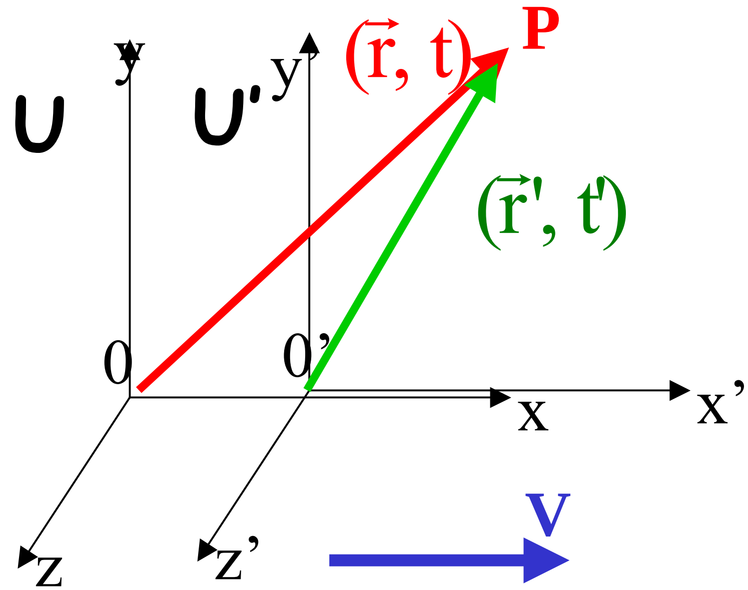
III.3 Transformacja Lorentza prędkości i przyspieszenia. Efekt Dopplera

- Transformacja prędkości
- Transformacja przyspieszenia
- Efekt Dopplera

Transformacja prędkości

Badamy ruch punktu materialnego P w dwóch UO: U i U′. Aby znaleźć wektor prędkości obaj obserwatorzy różniczkują wektory położenia $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ odpowiednio po t i t′:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

ale:

$$d\vec{r}' = \left[\gamma(dx - \beta ct), dy, dz\right]$$

$$dt' = \gamma(dt - \beta dx)$$

$$\beta = V^2 / c^2; \quad \gamma = 1 / \sqrt{1-\beta^2}$$

cd..

Ostatecznie dostajemy:

$$\boxed{\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{V \cdot v_x}{c^2}} \begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y / \gamma \\ v_z / \gamma \end{pmatrix}}$$

Uwaga: składowe prędkości punktu prostopadłe do V (prędkości boostu) także się transformują relatywistycznie

Niech punkt P porusza się z prędkością v_x=c w układzie U…

Stosując wzory na transformację prędkości przekonujemy się, że obserwator O′ także obserwuje prędkość c tego punktu:

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{cV}{c^2}} = \frac{c - V}{c - V} c = c$$

Wzory na transformacje prędkości zachowują więc c jako prędkość graniczną we wszystkich UO.

W przybliżeniu nierelatywistycznym ...

Gdy $\beta \to 0; \gamma \to 1; \frac{v_x}{c} \to 0$

Dostajemy wyrażenie na transformację prędkości Galileusza:

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Transformacja składowych przyspieszenia

Różniczkując wyrażenia na prędkość w obu układach otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\gamma^3\left(1-\dfrac{Vv_x}{c^2}\right)^3} a_x \\ \dfrac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\left(a_y + \dfrac{v_y V/c^2}{\left(1-\dfrac{Vv_x}{c^2}\right)} a_x\right) \\ \dfrac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\left(a_z + \dfrac{v_z V/c^2}{\left(1-\dfrac{Vv_x}{c^2}\right)} a_x\right) \end{pmatrix}$$

Podobnie jak dla transformacji prędkości, składowe przyspieszenia prostopadłe do boostu także się transformują.

W przybliżeniu nierelatywistycznym...

Gdy $\beta \to 0; \gamma \to 1; \frac{v_x}{c} \to 0$

Dostajemy:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Przyspieszenie jest niezmiennikiem transformacji Galileusza

Przyspieszenie transformuje się w sposób skomplikowany...

Boost lorentzowski:

- **Modyfikuje składową położenia równoległą do boostu, nie zmienia składowych prostopadłych,**
- **Modyfikuje wszystkie składowe prędkości,**
- **Modyfikuje wszystkie trzy składowe przyspieszenia.**
- **Przypuśćmy, że w U prędkość ma tyko składową v_x różną od zera. Wektor $\mathbf{v}'$ ma też tylko jedną składową v'_x różną od zera.**
- **Przypuśćmy, że w U przyspieszenie ma tylko jedną składową a_x różną od zera. Wektor $\mathbf{a}'$ ma trzy niezerowe składowe.**

Efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej

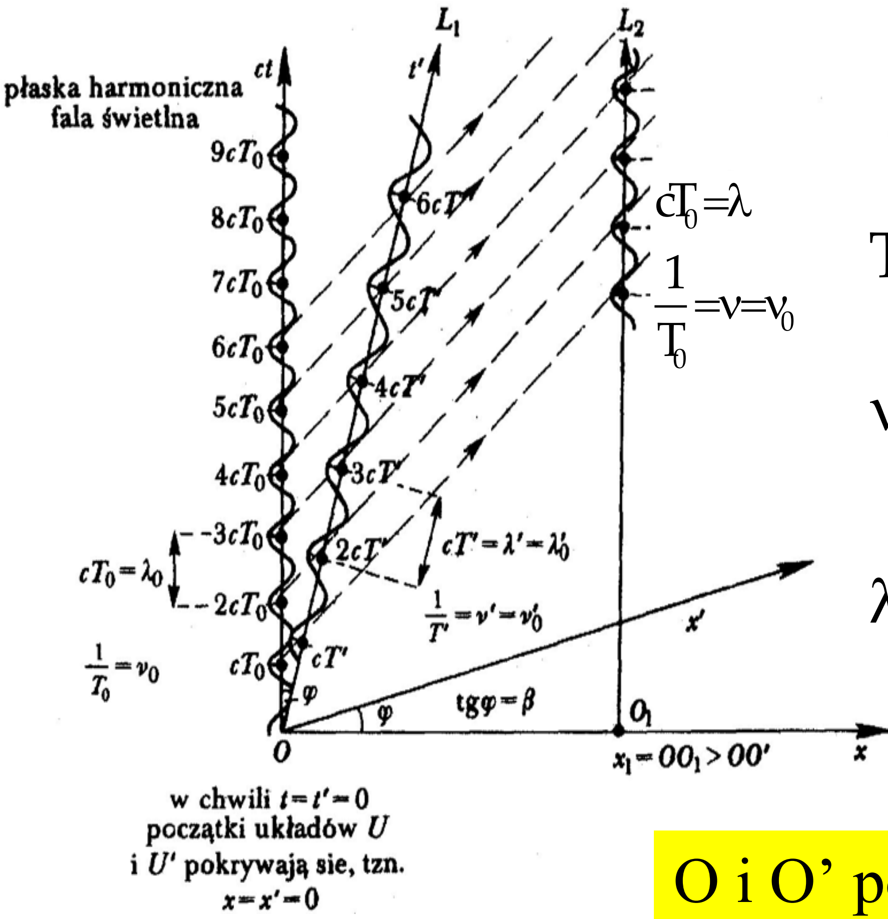
Efekt Dopplera jest to zmiana długości (częstości) fali związana z ruchem obserwatora.

Ponieważ fale elektromagnetyczne zawsze poruszają się relatywistycznie z prędkością c będziemy dla nich musieli stosować wzory relatywistyczne.

Dla innych fal, np.dźwiękowych, ich prędkość jest znacznie mniejsza od c i stosujemy wzory nierelatywistyczne.

Rozważymy fale e-m (lub dzwiękowe) poruszające się równolegle do wektora prędkości względnej **V**. Przypadek bardziej ogólny- źródło fal e-m ma prędkość skierowaną pod pewnym kątem do kierunku obserwacji jest trudniejszy. Przedyskutujemy go w Cz. V wykładu.

Efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej cd.



Wykres Minkowskiego w U, pokazuje sytuację obserwatora O′, który mierzy w swoim układzie:

$$T' = \gamma(1+\beta)T_0$$

$$\nu' = \nu_0/\gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_0$$

$$\lambda' = \lambda_0\gamma(1+\beta) = \lambda_0(1+\beta)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+....\right)$$

O i O’ posługują się metodą radarową

W przypadku nierelatywistycznym, małej prędkości V

Dla fal świetlnych

$$\lambda' = \lambda_0\gamma(1+\beta) = \lambda_0(1+\beta)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+....\right)$$

$$\rightarrow \lambda_0(1+\beta)$$

Dla fal rozchodzących się w ośrodku związanym z obs. O z prędkością v_{drg}>>V zachodzi: $\lambda\nu = v_{drg}$; $\lambda = v_{drg}T$

Obserwator O' stosuje tr. Galileusza:

$v'_{drg} = v_{drg} - V$ ale T'=T i dostajemy

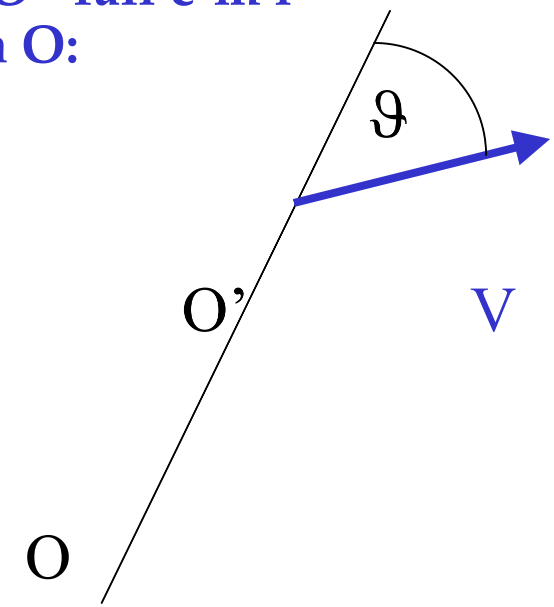
$$\lambda' = v'_{drg}T' = (v_{drg} - V)T = v_{drg}T\left(1-\frac{V}{v_{drg}}\right) = \lambda\left(1-\frac{V}{v_{drg}}\right)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{\left(1-\frac{V}{v_{drg}}\right)}$$

Poprzeczny efekt Dopplera

Antycypując wyniki, które otrzymamy w cz. V podamy tu wzór określający zależność częstości w zależności od kąta θ miedzy wektorem prędkości względnej V źródła O′ fali e-m i kierunkiem obserwacji przez obserwatora O:

$$\nu' = \nu / \gamma \left(1 + \beta \cos\theta\right)$$



Z tego wzoru wynika, że można zaobserwować zmianę częstości również wtedy gdy źródło porusza się prostopadle do obserwatora:

$$\nu' = \nu / \gamma$$

Ten słaby efekt poprzeczny zaobserwowano doświadczalnie dopiero w 1937 roku.