V.4 Ruch w polach sił zachowawczych

1. Ruch cząstki w potencjale jednowymiarowym
2. Ruch w polu siły centralnej. Wzór Bineta
3. Przykład: całkowanie wzoru Bineta dla siły $1/r^2$

Dodatek: całkowanie wzoru Bineta przez kwadratury

1. Ruch w potencjale jednowymiarowym

Zasada zachowania energii w przypadku jednowymiarowym:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$$

Możemy odwikłać wyrażenie na prędkość i scałkować po czasie:

$$\dot{x}^2 = \frac{2(E - V)}{m}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}} = \int_{t_0}^{t} dt = (t - t_0)$$

Jest to prostsze niż całkowanie r. ruchu

2. Ruch w polu siły centralnej

Będziemy korzystali z dwóch praw zachowania: energii i momentu pędu.

Ruch jest płaski; wprowadzimy współrzędne biegunowe r, ϕ w płaszczyźnie ruchu.

Prawa zachowania:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) = E$$

$$L = mr^2\dot{\phi}$$

Prawo zachowania momentu pędu pozwoli na wyeliminowanie prędkości kątowej:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

Ruch w polu siły centralnej cd.

Wyrażenie na energię możemy przekształcić do postaci:

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{2}{m}\left(E - V(r)\right)$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} = t - t_0$$

Znalezienie ruchu r=r(t) sprowadza się w tym przypadku do policzenia całki i odwikłania zależności od czasu.

Zależność $\phi = \phi(t)$

Ruch w polu siły centralnej cd.

Zależność kąta od czasu dostajemy całkując prawo zachowania momentu pędu:

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \phi - \phi_0 = \int \frac{L}{mr^2} dt$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{dt}$$

Dostajemy równanie toru

$$r = r(\phi)$$

$$\phi - \phi_0 = \int d\phi = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r(\phi)} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}}$$

Potencjał efektywny. Bariera odśrodkowa

Prawo zachowania energii może być zapisane w postaci:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

Człon zależny od L^2 nosi nazwę bariery odśrodkowej, bo

$$F_o = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = \frac{L^2}{2mr^3} = mr\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

skierowana jest od centrum siły.

Suma energii potencjalnej i członu odśrodkowego to efektywna energia potencjalna:

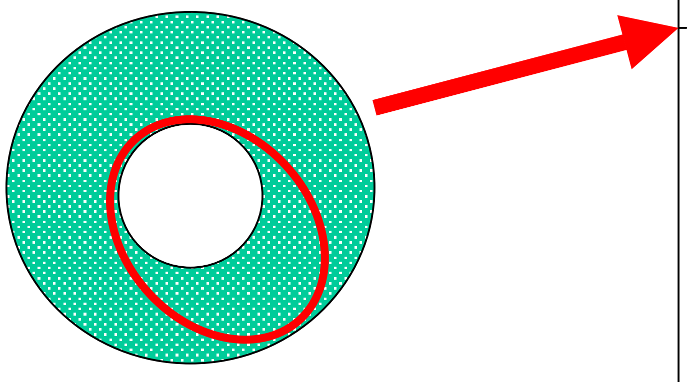
$$E_{p,ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

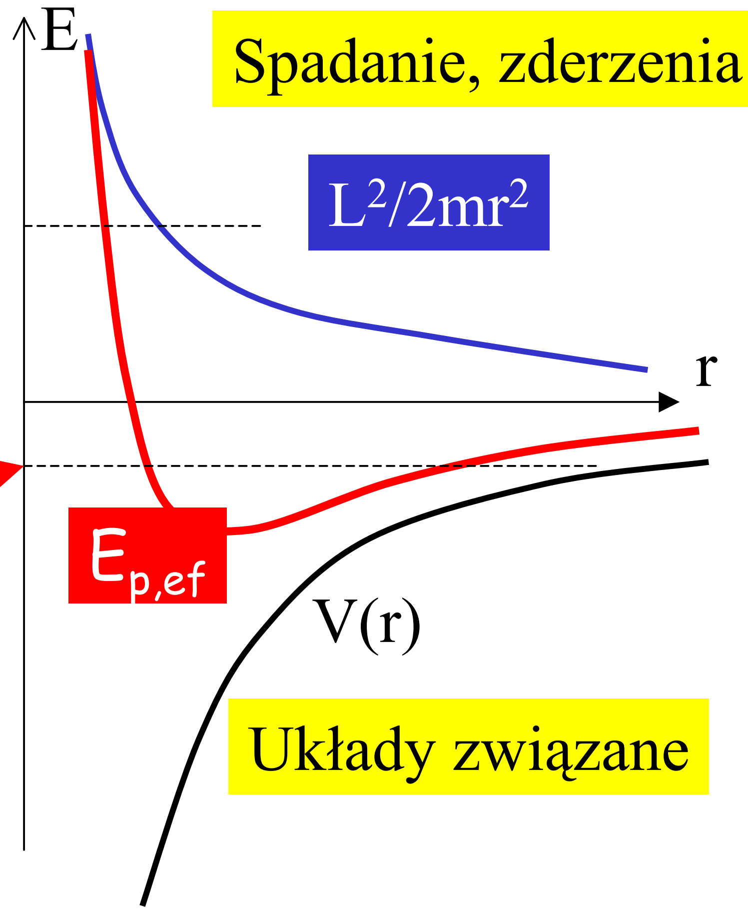
Potencjał efektywny. Bariera odśrodkowa cd.

Punkty zwrotne:

$$E - E_{p,ef}(r) = 0$$

Dozwolony obszar ruchu





Wzór Bineta: równanie toru w polu sił centralnych

Równania ruchu w płaszczyźnie ruchu- siła ma tylko składową radialną:

$$ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = F(r) \qquad ma_\phi = m\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) = 0$$

Drugie z tych równań to zasada zachowania momentu pędu:

$$ma_\phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = \frac{1}{r}\frac{dL}{dt} = 0$$

Równanie toru otrzymamy zamieniając różniczkowanie po czasie na różniczkowanie po fi:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \left(\frac{L}{mr^2}\right)\frac{d}{d\phi}$$

Stosując dwukrotnie dostajemy:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Podstawiając do r. Radialnego dostajemy wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2}F(r)$$

Kiedy tor wyraża się przez funkcje trygonometryczne?

Przyjmijmy, że $F(r)=Fr^{-n}$.

Wtedy mamy:

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mF}{L^2(n+1)} u^{-n-1} - u^2}}$$

Całka daje nam arcsin gdy pod pierwiastkiem mamy wielomian drugiego stopnia bo:

Zachodzi to dla

n= 2, 3 i -1

$$\phi = \phi_0 = \int \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi(u)}{A}\right)$$

oscylator

Siła grawitacji i kulombowska

Przykład: całkowanie wzoru Bineta dla siły grawitacyjnej

Mamy:

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{GmM}{r^2}$$

Wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} = \frac{1}{p}$$

Ma rozwiązanie w postaci krzywej stożkowej ogniskiem w centrum siły:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\phi - \phi_0)$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)}$$

Charakter stożkowej zależy od wartości mimośrodu ε:

1. $\varepsilon < 1$- **elipsa**
2. $\varepsilon = 1$ **parabola**- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \pi$
3. $\varepsilon > 1$- **hiperbola**- krzywa zmierza do nieskończoności dla $\phi = \phi_0 + \arccos(1/\varepsilon)$

Wartość mimośrodu ε

Mimośród wyznaczamy wstawiając wyrażenie na u=1/r do całki energii otrzymanej ze wzoru Bineta (tr. 13):

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\phi - \phi_0); \quad \frac{du}{d\phi} = -\frac{\varepsilon}{p}\sin(\phi - \phi_0); \quad \frac{1}{p} = \frac{m\alpha}{L^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2}{p}u$$

$$\frac{\varepsilon^2}{p^2}\sin^2(\phi - \phi_0) + \left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\phi - \phi_0)\right)^2 = \frac{2E}{p\alpha} + \frac{2}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\phi - \phi_0)\right)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2pE}{p^2\alpha} + \frac{2}{p^2}; \qquad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2p}{\alpha}E; \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E} = \sqrt{1 + \frac{2pE}{\alpha}}$$

Mimośród jako funkcja energii

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E} = \sqrt{1 + \frac{2pE}{\alpha}};\ p>0,\ \alpha>0$$

Widać, że mimośród jest:

- **mniejszy od 1– rozwiązanie eliptyczne- dla ujemnych energii,**
- **większy od 1- rozwiązanie hiperboliczne- dla dodatnich energii,**
- **równy 1- rozwiązanie paraboliczne- dla energii zerowych**

Dodatek: Całkowanie wzoru Bineta dla sił centralnych przez kwadratury

Widać, że w polu sił centralnych naturalną zmienną jest u=1/r.

W zmiennej u F(r)=F(1/u)=f(u) i ze wzoru Bineta dochodzimy do r.r. z rozdzielonymi zmiennymi::

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=-\left(\frac{m}{L^2u^2}\right)f(u)\left|\frac{du}{d\phi}\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2\right]=-\left(\frac{m}{L^2u^2}\right)f(u)\frac{du}{d\phi}$$

$$\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2\right]=-\left(\frac{2m}{L^2}\right)\int\frac{f(u)}{u^2}du+C_1=+\left(\frac{2m}{L^2}\right)\int F(r)dr+C_1 \quad (*)$$

Dodatek cd.

Ostatni wzór jest tożsamy z całką (prawem zachowania) energii:

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) = C_1\frac{L^2}{2m}$$

Jeżeli pamiętamy, że praca siły radialnej jest równa –(energii potencjalnej):

$$\int F(r)dr = -V(r)$$

Stąd stała C_1 jest proporcjonalna do energii całkowitej E:

$$C_1 = \frac{2mE}{L^2}$$

Przekształcamy dalej (*) z tr. 9, tak, żeby rozdzielić zmienne:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2m}{L^2}\int F(r)dr + C_1 - u^2$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\int F(r)dr + C_1 - u^2}} + C_2 = \phi$$

$$\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m}{L^2}\int F(r)dr + C_1 - (1/r)^2}} + \phi_0 = \phi$$

$$\sqrt{\frac{L^2}{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = \phi - \phi_0$$

Dodatek cd.

Ostatnie równanie jest takie same jak otrzymane już r. toru na tr. 5.

Jest to sprawdzenie, że z równania Bineta możemy znaleźć ruch i tor dla sił centralnych.