# V. 3 Siły zachowawcze. Energia potencjalna

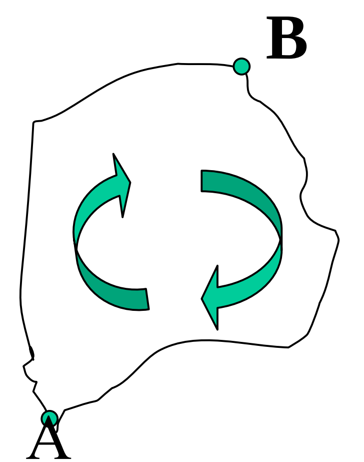
# Siły zachowawcze lub potencjalne

**Są to takie siły, dla których praca po dowolnej drodze między (dowolnymi) punktami A i B nie zależy od drogi (krzywej toru po którym porusza się ciało) i wyraża się przez zmianę energii potencjalnej ciała w trakcie ruchu od A do B: $E_p(A)$-$E_p(B)$:**

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_p(A) - E_p(B)$$

**Dla sił zachowawczych dowolna cyrkulacja (całka krzywoliniowa po drodze zamkniętej) znika:**

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$




**Bo:** $$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

# Związek między siłą zachowawczą a energią potencjalną

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \end{pmatrix}$$

# Dodatek matematyczny: gradient i pole skalarne

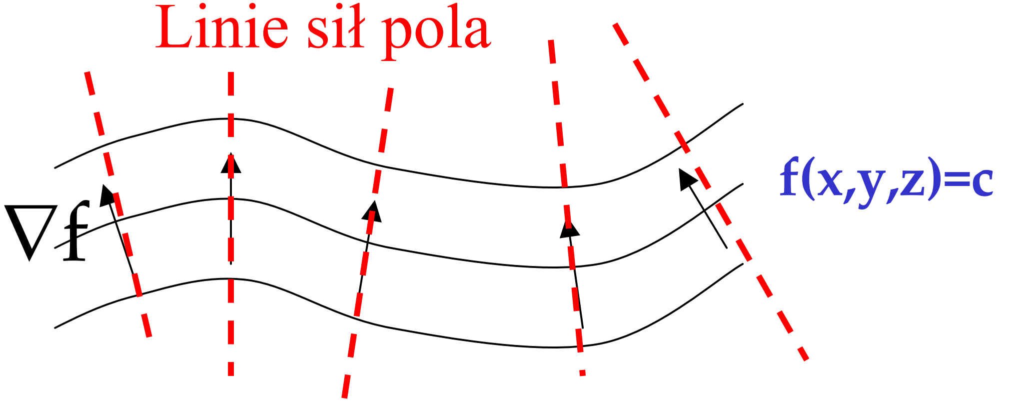
**Niech pole skalarne f(x,y,z) jest ciągłe i ma ciągłe pochodne cząstkowe.**

**Powierzchnia ekwiskalarna f(x,y,z)=c.**

**Na powierzchni ekwiskalarnej df=0:**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (\nabla f)\cdot d\vec{r} = 0$$

**czyli gradient f jest wektorem normalnym do powierzchni ekwiskalarnej.**



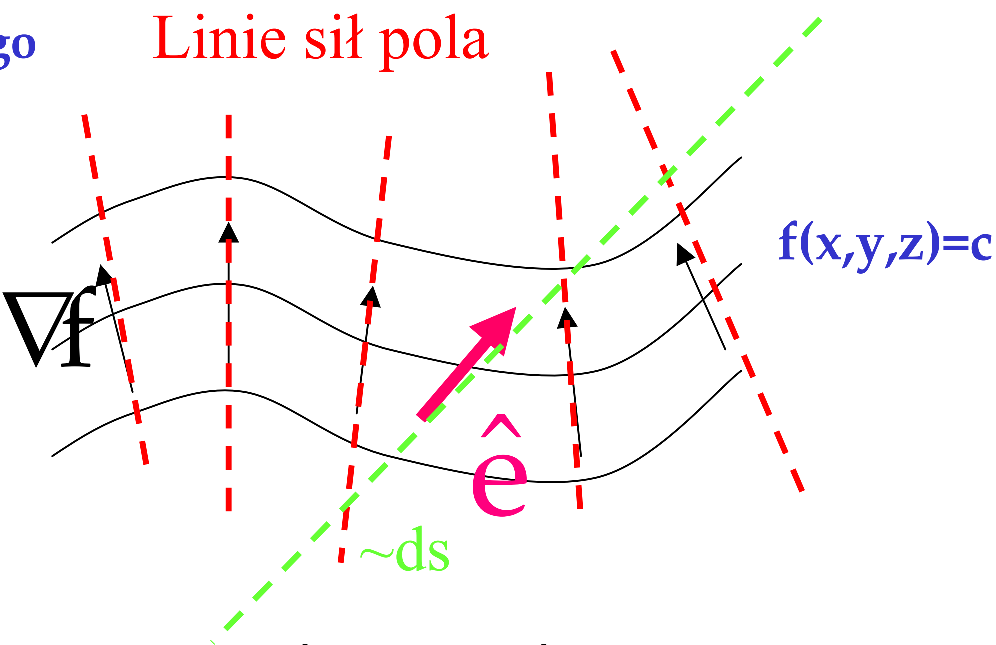
# Dodatek matematyczny: gradient i pole skalarne cd

**Pochodna pola f wzdłuż danego kierunku:**

kierunek $\hat{e}$

$$d\vec{r} = \hat{e}ds$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} \equiv \frac{df}{ds} = (\nabla f) \cdot \hat{e}$$




Gradient jest niezmiennikiem względem obrotów tj

$$\hat{e}'_k = R_{kj}\hat{e}_j$$

$$\nabla'_k = R_{kj}\nabla_j$$

$$\nabla' f(\vec{r}') = \nabla f(\vec{r})$$

# Twierdzenie podstawowe

$$\left(\exists_{E_p} \vec{F} = -\nabla E_p\right) \Leftrightarrow \left(\forall_{\text{krzywej zamknietej}} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0\right)$$

**Jak sprawdzić, czy dane pole sił może być zachowawcze?**

**Równość drugich pochodnych cząstkowych:**

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

**Zbiera się to w zgrabny wzór:**

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

$$\nabla \times \left(-\nabla E_p\right) = 0$$

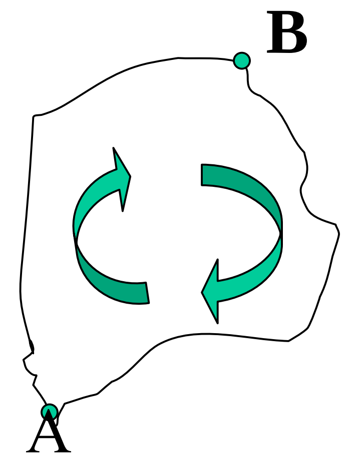
# Przykłady sił zachowawczych

- **Stała siła**
- **Pole sił centralnych:**

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)\hat{e}_r \quad ; \quad E_p = E_p(r)$$

$$\nabla E_p(r) = \frac{dE_p}{dr}\nabla r = \frac{dE_p}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{dE_p(r)}{dr}\hat{e}_r$$

# Prawo zachowania energii mechanicznej




**W polu sił zachowawczych zachodzi:**

$$\Delta E_k = E_k(B) - E_k(A) = W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_p(A) - E_p(B)$$

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)$$

# Prawo zachowania energii

$$E_{calkowita} = E_k + E_p +$$

$$+E_{pól} +$$

$$+Q_{energia\ kinetyczna\ ruchu\ cząsteczek}$$