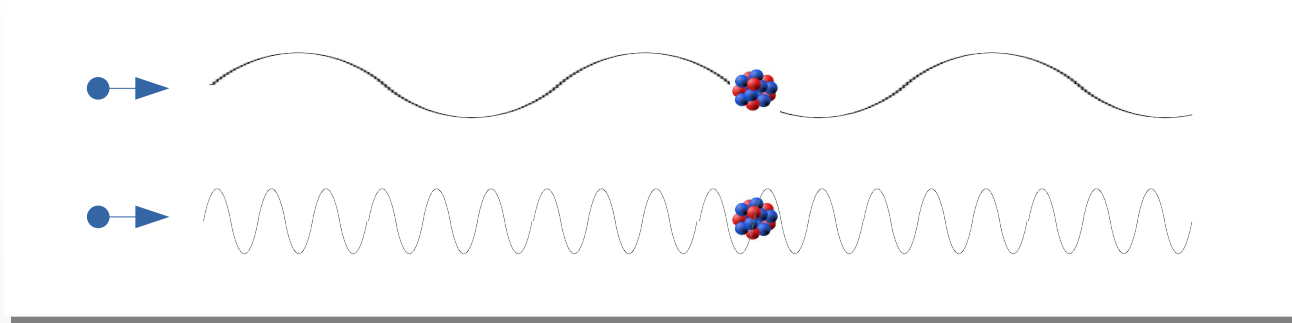
Rozproszenia i reakcje w ujęciu klasycznym



Spis zagadnień w części I

- Wprowadzenie
- Podstawowe zależności kinematyczne.
Bilans energetyczny. Ciepło reakcji.
- Przekrój czynny: całkowity i różniczkowy.
Funkcja odchylenia.
Przekrój czynny dla rozpraszania 2 kul
- Rozpraszanie Rutherforda (w polu Coulombowskim)
Funkcja odchylenia
Najmniejsza odległość
Trajektoria graniczna (zetknięcie się jąder)
Kąt grazing
Bariera Coulombowska
Graniczny moment pędu
- Parametr Sommerfelda
- Przekrój czynny na reakcję. Model silnej absorpcji.
- Transformacja różniczkowego przekroju czynnego Lab $\leftrightarrow$ CM

Nukleon próbuje jądro atomowe



- Średnica protonu : $\sim 1,5 \text{ fm}$
Średnica jądra ^{56}Fe : $\sim 4,5 \text{ fm}$

- $\lambda_{\text{de Broglie}}(N) = \frac{h}{p_N} = \frac{\hbar c \cdot 2\pi}{pc}$

$$\begin{cases} E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \\ E = mc^2 + E_{\text{kin}} \end{cases}$$

$E_{\text{kin}} (T)$	$\lambda \text{ [fm]}$
1 MeV	28
10 MeV	9
100 MeV	2,8
1 GeV	0.7
10 GeV	0.1
100 GeV	0.01

Obszar pola średniego:
nukleon „widzi” jądro jako całość

Dominacja zderzeń NN
Obfita produkcja cząstek

Obszar kwarków i gluonów

Czy efekty relatywistyczne odgrywają rolę?

- Przypomnienie wzorów:

$$E_{\text{całk}} = mc^2 + T$$

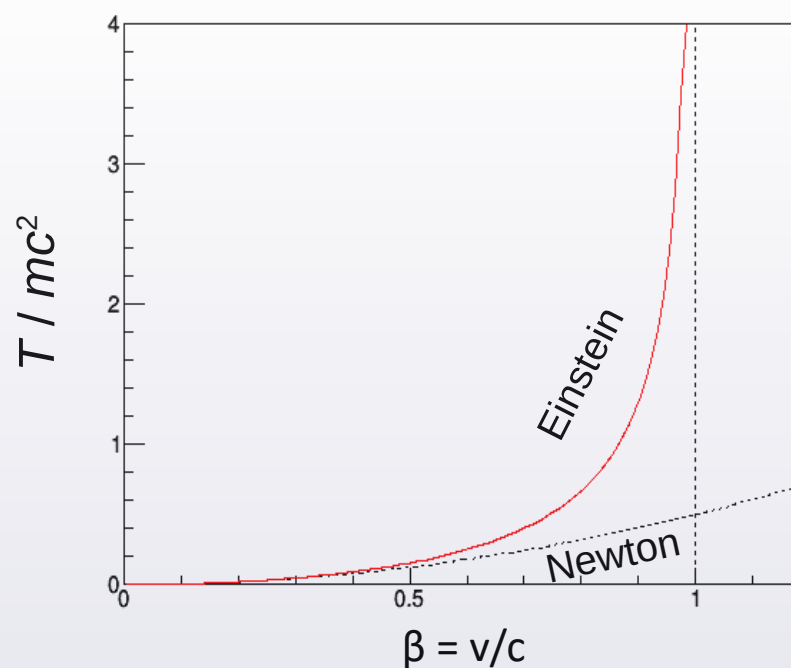
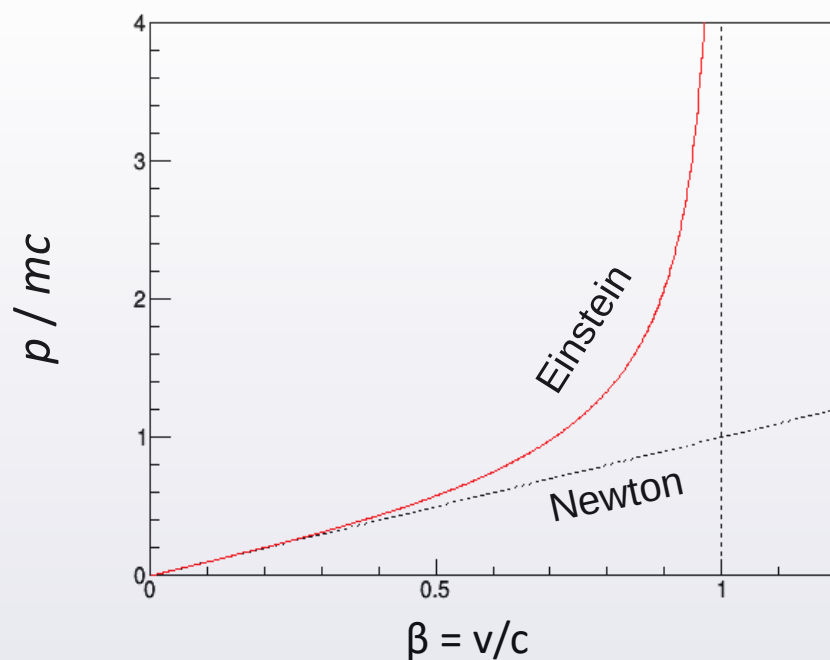
$$E_{\text{całk}} = mc^2 \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p = mv\gamma = mc \cdot \beta \gamma$$

- Jak z energią wiązki rosną parametry relatywistyczne?

$E_{\text{kin, Nukl.}} \text{ lub } T_N$	$\beta = v/c$	$\gamma = E_{\text{całk,N}} / m_N$
1 MeV	0.05	1.001
10 MeV	0.15	1.011
100 MeV	0.43	1.107
1 GeV	0.88	2.066



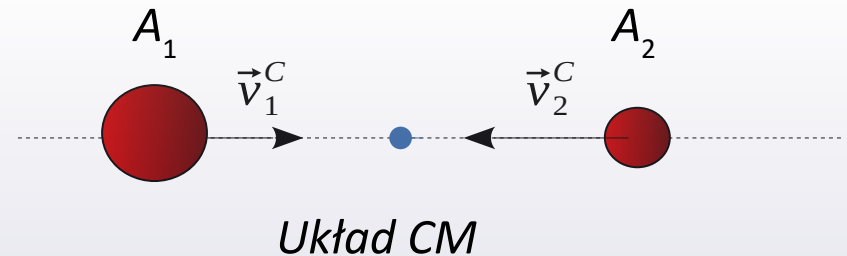
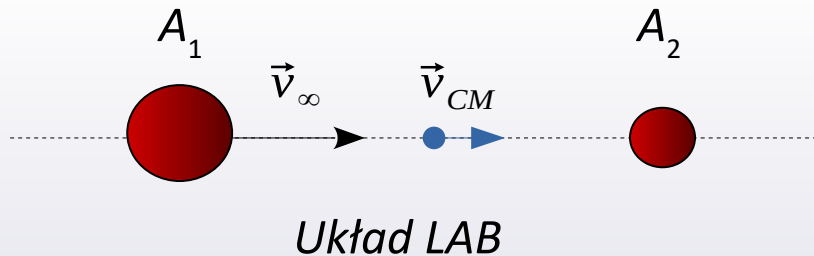
Klasyczna i nierelatywistyczna kinematyka zderzenia jądro-jądro

- ▶ Jądro wiązki masie $m_1 = m_N A_1$, rozpędzone w akceleratorze do prędkości v_∞ , zderza się z jądrem stacjonarnej tarczy o masie $m_2 = m_N A_2$.

W większości rozważań pominiemy poprawki od energii wiązania jąder.

Notacja: $v^{L,C}$: prędkość mierzona w ukł. Lab/CM. v_{CM} = prędkość układu CM względem ukł. Lab.

- ▶ Przed zderzeniem:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1^L + m_2 \vec{r}_2^L}{m_1 + m_2} \quad \left\| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1^L + m_2 \vec{v}_2^L}{m_1 + m_2} = \quad | \text{ tutaj } \quad = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_\infty \approx \frac{A_1}{A_1 + A_2} \cdot \vec{v}_\infty$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1^C = \vec{v}_\infty - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_\infty \cdot \left\{ 1 - \frac{A_1}{A_1 + A_2} \right\} = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \vec{v}_\infty \\ \vec{v}_2^C = \vec{0} - \vec{v}_{CM} = \frac{-A_1}{A_1 + A_2} \vec{v}_\infty \end{cases}$$

- Sprawdźmy pędy w układzie CM:

$$\begin{cases} \vec{p}_1^C = m_N A_1 \cdot \frac{A_2}{A_1 + A_2} \vec{v}_\infty \\ \vec{p}_2^C = m_N A_2 \cdot \frac{-A_1}{A_1 + A_2} \vec{v}_\infty \end{cases} \Rightarrow \vec{p}_1^C + \vec{p}_2^C = \vec{0} \quad \checkmark$$

- Gdy wprowadzimy **masę zredukowaną μ** :

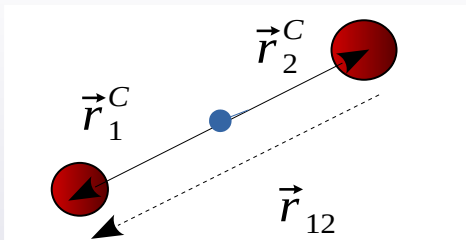
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_N} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}_{\frac{1}{A_{12}}} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p}_1^C = \mu \vec{v}_\infty \\ \vec{p}_2^C = -\mu \vec{v}_\infty \end{cases}$$

- **Sumaryczna energia kinetyczna w układzie CM**

$$\begin{aligned} T^C &= \frac{m_1 (v_1^C)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2^C)^2}{2} = \frac{mA_1}{2} \left(\frac{A_2}{A_1 + A_2} \right)^2 v_\infty^2 + \frac{mA_2}{2} \left(\frac{-A_1}{A_1 + A_2} \right)^2 v_\infty^2 \\ &= mA_1 A_2 \frac{A_1 + A_2}{(A_1 + A_2)^2} \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v_\infty^2}{2} \end{aligned}$$

← Równoważne ruchowi ciała o masie μ z prędkością v_∞ .

- W ogólności:



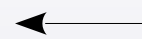
Jeśli zdefiniować $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1^C - \vec{r}_2^C$,

to:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1^C - \vec{v}_2^C = \frac{A_2}{\sum A} \vec{v}_\infty + \frac{A_1}{\sum A} \vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty$$

- Sumaryczna energia kinetyczna w CM – a energia kinetyczna w LAB :

$$T^C = \frac{m A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \cdot T^L$$



W układzie CM dostępne jest zawsze mniej energii niż w LAB.

Reszta energii jest „zamrożona” w ruchu środka masy układu jąder.

- Energia kinetyczna jądra pocisku na 1 nukleon jądra wiązki :

$$\frac{T^L}{A_1} = \frac{m_N v_\infty^2}{2}$$

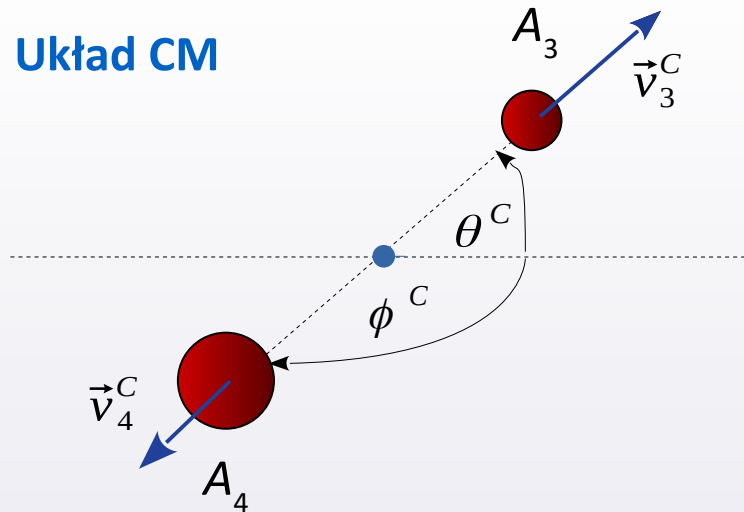
$$\frac{T^L}{A_1} = \frac{T^C}{\left(\frac{A_2}{A_1 + A_2} \right)} \frac{1}{A_1} = \frac{T^C}{A_{12}}$$



$$\frac{T^L}{A_1} = \frac{T^C}{A_{12}}$$

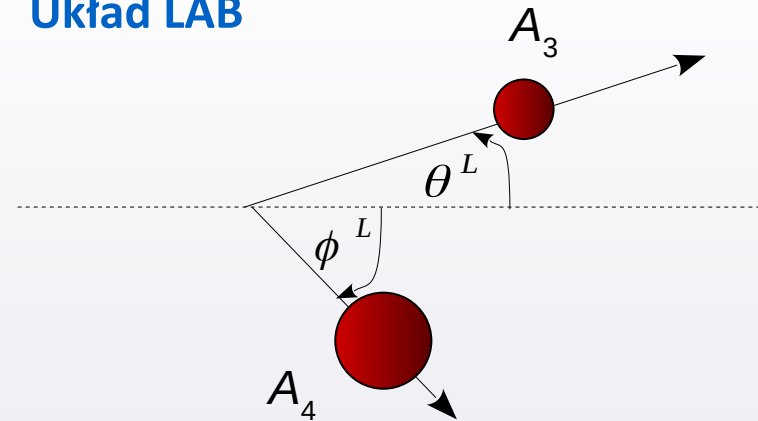
► **Sytuacja po zderzeniu**, gdy emitowane są 2 ciała:

Układ CM



Z. z. pędu: $\vec{p}_4^C = -\vec{p}_3^C$

Układ LAB

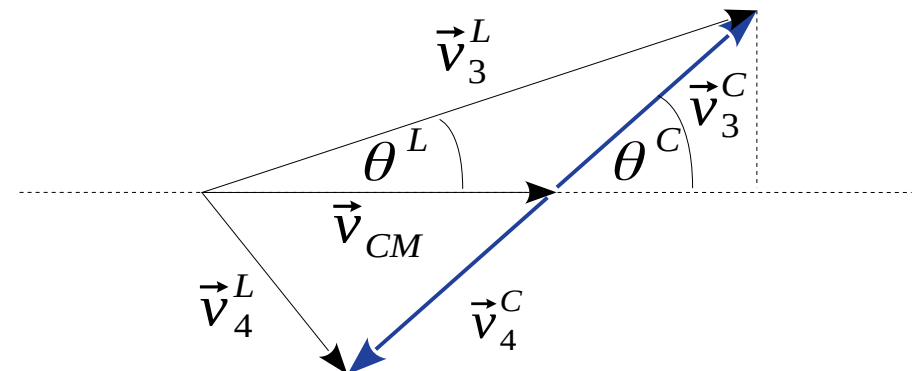


Przy wystarczająco dużych prędkościach wiązki, jądro poruszające się do tyłu w układzie CM, w układzie LAB porusza się do przodu. Dlaczego?

• **Przekształcenie pomiędzy θ^C a θ^L**

$$\tan \theta^L = \frac{v_3^C \sin \theta^C}{v_{CM} + v_3^C \cos \theta^C}$$

$$= \frac{\sin \theta^C}{\cos \theta^C + \frac{v_{CM}}{v_3^C}}$$

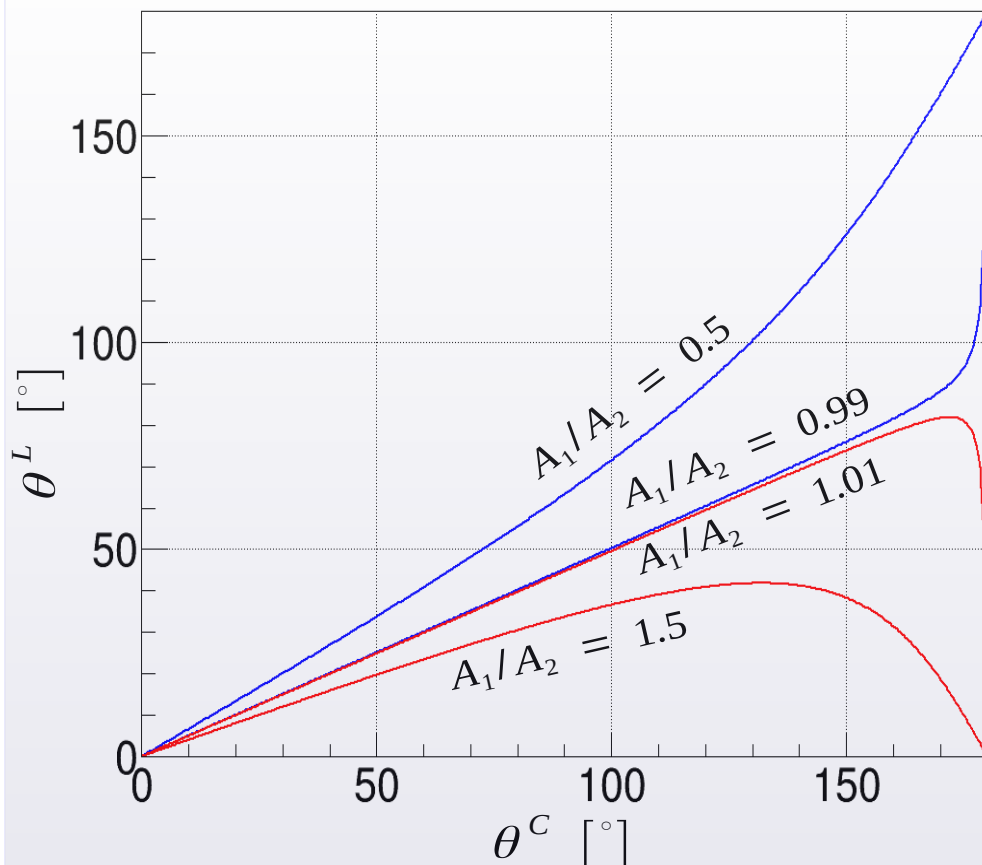


- Przekształcenie pomiędzy ϑ^C a ϑ^L , c.d.

– Jeżeli zderzenie jest **elastyczne** ($v_3^C = v_1^C$), to:

$$\Rightarrow \quad \text{tg } \theta^L = \frac{\sin \theta^C}{\cos \theta^C + \frac{A_1}{A_2}}$$

$$\frac{v_{CM}}{v_3^C} = \frac{\frac{A_1}{A_1 + A_2} v_\infty}{\frac{A_2}{A_1 + A_2} v_\infty} = \frac{A_1}{A_2}$$

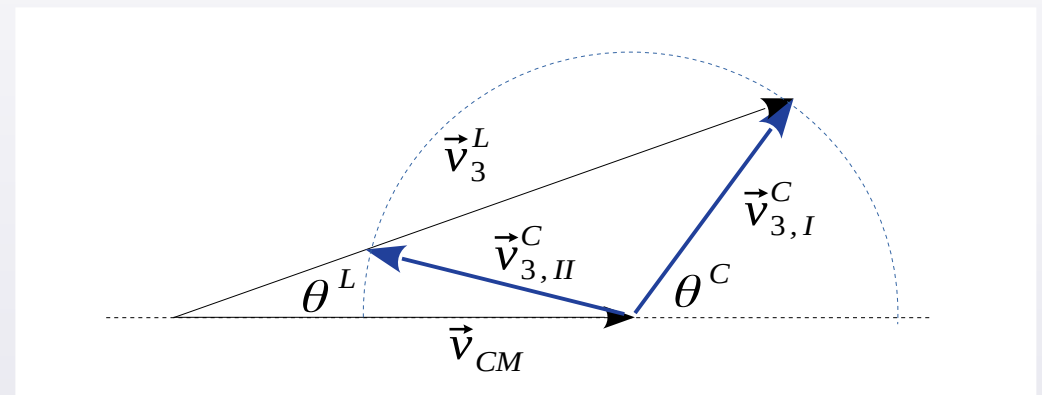


- Jeżeli $\frac{A_1}{A_2} < 1$, to: jest 1 rozwiązanie.

Jeżeli $\frac{A_1}{A_2} > 1$, to: są 2 rozwiązania.

– kąt rozproszenia jądra tarczy w Lab posiada ograniczenie.

- Jak możliwe są 2 rozwiązania?



Przypadek $A_1 > A_2$ nazywamy **”odwrotną kinematyką”**

- Bilans energetyczny** w układzie CM:

(bez przybliżenia $m = m_N \cdot A$)

$$m_1 c^2 + m_2 c^2 + \frac{\mu v_\infty^2}{2} = \sum_{i=1}^N m_{końc,i} c^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_{końc,i} (v_{końc,i}^C)^2}{2} + \sum_{i=1}^N E_{końc,i}^*$$

Ewentualna
 $E_{kin}(T)$, mogąca
pomóc reakcji zajść

Suma energii
spoczynkowych
produktów procesu

Ewentualna
 $E_{kin}(T)$ produktów

Ewentualna
 E wzbudzenia
produktów

- Ciepło reakcji Q :**

$$Q \stackrel{df}{=} \left(m_1 + m_2 - \sum_{i=1}^N m_{końc,i} \right) c^2 - \sum_{i=1}^N E_{końc,i}^*$$

$$\Rightarrow Q \stackrel{liczbowo}{=} \sum_{i=1}^N \frac{m_{końc,i} (v_{końc,i}^C)^2}{2} - \frac{\mu v_\infty^2}{2}$$

Jeśli $Q \geq 0$, to dana reakcja może zajść **samoistnie**

$Q < 0$, to samoistnie **nie** zajdzie. Musimy dołożyć energię, liczbowo $\geq |Q|$.

Jeśli zderzenie jest **elastyczne** ($m_1, m_2 \rightarrow m_1, m_2$ i $E_{1,2}^* = 0$), to ciepło $Q = 0$.

- **Teza:** W przypadku zderzenia dwuciałowego $[m_1 (v_\infty) + m_2 \rightarrow m_3 + m_4]$ do wyznaczenia Q wystarczy zmierzyć dla jednej z cząstek: v_3^L i kąt rozproszenia ϑ^L .

Stan początkowy: m_1, m_2, v_∞  znamy:

$$\begin{cases} T_{pocz}^C = \frac{\mu v_\infty^2}{2} \\ v_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_3 \cdot \vec{v}_3^C = -m_4 \cdot \vec{v}_4^C \\ v_{3,x}^C = v_3^L \cos \theta - v_{CM} \\ v_{3,y}^C = v_3^L \sin \theta \end{cases} \quad \text{zatem} \quad (v_3^C)^2 = (v_3^L \sin \theta)^2 + (v_3^L \cos \theta - v_{CM})^2$$

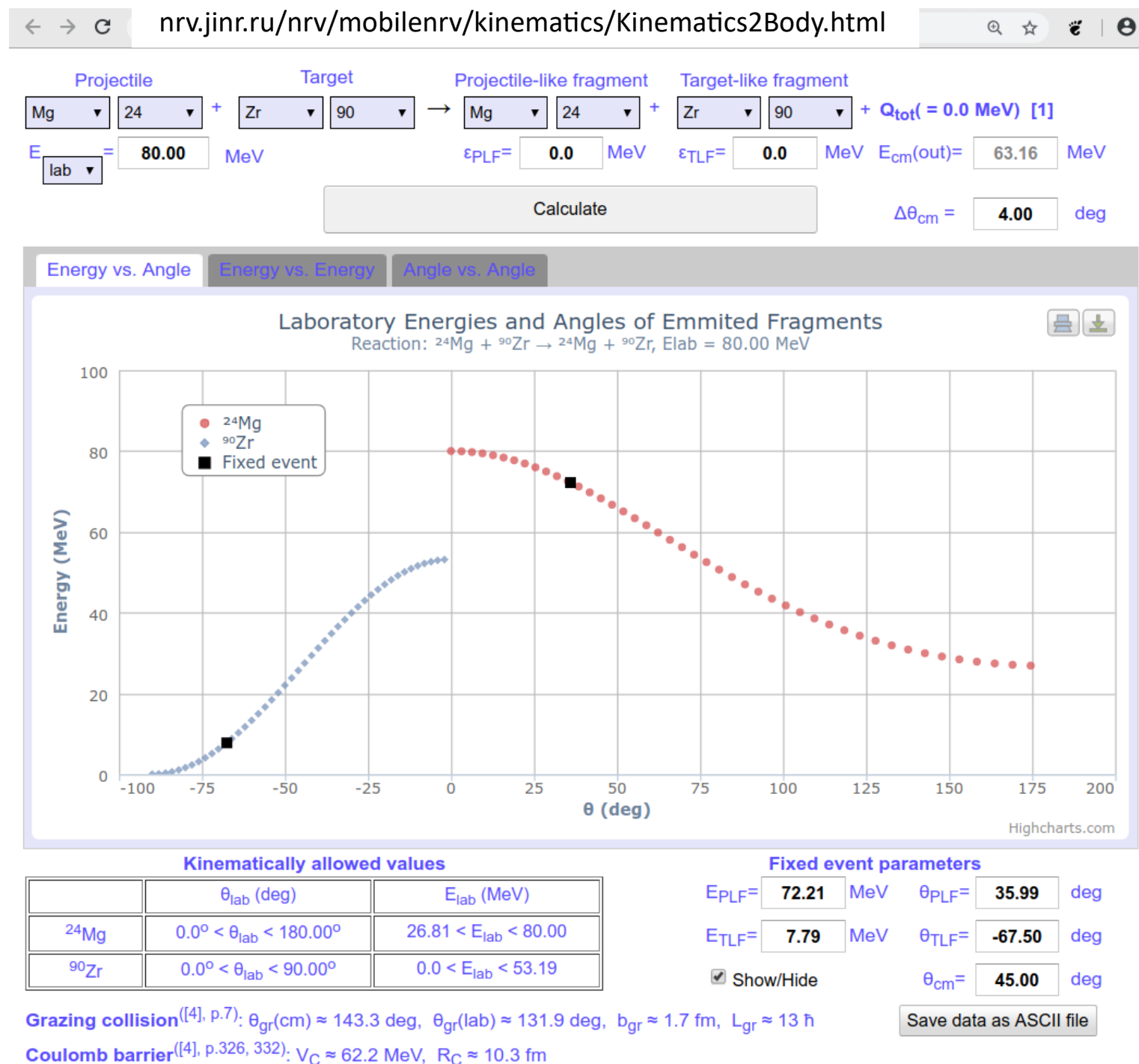
$$\text{zatem} \quad Q = \frac{m_3 (v_3^C)^2}{2} + m_4 \frac{\left(v_3^C \frac{m_3}{m_4}\right)^2}{2} - \frac{\mu v_\infty^2}{2} = (v_3^C)^2 \cdot \frac{m_3}{2} \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - \frac{\mu v_\infty^2}{2} \quad \checkmark$$

... Sprawdź, że dla rozpraszania elastycznego powyższy wzór redukuje się do 0.

... Czy można wyznaczyć energie kinetyczne cząstek po zderzeniu w CM (T_3^C i T_4^C) ?
Czy istnieje tylko 1 rozwiązanie?

NRV 2-body kinematics

Kalkulator 2-ciałowej (nierelatywistycznej) kinematyki zderzenia elastycznego jąder



- **Możliwe zderzenia subatomowe:**

- Elementarne : $ee, \dots, NN, \gamma N, \pi N$ $N: \{p, n\}$
- Z udziałem jądra: $eA, \gamma A, \pi A, NA$
- Jądro-jądro : AA

- **Możliwe procesy jądrowe:**



Rozproszenia

(Skład jąder się nie zmienia,
brak produkcji hadronów)

- Elastyczne
 - w polu siły Coulomba (rozp. Rutherforda)
 - w oddziaływaniach jądrowych (oddz. silne)
- Nieelastyczne (wzbudzenie jądra)
 - poprzez oddz. EM („wzbudzenia kulombowskie”)
 - poprzez oddz. jądrowe



Reakcje

(Zmiana w składzie jąder
i/lub produkcja nowych hadronów)

- Reakcje „wprost” (udział 1 nukleonu)
- Reakcje rezonansowe
- Reakcje transferu nukleonów
- Reakcje z utworzeniem jądra złożonego
- Zderzenia wysokoenergetyczne (dezintegracja jąder)

- **Ładunek cząstki inicjującej:**

- Cząstki nienaładowane $\{n, \gamma\}$
- Cząstki naładowane $\{p, \pi^\pm, A\}$ (Różnica o oddziaływanie Coulomba
Gdy $q_1 \neq 0$, działa bariera Coulombowska)

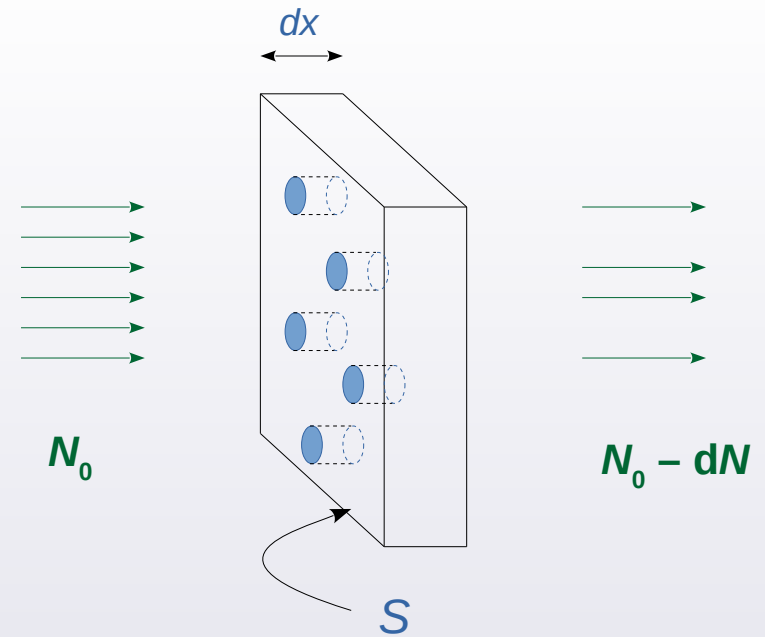
Całkowity przekrój czynny σ

- W ujęciu geometrycznym: punktowe pociski nakierowane na przeszkody o przekroju koła

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-dN}{N_0} = \frac{dS}{S} \\ dS = \sigma \cdot dN_{\text{tarcza}} \end{array} \right. \quad \text{Zał.: cienka tarcza}$$

Przekrój $\perp$ 1 centrum $n_{\text{tarcza}} \cdot S dx$

N_0 : pierwotna liczba pocisków wiązki (w j. czasu)
 dN : liczba pocisków „usuniętych” z wiązki (w j. czasu)
 σ : przekrój poprzeczny 1 centrum rozpraszającego
 n : koncentracja centrów w tarczy



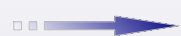
$$dN = - N_0 \cdot n_{\text{tarcza}} \cdot \sigma \cdot dx$$

- Uwaga: $\sigma \sim$ prawdopodobieństwo usunięcia z wiązki

$$\Rightarrow N(x) = N_0 \cdot \exp(- n_{\text{tarcza}} \cdot \sigma \cdot x)$$

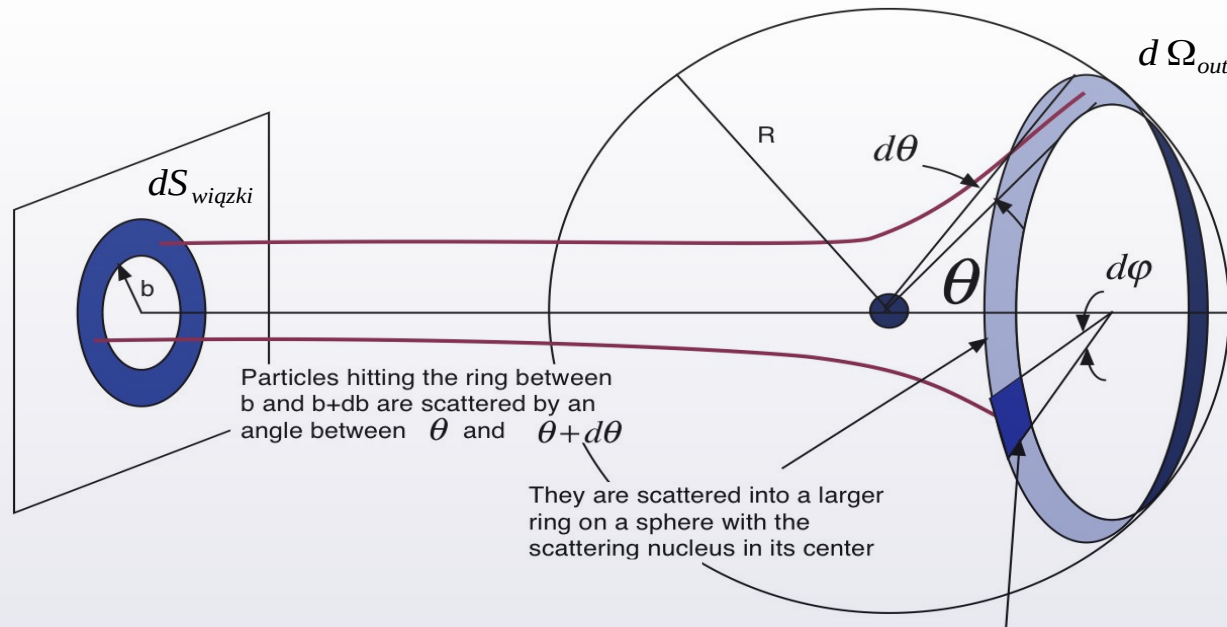
$$\text{Dla } \sigma = S_{\text{jadra}}, \quad \sigma \approx \pi R_{\text{jadra}}^2 = \pi (r_0 A^{1/3})^2$$

$$r_0 = 1.12 \text{ fm} . \quad \text{Jeśli } A = 120,$$



$$\sigma = 1.1 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \equiv 1.1 \text{ b} \quad (\text{barn})$$

Różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$



- Dla cząstek padających, właściwa jest geometria płaszczyzny, dla rozproszonych – sfery. Różniczkowy przekrój czynny definiujemy więc jako:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\text{liczba cząstek rozproszonych w jednostkowy kąt bryłowy} / 1\text{s}}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę pow. tarczy} / 1\text{s}}$$

← Ta liczba może się zmieniać z kątem emisji

- $$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{dN_{\text{out}} / d\Omega_{\text{out}}}{dN_{\text{wiązki}} / dS_{\text{wiązki}}}$$

A jednocześnie:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{out}}} d\Omega_{\text{out}}$$

Różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$ c.d.

- Jeżeli każda cząstka padająca się rozprasza (nie zostanie pochłonięta), to:

$$dN_{\text{in}} = dN_{\text{out}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dS_{\text{wiązki}}}{d\Omega}$$
$$d\sigma = dS_{\text{wiązki}}$$

- W eksperymentach: kąt φ w Lab – przypadkowy.

W procesach dwuciałowych $\varphi_{\text{wiązki}} = \varphi_{\text{rozlotu}}$

$\Rightarrow$ w ramach tego sektora, skasujemy zależność od φ .

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_{\text{wiązki}} = 2\pi b db \\ d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \end{array} \right\}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dS_{\text{wiązki}}}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

- Związek $\theta = f(b)$ pokazuje, jak „pracują” oddziaływania między pociskiem a tarczą.
 $\theta = f(b)$ nazywamy „**funkcją odchylenia**”.

Przyjrzymy się m.in. funkcji odchylenia dla zderzenia kontaktowego kul
i rozpraszania Coulombowskiego.

Przekrój czynny dla zderzenia 2 kul

- Przykład jest prosty, ale instruktywny przy zderzeniach jądrowych, mimo ogromnego uproszczenia. Wszystkie pociski w polu $\perp$ wiązki = σ zostaną z niej „usunięte”.

- Z zależności geometrycznych (por. dolny rys.) :

$$b = R \sin \alpha = R \cos \frac{\theta}{2}$$

(funkcja odchylenia $\theta = 2 \arccos b/R$)

- Podstawiamy do wzoru na $d\sigma/d\Omega$:

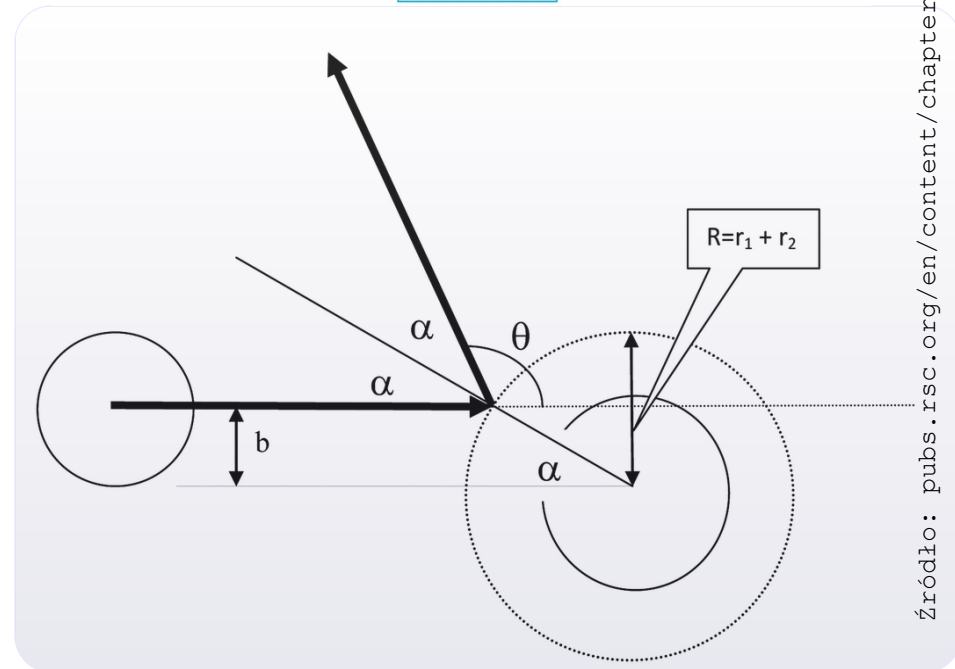
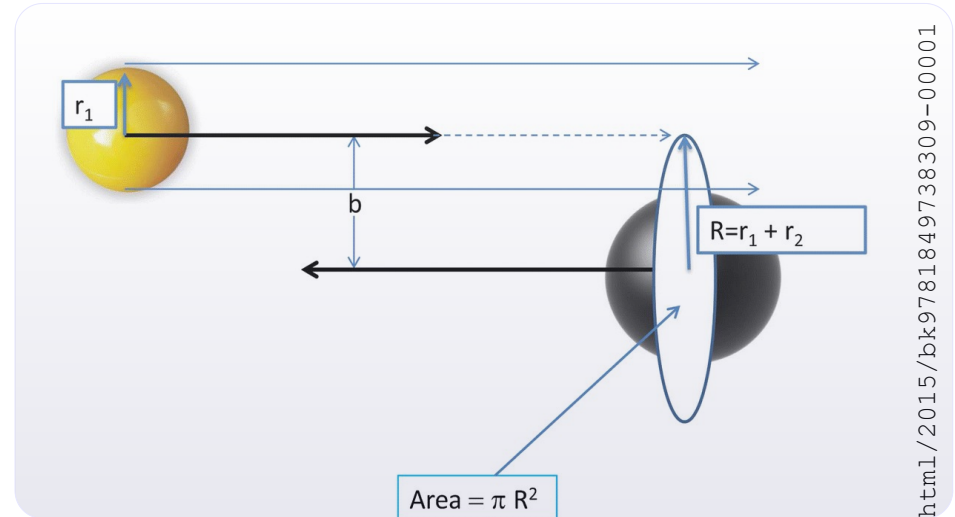
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \dots = \frac{R^2}{4} \quad \left\{ \frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

(wynik $\neq f(\theta)$) $\Rightarrow$ emisja izotropowa!)

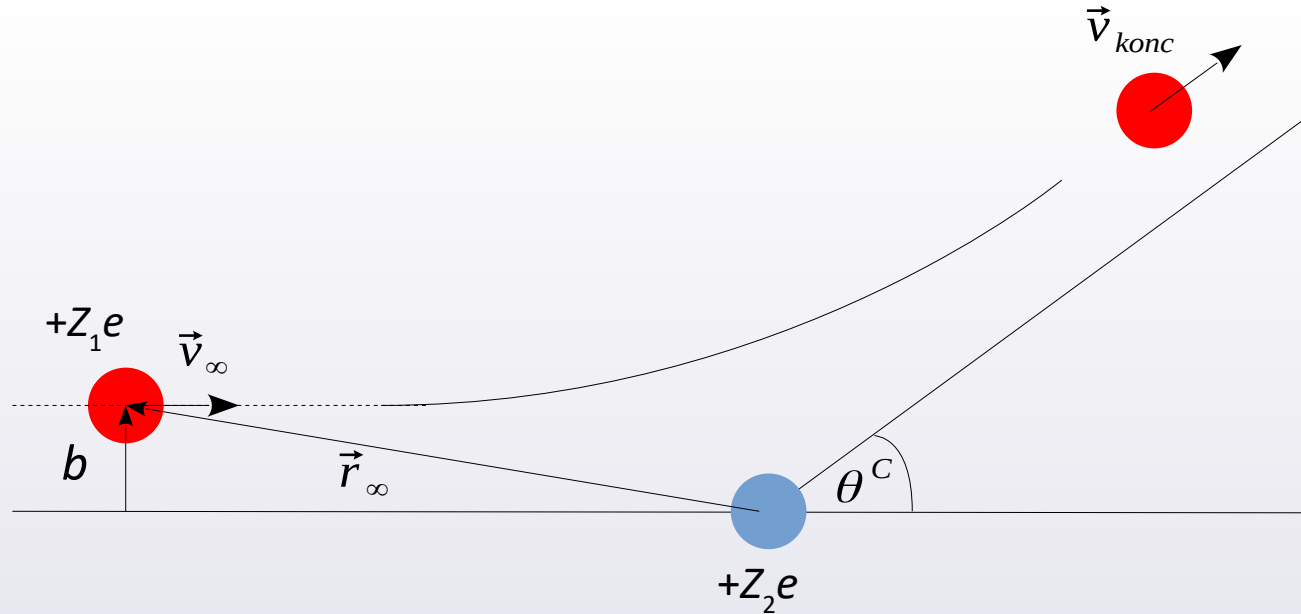
$$\sigma = \int_0^{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2 = \pi (r_1 + r_2)^2$$

- Alternatywnie: całkowanie po parametrach b „biorących udział” w zderzeniu.

$$\sigma = 2\pi \int_0^{b_{\max}} b db = \pi b_{\max}^2 = \pi (r_1 + r_2)^2$$



Rozpraszanie Rutherforda (w polu Coulombowskim)



- Redukcja ruchu 2 ciał do ruchu 1 ciała o masie zredukowanej μ , położeniu $\vec{r}_{12}$, pędzie i energii:

$$\vec{p} = \mu \vec{v}_\infty \quad T = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2$$

pod wpływem potencjału:

$$E_{pot} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

Uwaga: kąt rozproszenia $\theta = \theta^c$

- Rozpraszanie elastyczne:

$$\Rightarrow |\vec{v}_\infty| = |\vec{v}_{konc}|$$

- Można wprowadzić:

$$\kappa = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \epsilon_0} \quad E_{pot} = \frac{\kappa}{r_{12}}$$

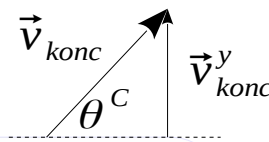
$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c}$$

gdzie $\hbar c = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$
 $\alpha = 1/137.0$

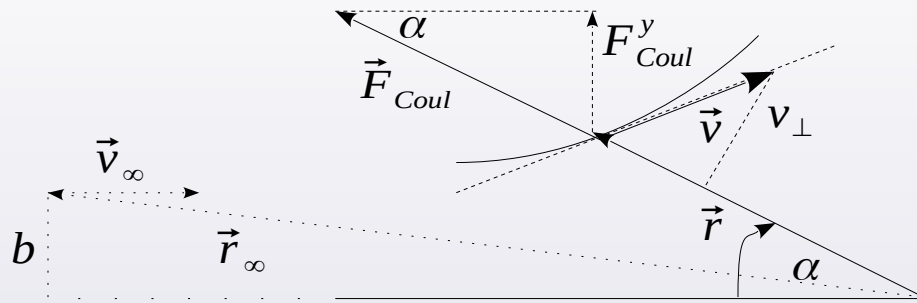
$$\kappa = \alpha \hbar c Z_1 Z_2 = 1.44 Z_1 Z_2 \text{ MeV fm}$$

$$E_{pot} = \frac{1.44 Z_1 Z_2 \text{ MeV fm}}{r_{12}}$$

Rozpraszanie Rutherforda (w polu Coulombowskim)



- Wyznamy funkcję odchylenia $\theta^C = f(b)$



- Moment pędu

(1) Na początku: $L_\infty = |\vec{r}_\infty \times \mu \vec{v}_\infty| = \mu v_\infty b$

(2) W trakcie lotu:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\alpha} \cdot \hat{\alpha}$$

$$L(\alpha) = \mu v_\perp r$$



$$v_\perp = r \dot{\alpha}$$

(3) $\vec{L} = \text{const}$

$$\mu v_\infty b = \mu \dot{\alpha} r^2$$



$$r^2 = \frac{v_\infty b}{\dot{\alpha}}$$

- Równanie Newtona wzdłuż osi pionowej

$$\mu \dot{v}_y = \frac{\kappa}{r^2} \cdot \sin \alpha$$

$$\dot{v}_y = \frac{\kappa \dot{\alpha}}{\mu v_\infty b} \cdot \sin \alpha \quad \parallel \int$$

$$v_y \Big|_0^{v_\infty \sin \theta^C} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty b} \left[-\cos \alpha \right]_0^{\pi - \theta^C}$$

$$v_\infty \sin \theta^C = \frac{\kappa}{\mu v_\infty b} (1 + \cos \theta^C)$$

$$\frac{\mu v_\infty^2 b}{\kappa} = \frac{1 + \cos \theta^C}{\sin \theta^C} = \dots = \frac{1}{\tan \frac{\theta^C}{2}}$$

$$b(\theta^C) = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta^C}{2}}$$

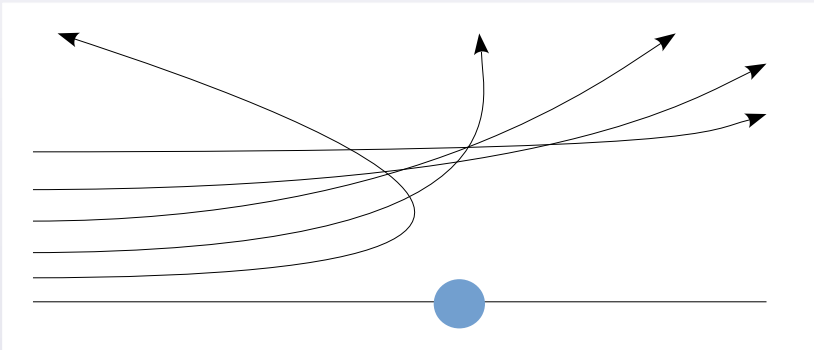
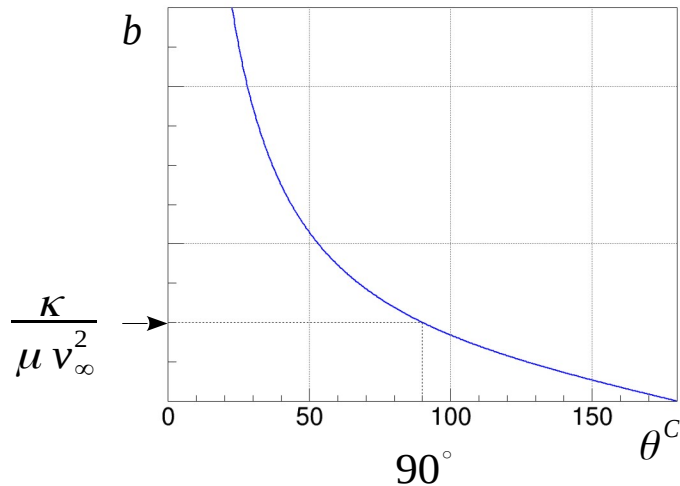
$$\theta^C(b) = 2 \arctan \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2 b}$$

Otrzymaliśmy funkcję odchylenia



Przekrój czynny na Rozpraszanie Rutherforda

- Zależność $b(\theta^C) = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta^C}{2}}$



- Potrzebujemy:

$$\frac{db}{d\theta^C} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \left[\frac{1}{\tan \frac{\theta^C}{2}} \right]' = -\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta^C}{2}}$$

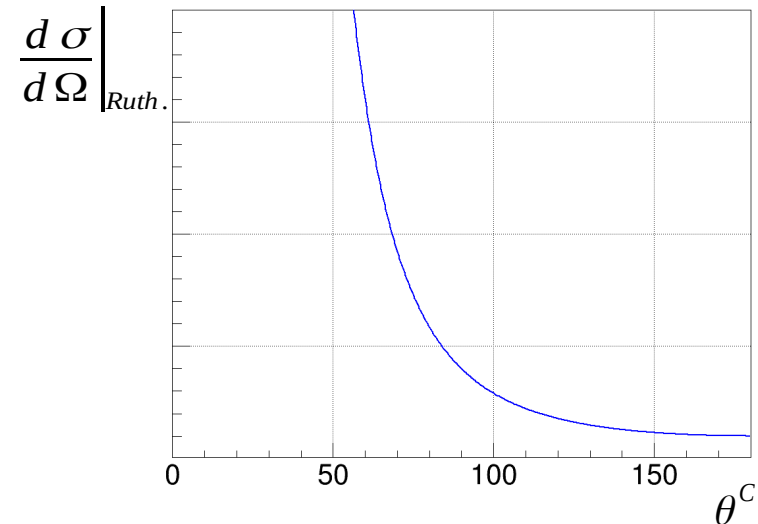
- $$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega^C} \right|_{Ruth.} = \frac{b}{\sin \theta^C} \left| \frac{db}{d\theta^C} \right|$$

$$= \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \frac{\cos \frac{\theta^C}{2}}{\sin \frac{\theta^C}{2}} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\theta^C}{2} \cos \frac{\theta^C}{2}} \cdot \left| \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta^C}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta^C}{2}}$$

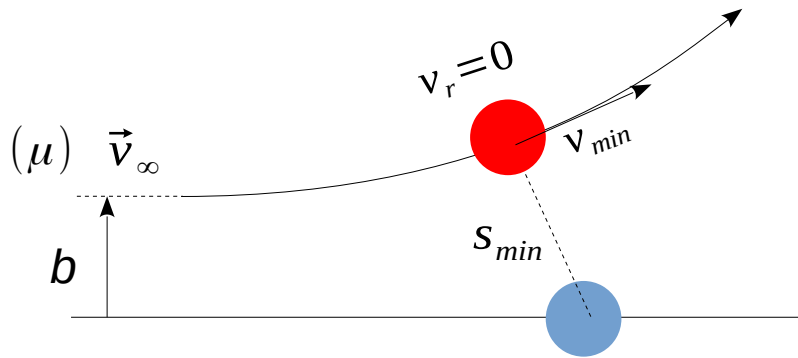


$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega^C} \right|_{Ruth.} = \left(\frac{\kappa}{4T^C} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta^C}{2}}$$



- B. wysokie przekroje czynne dla niskich θ^C
- B. silny spadek z kątem

Najmniejsza odległość w rozpraszaniu Rutherforda



- Zastosujemy zasady zachowania:

$$\begin{cases} \mu v_\infty b = \mu v_{min} s_{min} \rightarrow v_{min} = v_\infty \frac{b}{s_{min}} \\ \frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v_{min}^2}{2} + \frac{\kappa}{s_{min}} \end{cases}$$

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{v_\infty b}{s_{min}} \right)^2 + \frac{\kappa}{s_{min}} \quad || \cdot \frac{s_{min}^2}{\mu v_\infty^2}$$

$$s_{min}^2 - \frac{2\kappa}{\mu v_\infty^2} s_{min} - b^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{2\kappa}{\mu v_\infty^2} \right)^2 + 4b^2 > 0$$

$$s_{min} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \right)^2 + b^2}$$

- Przypadek zderzenia centralnego ($b = 0$)

$$s_{min}(b=0) = \frac{2\kappa}{\mu v_\infty^2} = \frac{\kappa}{T^C} \equiv s_{min}^{min}$$

Dla każdego innego b , $s_{min} > s_{min}^{min}$

- W zderzeniach jądrowych nie kontrolujemy b . Natomiast mierzymy θ .

Przytoczmy zależność $b(\theta^C)$:

$$b(\theta^C) = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta^C}{2}}$$

i wstawmy:

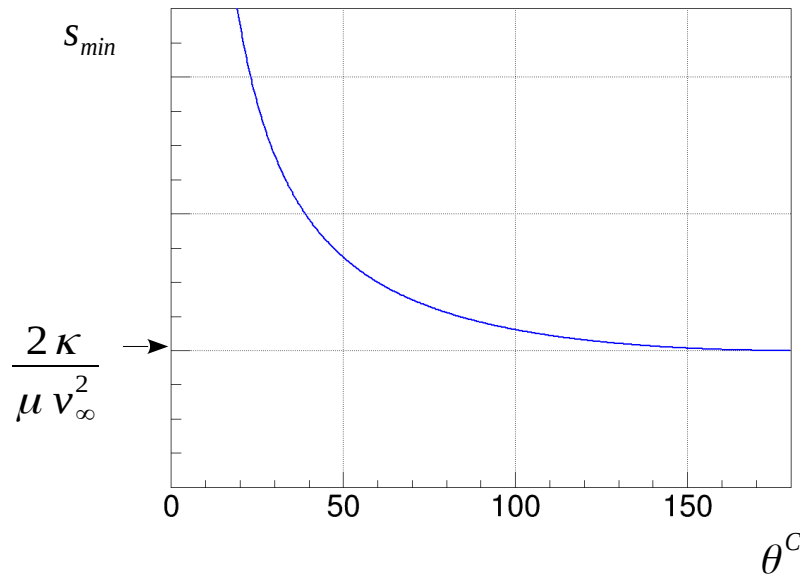
$$s_{min} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \left(1 + \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta^C}{2}}}}_{1/\sin \frac{\theta^C}{2}} \right)$$

$$s_{min} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta^C}{2}} \right)$$

Najmniejsza odległość w rozpraszaniu Rutherforda

- Obserwujemy emisję jądra wiązki pod kątem θ^C . Jak bardzo się ono zbliżyło do jądra tarczy?

$$s_{min} = \frac{\kappa}{\mu v_{\infty}^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta^C}{2}} \right)$$



- Przypadek $\theta^C = 180^\circ$:

$$s_{min}^{min} = \frac{2\kappa}{\mu v_{\infty}^2} \equiv \frac{\kappa}{T^C}$$

- Odległość s_{min} jest często wykorzystywana. Jak to policzyć praktycznie?

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha \hbar c Z_1 Z_2 \\ &= 1.44 \cdot Z_1 Z_2 \text{ [MeV fm]} \end{aligned}$$

$$s_{min}^{min} [\text{fm}] = \frac{1.44 \cdot Z_1 Z_2}{T^C [\text{MeV}]}$$

$$s_{min}^{min} [\text{fm}] = \frac{1.44 Z_1 Z_2}{\frac{A_2}{A_1 + A_2} \cdot T^L [\text{MeV}]}$$

Przydaje się:

$$\begin{aligned} \frac{\mu v_{\infty}^2}{2} &= T^C \\ \frac{T^L}{A_1} &= \frac{T^C}{A_{12}} \end{aligned}$$

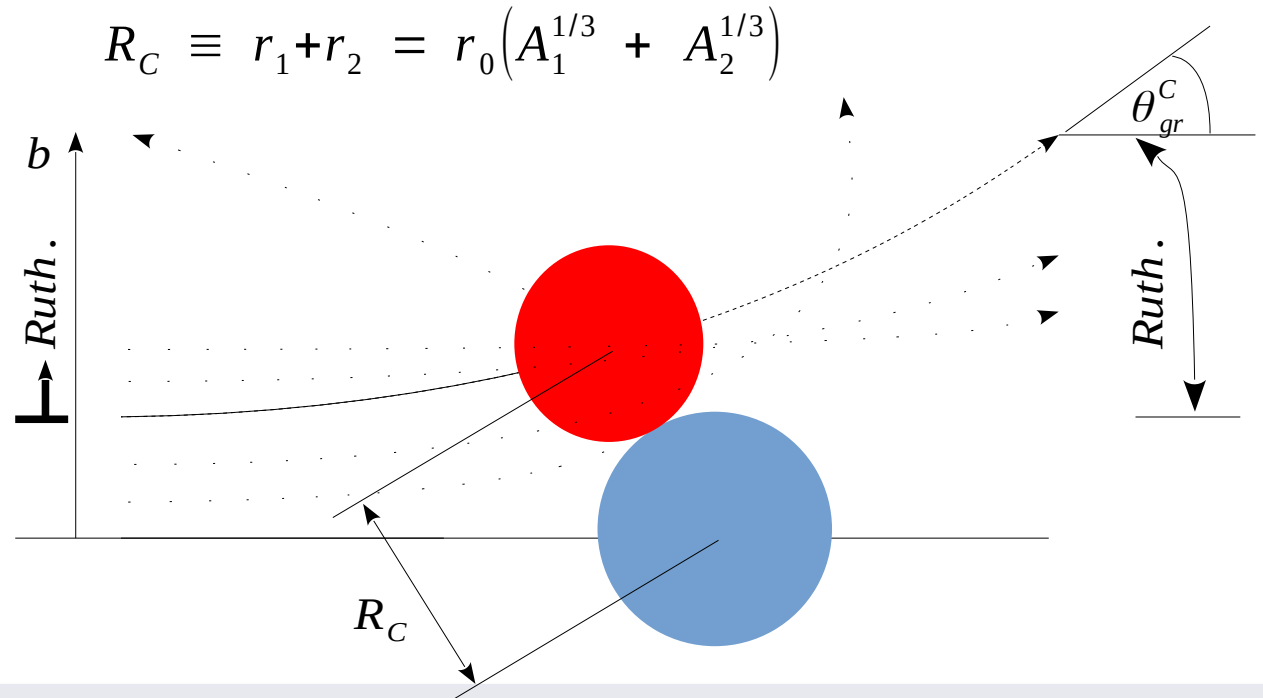
Graniczne zetknięcie się jąder

- Przypadek graniczny:

$$R_C = s_{min}(\theta_{gr})$$

$$R_C = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2}} \right)$$

$$\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2} = \frac{1}{\frac{R_C \mu v_\infty^2}{\kappa} - 1}$$



- Bariera Coulombowska E_C :

$$E_C(R_C) = \frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{R_C} = \frac{\kappa}{R_C}$$

(Dla zadanego układu jąder E_C jest ustalona)

- Podstawmy:

$$\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2} = \frac{1}{\frac{\kappa}{E_C} \frac{\mu v_\infty^2}{\kappa} - 1} = \frac{1}{\frac{2T^C}{E_C} - 1}$$

$$\theta_{gr}^C = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\frac{2T^C}{E_C} - 1} \right)$$

'gr' = 'grazing'
Grazing angle = 'kąt muśnięcia'

Emisja w kąty θ^C [0 ... θ_{gr}^C]:
trajektorie bez zetknięcia jąder

Zależność kąta 'grazing' od energii

- Wzór na **kąt grazing**:

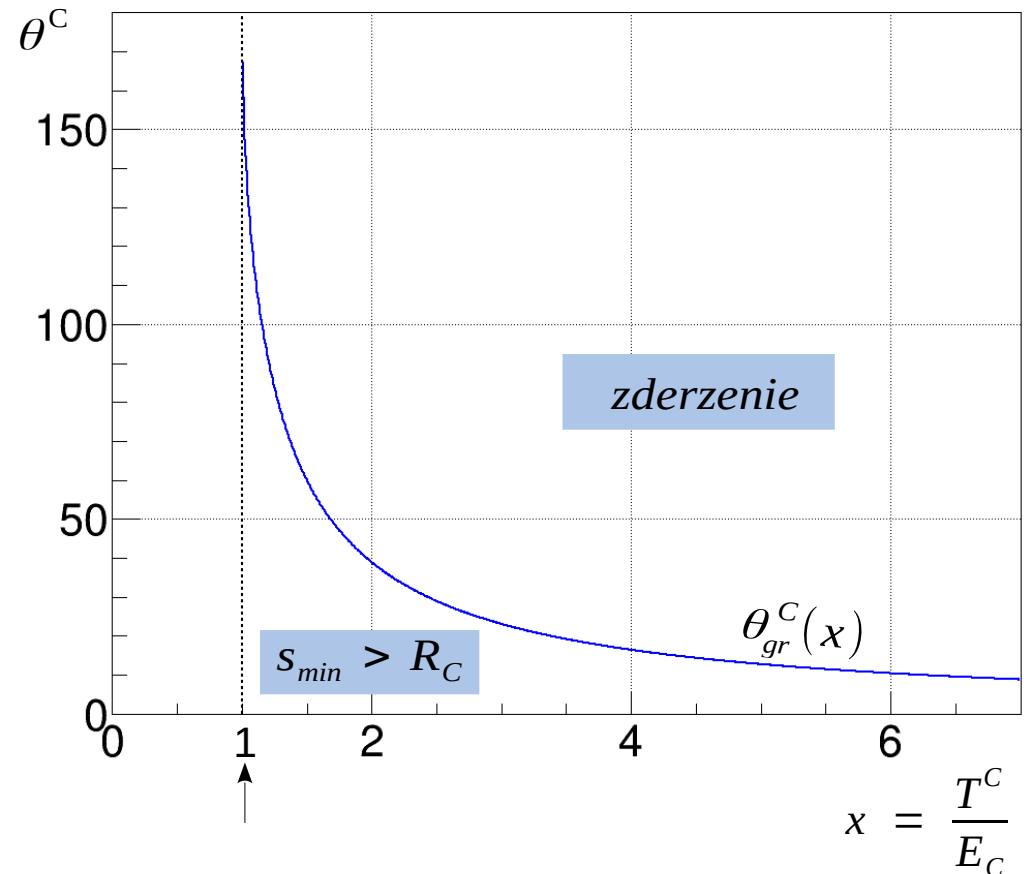
$$\theta_{gr}^C = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\frac{2T^C}{E_C} - 1} \right)$$

Dla zadanych jąder i energii kinetycznej, kąt θ_{gr}^C jest ustalony.

- Zdefiniujmy: $x \equiv \frac{T^C}{E_C}$

Jeśli $T^C < E_C$ (lub $x < 1$), to nigdy nie dojdzie do zetknięcia się jąder.

Jeśli jądra są cięższe ($E_C \nearrow$), to aby utrzymać ten sam kąt θ_{gr}^C , potrzeba więcej energii kinetycznej.



Graniczny moment pędu L_{gr}

- Trajektoria graniczna (zetknięcia się jąder) zachodzi dla $b_{gr} \leftrightarrow \theta_{gr}$.
Ile wynosi dla niej moment pędu (L_{gr})? Przyjmijmy, że $T^C > E_C$ (jest szansa na zetknięcie)

$$L_{gr} = \mu v_{\infty} b_{gr}$$

Podstawmy: $b_{gr}(\theta_{gr}^C) = \frac{\kappa}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta_{gr}^C}{2}} \quad \Rightarrow \quad L_{gr} = \mu v_{\infty} \frac{\kappa}{\mu v_{\infty}^2 \operatorname{tg} \frac{\theta_{gr}^C}{2}}$

Podstawmy: $\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2} = \frac{1}{\frac{2T^C}{E_C} - 1} = \frac{E_C}{2T^C - E_C}$ oraz: $E_C = \frac{\kappa}{R_C}$

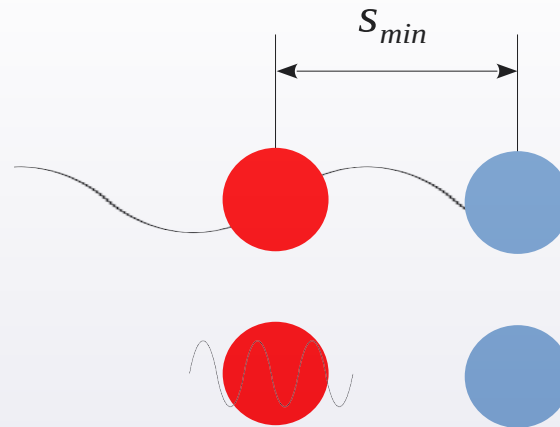
$$\begin{aligned} L_{gr} &= \frac{\kappa}{v_{\infty}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_{gr}^C/2)}}{\sin(\theta_{gr}^C/2)} = \frac{\kappa}{v_{\infty}} \cdot \frac{2T^C - E_C}{E_C} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_C}{2T^C - E_C} \right)^2} \\ &= \frac{E_C R_C}{v_{\infty}} \cdot \frac{2T^C - E_C}{E_C} \cdot \frac{\sqrt{4(T^C)^2 - 4T^C E_C + E_C^2 - E_C^2}}{|2T^C - E_C|} \\ &= \frac{2R_C}{v_{\infty}} \cdot \sqrt{T^C(T^C - E_C)} \end{aligned}$$

$$L_{gr} = R_C \cdot \sqrt{2\mu (T^C - E_C)}$$

Uwaga: aby doszło do zderzenia, $L < L_{gr}$.

Tylko wtedy możliwe są inne oddziaływania.

Parametr Sommerfelda η



- Parametr η jest prostym oszacowaniem, czy mogą zachodzić efekty kwantowe. Porównuje się długość fali de Broglie'a $\lambda_{\text{de B.}}$ z odległością największego zbliżenia $s_{\min}$ ($\theta = 0$).

$$\eta \equiv \frac{s_{\min}^{\min}}{2\lambda} \quad , \text{gdzie:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{\min}^{\min} \equiv \frac{\kappa}{T^C} = \frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{\frac{\mu v_{\infty}^2}{2}} \\ \lambda \equiv \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\mu v_{\infty}} \end{array} \right.$$

Jeśli $\eta \gg 1$, to nie powinny wystąpić efekty kwantowe.

- Podstawmy: $\eta = \frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{\mu v_{\infty}^2} \cdot \frac{\mu v_{\infty}}{\hbar} = \frac{\alpha Z_1 Z_2}{\frac{v_{\infty}}{c}} \quad \alpha \sim \frac{1}{137}$

Doświadczalny przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne

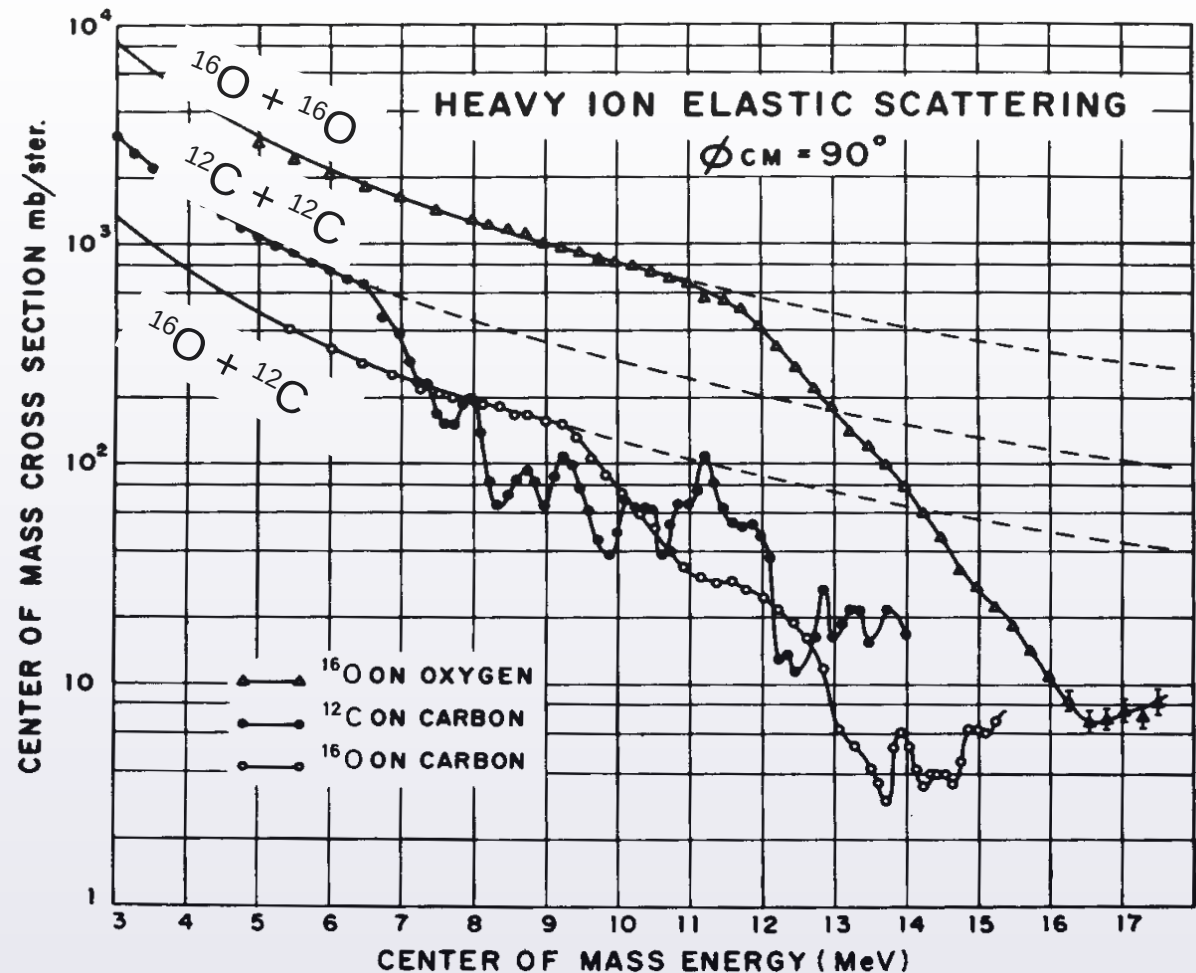
- Przekrój czynny na rozpraszanie Rutherforda:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega^C} \right|_{Ruth.} = \left(\frac{\kappa}{4T^C} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta^C}{2}}$$

- Wyniki doświadczalne dla emisji w kąty θ^C wokół 90° .
Zależność od T^C : $\bullet \longrightarrow$

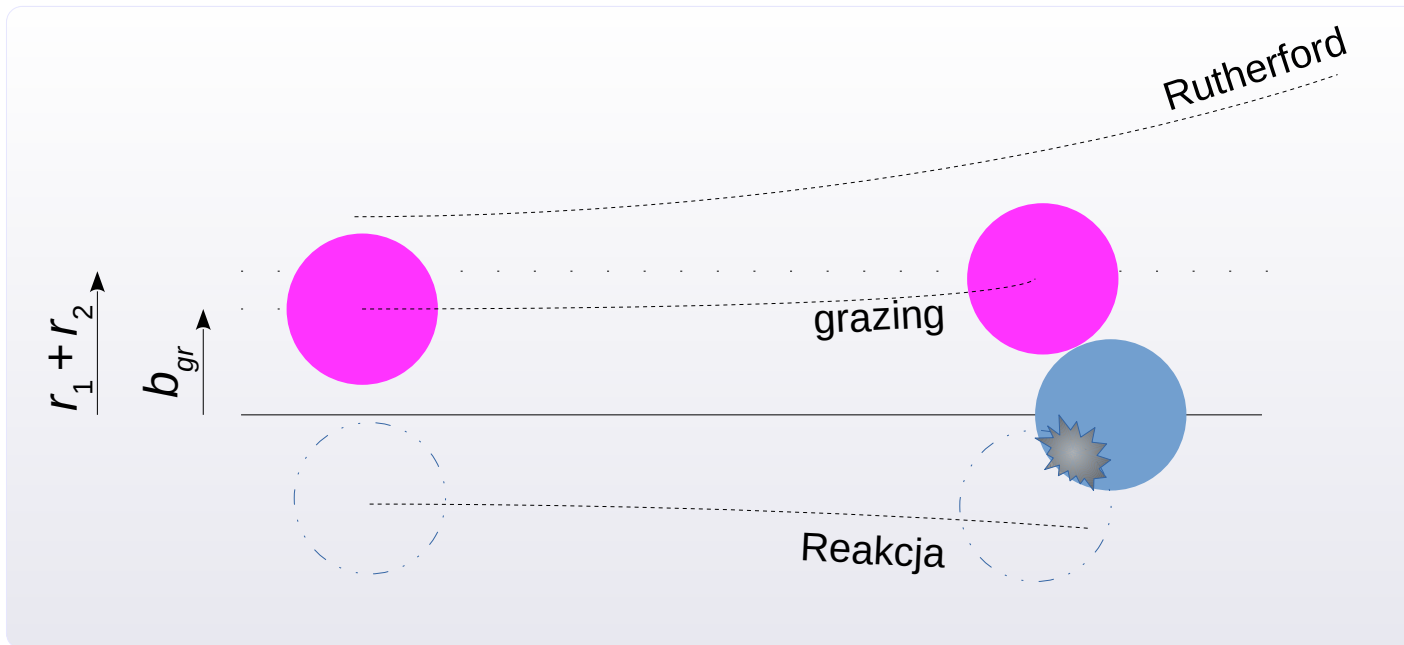
Odstępstwa od przewidywań Rutherforda.

- Dla $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$:
 $R_C = 6 \text{ fm}$, $E_C = 15 \text{ MeV}$
Dla $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$:
 $R_C = 5.5 \text{ fm}$, $E_C = 9.5 \text{ MeV}$



- $\Rightarrow$ Dla $x \equiv T^C/E_C > 1$ (a nawet nieco mniejszych wartości) – jony „znikają” (nowy efekt). „Włączają się” oddziaływania silne, np.:
- transfer nukleonów między jądrami
 - utworzenie jądra złożonego
- Początkowy układ nukleonów znika (absorpcja) na rzecz innego.

Przekrój czynny na reakcję



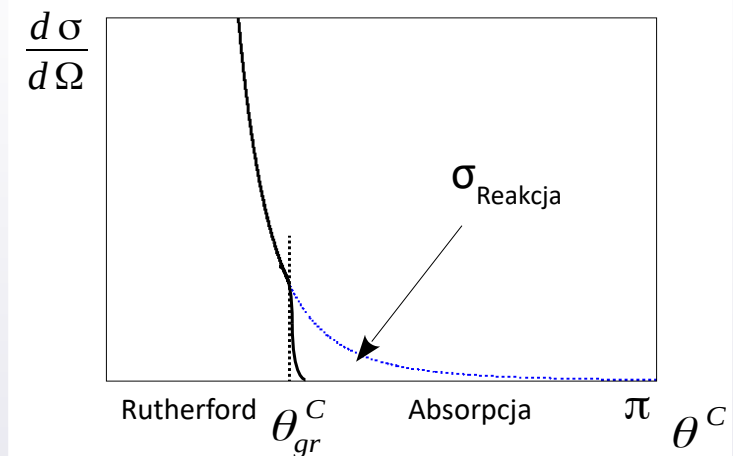
- Model silnej absorpcji:**

$$\theta^C \in [0, \theta_{gr}^C] : \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{rozp} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} \quad (\Delta\sigma_R = 0)$$

$$\theta^C \in [\theta_{gr}^C, \pi] : \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{rozp} = 0$$

(wszystkie cząstki, które **by** się rozproszyły,
dokładają się do $\sigma_r \equiv$ przekr. czynny na reakcję)

θ_{gr}^C : "grazing angle"



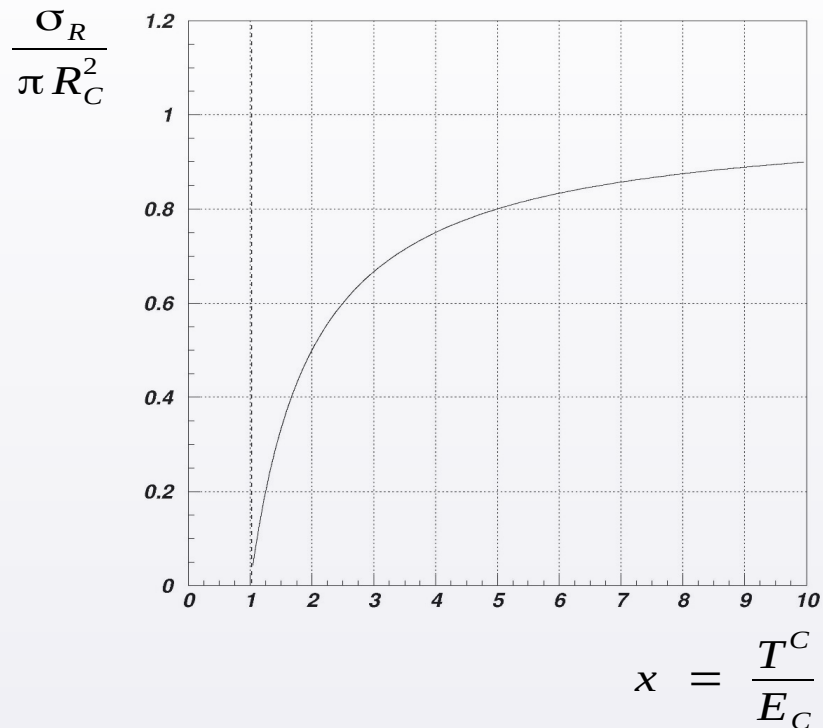
Przekrój czynny na reakcję

$$\begin{aligned}
 \sigma_R(T^C) &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{gr}^C}^{\pi} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega^C} \right|_{Ruth.} d\Omega^C = 2\pi \int_{\theta_{gr}^C}^{\pi} \left(\frac{\kappa}{4T^C} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta^C}{2}} \sin \theta^C d\theta^C = \\
 &= 2\pi \left(\frac{\kappa}{4T^C} \right)^2 \cdot \int_{\theta_{gr}^C}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{\theta^C}{2} \cos \frac{\theta^C}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^C}{2}} d\theta^C = \left| \begin{array}{l} x = \sin \frac{\theta^C}{2} \\ dx = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta^C}{2} d\theta^C \\ \kappa = E_C R_C \end{array} \right| = \\
 &= \pi \left(\frac{E_C R_C}{2T^C} \right)^2 \cdot \int_{\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2}}^1 \frac{2dx}{x^3} = \pi \left(\frac{E_C R_C}{2T^C} \right)^2 \cdot 2 \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{\sin \frac{\theta_{gr}^C}{2}}^1 = \\
 &= \pi \left(\frac{E_C R_C}{2T^C} \right)^2 \cdot \left[-1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_{gr}^C}{2}} \right] = \left| \sin \frac{\theta_{gr}^C}{2} = \frac{E_C}{2T^C - E_C} \right| = \\
 &= \pi \left(\frac{E_C R_C}{2T^C} \right)^2 \cdot \frac{(2T^C - E_C)^2 - E_C^2}{E_C^2} = \frac{\pi R_C^2}{4T_C^2} [4(T^C)^2 - 4T^C E_C + E_C^2 - E_C^2] =
 \end{aligned}$$

$$\sigma_R(T^C) = \pi R_C^2 \left(1 - \frac{E_C}{T^C} \right)$$

Przekrój czynny na reakcję

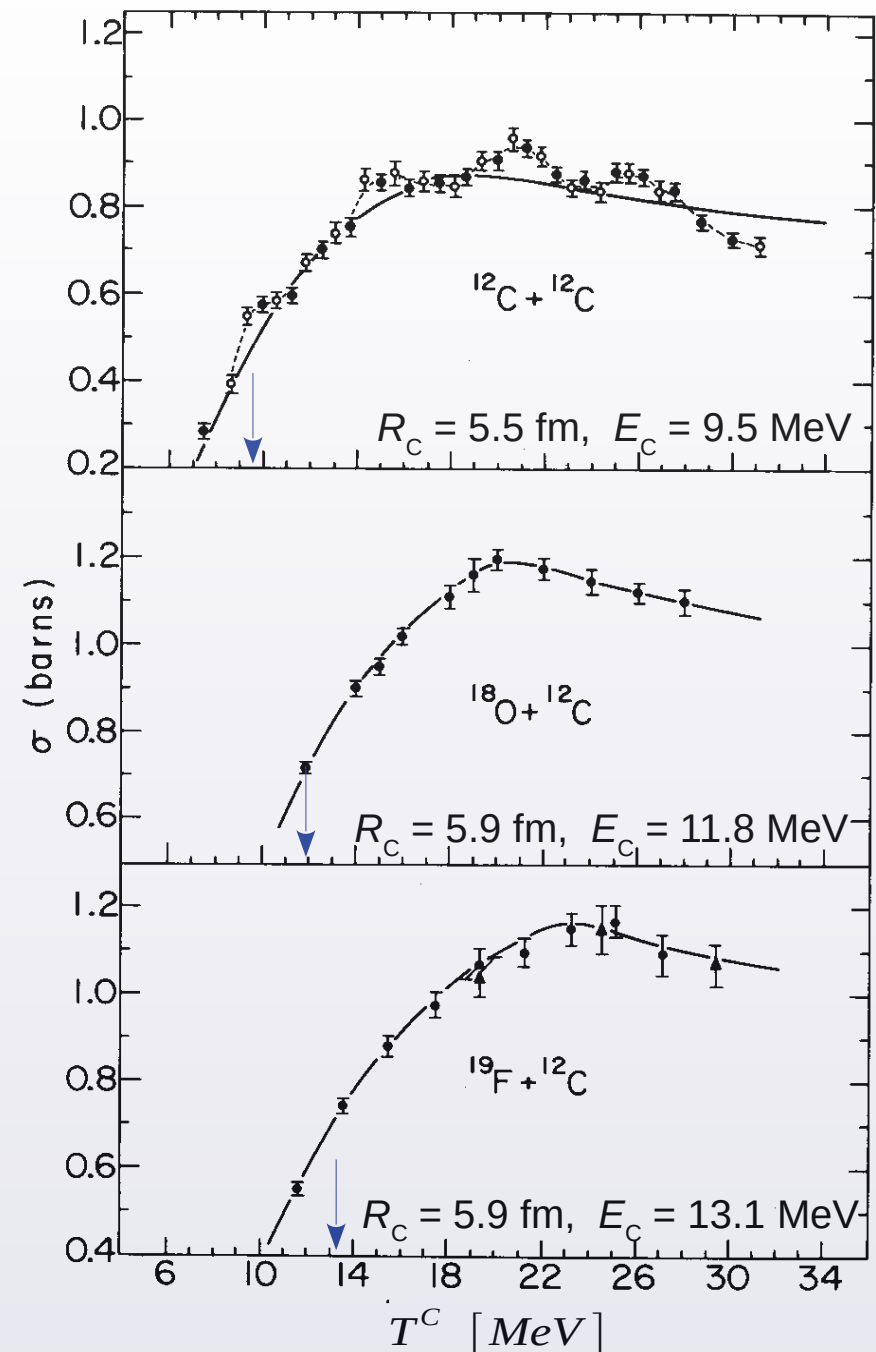
$$\sigma_R(T^C) = \pi R_C^2 \left(1 - \frac{E_C}{T^C} \right)$$



- Reakcja jest możliwa, gdy $T^C > E_C$. Przekrój na reakcję narasta z T^C .

Gdy $T^C \rightarrow \infty$, $\sigma_R(T^C) \rightarrow \pi R_C^2$

czyli do przekroju na kontaktowe zderzenie kul.

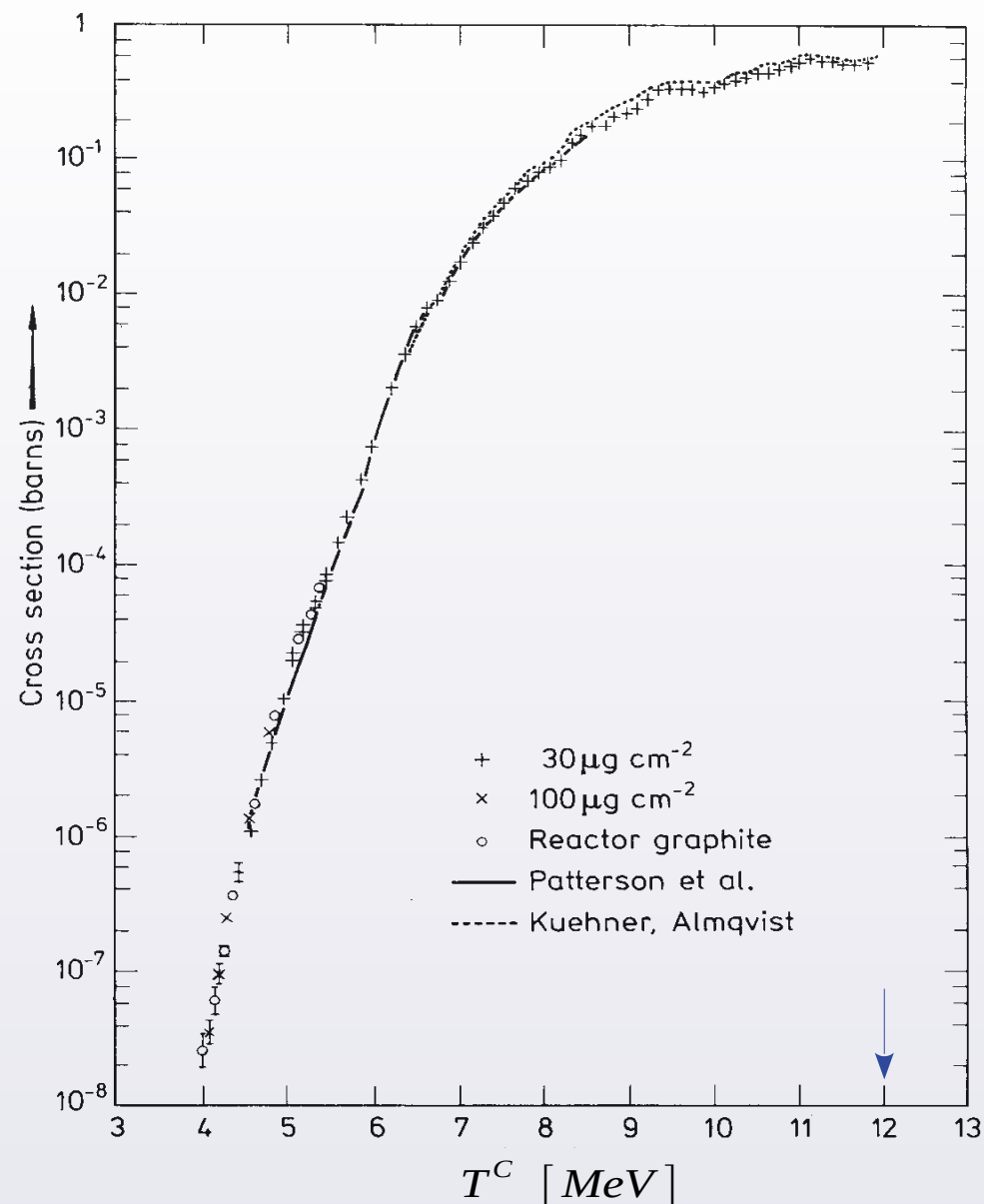


Przekrój czynny na fuzję $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ w okolicy progu

- „Fuzja jądrowa” – połączenie się jąder w 1 jądro złożone
- Parametry w modelu klasycznym:
 - $R_c = 5.8 \text{ fm}$
 - $E_c = 12.0 \text{ MeV}$
 - $\sigma_R = 1.0 \text{ b}$



- Dla $T^c > E_c$: dobre oszacowanie całkowitego σ
- Dla $T^c < E_c$: wyrażnie $\sigma \neq 0$
„Fuzja podbarierowa”
- M.in. efekty kwantowego tunelowania

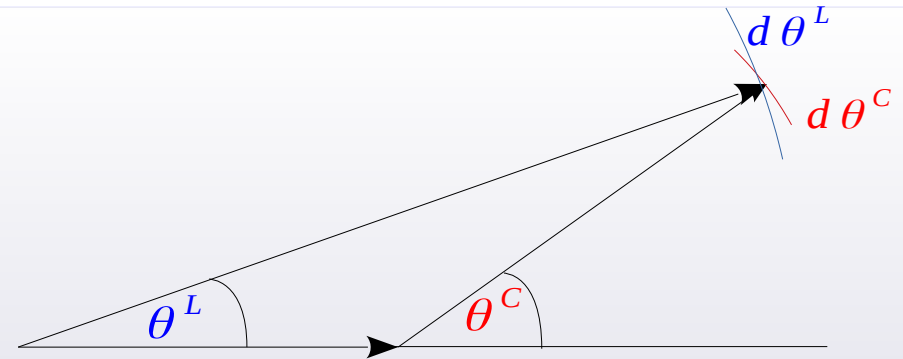


Transformacja różniczkowego przekroju czynnego

- Przekształcenie między θ^L a θ^C nie jest liniowe:

$$\operatorname{tg} \theta^L = \frac{\sin \theta^C}{\cos \theta^C + \frac{A_1}{A_2}} \quad \leftarrow \text{(zd. elastyczne)}$$

⇒ Element $d\Omega^L \neq d\Omega^C$ ani nawet $d\Omega^L \sim d\Omega^C$.



$$\frac{d\sigma}{d\Omega^L} = \frac{d\Omega^C}{d\Omega^L} \frac{d\sigma}{d\Omega^C} = \left| \frac{d\Omega^C}{d\Omega^L} = \frac{\sin \theta^C d\theta^C d\phi^C}{\sin \theta^L d\theta^L d\phi^L} \right| = \frac{\sin \theta^C d\theta^C}{\sin \theta^L d\theta^L} \frac{d\sigma}{d\Omega^C} = \underbrace{\frac{d\cos \theta^C}{d\cos \theta^L}}_{1/\Delta} \frac{d\sigma}{d\Omega^C}$$

- Zajmijmy się ilorazem Δ . Uzależnimy $\cos \theta^L$ od θ^C .

$$\cos \theta^L = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta^L}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \theta^C}{\cos \theta^C + \frac{A_1}{A_2}} \right)^2}} = \frac{\overbrace{\cos \theta^C}^x + \overbrace{\frac{A_1}{A_2}}^a}{\sqrt{1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos \theta^C + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2}}$$

$$\frac{d\cos \theta^L}{d\cos \theta^C} = \frac{d}{dx} \frac{x + a}{\sqrt{1 + 2ax + a^2}} = \frac{\sqrt{1 + 2ax + a^2} - (x + a) \frac{2a}{2\sqrt{1 + 2ax + a^2}}}{(1 + 2ax + a^2)} = \frac{1 + ax}{(1 + 2ax + a^2)^{3/2}}$$

⇒

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} \cdot \frac{\left[1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos \theta^C + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]^{3/2}}{1 + \frac{A_1}{A_2} \cos \theta^C}$$