

ZAKŁAD FIZYKI JĄDROWEJ
UNIwersytet Warszawski



Fizyka jądrowa

Rozproszenia i reakcje

Ujęcie nierelatywistyczne – kwantowe

Krzysztof Piasecki

Wykład w oparciu o materiały prof. Tomasza Matulewicza

oraz podręczniki:

- [1] T. Meyer-Kuckuk, Fizyka Jądrowa, PWN 1983
- [2] Z. Wilhelmi, Fizyka Reakcji Jądrowych, PWN 1976

Kody USOS: 1101-4FJ14 / 1100-1ENFIZJAD5



krzysztof.piasecki@fuw.edu.pl

Część II

Rozproszenia i reakcje w ujęciu kwantowym



Spis zagadnień w części II

- Metoda fal parcjalnych: rozpraszanie na potencjale centralnym.

Równanie Schrodingera – przypomnienie.
Rozkład funkcji falowej na fale parcjalne, wzór Bauera
Przekrój czynny na rozpraszanie (różniczkowy i całkowity)
Przekrój czynny na reakcję (całkowity)
Wykres Arganda
Rozpraszanie w fali s
- Przybliżenie Borna
Amplituda rozpraszania
Przypadek potencjału centralnego
Przekrój czynny na rozpraszanie na potencjale Coulomba
Przekrój czynny na rozpraszanie na kulistej studni potencjału
Rozkład przestrzenny jądra atomowego
Prawo równowagi szczegółowej
- Dyfrakcja Fresnela i Fraunhofera (dla jąder atomowych)
- Obszar rezonansowy – przekroje czynne na rozproszenia i reakcje

Oddziaływanie z jądrem – metoda fal parcyjnych

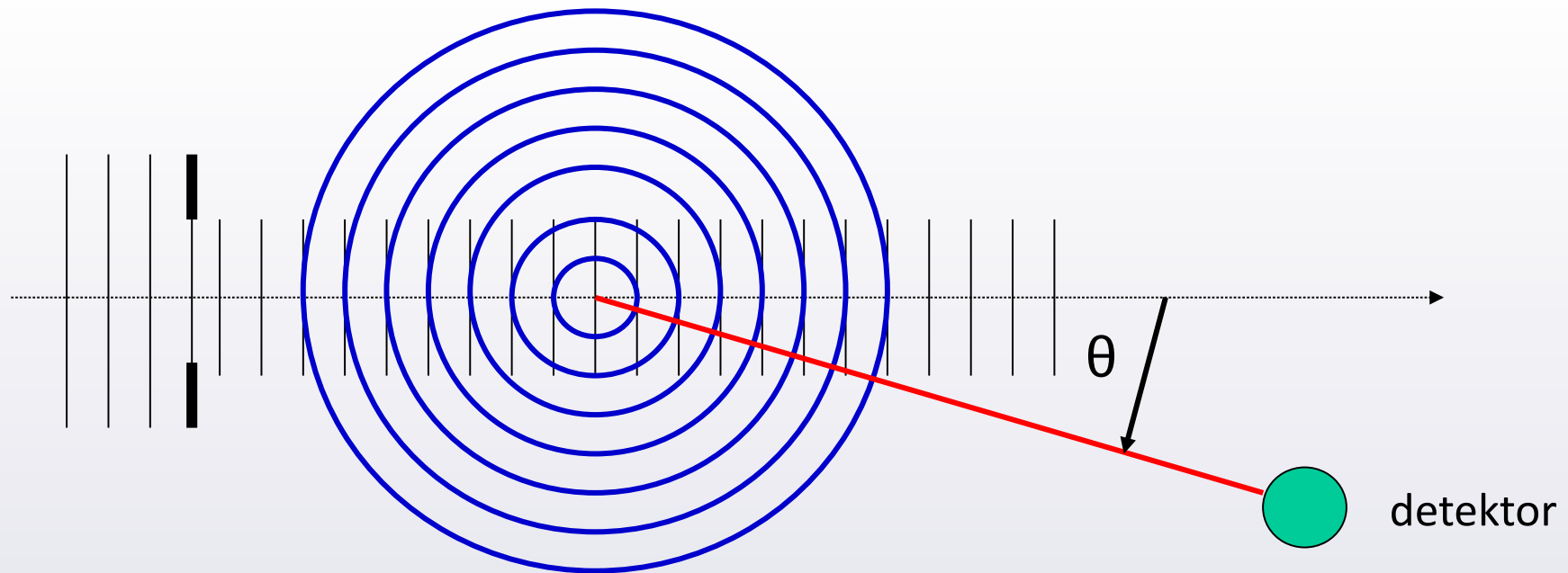


Funkcja falowa cząstki swobodnej: fala płaska.

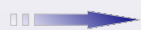
Argument de Broglie'a → Cząstka "widzi" jądro jako całość.

Oddziaływanie jądra z cząstką opiszemy językiem potencjału.

- Uproszczenie: potencjał sferycznie symetryczny [$V = V(r)$], tzn. siły centralne. Potencjał generuje falę rozbiegającą się, opisywaną przez ψ_{out} .



- Jeśli potencjał jest sferycznie symetryczny (siła centralna), to moment pędu jest zachowany. Wtedy r. Schrödingera, które musi spełniać funkcja falowa, separuje się na cz. radialną i kątową.
- Aby natężenie fali kulistej było $\sim 1/r^2$, to sama funkcja falowa $\psi_{\text{out}} \sim 1/r$.



$$\psi(\vec{r}) = A(e^{ikz} + f(\theta)e^{ikr}/r)$$



Część stacjonarna
funkcji falowej

Równanie Schrödingera – przypomnienie

- Stacjonarne równanie Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_n + V\psi_n = E_n\psi_n$$

- Laplasjan we współrzędnych sferycznych:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right)$$

- Jeżeli potencjał jest centralny [$V(\vec{r}) = V(r)$], to funkcja falowa separuje się:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

i otrzymujemy 3 osobne równania:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta \Theta = m^2\Theta, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E]R = l(l+1)R, \end{array} \right.$$

Równanie Schrödingera – przypomnienie c.d.

- Ogólne rozwiązania dla części **kątowych**:
$$\begin{cases} \Phi_m = (2\pi)^{-1/2} e^{im\phi} \\ \Theta_l^m \propto P_l^m(\cos \theta), \end{cases} \leftarrow \text{Stowarzyszone wielomiany Legendre'a}$$

- Część **radialna**. Przy podstawieniu: $u(r) = rR(r)$ otrzymujemy:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

- Jeśli założymy studnię w postaci kuli :

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

- To w jej środku otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u, \text{ gdzie } k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

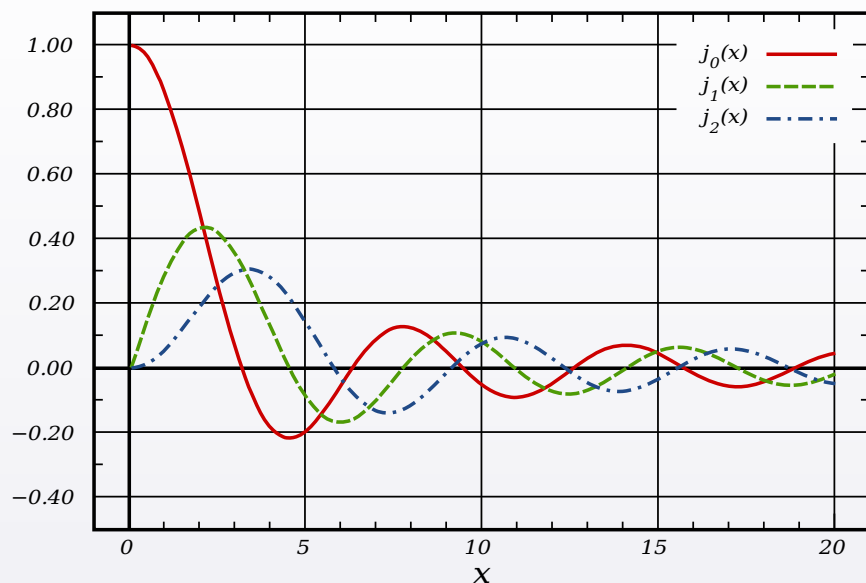
- Ogólne rozwiązanie: $u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr)$

$$R(r) = A j_l(kr) + B n_l(kr)$$

gdzie:

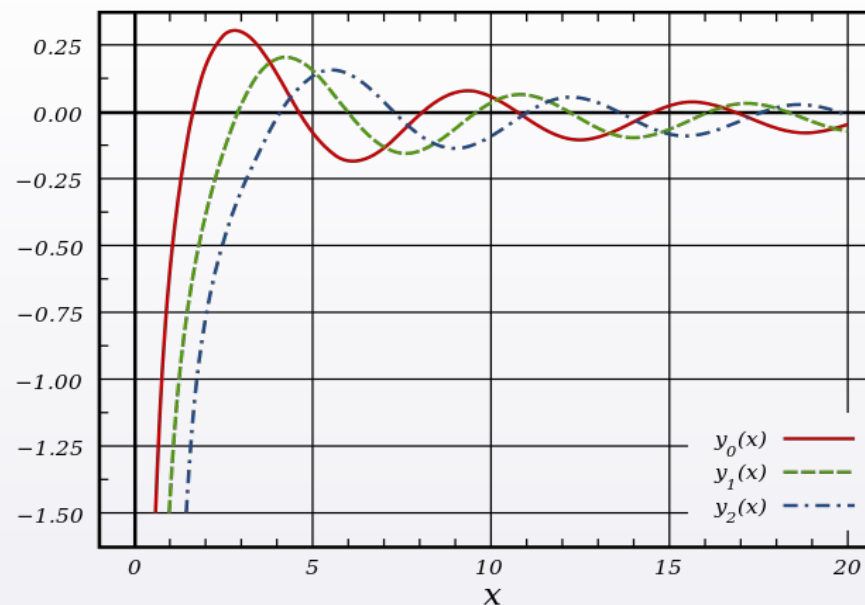
$$\begin{cases} j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} & (\text{sferyczne funkcje Bessel'a}) \\ n_l(x) \equiv -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} & (\text{sferyczne funkcje Neumann'a}) \end{cases}$$

Sferyczne funkcje Bessel'a i Neumann'a



- Sferyczne funkcje Bessel'a:

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}$$



- Sferyczne funkcje Neumann'a:

$$n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$$

Funkcje Neumanna dążą do ∞ w $x = 0$.
Niefizyczne → wykluczamy.

Szkic wstępu do kwantowej teorii rozpraszania

- ▶ Fala płaska ma ściśle określony pęd ($\hbar k$), ale dowolny moment pędu. Można ją jednak rozłożyć na sumę sferycznych fal parcyjnych, każda odpowiadająca danemu l :

- **“Wzór Bauera”**

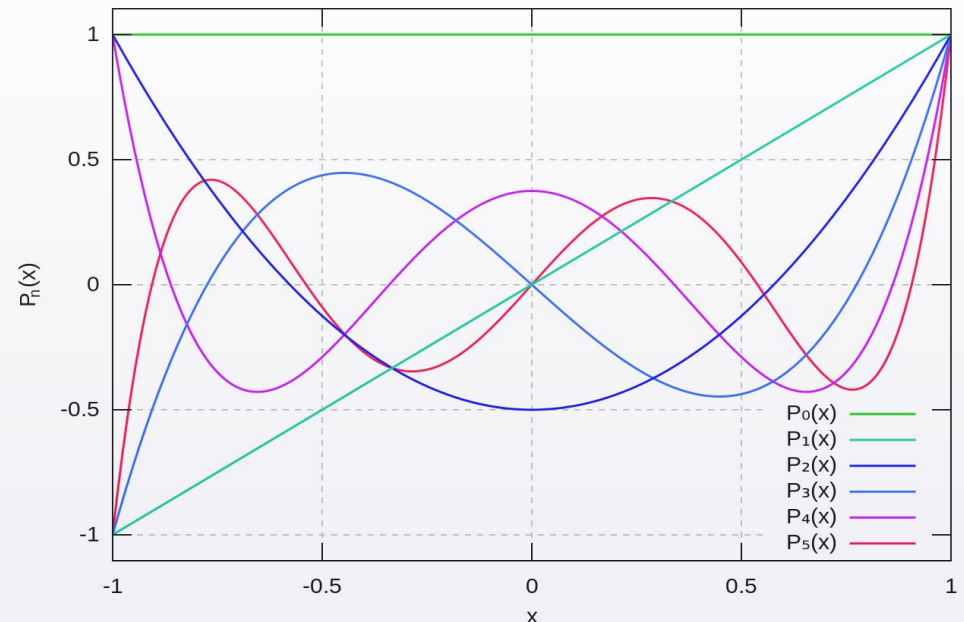
$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}}(\vec{r}) &= e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \boxed{j_l(kr)} \boxed{P_l(\cos \theta)}\end{aligned}$$

Sferyczne funkcje Bessel'a
(spełniają część radialną
r. Schrödingera z $V = \text{const}$)

Wielomiany Legendre'a
(spełniają część kątową
r. Schrödingera dla $m = 0$)

- Uzasadnimy sensowność tego wzoru i sprawdzimy, czy faktycznie działa.

- **Wielomiany Legendre'a**



- Ogólny wzór:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

- Podstawowe własności:

$$P_n(1) = 1$$

$P_n(x)$ zawsze parzyste lub nieparzyste

Potencjał krótkozasięgowy: uzasadnienie jakościowe rozkładu na fale parcjalne

- Cząstka o pędzie p (płaska fala de Broglie'a o długości λ ; $p = h/\lambda$) napotyka na jądro (potencjał w kuli o promieniu R).

Podzielimy płaszczyznę $\perp$ do osi wiązki na pierścienie o promieniach kolejno: $l \cdot \lambda$.

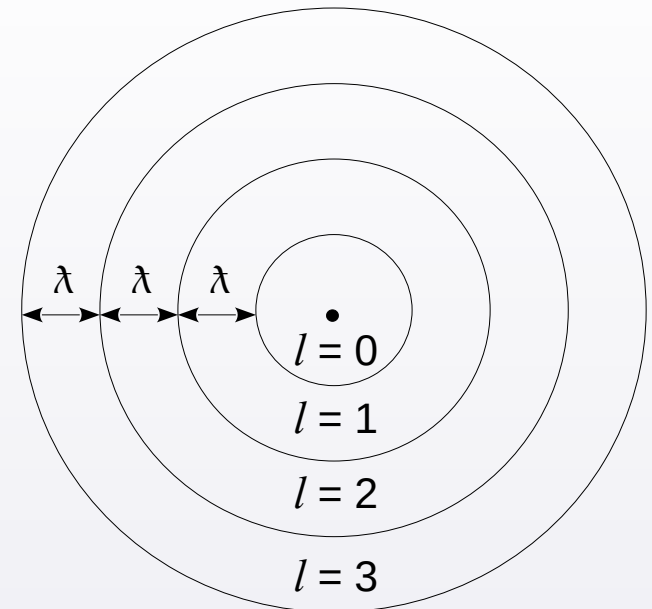
Cząstki przechodzące przez pierścień o parametrze $b \approx l \cdot \lambda$, mają moment pędu:

$$L = p \cdot b = \frac{\hbar}{\lambda} \cdot l \lambda = l \hbar$$

- Model silnej absorpcji $\rightarrow$ cząstki muszą trafić w tarczę. Maksymalna wartość l dla tarczy o promieniu R :

$$R = b_{\max} = l_{\max} \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad l_{\max} = \frac{R}{\lambda}$$

- Cząstki powolne: $p = \hbar / \lambda \rightarrow$ duże λ .
Dla $\lambda > R$, $l_{\max} = 0 \rightarrow$ wchodzi w grę tylko $l = 0$,
tj. „fala s”.



Ze wzrostem energii kinetycznej (pędu) wiązki „włączają się” kolejne l .

Sferyczne funkcje Bessel'a 1. rodzaju

- Przypomnienie: $\psi_{\text{in}}(\vec{r}) = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$

- Sferyczne funkcje Bessel'a – wzór: $j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}$

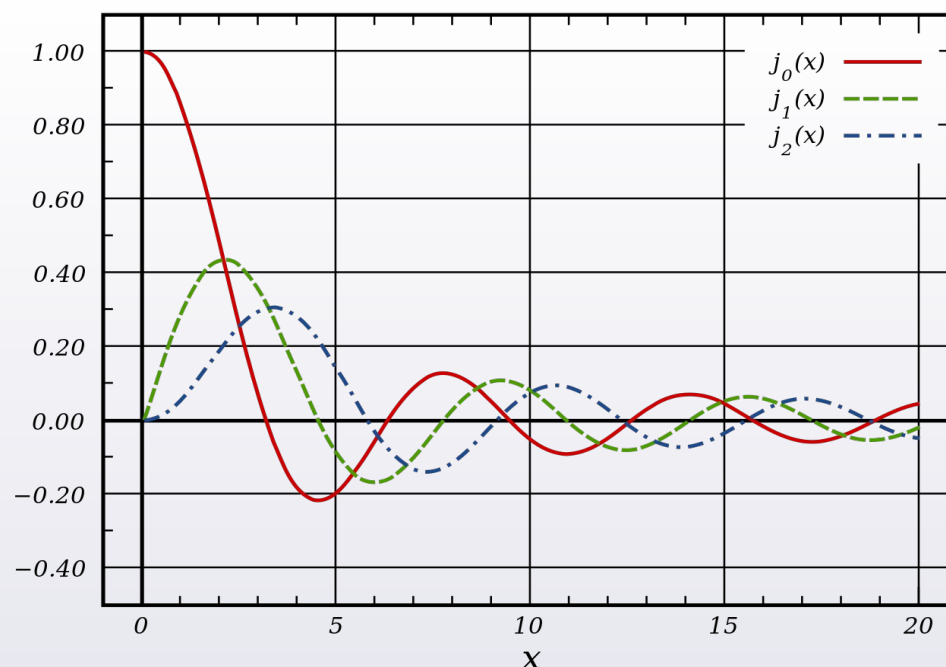
- Pierwsze funkcje:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2}$$

...



- Właściwość graniczna:

Dla $kr \gg 1$ (obszar daleko od potencjału)

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin \left(kr - \frac{1}{2} l \pi \right)}{kr}$$

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{i}{2kr} \left[e^{-i \left(kr - \frac{1}{2} l \pi \right)} - e^{i \left(kr - \frac{1}{2} l \pi \right)} \right]$$

Sprawdzenie rozkładu fali płaskiej na fale parcjalne

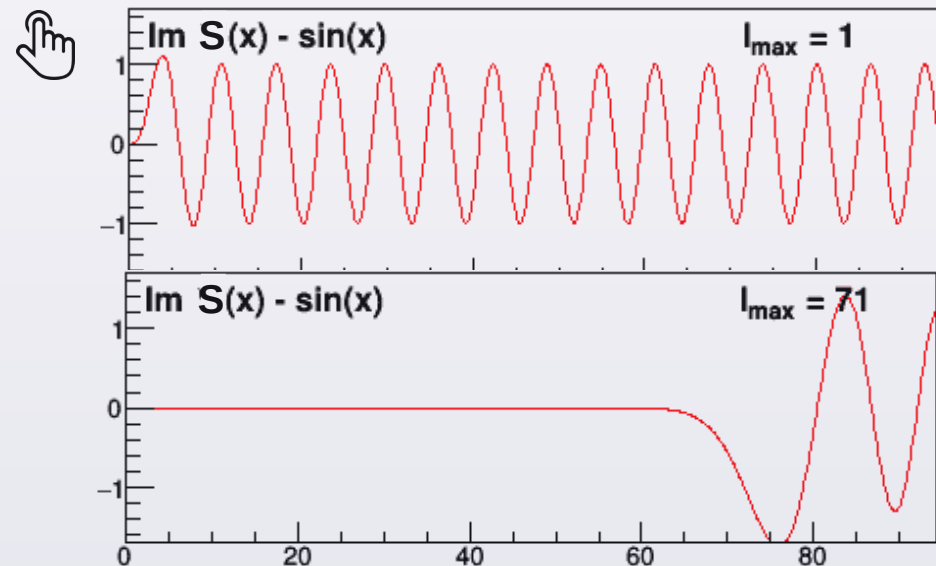
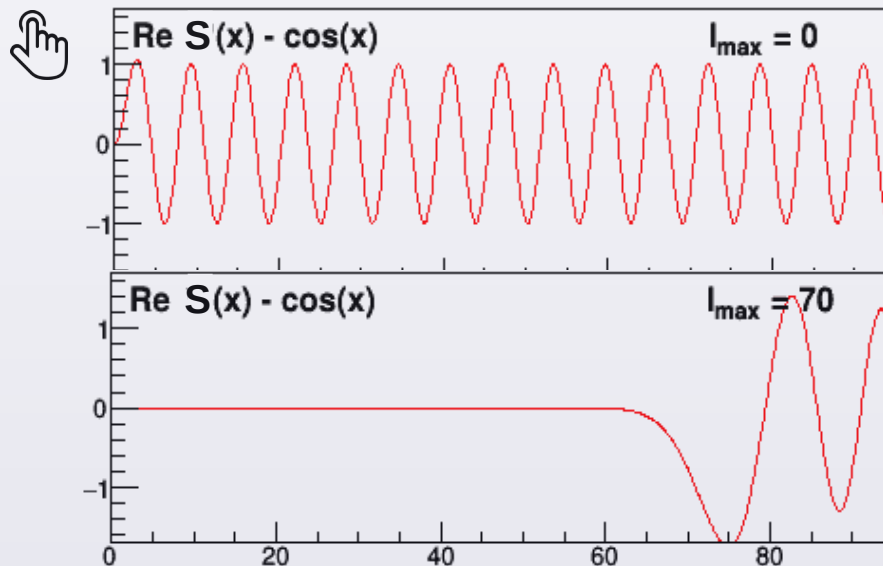
$$\begin{cases} e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} \stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \\ e^{ikz} = \cos(kz) + i \sin(kz) \end{cases}$$

- Tożsamość ma zachodzić dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Sprawdźmy dla płaszczyzny $\theta = 0^\circ \rightarrow P_l(\cos 0^\circ) = 1$.

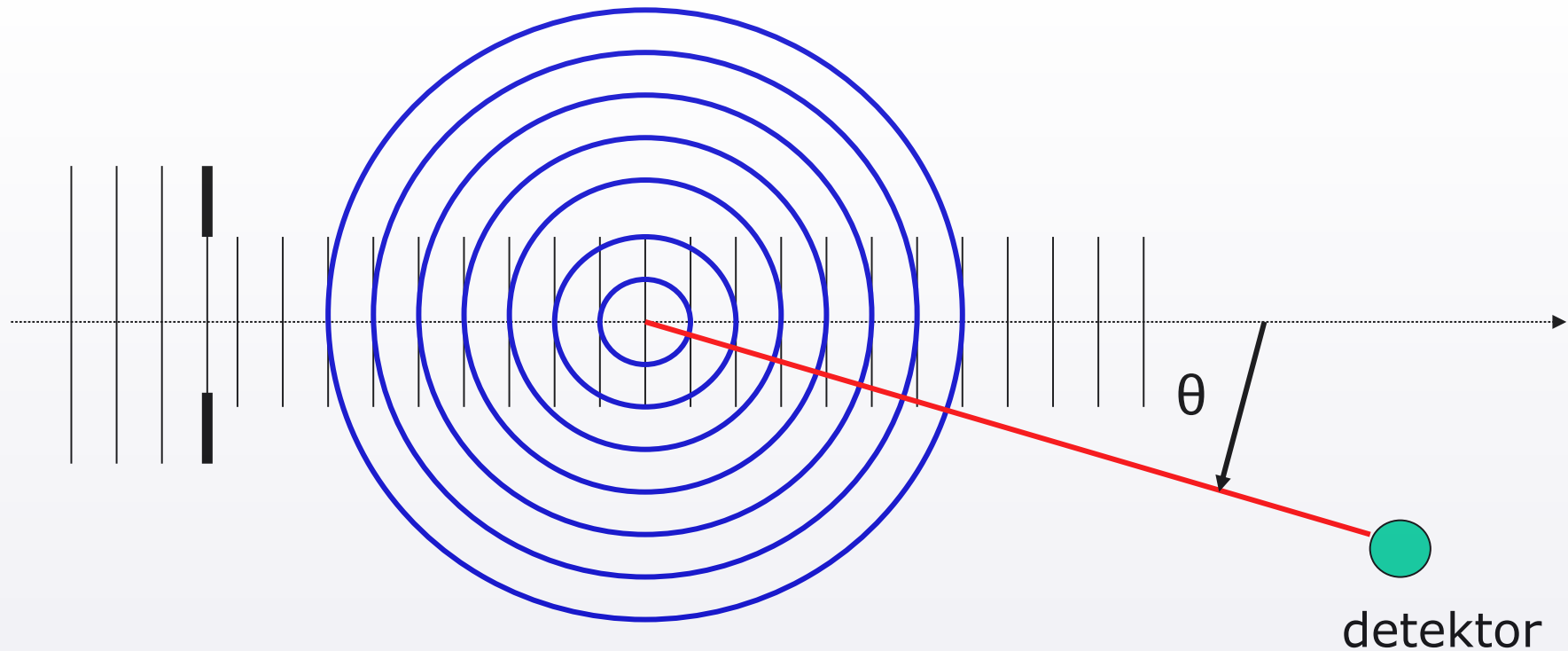
$$\cos(kr) + i \sin(kr) = e^{ikr} \stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) =$$

$$= j_0(kr) + 3i j_1(kr) + 5(-1) j_2(kr) + 7(-i) j_3(kr) + \dots$$
- Budujemy szereg $S(x)$ z coraz większą ilością kolejnych wyrazów:

$$S(kr, l_{\max}) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) i^l j_l(kr)$$
- Sprawdzimy (w gałęzi Re oraz Im) odstępstwo między $S(kr)$ a postacią dokładną $e^{ikr} = \cos kr + i \sin kr$



Czy w eksperymencie jesteśmy w “obszarze dalekim” ?



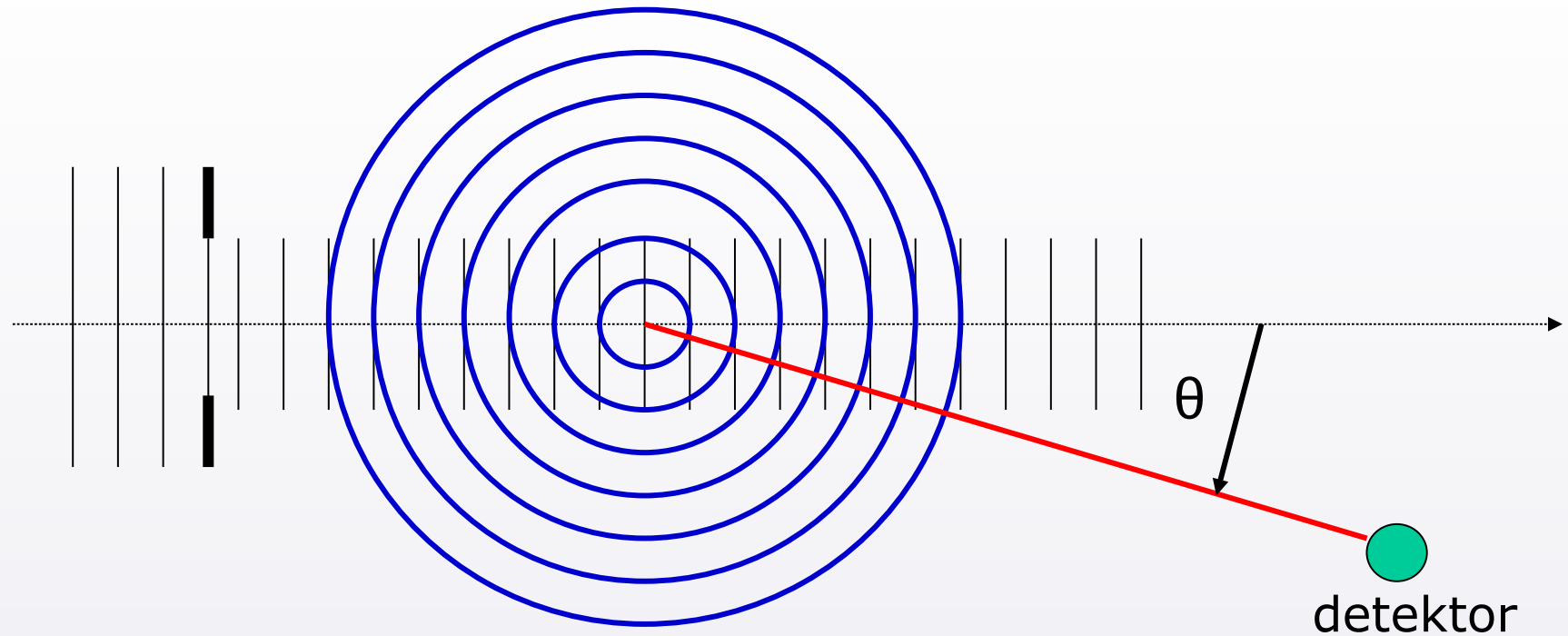
Obszar działania potencjału: $\sim 10^{-14}$ m

Typowa średnica wiązki cząstek: $\sim 10^{-3}$ m

Typowa odległość detektora od tarczy: 0,1 – 1 m

→ *Przybliżenie można uznać za uzasadnione* ✓

Stacjonarna funkcja falowa



$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{in}}(\vec{r}) + \psi_{\text{out}}(\vec{r}) = A e^{i k r \cos \theta} + A f(\theta) e^{i k r} / r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\text{in}}(\vec{r}) = A e^{i k r \cos \theta} \approx A \frac{1}{2 k r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i \left(k r - \frac{1}{2} l \pi \right)} - e^{i \left(k r - \frac{1}{2} l \pi \right)} \right] P_l(\cos \theta) \\ \psi_{\text{out}}(\vec{r}) = A f(\theta) e^{i k r} / r \end{array} \right.$$

zbiegająca
się fala kulista

rozbiegająca
się fala kulista

Całkowita funkcja falowa

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{out}(\vec{r}) = Af(\theta)e^{ikr}/r \\ \psi_{in}(\vec{r}) = Ae^{ikr\cos\theta} \approx \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos\theta) \end{array} \right.$$

A zarazem, ogólna postać całości w formie:

$$\psi_{Total}(\vec{r}) \approx \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos\theta)$$

Rozbiegająca się funkcja falowa – wskutek działania V rozpraszającego – może mieć inną amplitudę, niż odpowiednia składowa fali płaskiej, oraz może być przesunięta w fazie.

Zjawiska te możemy opisać wprowadzając czynnik η_l , będący w ogólnym przypadku liczbą zespoloną. Rozpatrując rozproszenie elastyczne, nie ulega zmianie liczba falowa k związana z pędem: $p = \hbar k$.

Współczynnik rozpraszania η_l

$$\psi_{\text{Total}}(\vec{r}) \approx \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos\theta)$$

- Współczynnik rozpraszania:

$$\eta_l = |\eta_l| e^{i\varphi_l}$$

Moduł
zmienia amplitudę
fali rozproszonej

Przesunięcie fazy fali rozproszonej
(względem fali zbiegającej)

- Jeśli jest rozproszenie elastyczne, to: $|\eta_l| = 1$
Jeśli zachodzi reakcja, to $|\eta_l| < 1$.

- Przyrównujemy obie reprezentacje ψ_{Total} :

$$\begin{aligned}
 [lhs] \quad & \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta) = \\
 [rhs] \quad & = \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta) + \frac{A}{r} f(\theta) e^{ikr}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\theta) \approx \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} [1 - \eta_l] e^{-i\frac{l\pi}{2}} P_l(\cos \theta)$$

$$i^{l+1} e^{i\left(-\frac{1}{2}l\pi\right)} = i i^l e^{i\left(-\frac{1}{2}l\pi\right)} = i e^{i\left(\frac{1}{2}\pi\right)l} e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi\right)l} = i$$

$$\Rightarrow f(\theta) \approx \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l) P_l(\cos \theta)$$

Wzór pokazuje, jak rozkład kątowy generowany jest przez przyczynki od fal parcjalnych.

- $f(\theta)$ nazywamy „**Amplitudą rozpraszania**”.

Przekrój czynny na rozproszenie – kwantowo

- Przy rozproszeniu:

$$dN_{in} = dN_{out}$$

$$j_{in} d\sigma_{wiązki} = j_{out} dS_{sfery}$$

Przy czym: $dS = r^2 d\Omega$

⇒ Ogólna definicja:

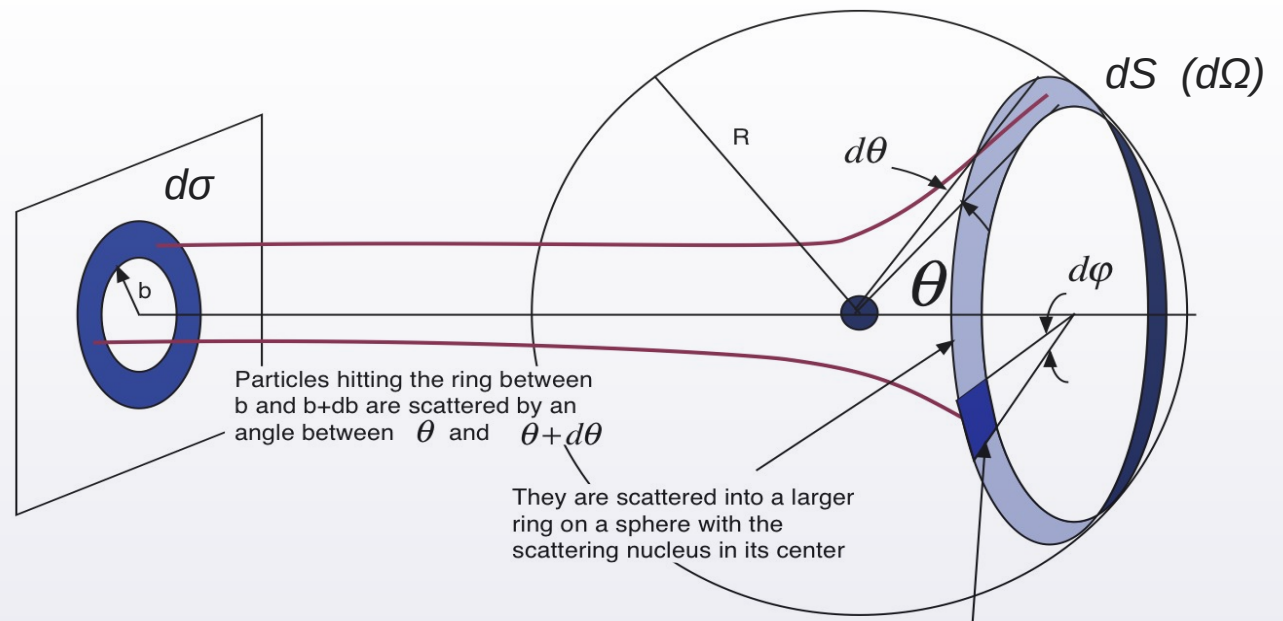
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Rozp} \equiv \frac{|\vec{j}_{out}| \cdot r^2}{|\vec{j}_{in}|}$$

- Strumień zdefiniowany kwantowomechanicznie: $\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$

- W mechanice kwantowej wyprowadza się ogólny wzór na **przekrój czynny na rozpraszanie**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

To ogólne stwierdzenie wykażemy dla naszej klasy funkcji.



Przekrój czynny na rozproszenie – kwantowo, c.d.

- Strumień zdefiniowany kwantowomechanicznie: $\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$

- (1) Dla fali padającej: $\psi_{\text{in}} = A e^{ikz}$

Tu najwygodniej wybrać układ kartezjański: $\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\text{in}} &\equiv \frac{\hbar |A|^2}{2\mu i} \left(\hat{e}_z e^{-ikz} i k e^{ikz} - \hat{e}_z e^{ikz} (-ik) e^{-ikz} \right) \\ &= \frac{\hbar |A|^2}{2\mu i} \cdot 2ik \hat{e}_z = |A|^2 \frac{\hbar k}{\mu} \hat{e}_z = |A|^2 \frac{\vec{p}_{\text{in}}}{\mu} = |A|^2 \vec{v}_{\text{in}}\end{aligned}$$

- (2) Dla fali odbitej: $\psi_{\text{out}} \approx A \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$

Tu najwygodniej wybrać układ sferyczny. $\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

- Strumień zdefiniowany kwantowo-mechanicznie:

$$\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

- (2) Dla fali odbitej: $\psi_{\text{out}} \approx A \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$

Tu najwygodniej wybrać układ sferyczny. $\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

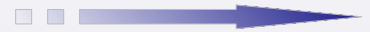
$$\vec{j}_{\text{out}} \equiv \frac{\hbar |A|^2}{2\mu i} \left[f^* \frac{e^{-ikr}}{r} \left(f \frac{ike^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{df}{d\theta} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{e}_\theta \right] - f \frac{e^{ikr}}{r} \left(f^* \frac{-ike^{-ikr}}{r^2} - \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{df^*}{d\theta} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{e}_\theta \right]$$

$$\vec{j}_{\text{out}} \equiv \frac{\hbar |A|^2}{2\mu i} \left[\frac{|f(\theta)|^2}{r} \left(\frac{ikr-1}{r^2} - \frac{-ikr-1}{r^2} \right) \hat{e}_r + \left(f^* \frac{df}{d\theta} - f \frac{df^*}{d\theta} \right) \frac{1}{r^3} \hat{e}_\theta \right]$$

$\searrow \sim \frac{1}{r^2}$
 $\searrow \sim \frac{1}{r^3}$ (małe w $r \rightarrow \infty$)



$$\vec{j}_{\text{out}} \approx \frac{|A|^2 \hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \hat{e}_r = |A|^2 v_{\text{out}} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \hat{e}_r$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{j}_{\text{out}}| \cdot r^2}{|\vec{j}_{\text{in}}|} = \frac{|A|^2 v_{\text{out}} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} r^2}{|A|^2 v_{\text{in}}} = |f(\theta)|^2$$



Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie

- Pamiętając:
$$f(\theta) \approx \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \eta_l) P_l(\cos \theta)$$

dostajemy:
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \eta_l) P_l(\cos \theta) \right|^2$$

- We wzorze pojawia się człon interferencyjny. Skutkuje on tym, że zależność od kąta rozproszenia θ może prowadzić do niesymetrycznego rozkładu kąтового.
- Wyznaczenie (na bazie zadanego potencjału oddziaływania) współczynników η_l pozwala na obliczenie przekroju czynnego.

Uwaga:

Przekrój czynny, dla ustalonych wartości η_l , jest odwrotnie proporcjonalny do energii kinetycznej:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\hbar^2}{(\hbar k)^2} \cdot \frac{2\mu}{2\mu} = \frac{\hbar^2}{2\mu E_{kin}}$$

Całkowity przekrój czynny na rozpraszanie

- Całkujemy przekrój różniczkowy po wszystkich kątach emisji:

$$\sigma_s = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \frac{1}{4k^2} \int_0^\pi \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-\eta_l) P_l(\cos\theta) \right|^2 \sin\theta d\theta$$

- Podstawiamy $x = \cos\theta$ i rozpisujemy $|\cdot|^2$:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{4k^2} \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-\eta_l^*) P_l(x) \cdot \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1)(1-\eta_u) P_u(x) dx$$

- Wykorzystamy warunek ortogonalności wielomianów Legendre'a: $\int_{-1}^1 P_l(x) P_u(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lu}$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\pi}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 |1-\eta_l|^2 \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 |1-\eta_l|^2 \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$



$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1-\eta_l|^2$$



Całkowity przekrój czynny
na rozpraszanie

Całkowity przekrój czynny na rozpraszanie

$$\sigma_S = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

- Można zapisać jako suma przekrojów czynnych odpowiadających kolejnym falom parcjalnym.

$$\sigma_S = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{S,l}$$

- Wkłady od kolejnych fal parcjalnych wchodzi z narastającą wagą $(2l+1)$.
- Wkład od l -tej fali parcjальной ma postać:

$$\sigma_{S,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

- Uwaga:**

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie – składowe parcjalne interferują.
Całkowity przekrój czynny na rozpraszanie – składowe parcjalne addytywne.

Całkowity przekrój czynny na reakcję

- Za reakcję będziemy uważać każdy proces poza procesem rozpraszania elastycznego.
- Idea rachunku przekroju czynnego na reakcję:
 - Całkowita f. falowa ψ_{Total} zawiera część padającą i wychodzącą.
 - Otacza się jądro rozpraszające sferą o dowolnym (dużym) promieniu.
 - Całkuje się pełen strumień $j(\psi_{\text{Total}})$ po sferze.
 - Daje to bilans między „input” do sfery a „output” ze sfery
 - Każde niezrównoważenie tego bilansu świadczy o reakcjach („absorpcja” f. falowej)
 - „Minus”, aby pochłanianie wyszło ze znakiem „+”.
- Całkowity przekrój czynny na reakcję (ogólny wzór definicyjny) :

$$\sigma_R = \frac{1}{j_{\text{in}} 4\pi} \int -j_{\text{Total}} r^2 d\Omega$$

gdzie strumień:

$$\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Całkowity przekrój czynny na reakcję

$$\sigma_R = \frac{1}{j_{\text{in}} 4\pi} \int -j_{\text{Total}} r^2 d\Omega \quad \vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

- Przy czym:

$$\begin{cases} \psi_{\text{in}}(\vec{r}) = A e^{ikr \cos \theta} \approx \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta) \\ \psi_{\text{Total}}(\vec{r}) \approx \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta) \end{cases}$$



$$\sigma_R = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

- Wzór jest sumą składowych parcyjnych. Wkład od l -tej fali ma postać :

$$\sigma_{R,l} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

- Jeśli $|\eta_l| = 1$, to $\sigma_R = 0$.

$|\eta_l| = 1$ oznacza, że proces jest procesem rozpraszania elastycznego.

(Nie ma zmian amplitudy, co najwyżej zmiana fazy.)

Wartości ekstremalne przekrojów czynnych

► Rozpatrzmy wkład od l -tej fali parcjalej do przekroju czynnego na rozpraszanie oraz reakcję.

- Dla rozpraszania:

$$\sigma_{S,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

Wartość maksymalna, gdy $\eta_l = -1$

$$\sigma_{S,l}^{max} = 4\pi \lambda^2 (2l+1)$$

- Dla reakcji:

$$\sigma_{R,l} = \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

Wartość maksymalna, gdy $\eta_l = 0$.

$$\sigma_{R,l}^{max} = \pi \lambda^2 (2l+1)$$

► Nb. w przypadku $|\eta_l| = 1$, otrzymujemy $\sigma_R = 0$ (brak reakcji).

Wówczas η_l można zapisać jako: $\eta_l = e^{2i\delta_l}$, gdzie $2\delta_l$ jest kątem przesunięcia fazowego.

► Uwaga: w przypadku rozpraszania na potencjale Coulomba, przesunięcie fazowe jest zawile matematycznie i w praktyce obliczane numerycznie.

Możliwe przekroje czynne dla danej fali parcjalej

- Przypomnijmy wzory na przekroje czynne:

$$\sigma_{S,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1-\eta_l|^2$$

$\swarrow \sigma_{S,l}^0$

$$\sigma_{R,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) (1-|\eta_l|^2)$$

$\swarrow \sigma_{R,l}^0$

η_l	-1	0	1
σ_S^0	4	1	0
σ_R^0	0	1	0

- Niech $\eta_l = M_l \cdot e^{i2\delta_l}$, $M_l \in [0,1]$, $2\delta_l \in [0, 2\pi]$

$$\sigma_{R,l}^0 = 1 - M_l^2 \quad (\text{Ustalona } M_l \Leftrightarrow \text{Ustalona } \sigma_{R,l}^0)$$

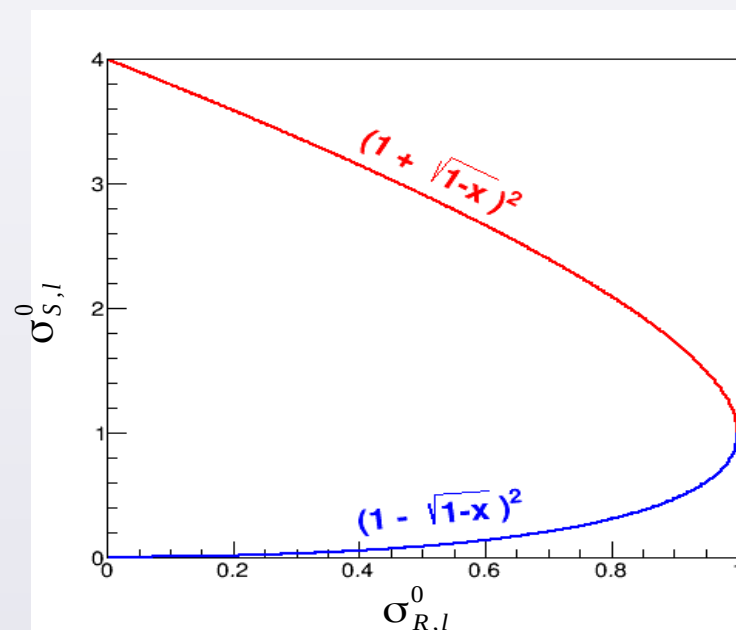
$$\sigma_{S,l}^0 = |1 - M_l \cdot e^{i2\delta_l}|^2 = |1 - M_l \cos(2\delta_l) - M_l \cdot i \sin(2\delta_l)|^2 = 1 - 2M_l \cos(2\delta_l) + M_l^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{S,l}^0 \Big|_{\min}^{\max} &= 1 \pm 2M_l + M_l^2 = (1 \pm M_l)^2 \\ &= (1 \pm \sqrt{1 - \sigma_{R,l}^0})^2 \end{aligned}$$

➡ Dla danego $\sigma_{R,l}^0$, wartości $\sigma_{S,l}^0$ nie mogą przekroczyć powyższych granic.

Wykres możliwości

- Uwaga:** Istnieje rozpraszanie bez reakcji, ale nie istnieje reakcja bez rozpraszania.



Rozpraszanie w fali s

- Załóżmy brak oddziaływań coulombowskich (np. oddziaływanie neutron-jądro).

Niewielki zasięg oddziaływań jądrowych pozwala na to, że dla neutronu o niskim pędzie jego oddziaływanie z jądrem można sprowadzić wyłącznie do $l = 0$ (tzw. „bariera centryfugalna” znika).

- Przypomnijmy:
$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l) P_l(\cos \theta)$$

Zakładamy, że bierze udział tylko fala $l = 0$, czyli $\eta_0 \neq 1$ i $\eta_1, \dots = 1$. $P_0(\cos \theta) = 1$.

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} (1 - \eta_0) = \frac{i}{2k} (1 - e^{2i\delta_0}) = \frac{i}{2k} e^{i\delta_0} \frac{e^{-i\delta_0} - e^{i\delta_0}}{2i} \cdot 2i$$

$$f(\theta) = \lambda e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \equiv f_0$$

- Przekrój różniczkowy:
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = |f(\theta)|^2 = \lambda^2 \sin^2 \delta_0 = \text{const}(\theta)$$

Przekrój całkowity:

$$\sigma_s = 4\pi \lambda^2 \sin^2 \delta_0 = 4\pi |f_0|^2$$

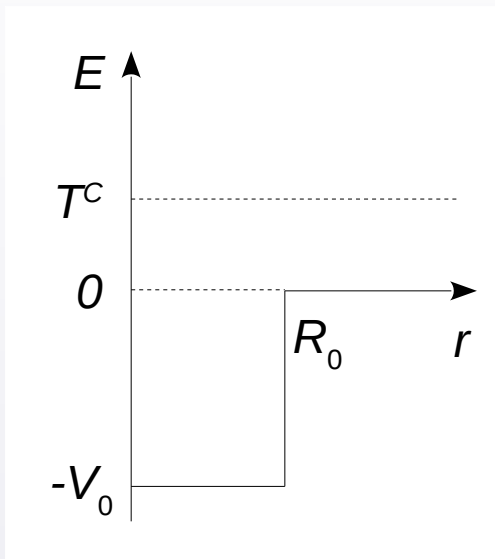


Centrum rozpraszania działa jak „kula” o promieniu $2 \cdot f_0$.

- Doświadczalnie, graniczna wartość f_0 dla bardzo niskich energii nosi nazwę „długości rozpraszania” (a).
$$a \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (-f_0)$$

Związek przesunięcia fazowego z potencjałem na przykładzie rozpraszania w fali s

- Kontynuujemy badanie oddziaływania powolnego neutronu o energii kinetycznej T^C z jądrem. Załóżmy dla uproszczenia kulistą studnię potencjału o głębokości V_0 i promieniu R_0 .



- W środku studni. Część radialna równania Schrödingera:

$$u(r) = r R(r)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right] u(r) = T^C \cdot u(r)$$

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu [T^C + V_0]}{\hbar^2} u(r) = 0$$

- Podstawiając $\kappa = \frac{\sqrt{2\mu [T^C + V_0]}}{\hbar}$, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \kappa^2 \cdot u = 0$$

- Rozwiązanie ogólne: $u = C \cdot \sin(\kappa r) + D \cdot \cos(\kappa r)$
- 1. warunek brzegowy: $R(0) \neq \infty$. Przypomnijmy: $R = u/r$.

Jedyna możliwość: $u(0) = 0$. Implikuje to $D = 0$.

Wówczas funkcję można zapisać jako: $u = C \sin(\kappa r)$

Związek przesunięcia fazowego z potencjałem na przykładzie rozpraszania w fali s

- Z drugiej strony, funkcja falowa na zewnątrz potencjału:

$$\psi_{\text{Total}}(\vec{r}) = \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta)$$

gdzie $k = \frac{\sqrt{2\mu T^C}}{\hbar}$. Ograniczamy się do $l = 0$ i zakładamy rozpraszanie, tj: $\eta_0 = e^{2i\delta_0}$

$$\psi_{\text{Total}}(\vec{r}) = \frac{Ai}{2kr} [e^{-ikr} - e^{2i\delta_0} e^{ikr}] = \frac{Ai}{2kr} e^{i\delta_0} (e^{-i(\delta_0+kr)} - e^{i(\delta_0+kr)}) = \frac{A}{kr} e^{i\delta_0} \sin(kr + \delta_0)$$

- 2. warunek brzegowy: ciągłość funkcji falowej i jej pochodnej na brzegu studni potencjału ($r = R_0$).
Prowadzi to do układu 2 równań:

$$\begin{cases} \frac{A}{k} e^{i\delta_0} \sin(kR_0 + \delta_0) = C \sin(\kappa R_0) \\ A e^{i\delta_0} \cos(kR_0 + \delta_0) = C \kappa \cos(\kappa R_0) \end{cases}$$

Podzielmy równania przez siebie:

$$\frac{1}{k} \tan(kR_0 + \delta_0) = \frac{1}{\kappa} \tan(\kappa R_0)$$

skąd otrzymujemy:

$$\delta_0 = -kR_0 + \text{atan} \left[\frac{k}{\kappa} \tan(\kappa R_0) \right], \text{ gdzie: } \kappa = \frac{\sqrt{2\mu [T^C + V_0]}}{\hbar}$$

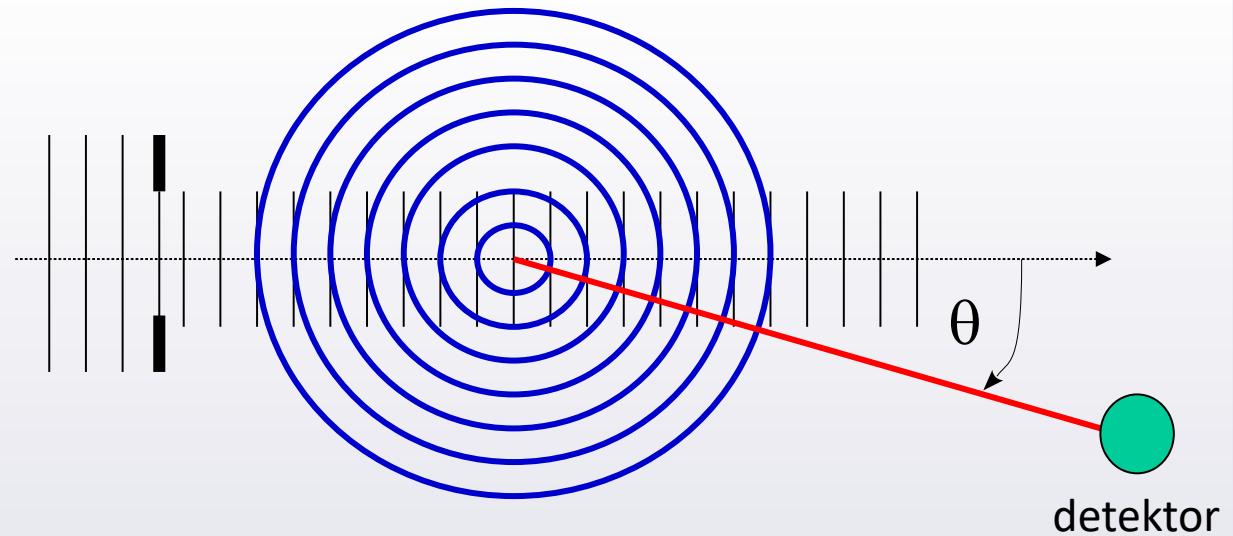
➡ Przesunięcie fazy δ_0 funkcji falowej generowane jest przez potencjał V_0 .

Rozpraszanie w Przybliżeniu Borna

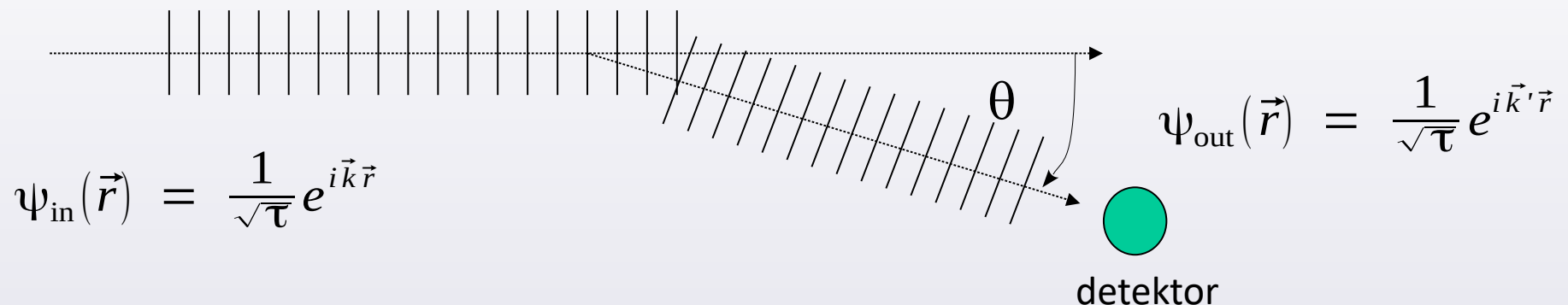
- Dotychczasowy model:
Rozkład Ψ na fale parcjalne.

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-\eta_l) P_l(\cos \theta)$$

Argument fal de Broglie'a:
Dla dużych pędów ogromna liczba
fal parcjalnych! (problem...)



- Alternatywa przy wysokich energiach (pędach): **Przybliżenie Borna**.
Dla $V \ll T^C$, potencjał jest zaburzeniem w porównaniu do całości hamiltonianu.
Fala płaska w kanale wejściowym i wyjściowym.



Normalizacja w arbitralnej (b. dużej) objętości τ , tak aby: $\int |\psi|^2 d\tau = 1$

Pierwszy rząd rachunku zaburzeń („złota reguła” Fermiego)

- Zastosujemy wyprowadzoną w rachunku zaburzeń pierwszego rzędu „złotą regułę”.
Ogólnie: przy przejściu ze stanu $|1\rangle$ do stanu $|2\rangle$ prawdopodobieństwo W (na jedn. czasu) :

$$W(1 \rightarrow 2) = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{12}|^2 \frac{dn}{dE_2}$$

← Gęstość energetyczna stanów końcowych

gdzie: $U_{12} = \langle 2|V|1\rangle = \int d\tau \psi_2^* V(\vec{r}) \psi_1$

- W naszym przypadku rozważamy przejście pomiędzy stanami pędownymi: $|\vec{k}\rangle \rightarrow |\vec{k}'\rangle$.
Dany $\vec{k}'$ to nie tylko ustalona energia kinetyczna, ale i ustalone kąty θ i φ .
Potrzebujemy więc prawdopodobieństwa w wersji różniczkowej (na element kąta bryłowego) :

$$\frac{dW(\vec{k}, \vec{k}')}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |U(\vec{k}, \vec{k}')|^2 \frac{d^2 n}{dE' d\Omega}$$

← Gęstość stanów końcowych na jedn. energii i kąta bryłowego

gdzie: $U(\vec{k}, \vec{k}') = \langle \vec{k}'|U|\vec{k}\rangle = \int d\tau \psi_{out}^* V(\vec{r}) \psi_{in} = \frac{1}{\tau} \int (e^{i\vec{k}'\vec{r}})^* V(\vec{r}) (e^{i\vec{k}\vec{r}}) d\tau$
 $= \frac{1}{\tau} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} V(\vec{r}) d\tau$

- Gęstość stanów końcowych: Tylko 1 stan fermionowy w kostce 6-dim o objętości $(\Delta x \Delta p_x)(\dots)(\dots) = h \cdot h \cdot h$

$$\frac{dn}{1} = \frac{\tau dp^3}{h^3}$$

$$dn = \frac{\tau \cdot p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\left| E = \frac{p^2}{2\mu} \Rightarrow dE = \frac{p}{\mu} dp \right|$$

$$\frac{d^2 n}{dE d\Omega} = \frac{\tau \mu p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Pierwszy rząd rachunku zaburzeń („złota reguła” Fermiego)

- Prawdopodobieństwo W procesu spełnia:

$$j_{\text{in}} \cdot \sigma_s = W$$

$$\left[\frac{1}{m^2 s} \right] [m^2] = \left[\frac{1}{s} \right]$$

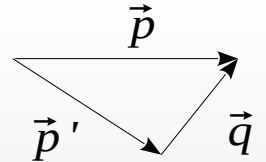
- Różniczkowo (na element kąta bryłowego)

$$j_{\text{in}} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW}{d\Omega} \quad j_{\text{in}} = \frac{v}{\tau}$$

- Zdefiniujmy $\vec{q}$: $\vec{q} \equiv \vec{p} - \vec{p}' = \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$

- Łącznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{v/\tau} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{1}{\tau} \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau \right|^2 \frac{\tau \mu p}{(2\pi\hbar)^3} \\ &= \frac{\mu p}{v} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar^4} \left| \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau \right|^2 = \frac{\mu^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} \left| \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau \right|^2 \end{aligned}$$



- Dla rozpraszania elastycznego zachodzi: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

Co jest zgodne z:

$$f(\theta) = - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau$$

Ad znaku $-$: otrzymuje się go w pełnym rachunku zaburzeń w przybliżeniu Borna.

Przybliżenie Borna dla rozpraszania na potencjale centralnym

- Jeżeli $V = V(r)$, to w amplitudzie rozpraszania $f(\theta)$ można uprościć całkę po objętości τ .

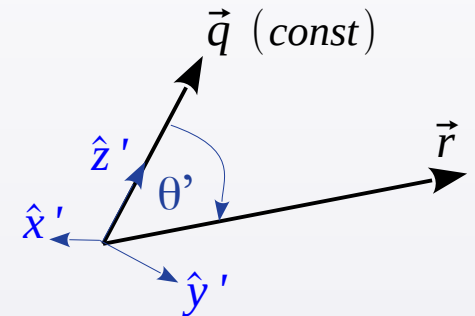
$$f(\theta) = - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau$$

- Wprowadzamy układ współrzędnych sferycznych w kierunku wektora $\vec{q}$ (ustalonego).

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta'$$

$$d\tau = r^2 dr \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\int V(r) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau = \int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \int V(r) r^2 dr \cdot \int_0^\pi e^{i\frac{q}{\hbar} r \cos \theta'} \sin \theta' d\theta'$$



- i podstawiamy: $x = \frac{i}{\hbar} qr \cos \theta'$

$$dx = -\frac{i}{\hbar} qr \sin \theta' d\theta' \quad , \text{ co daje nam:}$$

$$\int V(r) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau = -2\pi \cdot \int V(r) r^2 dr \cdot \int_{\frac{i}{\hbar} qr}^{-\frac{i}{\hbar} qr} e^x \frac{\hbar}{iqr} dx$$

Przybliżenie Borna dla potencjału centralnego

$$\begin{aligned}
 \dots &= -2\pi \cdot \int V(r) r^2 dr \cdot \int_{\frac{i}{\hbar}qr}^{-\frac{i}{\hbar}qr} e^x \frac{\hbar}{iqr} dx = 2\pi \cdot \int_0^\infty rV(r) dr \frac{\hbar}{iq} \left[e^{\frac{i}{\hbar}qr} - e^{-\frac{i}{\hbar}qr} \right] \\
 &= 4\pi \cdot \int_0^\infty rV(r) dr \frac{\hbar}{q} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}qr} - e^{-\frac{i}{\hbar}qr}}{2i} = \int_0^\infty V(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr
 \end{aligned}$$

$\swarrow$ $r^2 \sin \frac{qr}{\hbar} / \frac{qr}{\hbar}$

- Ostatecznie, amplituda rozpraszania na potencjale centralnym :

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr$$

Uwaga: w przybliżeniu Borna zakładamy, że $T^C \gg V$.

Przybliżenie Borna dla rozpraszania na potencjale Coulomba

- Ogólny wzór:
$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr$$

zastosujemy dla potencjału:
$$V(r) = \frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{r}$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{r} \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr = \frac{-2\mu \alpha c Z_1 Z_2}{q} \int_0^\infty \sin \frac{qr}{\hbar} dr$$

- Formalnie $\int_0^\infty \sin x dx$ jest nieokreślone. Spróbujemy to obejść poprzez zamianę:

$$\int \sin bx dx \rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \int \sin bx e^{-x/a} dx, \text{ gdzie przeprowadzimy } a \rightarrow \infty. \text{ Mamy więc:}$$

$$f(\theta) = -\frac{2\mu \alpha c Z_1 Z_2}{q} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sin \frac{qr}{\hbar} e^{-\frac{r}{a}} dr$$

- Wynik całki jest stabilizowany.
$$\int \sin \frac{qr}{\hbar} e^{-\frac{r}{a}} dr = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\hbar^2}} \left(-\frac{1}{a} \sin \frac{qr}{\hbar} - \frac{q}{\hbar} \cos \frac{qr}{\hbar} \right)$$

Przybliżenie Borna dla rozpraszania na potencjale Coulomba

- Dla naszej całki oznaczonej:

$$\int_0^{\infty} \sin \frac{qr}{\hbar} e^{-\frac{r}{a}} dr = \left[\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\hbar^2}} \left(-\frac{1}{a} \sin \frac{qr}{\hbar} - \frac{q}{\hbar} \cos \frac{qr}{\hbar} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\hbar^2}} \frac{q}{\hbar}$$

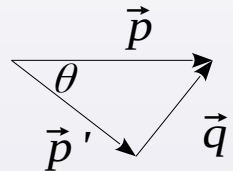
- Następnie granica: $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\hbar^2}} \frac{q}{\hbar} = \frac{\hbar}{q}$

- Wracamy do amplitudy rozpraszania:

$$f(\theta) = -\frac{2\mu \alpha c Z_1 Z_2}{q} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \sin \frac{qr}{\hbar} e^{-\frac{r}{a}} dr = -\frac{2\mu \alpha c Z_1 Z_2 \hbar}{q} = -\frac{2\mu \alpha c Z_1 Z_2 \hbar}{q^2}$$

- Rozpraszanie Rutherforda jest procesem elastycznym $\rightarrow |\vec{p}| = |\vec{p}'|$. Z tw. cosinusów:

$$q^2 = p^2 + p^2 - 2pp \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



- Przekrój czynny: $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = |f(\theta)|^2 = \left(\frac{2\mu \alpha c Z_1 Z_2 \hbar}{4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha \hbar c Z_1 Z_2}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ ✓

Przybliżenie Borna dla rozpraszania na kulistej studni V

- Amplituda rozpraszania dla potencjału centralnego:
$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr$$

- Wyznaczmy ją dla kulistej studni potencjału:
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{dla } r \leq R_0 \\ 0 & \text{dla } r > R_0 \end{cases}$$

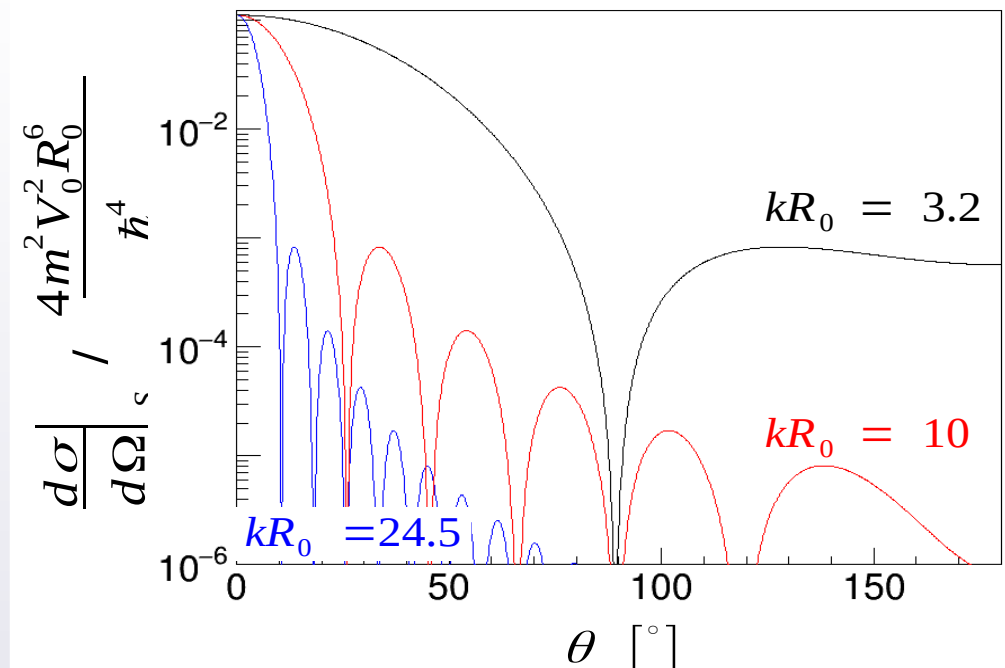
$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2} \int_0^{R_0} \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr = \frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2} \cdot 4\pi \cdot \frac{\hbar^3}{q^3} \int_0^{\frac{qR_0}{\hbar}} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \frac{qr}{\hbar} d\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \\ &= \frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi\hbar^3}{q^3} \int_0^{\frac{qR_0}{\hbar}} x \sin x dx = \frac{2\mu V_0 \hbar}{q^3} \left(\left[-x \cos x \right]_0^{\frac{qR_0}{\hbar}} + \int_0^{\frac{qR_0}{\hbar}} \cos x dx \right) \\ &= \frac{2\mu V_0 \hbar}{q^3} \left(-\frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} + \sin \frac{qR_0}{\hbar} \right) \end{aligned}$$

Przybliżenie Borna dla rozpraszania na kulistej studni V

- Przekrój czynny: $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = |f(\theta)|^2 = \left[\frac{2\mu V_0 \hbar}{q^3} \right]^2 \cdot \left[\sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right]^2$
 - Wróćmy do pierwotnych zmiennych: $q = 2p \sin \frac{\theta}{2} = 2\hbar k \sin \frac{\theta}{2}$
- Otrzymujemy: $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = \frac{4\mu^2 V_0^2 R_0^6}{\hbar^4} \frac{\left[\sin \left(2kR_0 \sin \frac{\theta}{2} \right) - 2kR_0 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \left(2kR_0 \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2}{\left(2kR_0 \sin \frac{\theta}{2} \right)^6}$

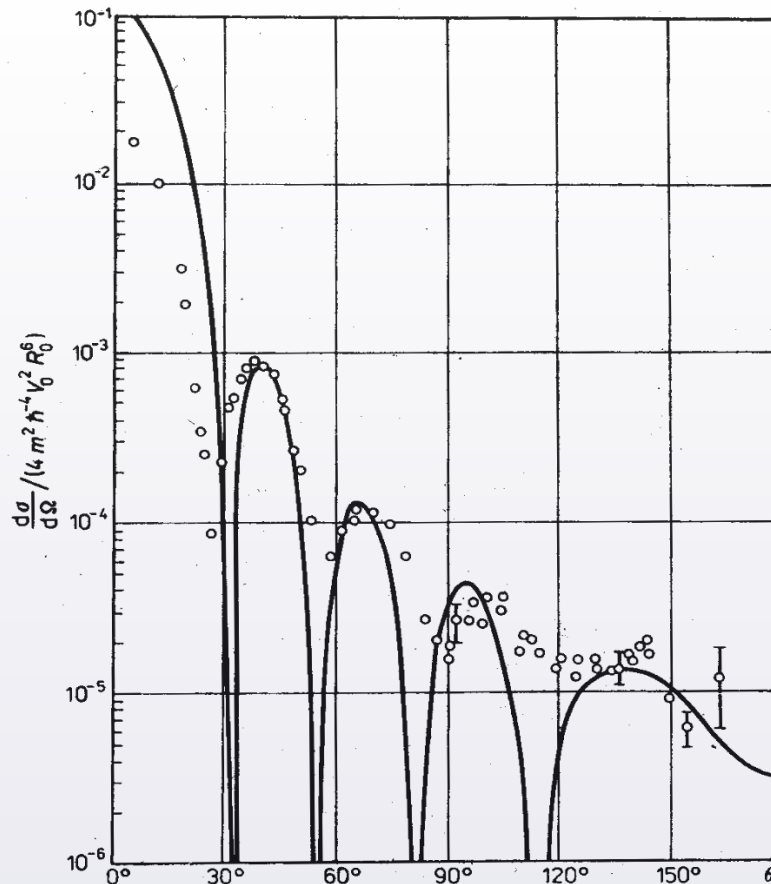
► Rozproszenie na potencjale kulistym prowadzi w przybliżeniu Borna do:

- różniczkowego przekroju czynnego z silnymi minimami i maksimami (jak w dyfrakcji na szczelinie)
- przekroju monotonicznie malejącego z pędem (energią kin.) jonu wiązki.



Przybliżenie Borna – porównanie z danymi doświadczalnymi

- Eksperyment: rozproszenie neutronów ($T = 14,5 \text{ MeV}$) na Pb. Badanie zależności kątowej.
- Krzywa: dopasowanie $|d\sigma/d\Omega|$ dla studni kulistej w ramach przybliżenia Borna. Najlepsze dopasowanie $\rightarrow$ daje $kR_0 = 8,35$.



Rys. 59. Rozkład kątowy w przypadku rozpraszania elastycznego na potencjale prostokątnym w przybliżeniu Borna z falami płaskimi opisanego równaniem (4.82); $kR_0 = 8,35$. Punkty pomiarowe odnoszą się do rozpraszania neutronów o energii 14,5 MeV na jądrach Pb (patrz też rys. 115); krzywa teoretyczna i obserwowana są dopasowane w drugim maksimum

nb. $pc = 165 \text{ MeV} = (\hbar k)c$

$$k = \frac{pc}{\hbar c} = \frac{165 \text{ MeV}}{197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} = 0.84 \text{ fm}^{-1}$$

$$R_0 = 8.35/k = 10.0 \text{ fm}$$

Wnioski:

- Rzeczywisty potencjał: bardziej złożony
- Absorpcja: pominięta
- Pomimo to, główne cechy struktury – opisane!

Dokładniejsza metoda:

Distorted Wave Born Approximation (DWBA)

Przybliżenie Borna – rozkład przestrzenny jądra

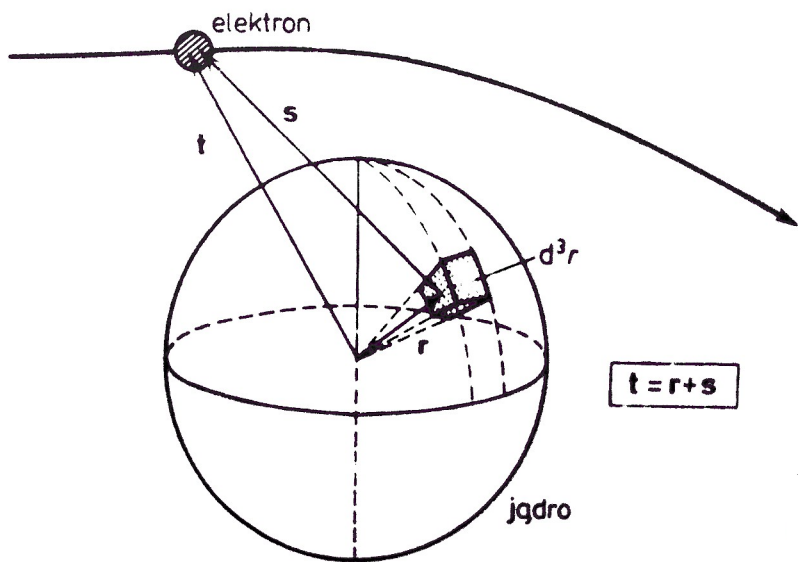
- Podejście Borna można użyć do rozciągniętego (niezananego) rozkładu ładunku. Rozpraszając elektrony (leptony) na jądrze, próbujemy rozkład protonów $\rho(\vec{r})$, założymy: centralny.

Wzór $f(\theta) = - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d\tau$ trzeba zmodyfikować: $V(\vec{r}) \rightarrow \int dV$.

- Element d^3r ma ładunek $Ze \cdot \rho(r) d^3r$. Jego odległość od elektronu opisujemy przez $\vec{s}$.

Wkład do potencjału od tego elementu: $dV = \alpha \hbar c \frac{1 \cdot Z \rho(r)}{s} d^3r$

Trzeba pokałkować po $d\tau$ (przestrzeń, gdzie jest funkcja falowa) oraz po d^3r (rozkład ładunku) :



$$f(\theta) = - \frac{\mu \alpha \hbar c Z}{2\pi\hbar^2} \int \frac{1}{s} \rho(r) d^3r \int e^{i\frac{\vec{q}\vec{t}}{\hbar}} d^3t$$

i ponieważ $\vec{t} = \vec{r} + \vec{s}$, to przeszerujemy:

$$f(\theta) = - \frac{\mu \alpha \hbar c Z}{2\pi\hbar^2} \int \rho(r) e^{i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}} d^3r \int \frac{1}{s} e^{i\frac{\vec{q}\vec{s}}{\hbar}} d^3s$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr}_{\text{Form factor } F(q)} \underbrace{\frac{-2\mu\alpha c Z}{q} \int_0^\infty \sin \frac{qs}{\hbar} ds}_{\text{Coulomb } f_c(q)}$$

Przybliżenie Borna – rozkład przestrzenny jądra

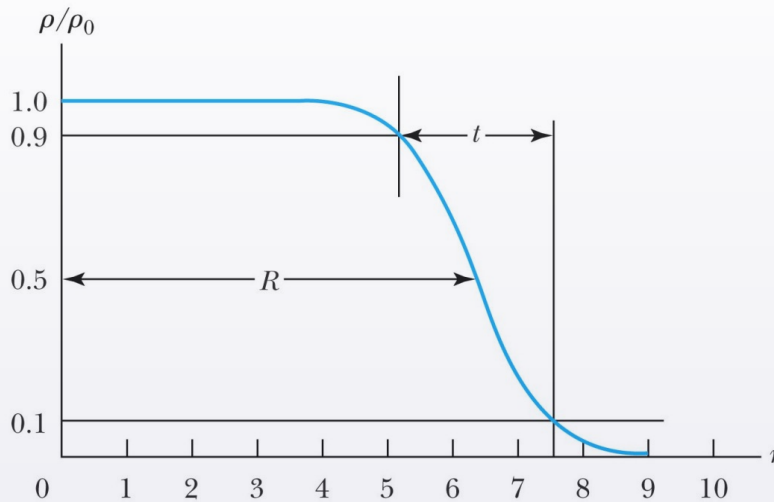
- Mając

$$f(\theta) = \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin \frac{qr}{\hbar}}{\frac{qr}{\hbar}} 4\pi r^2 dr \quad \frac{-2\mu\alpha c Z}{q} \int_0^\infty \sin \frac{qs}{\hbar} ds = F(q) \cdot f_{\text{Coulomb}}(q)$$

dostajemy: $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_s = |f(\theta)|^2 = F^2(q) \cdot \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Ruth}}$

- Najprostszy rozważany kształt rozkładu ładunku, opisujący osłabienie gęstości na brzegu: **rozkład Fermiego**

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-r_0}{d}\right) + 1}$$

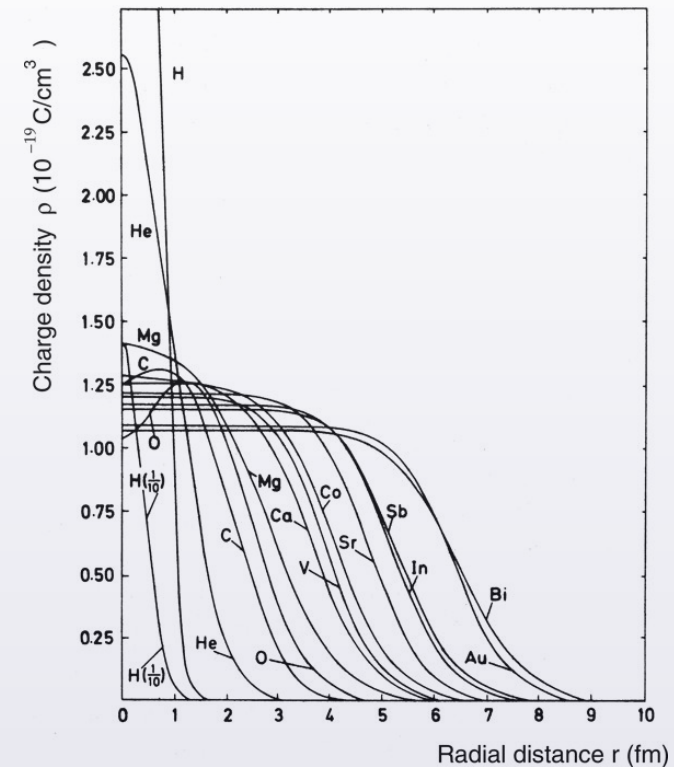


Dla $r = R$, rozkład spada do $1/2$ wartości maksymalnej.
 Parametr d reguluje spadek,
 tak że na odcinku o szerokości
 $t = 4.4 d$, rozkład spada z 90% do 10%.

- Tak wyglądają rozkłady dopasowane do danych z rozpraszania e^- na jądrach, przy założeniu rozkładu Fermiego.

Robert Hofstadter
(1957)

Uwaga:
 wyniki historyczne,
 wiele udoskonaleń.



R. Hofstadter, Ann. Rev. Nucl. Sci. 7, 231 (1957)

Prawo równowagi szczegółowej

- Rozważmy przekrój czynny na proces $A + a \rightarrow B + b$ (czyli: $\sigma_{1 \rightarrow 2}$), niekoniecznie elastyczny.
Przykład: $n + {}^{11}\text{B} \rightarrow d + {}^{10}\text{Be}$.

Rozważmy następnie przekrój czynny na proces odwrotny, $B + b \rightarrow A + a$ (czyli: $\sigma_{2 \rightarrow 1}$).
Przykład: $d + {}^{10}\text{Be} \rightarrow n + {}^{11}\text{B}$.

Pytanie: czy $\sigma_{1 \rightarrow 2}$ i $\sigma_{2 \rightarrow 1}$ są jakoś związane ze sobą?

- Przypomnijmy wyrażenia na przekrój czynny (wg Złotej Reguły Fermiego) i na gęstość stanów:

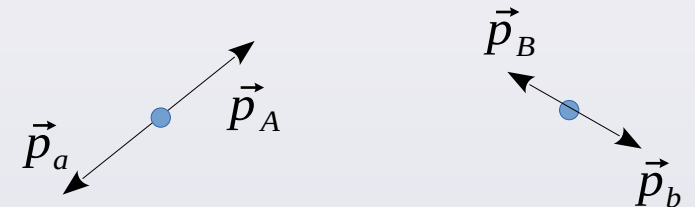
$$\frac{d\sigma(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{1}{j_{\text{in}}} \frac{dW(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{1}{v_{\text{in}}/\tau} \frac{2\pi}{\hbar} |U(1 \rightarrow 2)|^2 \frac{d^2 n}{dE_{\text{końc}} d\Omega}$$

$$dn = \frac{\tau \cdot p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 n}{dE_{\text{końc}} d\Omega} = \frac{\tau \cdot p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE_{\text{końc}}}$$

- Obliczmy $dE_{\text{końc}}$:

$$dE_{\text{końc}} = dE_B + dE_b = \left| E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow dE = \frac{p}{m} dp \right| = \frac{p_B dp_B}{m_B} + \frac{p_b dp_b}{m_b}$$

- W układzie CM: $\vec{p}_A + \vec{p}_a = \vec{0} = \vec{p}_B + \vec{p}_b$



Prawo równowagi szczegółowej

$$dE_{\text{końc}} = dE_B + dE_b = \frac{p_B dp_B}{m_B} + \frac{p_b dp_b}{m_b} = \left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_b} \right) p_b dp_b = \frac{p_b dp_b}{\mu_{\text{końc}}}$$

- Wstawiamy do gęstości stanów:

$$\frac{d^2 n}{dE_{\text{końc}} d\Omega} = \frac{\tau \cdot p_b^2}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\mu_{\text{końc}}}{p_b} = \frac{\tau}{(2\pi\hbar)^3} p_b \mu_{\text{końc}}$$

- Przekrój czynny na proces $1 \rightarrow 2$:

$$\frac{d\sigma(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{\tau}{v_i} \frac{2\pi}{\hbar} |U(1 \rightarrow 2)|^2 \frac{\tau \cdot p_b \mu_{\text{końc}}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(1 \rightarrow 2)|^2 \mu_{\text{pocz}} \mu_{\text{końc}} \frac{p_b}{p_a}$$

- Rozważmy teraz proces odwrotny ($B + b \rightarrow A + a$). Przekrój czynny:

$$\frac{d\sigma(2 \rightarrow 1)}{d\Omega} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(2 \rightarrow 1)|^2 \mu_{\text{pocz}} \mu_{\text{końc}} \frac{p_a}{p_b}$$

- Mamy więc:

$$\frac{d\sigma(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(1 \rightarrow 2)|^2 \mu_{\text{pocz}} \mu_{\text{końc}} \frac{p_b}{p_a}$$

$$\frac{d\sigma(2 \rightarrow 1)}{d\Omega} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(2 \rightarrow 1)|^2 \mu_{\text{pocz}} \mu_{\text{końc}} \frac{p_a}{p_b}$$

Prawo równowagi szczegółowej

- Mamy więc:

$$\frac{d\sigma(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(1 \rightarrow 2)|^2 \mu_{pocz} \mu_{końc} \frac{p_b}{p_a}$$
$$\frac{d\sigma(2 \rightarrow 1)}{d\Omega} = \frac{\tau^2}{4\pi^2 \hbar^3} |U(2 \rightarrow 1)|^2 \mu_{pocz} \mu_{końc} \frac{p_a}{p_b}$$

- Jeżeli operator U jest niezmienniczy względem odwrócenia czasu (symetria T), to zachodzi:

$$|U(1 \rightarrow 2)|^2 = |U(2 \rightarrow 1)|^2$$

(oddziaływania silne mają tę cechę).

- i otrzymujemy:

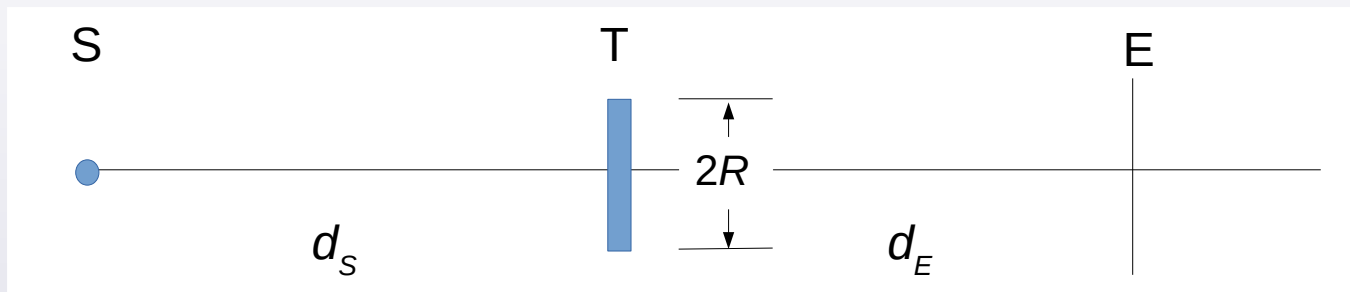
$$\frac{\sigma(1 \rightarrow 2)}{\sigma(2 \rightarrow 1)} = \left(\frac{p_b}{p_a} \right)^2 \quad \textbf{(Prawo równowagi szczegółowej)}$$

- W naszych rozważaniach pomijaliśmy możliwość, że każda z cząstek ma spin I . Wówczas liczba możliwych stanów w kanale końcowym ($1 \rightarrow 2$) jest większa o czynniki degeneracji, typu: $(2I_B + 1) \cdot (2I_b + 1)$. Pełniejsza postać powyższego prawa:

$$\frac{\sigma(1 \rightarrow 2)}{\sigma(2 \rightarrow 1)} = \left(\frac{p_b}{p_a} \right)^2 \frac{(2I_B + 1)(2I_b + 1)}{(2I_A + 1)(2I_a + 1)}$$

Dyfrakcja Fresnela i Fraunhofera

- Gdy przyjmiemy model silnej absorpcji, cząstki padające z $b < b_{gr}$ ulegają absorpcji. Analogia: rozpraszanie fal optycznych na kolistej przesłonie. Przy nieco wyższych prędkościach może zajść dyfrakcja: Fresnela lub Fraunhofera. Rozważania dotyczą przypadku, gdy $\lambda \ll R$, lub inaczej $kR \gg 1$.



1. Źródło światła i obraz są niedaleko od przesłony (ugięcie **Fresnela**)

$$d \gtrsim R \quad (d: \text{każda z } d_E, d_S)$$

Warunek na dyfrakcję typu Fresnela:

$$(kR) \left(\frac{R}{d} \right) \gtrsim 1$$

2. Źródło światła i obraz są bardzo daleko od przesłony (ugięcie **Fraunhofera**)

$$d \gg R \quad (d: \text{najmniejsza z } d_E, d_S)$$

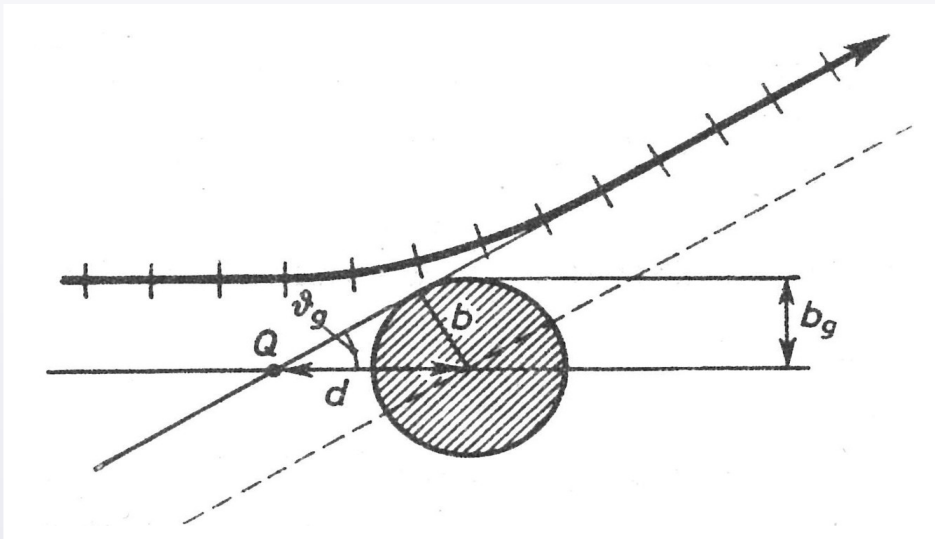
Warunek na dyfrakcję typu Fraunhofera:

$$(kR) \left(\frac{R}{d} \right) \ll 1$$

Dyfrakcja Fresnela

- Gdy możliwe jest silne ugięcie fali (źródło pozorne Q blisko przesłony).

Tu: gdy jądra wiązki są silnie odchylone przez pole Coulombowskie, np. gdy E wiązki nie jest za wysoka)

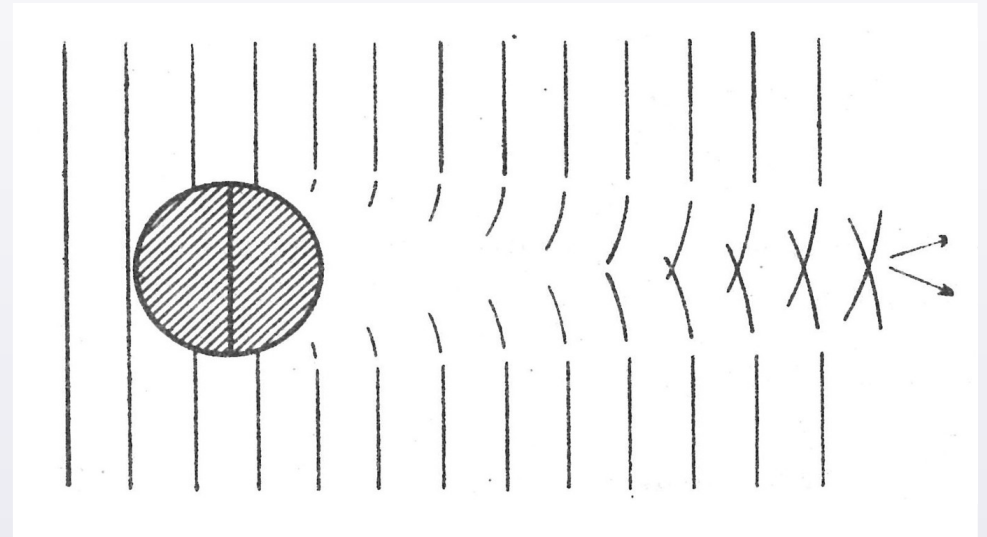


$$\sin \theta_{gr} = \frac{1}{2 \frac{T_{CM}}{E_C} - 1}$$

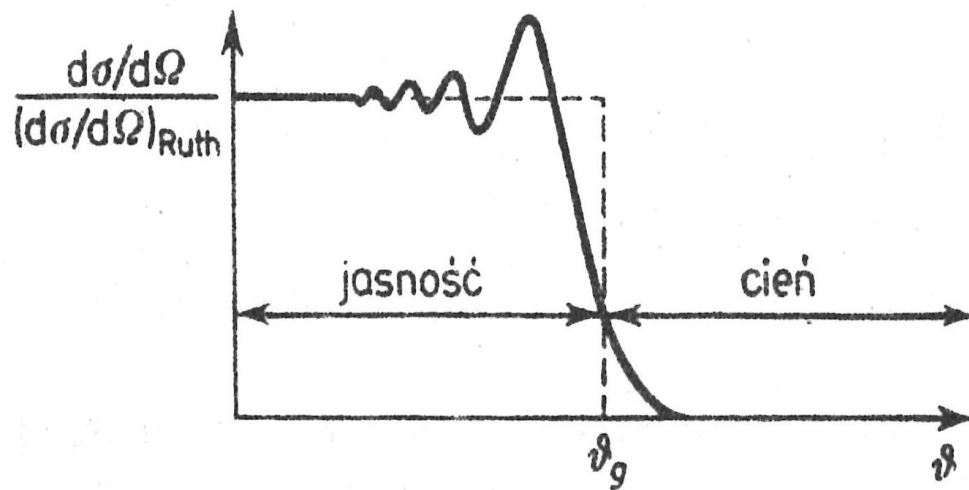
Dyfrakcja Fraunhofera

- Gdy fala jest słabo odchylona

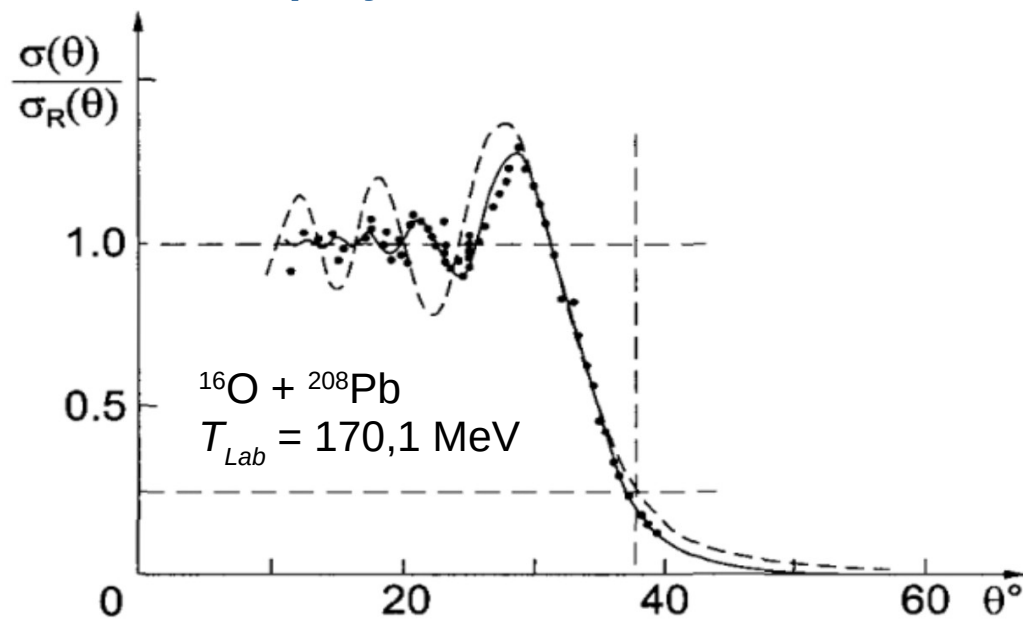
Tu: jądra wiązki są słabo odchylone przez pole Coulombowskie, np. gdy E wiązki jest wysoka.



Dyfrakcja Fresnela

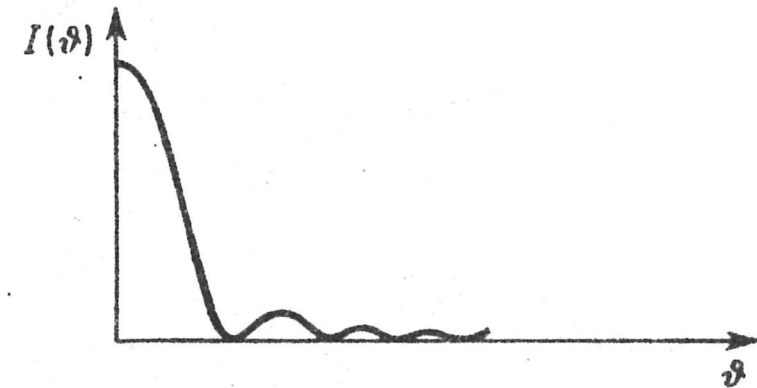


Eksperyment vs teoria

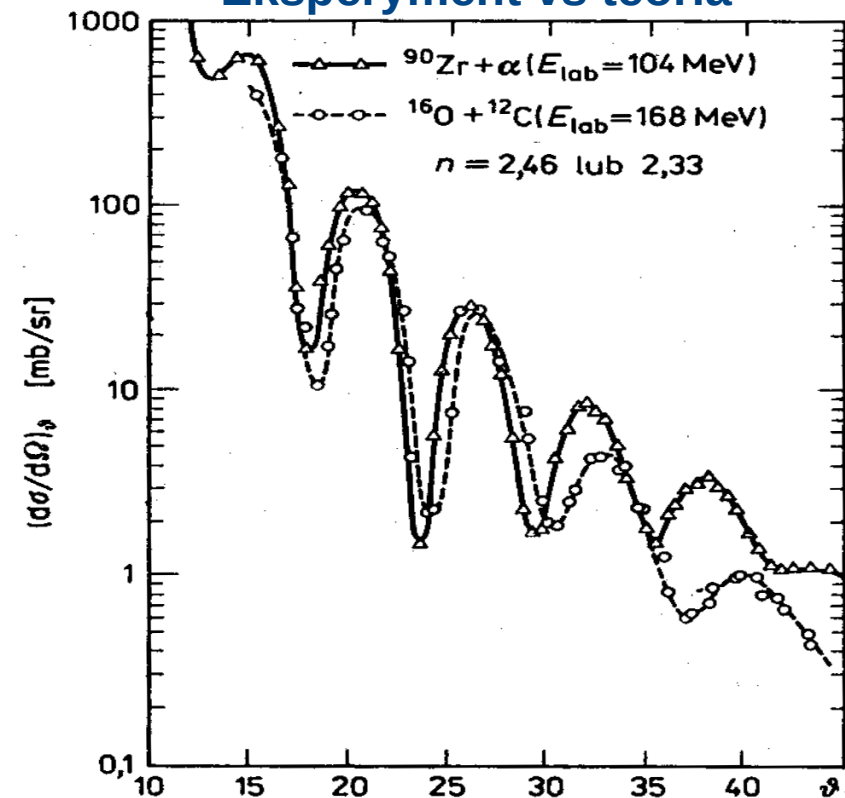


W. Frahn, Ann. of Phys. 72, 524 (1972)

Dyfrakcja Fraunhofera



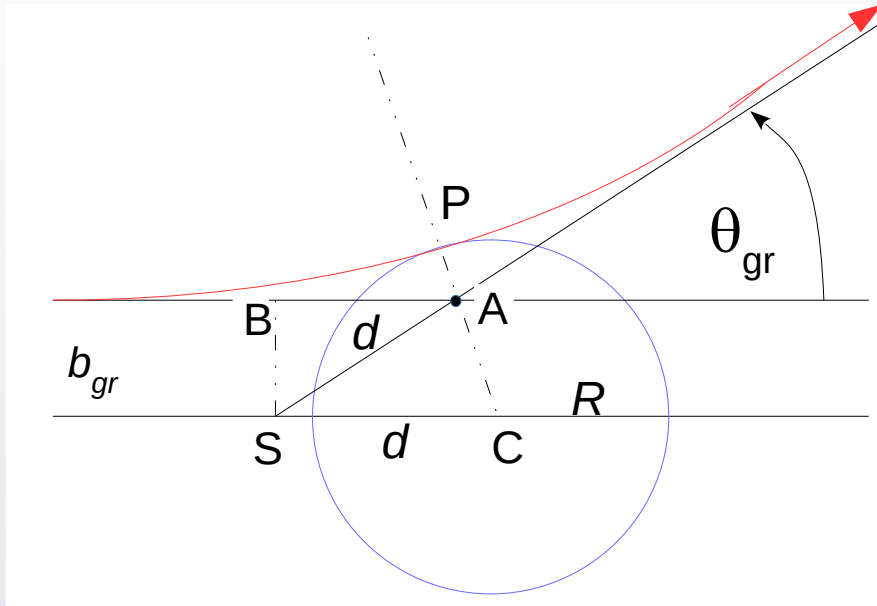
Eksperyment vs teoria



W. Frahn, Ann. of Phys. 72, 524 (1972)

Dyfrakcja Fresnela i Fraunhofera

- ▶ Rozpatrzmy trajektorię "grazing".
Cząstki rozproszone pod kątem θ_{gr} zdają się pochodzić ze źródła wirtualnego S.



Rozważając kąty, otrzymujemy:

$$|\text{SC}| = |\text{SA}| = d$$

Rozważając trójkąt BAS, mamy:

$$b_{qr} = d \sin \theta_{qr}$$

- Założyliśmy na początku $\lambda \ll R$ ($kR \gg 1$).
Przy dużych T wiązki pole coulombowskie prawie nie odchyła pocisku do punktu zetknięcia się jąder.

Wówczas $b_{gr} \approx R$ – i pierwszy warunek $kb_{gr} \gg 1$.

Wyrażenia przy warunkach na dyfrakcje można przepisać jako:

$$\left\{ \begin{array}{l} kR \approx kb_{gr} = l_{gr} \gg 1 \\ (kR) \left(\frac{R}{d} \right) \approx (kb_{gr}) \left(\frac{b_{gr}}{d} \right) = (kb_{gr}) \sin \theta_{gr} = l_{gr} \sin \theta_{gr} \end{array} \right.$$

Moment pędu: $\hbar l = L = pb = (\hbar k)b$

Dyfrakcja Fresnela i Fraunhofera



Otrzymujemy więc warunki na dyfrakcję Fraunhofera / Fresnela wyrażone w “wielkościach jądrowych” :

- Fresnel: $l_{gr} \sin \theta_{gr} \gtrsim 1$
- Fraunhofer: $l_{gr} \sin \theta_{gr} \ll 1$



Przypomnijmy sobie teraz wzory na L_{gr} i $\sin \theta_{gr}$:

$$L_{gr} = R_C \sqrt{2\mu E_C} \sqrt{\frac{T^C}{E_C} - 1} \quad \sin \frac{\theta_{gr}}{2} = \frac{1}{2 \frac{T^C}{E_C} - 1}$$



Przy ustalonej energii kinetycznej T^C , można rozwinąć wyrazy z A oraz Z. Ogólny wynik:

- Dyfrakcja Fresnela , gdy zderzane są ciężkie jony ,
- Dyfrakcja Fraunhofera , gdy zderzane są lekkie jony .

Rozwijając $\sin \theta_{gr}$ wokół 0, można też pokazać, że $(l_{gr} \sin \theta_{gr})$ maleje z T_{CM} .

Tak więc przy ustalonym układzie może zachodzić:

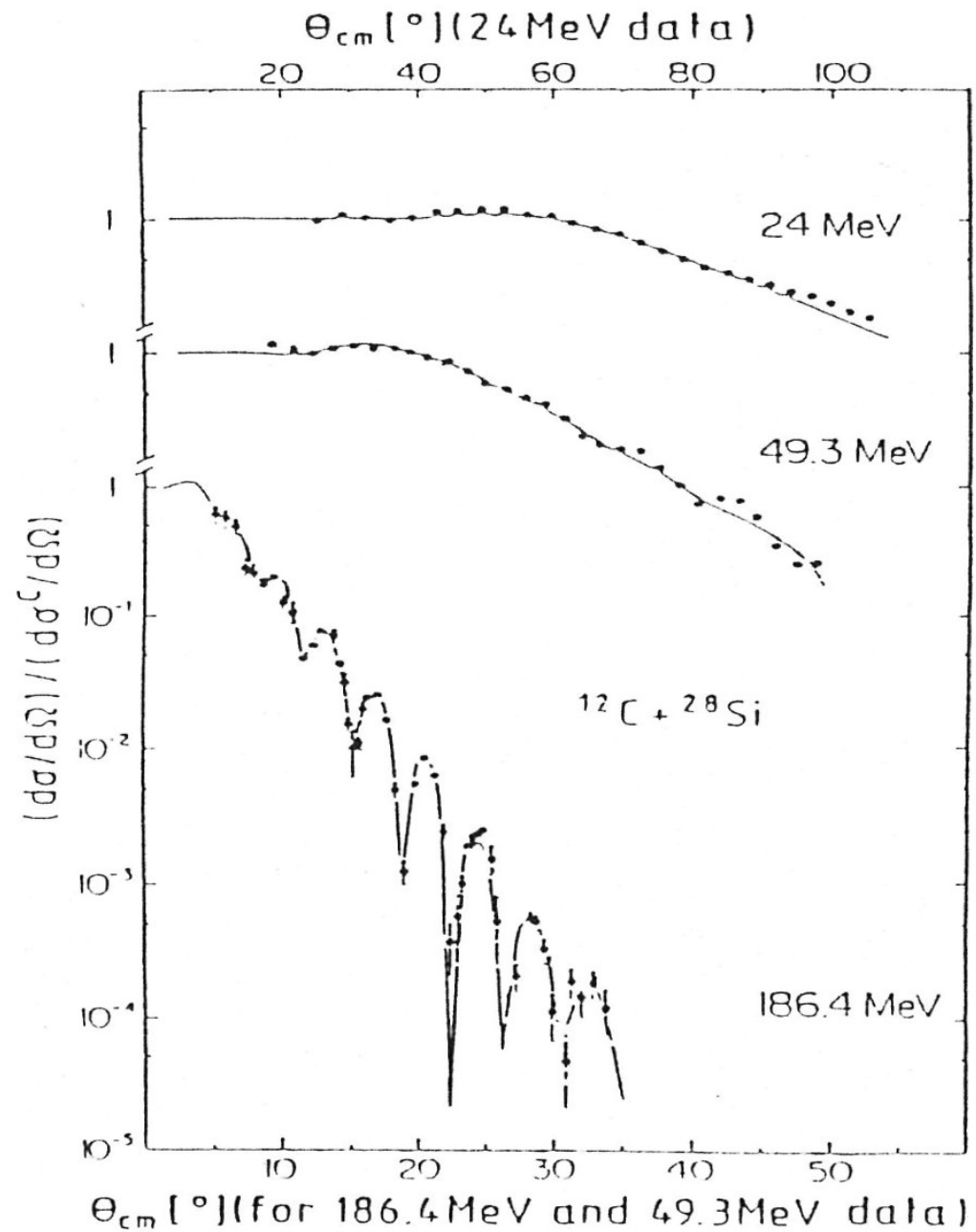
- Dyfrakcja Fresnela , gdy energia kinetyczna wiązki jest względnie niska
- Dyfrakcja Fraunhofera , gdy energia kinetyczna wiązki jest względnie wysoka.

► Wyniki rozpraszania

^{12}C na ^{28}Si

przy 3 energiach wiązki.

► Wzrost E wiązki powoduje przejście od dyfrakcji Fresnela do Fraunhofera



Obszar rezonansowy – rozproszenia i reakcje

- Całkowity przekrój czynny na oddziaływanie neutronu o niskiej energii z jądrami wykazuje:
 - silne, powtarzające się maksima
 - i towarzyszące im spadki.
- Z prawej strony: całkowity przekrój czynny dla $n + {}^{232}\text{Th}$ przy energiach ~ 300 eV (zależność od energii $T^\perp$).

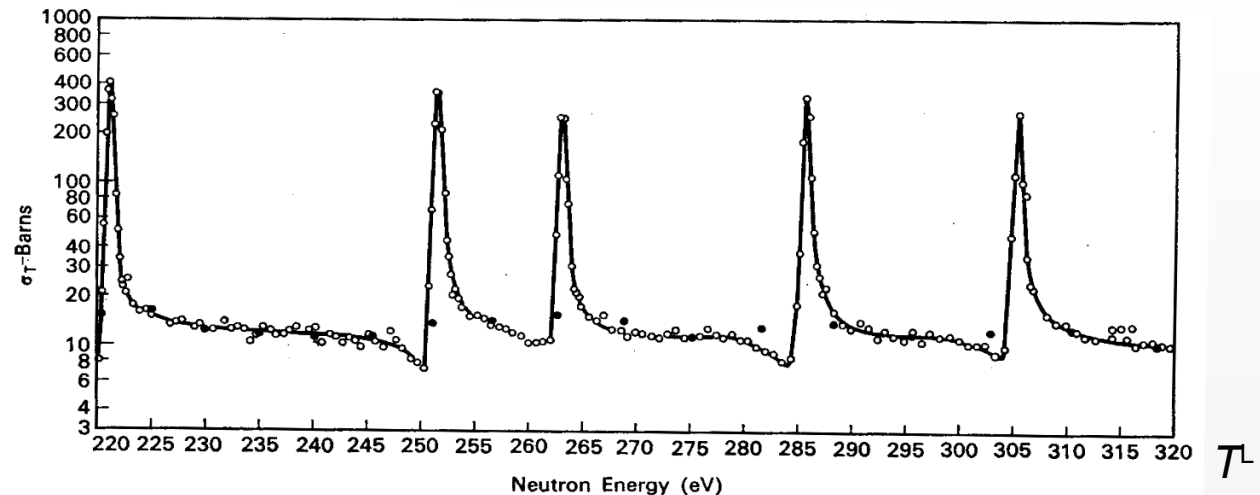
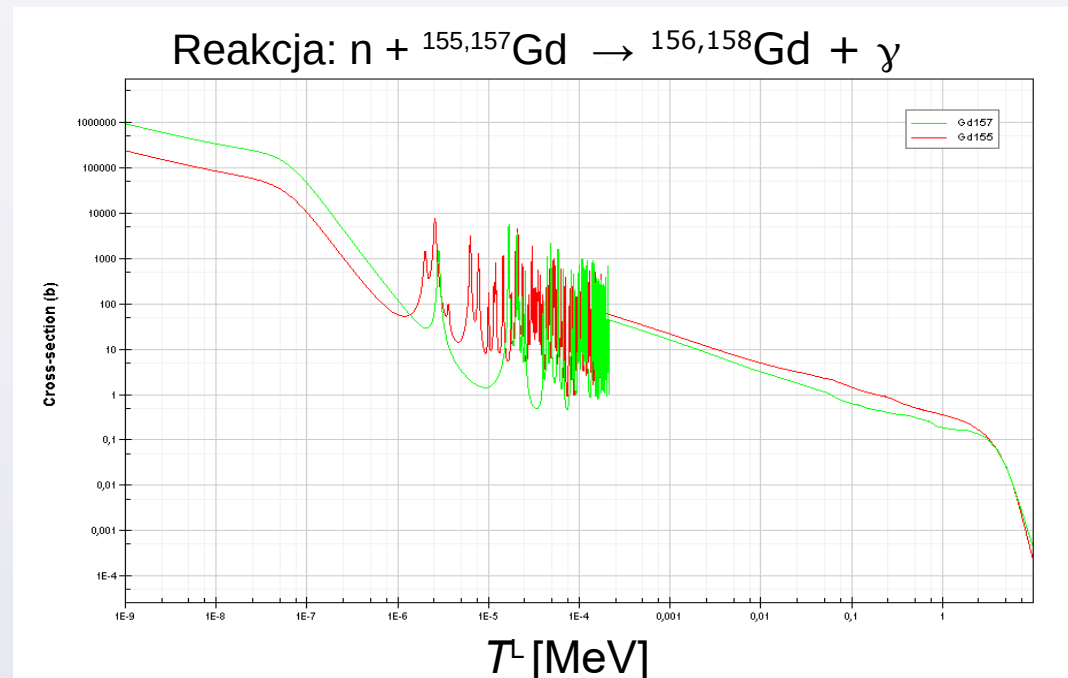


FIG. 2.1. The total cross-section for neutrons incident on Th^{232} as a function of incident energy between 220 eV and 320 eV (adapted from Stehn *et al.*, 1965).

- U dołu: przekrój czynny na wychwyt neutronu przez jądra Gd przy energiach $\sim 1 - 300$ eV (zależność od energii $T^\perp$).

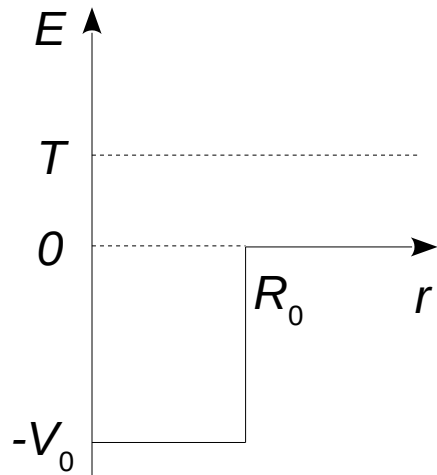


Czy w ramach modelu optycznego można wyjaśnić profil przekroju czynnego, posiadający wąskie maksimum?



Obszar rezonansowy – fala s

- Rozpatrzmy dla uproszczenia jądro kuliste, w którym panuje stały potencjał. Pada na nie niskoenergetyczny neutron ($l = 0$). Przytoczmy cz. radialną r . Schrödingera.



- Przy $u(r) = r R(r)$

Wewnątrz studni: $\frac{d^2 u}{dr^2} + \kappa^2 \cdot u = 0 \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m [E + V_0]}}{\hbar}$

Na zewnątrz: $\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 \cdot u = 0 \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

- Warunki ciągłości funkcji falowej i pochodnej przy $r = R_0$:

$$u_{\text{wewn}} \Big|_{r=R_0} = u_{\text{zewn}} \Big|_{r=R_0}$$

$$u'_{\text{wewn}} \Big|_{r=R_0} = u'_{\text{zewn}} \Big|_{r=R_0}$$

- Oba warunki można sprowadzić jednego, wprowadzając pochodną logarytmiczną.

$$\rho(r) = R_0 \left[\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right]_{r=R_0} = R_0 \left[\frac{d}{dr} \ln u(r) \right]_{r=R_0}$$

- Pochodna $\rho(r)$ kształtowana jest przez jądro: potencjał V_0 i promień R_0 .

Niech od strony studni $\rho(R_0) = \rho_0$. Dostajemy równanie: $\rho_0 = R_0 \left[\frac{1}{u_{\text{zewn}}} \frac{du_{\text{zewn}}}{dr} \right]_{r=R_0}$

Obszar rezonansowy – fala s

- Przytoczmy ogólną postać funkcji falowej na zewnątrz potencjału:

$$\psi_{\text{Total}}(\vec{r}) = \frac{A}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[e^{-i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} - \eta_l e^{i\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)} \right] P_l(\cos \theta)$$

Gdy ograniczamy ją do $l = 0$, wzór upraszcza się do:

$$\psi_{\text{zewn}}(r) = \frac{Ai}{2kr} \left[e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr} \right] \quad \Rightarrow \quad u_{\text{zewn}}(R_0) = \frac{Ai}{2k} \left[e^{-ikR_0} - \eta_0 e^{ikR_0} \right]$$

Warunek równości pochodnych logarytmicznych:

$$\rho_0 = R_0 \frac{-ike^{-ikR_0} - ik\eta_0 e^{ikR_0}}{e^{-ikR_0} - \eta_0 e^{ikR_0}}$$

Wyznaczymy stąd η_0 :

$$\rho_0 (e^{-ikR_0} - \eta_0 e^{ikR_0}) = R_0 (-ike^{-ikR_0} - ik\eta_0 e^{ikR_0})$$

$$\eta_0 (ik R_0 e^{ikR_0} - \rho_0 e^{ikR_0}) = -\rho_0 e^{-ikR_0} - ik R_0 e^{-ikR_0}$$



$$\eta_0 = \frac{\rho_0 + ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} e^{-i \cdot 2kR_0}$$

- Ważna własność: gdyby $\rho_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |\eta_0| = 1$. (spr.: $\left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = 1$)

Pamiętając, że $\sigma_{R,0} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_0|^2)$, otrzymujemy wtedy brak reakcji.

Tak więc reakcja zachodzi wyłącznie, gdy ρ_0 ma składnik urojony.

Obszar rezonansowy – rozpraszanie w fali s

- Rozpatrzmy przekrój czynny na rozpraszanie. Użyjmy wzoru na η_0 :

$$\begin{aligned}\sigma_{s,0} &= \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta_0|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| 1 - \frac{\rho_0 + ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} e^{-i \cdot 2kR_0} \right|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i \cdot 2kR_0} - \frac{\rho_0 + ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i \cdot 2kR_0} - \frac{\rho_0 - ikR_0 + 2ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} \right|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left| \underbrace{e^{i \cdot 2kR_0} - 1}_{A_{pot}} + \underbrace{\frac{-2ikR_0}{\rho_0 - ikR_0}}_{A_{res}} \right|^2\end{aligned}$$

- Przekrój czynny na rozpraszanie rozdzieliliśmy na 2 części:

A_{pot} – niezależną od ρ_0 (wartości pochodnej logarytmicznej na brzegu jądra)

A_{res} – zależną od ρ_0 .

A_{pot} nazywamy „amplitudą potencjałową”, a A_{res} – „amplitudą rezonansową”.

- Uwaga: przy rozpraszaniu neutronów o bardzo niskich energiach, A_{pot} jest zwykle małe.

Np. dla $n + {}^{155}\text{Gd}$ ($R_0 \approx 6.5 \text{ fm}$) i $T^C = 300 \text{ eV}$, $2kR_0 \approx 0.05 \rightarrow A_{pot} \approx 0$

Obszar rezonansowy – reakcja w fali s

- Rozważmy teraz przekrój czynny na **reakcję**: $\sigma_{R,0} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_0|^2)$

Współczynnik $\eta_0 = \frac{\rho_0 + ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} e^{-i \cdot 2kR_0}$ zależy od ρ_0 .

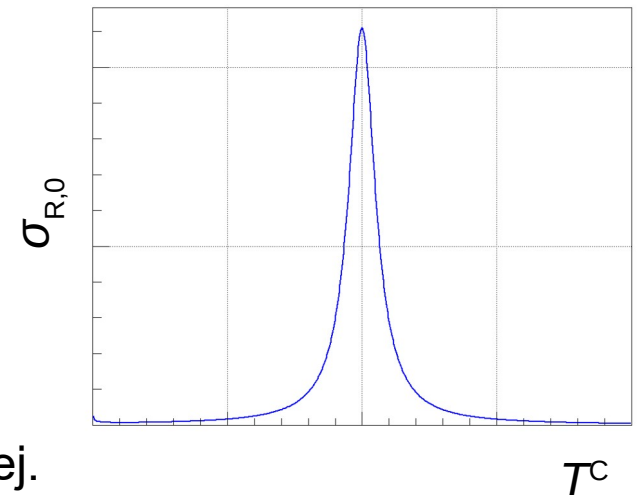
Aby zachodziła reakcja, ρ_0 musi mieć składnik urojony. Wydzielmy: $\rho_0 = \Re + i \Im$

Otrzymujemy:

$$|\eta_0|^2 = \left| \frac{\rho_0 + ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} e^{-i \cdot 2kR_0} \right|^2 = \left| \frac{\Re + i(\Im + kR_0)}{\Re + i(\Im - kR_0)} \right|^2 = \frac{\Re^2 + (\Im + kR_0)^2}{\Re^2 + (\Im - kR_0)^2}$$

Po wstawieniu wyniku do przekroju czynnego:

$$\sigma_{R,0}(k) = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{-4 \Im \cdot kR_0}{\Re^2 + (\Im - kR_0)^2}$$



- ➡ (1) Aby zachodziła reakcja, $\text{Im } \rho_0 < 0$.
- (2) Przekrój czynny na reakcję ma postać krzywej rezonansowej.

- W dotychczasowych wyprowadzeniach zakładaliśmy w domniemaniu $\rho_0 = \text{const.}$ To nie musi być spełnione (por. T. M-Kuckuk s. 226). Przyjmijmy, że w wąskim zakresie energii wokół rezonansu, zachowanie ρ_0 da się opisać jako liniowa zmiana z energią (T^c). 59

Obszar rezonansowy – ρ_0 zależna od energii

- Modelujemy ρ_0 , które w wąskim przedziale energii wokół rezonansu zmienia się z energią. Rozwiniemy zależność $\rho_0(T^C)$ wokół maksimum rezonansu E_R , do 1. wyrazu w szeregu Taylora:

$$\rho_0 = (T^C - E_R) \underbrace{\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T^C} \right)_{T^C=E_R}}_{-a} - i \cdot b = -(T^C - E_R) \cdot a - i \cdot b$$

- Rozważmy ponownie przekrój na **rozpraszanie**:

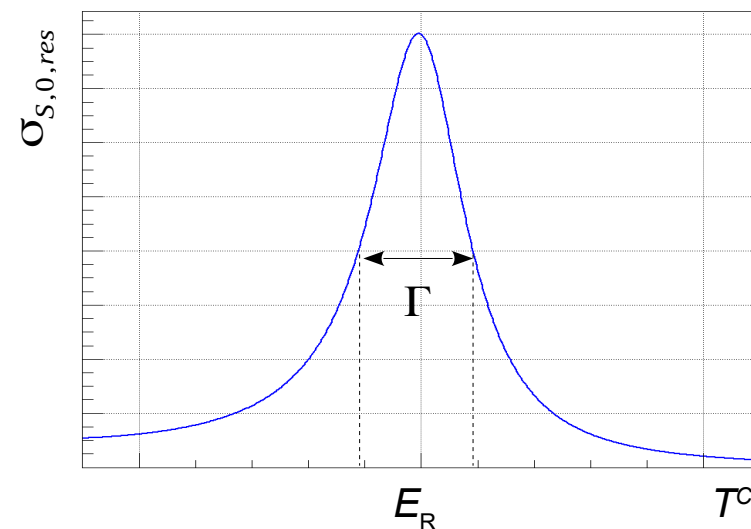
$$\sigma_{S,0} = \frac{\pi}{k^2} \left| \overbrace{e^{i2kR_0} - 1}^{A_{pot}} + \overbrace{\frac{-2ikR_0}{\rho_0 - ikR_0}}^{A_{res}} \right|^2$$

$$A_{res} = \frac{-2ikR_0}{\rho_0 - ikR_0} = \frac{-2ikR_0}{(T^C - E_R)(-a) - ib - ikR_0} = \frac{i \cdot \underbrace{2 \frac{kR_0}{a}}_{\Gamma_\alpha}}{(T^C - E_R) + i \underbrace{\left(\frac{b + kR_0}{a} \right)}_{\Gamma/2}} = \frac{i\Gamma_\alpha}{(T^C - E_R) - i \cdot \frac{\Gamma}{2}}$$

Nb. mamy: $\Gamma - \Gamma_\alpha = 2 \frac{b}{a} \equiv \Gamma_r$

- Pomińmy na chwilę część A_{pot} (np. dla $n + {}^{155}\text{Gd}$, $A_{pot} \approx 0$)
Nazwijmy $\sigma_{S,0,res}$ – przekrój pod nieobecność składnika A_{pot} .

$$\sigma_{S,0,res} = \frac{\pi}{k^2} A_{res} A_{res}^* = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_\alpha^2}{(T^C - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}$$



Otrzymujemy $1/k^2 \times$ **rozkład Breita–Wignera**

Obszar rezonansowy – ρ_0 zależna od energii

- Pozostańmy przy $\sigma_{S,0,res}$. Maksimum rezonansu może zachodzić przy różnych energiach neutronu. Gdy wstawimy $T^C = E_R$ i $\Gamma = \Gamma_\alpha$, dostaniemy wyrażenie na obwiednię $\sigma_{Res,0}$ dla możliwych rezonansów:

$$\sigma_{S,0,res}(T^C = E_R) = \frac{\pi}{k^2} \cdot 4 = 4\pi\lambda^2 = \frac{2\pi(\hbar c)^2}{mc^2} \cdot \frac{1}{T^C}$$

- Cofnijmy się teraz do wzoru łącznego na $\sigma_{S,0}$. Z dala od (wąskiego) rezonansu pozostaje tylko wkład od A_{pot} :

$$\sigma_{S,0,pot} = \frac{\pi}{k^2} |A_{pot}|^2 = \frac{\pi}{k^2} |e^{-i2kR_0} - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} [(\cos 2kR_0 - 1)^2 + (\sin 2kR_0)^2] = \frac{2\pi}{k^2} (1 - \cos 2kR_0)$$

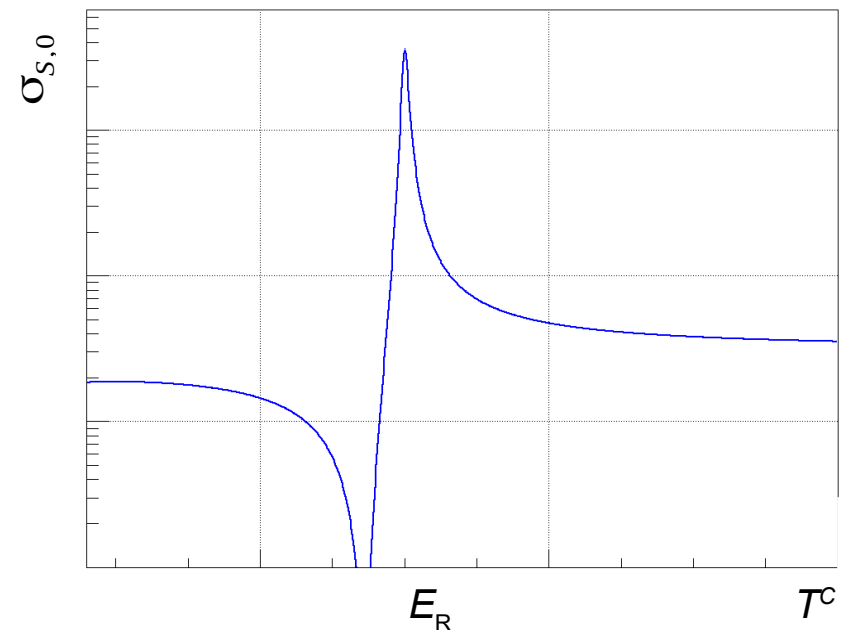
Ponieważ założyliśmy $l = 0$, gdzie $\lambda \gg R$, czyli $kR \ll 1$, to możemy przybliżyć: $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$



$$\sigma_{S,0,pot} \approx \frac{2\pi}{k^2} \frac{(2kR_0)^2}{2} = 4\pi R_0^2$$

Otrzymujemy wartość niezależną od energii T^C . Efektywnie odpowiada ona rozpraszaniu punktu materialnego na kuli o promieniu $2R_0$.

- Sumarycznie, przekrój czynny na rozpraszanie w fali s wygląda tak:



Obszar rezonansowy – ρ_0 zależna od energii

- Pozostaje nam jeszcze zająć się **reakcją** ($\sigma_{R,0}$). Przypomnijmy:

$$\sigma_{R,0}(k) = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{-4 \Im \cdot kR_0}{\Re^2 + (\Im - kR_0)^2}$$

Podstawiamy zależność: $\rho_0 = (T^C - E_R) \cdot (-a) - i \cdot b$

$$\sigma_{R,0}(k) = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{4b \cdot kR_0}{(T^C - E_R)^2 a^2 + (b + kR_0)^2} = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2kR_0}{a}}{(T^C - E_R)^2 + \underbrace{\left(\frac{b + kR_0}{a}\right)^2}_{\Gamma/2}}$$

Γ_r
 Γ_α

$$\Rightarrow \sigma_{R,0}(k) = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{\Gamma_r \cdot \Gamma_\alpha}{(T^C - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Otrzymujemy znów $1/k^2 \times$ **rozkład Breit-Wignera**

- Na koniec wyznaczmy **całkowity przekrój czynny** (na reakcję + rozproszenie z $A_{\text{pot}} \approx 0$):

$$\sigma_{T,0} \approx \sigma_{S,0} + \sigma_{R,0} = \frac{\pi}{k^2} \left[\frac{\Gamma_\alpha^2}{(T^C - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} + \frac{\Gamma_r \cdot \Gamma_\alpha}{(T^C - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \right] = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma \Gamma_\alpha}{(T^C - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$