I.2 Promieniowanie Ciała Doskonale Czarnego

CIAŁO DOSKONALE CZARNE (CDCz)

CDCz jest to takie ciało, którego zdolność absorpcyjna $a(\lambda, T)$ nie zależy od długości fali i wynosi 100%.

Promieniowanie CDCz o temperaturze T: interesuje nas promieniowanie e-m pozostające w równowadze z CDCz (dla każdej długości fali tyle samo promieniowania jest emitowane co absorbowane).

Prawo Stefana- Boltzmanna

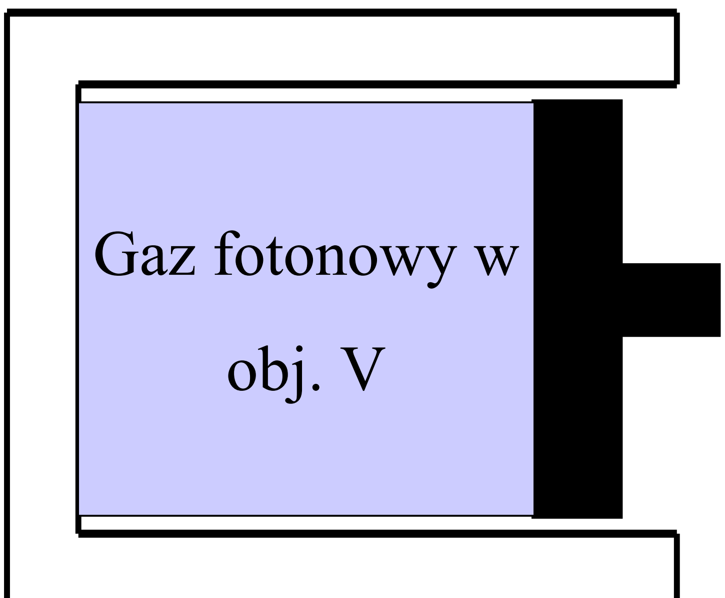
$$R(T) = \int d\lambda \cdot e(\lambda, T)$$

$$e(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T)$$

$$R(T) = \sigma \cdot T^4$$

Doświadczalnie odkrył Stefan 1879, wyprowadzenie: Boltzmann 1884

Temperatura T



Promieniowanie elektromagnetyczne zamknięte w naczyniu o lustrzanych ściankach, zmiennej objętości V i temperaturze T.

Wyprowadzenie Boltzmanna:

Wniosek z teorii Maxwella

Energia wewnętrzna: $U = Vu(T)$ **ciśnienie:** $p = u/3$

I zasada termodynamiki : $\cancel{d}Q = dU + pdV$

Entropia: $$dS = \frac{\cancel{d}Q}{T} = \frac{d(Vu) + pdV}{T} = \frac{udV + Vdu + \frac{1}{3}\cdot udV}{T} = \frac{\frac{4}{3}\cdot udV + V\frac{du}{dT}dT}{T},$$

Pamiętamy, że entropia jest funkcją stanu zmiennych (V, T) czyli jej różniczka jest zupełna:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT$$

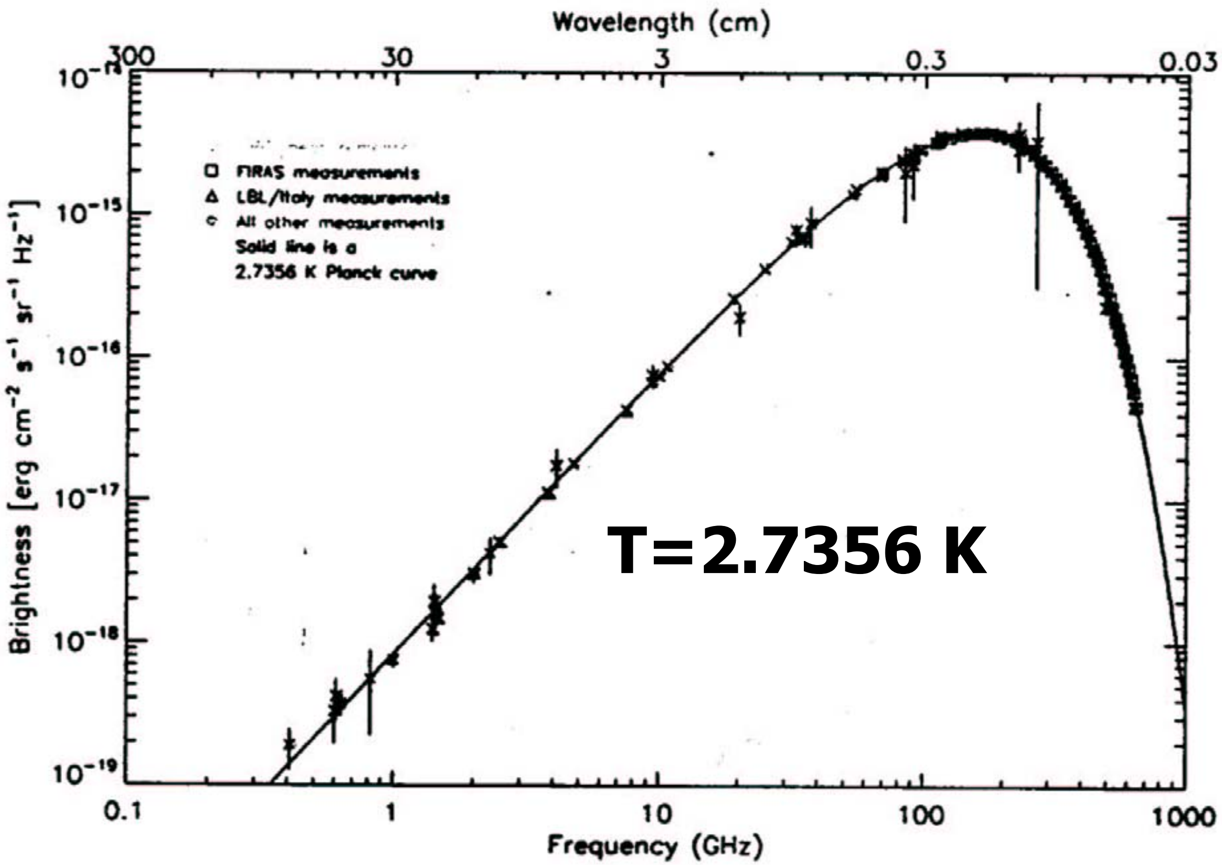
Z zupełności różniczki wynika równość 2-gich pochodnych: $$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4u}{3T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\frac{\partial u}{\partial T}\right),$$ **co daje nam:** $\frac{1}{3}\cdot\frac{du}{dT} = \frac{4}{3}\cdot\frac{u}{T}$, **czyli** $\frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T}.$

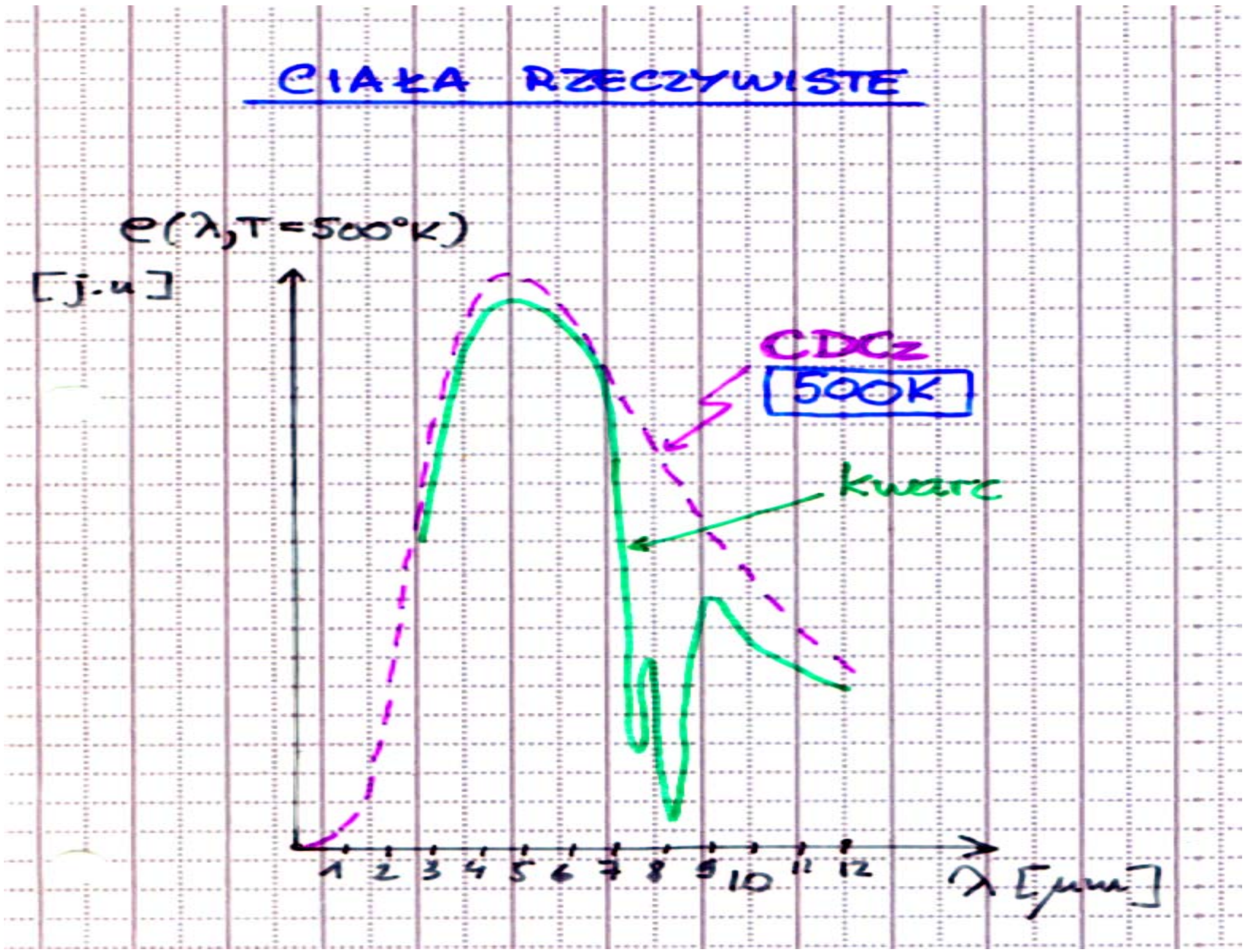
$$u(T) = \int_0^\infty d\lambda \cdot u(\lambda, T) = \sigma' \cdot T^4 \qquad R(T) = \int d\lambda \cdot \frac{c}{4} u(\lambda, T) = \sigma \cdot T^4$$

Przykład widma CDCz

Kos

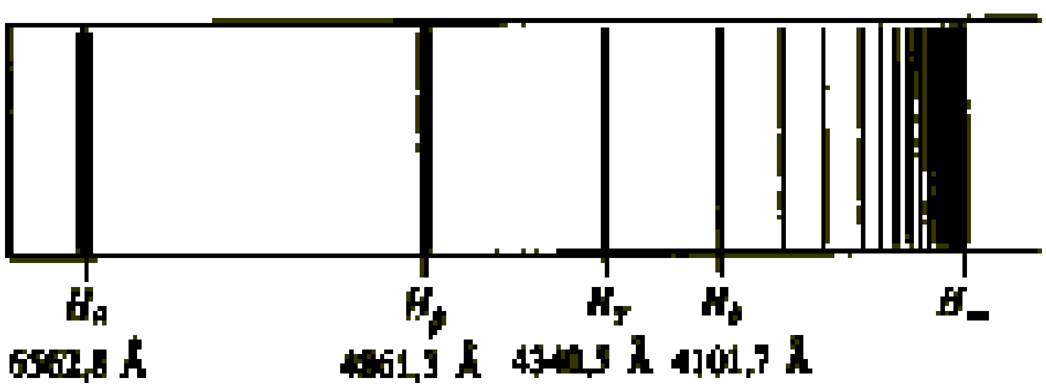


Zdolność emisyjna kwarcu



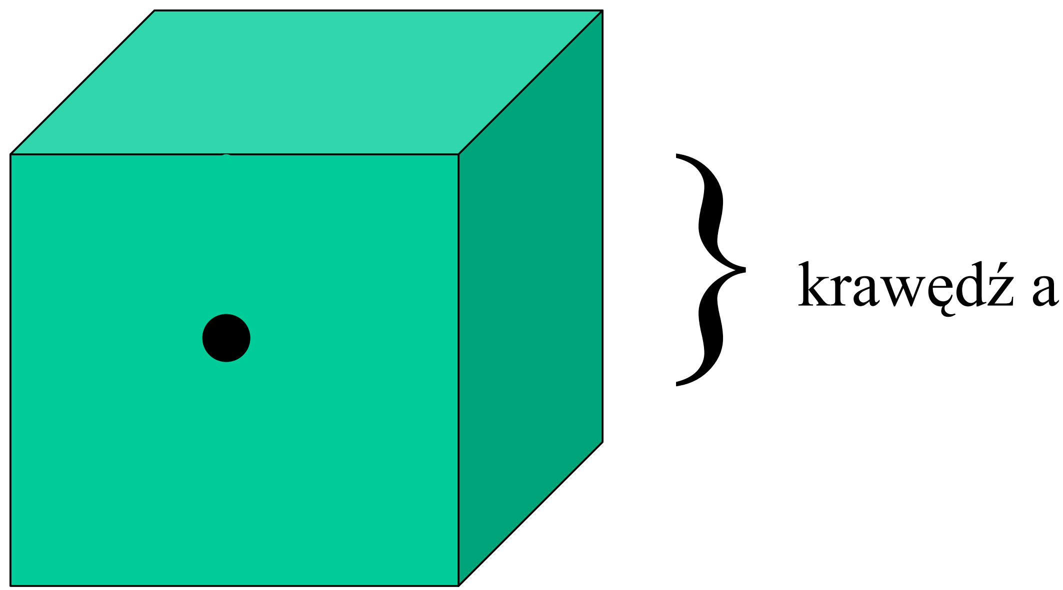
Pamiętajmy, że oprócz widm ciągłych ciała promieniują widma liniowe, pasmowe etc. Przykładem są serie widmowe atomów wodoru.

Seria Balmera czyli przejścia z różnych poziomów do poziomu o n=2



Model CDCz: wnęka z promieniowaniem

Wewnątrz wnęki – e-m fale stojące z węzłami na ściankach wnęki.



CDCz i wnioski z prawa Kirchhoffa

Z prawa Kirchhoffa:
e (λ, T) = f(λ, T) bo a (λ, T) =1 dla CDCz
Pamiętamy, że e=(c/4)·u,
tak więc u (λ, T) =(c/4) f (λ, T)

Prawo Wiena

Wien udowodnił, że postać gęstości energii promieniowania CDCz jest następująca:

$$u(\lambda, T)d\lambda = \left(\frac{F(\lambda \cdot T)}{\lambda^5}\right) d\lambda$$ **, gdzie F - pewna uniwersalna funkcja (inna niż f w prawie Kirchhoffa).**

Dygresja: zamiana zmiennych $\lambda = \frac{c}{\nu}$ **czyli** $d\lambda = \left| -\frac{c}{\nu^2} \right| d\nu$

$$u(\nu, T)d\lambda = \frac{F(cT/\nu)}{(c/\nu)^5} \left| \left(-\frac{c}{\nu^2} \right) \right| d\nu = \frac{F(cT/\nu)}{c^4} \nu^3 d\nu$$

Rozkład Boltzmanna

Najbardziej prawdopodobny rozkład liczb cząstek o danych energiach dla układu N cząstek w temperaturze T:

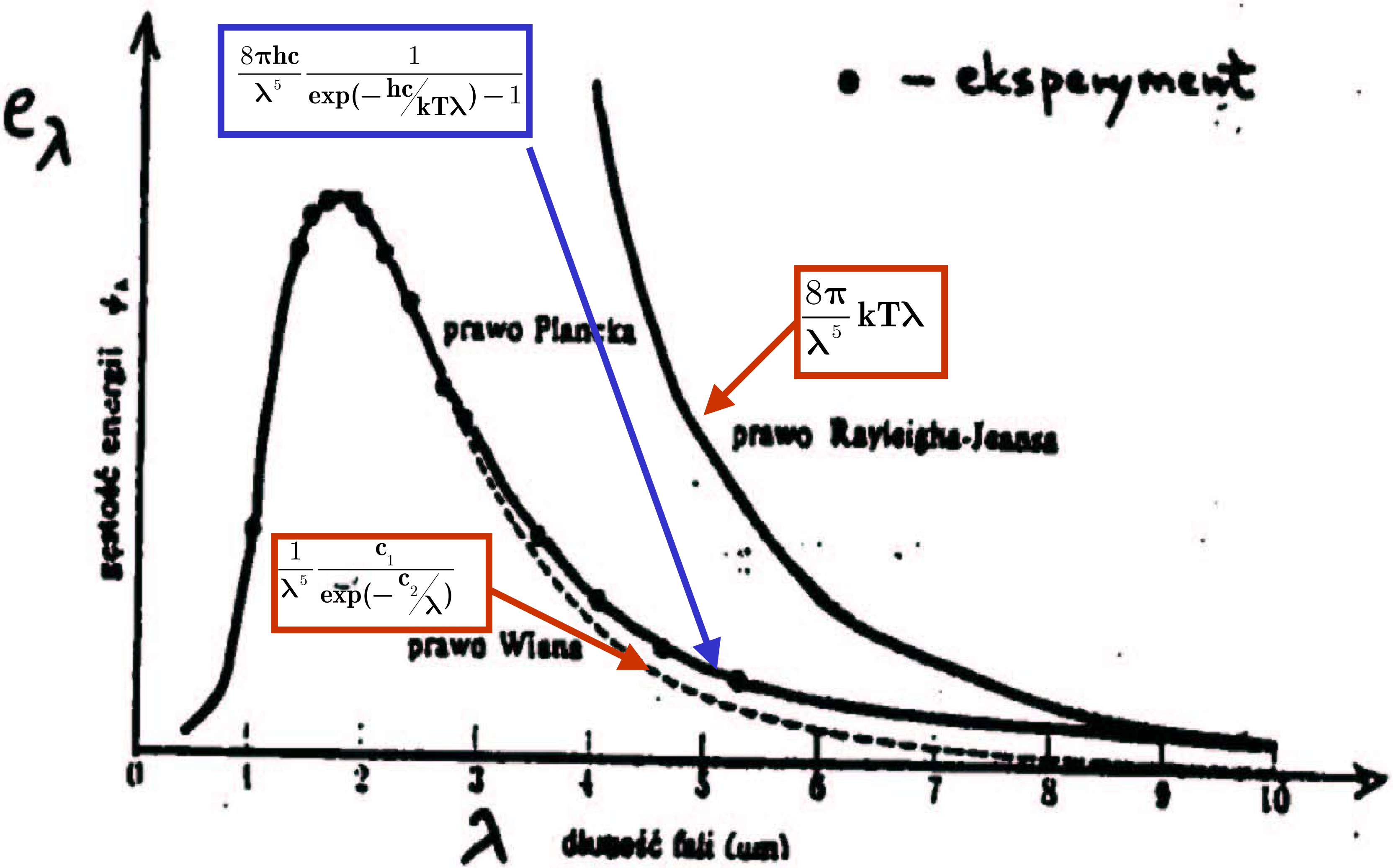
$$\mathbf{N(E)\,dE = \frac{N}{Z}\,e^{-\frac{E}{kT}}\,g(E)\,dE}$$

gdzie normalizacja dana jest przez:

$$\mathbf{Z = \int_{-\infty}^{\infty} g(E)\,e^{-\frac{E}{kT}}dE} \qquad \mathbf{i} \qquad \mathbf{N = \int N(E)dE}$$

Funkcja g(E) jest gęstością stanów o danej energii E.

Max Planck ok. roku 1900



e_λ
$\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(-{}^{hc}\!/_{kT\lambda})-1}$
• – eksperyment
prawo Plancka
$\frac{8\pi}{\lambda^5}kT\lambda$
prawo Rayleigha-Jeansa
$\frac{1}{\lambda^5}\frac{c_1}{\exp(-{}^{c_2}\!/_{\lambda})}$
prawo Wiena
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
λ

Wzór empiryczny Plancka

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}d\lambda$$

Wzór Plancka

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}d\lambda$$

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}d\nu$$

Dalsze badania: znalezienie postaci $f(\lambda T)$ ze wzoru Wiena

Metoda:

- Wnęka z promieniowaniem o obj. V jest dobrym modelem CDCz.
- Można łatwo obliczyć liczbę fal stojących o częstości ν (czy też długości fali λ): $N(\nu)= n(\nu) \bullet V$
- Średnia energia fal o określonej częstości ν: $<E(\nu,T)>$; obliczenia wymagają znajomości rozkładu Boltzmanna i są nieco bardziej złożone.
- Klasycznie, na gruncie falowej teorii promieniowania e-m energia fali nie zależy od ν, a tylko od amplitudy (natężenia) fali. Wtedy $<E(\nu,T)>=<E(T)>$.

Ostatecznie

$$u(\nu,T)d\nu = n(\nu)<E(\nu,T)>d\nu$$

Obliczenie $N(\nu)$ i $n(\nu) = N(\nu)/V$ (Rayleigh-Jeans)

Będziemy badali e-m fale stojące we wnęce CDCz. Przyjmiemy dla prostoty rachunków, że wnęka jest sześcianem o krawędzi a i objętości $V=a^3$. Na sciankach wnęki fale e-m mają węzły, co narzuca warunki periodyczności tj. całkowitą liczbę $\lambda/2$ na odległości a.

Dla fali o wektorze falowym $\vec{k}$ $(k=2\pi/\lambda)$ możemy napisać:

$$
\begin{aligned}
k_x &= k\cos\alpha \\
k_{yx} &= k\cos\beta \\
k_z &= k\cos\gamma
\end{aligned}
\qquad \text{i} \qquad
\begin{aligned}
\lambda_x/2 &= \lambda/2\cos\alpha \\
\lambda_y/2 &= \lambda/2\cos\beta \\
\lambda_z/2 &= \lambda/2\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Warunki periodyczności:

$$\frac{2a}{\lambda_x} = n_x \quad , \quad \frac{2a}{\lambda_y} = n_y \quad , \quad \frac{2a}{\lambda_z} = n_z \quad ,$$

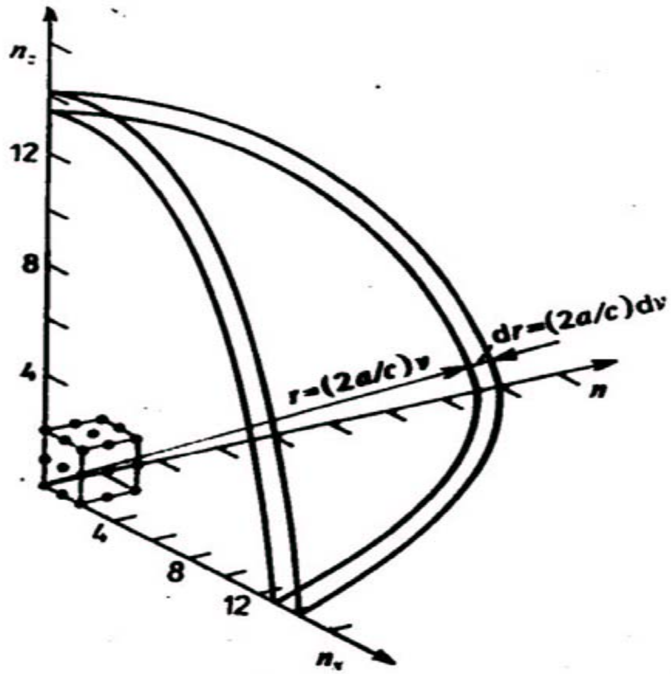
Wynika stąd, że:

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Ponieważ cosinusy kierunkowe dodają się w kwadratach do jedynki dostajemy ostatecznie:

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Całkowanie w przestrzeni węzłów



$$\mathbf{r} = \left(\frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{c}}\right)\boldsymbol{\nu} = \sqrt{\mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_y^2 + \mathbf{n}_z^2}$$

$$\mathbf{r}^2\mathbf{dr} = \frac{1}{3}\mathbf{d}\left(\mathbf{r}^3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{c}}\right)^3 3\boldsymbol{\nu}^2\mathbf{d}\boldsymbol{\nu}$$

$$\mathbf{r}^2\mathbf{dr} = \left(\frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{c}}\right)^3 \boldsymbol{\nu}^2\mathbf{d}\boldsymbol{\nu}$$

Ile fal o częstościach pomiędzy ν a ν+d ν i różnych kierunkach wektorów falowych znajduje się we wnęce CDCz?

Należy policzyć liczbę węzłów w 1/8 warstwy kulistej o promieniu r=$\frac{2a}{c}\nu$ i grubości dr w przestrzeni węzłów n_i.

Wprowadźmy gęstość węzłów $N'(r)$

$$\text{Liczba węzłów}: \frac{4\pi r^2 N'(r)dr}{8} = \frac{\pi r^2 N'(r)dr}{2}$$

$$\text{Zamieniamy zmienne}: r^2 dr = \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

Wobec tego liczba fal stojących o jednej polaryzacji w przedziale częstości [ν, ν+dν] wynosi:

$$N(\nu)d\nu = N'(r)dV = \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \frac{\pi}{2}\nu^2 d\nu \text{ , zaś uwzględniając obie polaryzacje: } N(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Ostatecznie gęstość fal stojących:

$$n(\nu)d\nu = \frac{N(\nu)d\nu}{V} = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Obliczenie średniej energii <E(ν)>

Rozkład liczby cząstek w funkcji ich energii dany jest rozkładem Boltzmanna:

$$N(E,T)=\frac{N}{Z}e^{-E/kT} \quad \text{gdzie } Z(T)=\int_0^\infty \exp\left(-E/_{kT}\right)dE$$

Średnia energia $$\langle E(T)\rangle=\frac{\int N(E,T)\cdot E\,dE}{N}$$

Rayleigh - Jeans:

Średnia energia promieniowania e-m CDCz nie zależy od częstości

i

dla każdej wartości częstości wynosi $\langle E(T)\rangle = kT$.

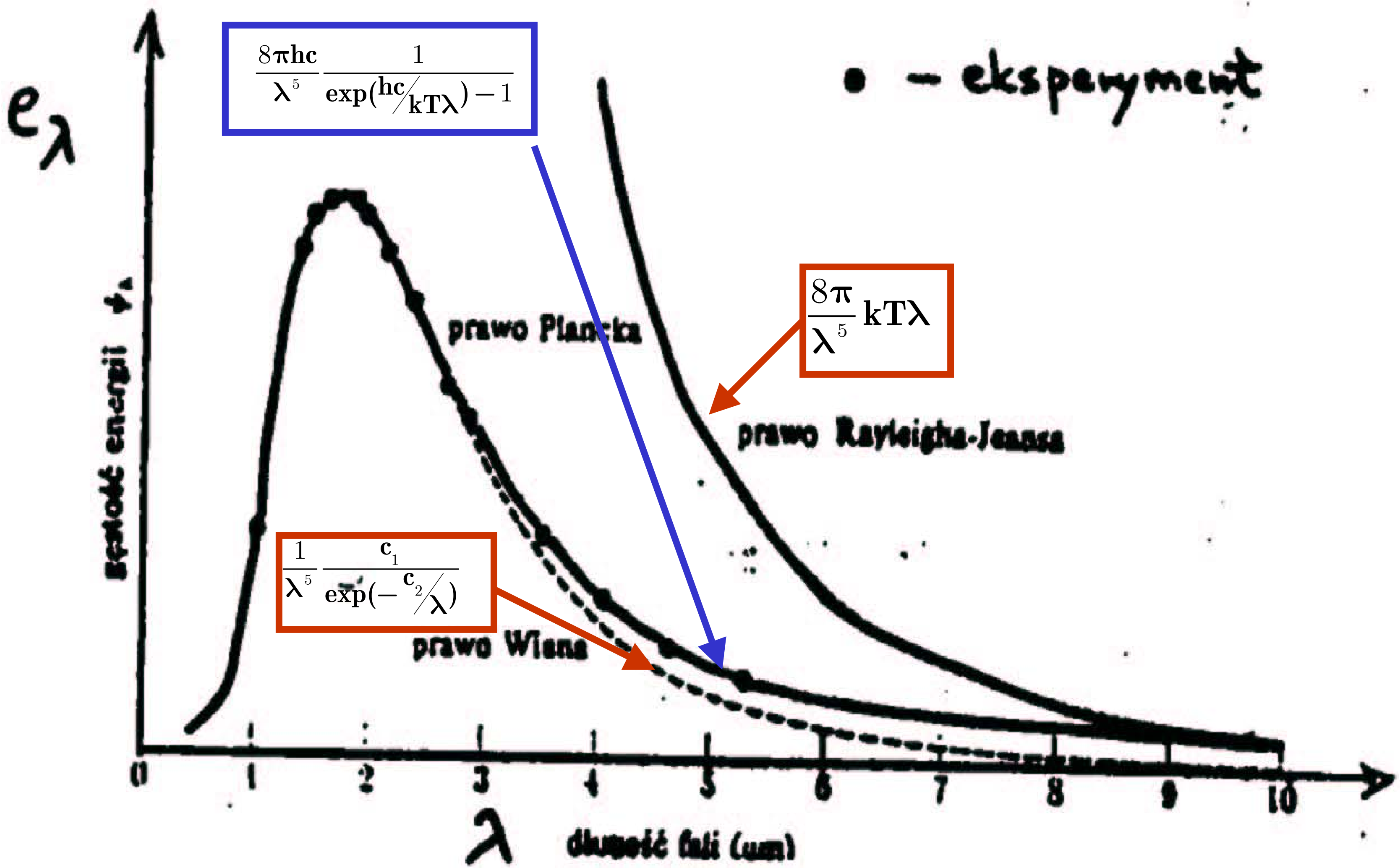
Wobec tego gęstość energii promieniowania wg. R-J wynosi:

$$u(\nu,T)d\nu = n(\nu)\cdot\langle E(T)\rangle d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot kT\cdot d\nu$$

$$u(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi\nu^2}{\lambda^5}\cdot kT\lambda\cdot d\lambda$$

Max Planck: Wzór R-J nie zgadza się z danymi doświadczalnymi opisanymi fenomenologicznym wzorem Plancka. Potrzebne inne założenia przy obliczaniu $\langle E(\nu,T)\rangle$:

- Atomy w ściankach to elementarne oscylatory, które pochłaniają i emitują energie $E_n = nh\nu$, n=1,2,...Stała h jest uniwersalna.
- Liczba fal stojących jest taka sama jak w wyprowadzeniu R-J.



e_λ
$\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/kT\lambda)-1}$
• – eksperyment
prawo Plancka
$\frac{8\pi}{\lambda^5}kT\lambda$
prawo Rayleigha-Jeansa
$\frac{1}{\lambda^5}\frac{c_1}{\exp(-c_2/\lambda)}$
prawo Wiena
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
λ
długość fali (μm)

Obliczenie <E(ν, T)> i u (ν, T) przez Plancka

$$< E(\nu,T) >= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\nu,T)\cdot P_n(\nu,T)}{\sum P_n(\nu,T)} = \frac{\sum nh\nu\cdot\exp(-nh\nu/kT)}{\sum\exp(-nh\nu/kT)} = -\frac{d}{d(1/kT)}\ln\left(\sum\exp(-nh\nu/kT)\right)$$

Wyrażenie w nawiasie pod logarytmem jest sumą postępu geometrycznego z q=exp(- $h\nu/kT$) :

$$< E(\nu,T) >= -\frac{d}{d(1/kT)}\ln\frac{1}{1-\exp(-h\nu/kT)} = h\nu\frac{\exp(-h\nu/kT)}{(1-\exp(-h\nu/kT))^2}(1-\exp(-h\nu/kT))(-1) =$$

$$= \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

Ostatecznie :

$$u(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}d\nu \quad \textbf{lub} \quad u(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/kT\lambda)-1}d\lambda$$