VII.4 Obroty brył sztywnych dookoła osi swobodnych. Równania Eulera. Bąki

Swobodne osie obrotu

Bryła sztywna wprawiona w obrót dookoła osi środkowej o największym lub najmniejszym momencie bezwładności (są to osie główne) zachowuje kierunek tej osi w trakcie ruchu w przestrzeni. Te dwie osie główne są to tak zwane <u>swobodne osie obrotu</u>.

Bryła wprawiona w obrót dookoła osi o pośrednim momencie bezwładności w ruchu postępowym koziołkuje. Kierunek osi obrotu zmienia swój kierunek w przetrzeni.

Ciała swobodnie ustawiające się w przestrzeni...

w trakcie obrotów dążą do takiego ustawienia się, żeby obrót następował dookoła osi o możliwie największym momencie bezwładności.

Taka konfiguracja jest stabilna ze względu na małe zaburzenia, np.pojawiające się zaburzające momenty sił próbujące zmienić chwilową oś obrotu.

Swobodne obroty brył sztywnych

Znamy tylko 3 ogólne (tj. słuszne dla wszystkich warunków początkowych) rozwiązania ruchu szczególnych brył sztywnych t.zw. bąków;

Są to:

1. Bąk swobodny Eulera: ruch dowolnej bryły sztywnej na którą nie działa moment siły względem środka obrotu, który spoczywa w UI lub jest środkiem masy.
2. Symetryczny bąk ciężki Lagrange'a. Jest to bryła o obrotowej elipsoidzie bezwładności obracająca się względem pewnego punktu nieruchomego w układzie inercjalnym i różnego od ŚM. Moment siły pochodzi od jednorodnego stałego pola grawitacyjnego.
3. Symetryczny bąk Kowalewskiej w stałym jednorodnym polu grawitacyjnym. $I_x=I_y=1/2\ I_{\dot{z}}$. Punkt podparcia leży w pł. prostopadłej do osi symetrii i przechodzącej przez ŚM bąka.

Obroty bryły sztywnej wokół osi zmiennej w czasie ale...

bądź i) przechodzącej przez jeden ustalony punkt bryły (obrót nieswobodny), bądź też ii) przechodzącej przez ŚM ciała (obrót swobodnej bryły sztywnej).

W przypadku i) będziemy zakładać, że ustalony punkt bryły spoczywa w układzie inercjalnym U.

W przypadku ii) ŚM spoczywa w układzie inercjalnym.

W obu przypadkach wprowadzimy układ współrzędnych kartezjańskich U′ związanych ze ŚM bryły sztywej. Kierunek osi U′ będzie pokrywał się z osiami głównymi bryły. W U′ tensor bezwładności będzie diagonalny.

Układ U′ będzie obracał się względem inercjalnego układu U z prędkością kątową $\vec{\omega}$. Zachodzi:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

cd.

Wektor mementu siły M jest liczony względem ŚM w układzie U′:

$$\vec{M}(t) = \begin{pmatrix} M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{pmatrix}$$

Podobnie wektor prędkości kątowej ω jest wyrażony w U′:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}$$

cd.

Wreszcie wektor L′ jest także wyrażony w U′:

$$\vec{L}\,' = \hat{I}\,'\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} I_{x'}\omega_{x'} \\ I_{y'}\omega_{y'} \\ I_{z'}\omega_{z'} \end{pmatrix}$$

oraz:

$$\vec{\omega}\times\vec{L}' = \begin{vmatrix} \hat{e}_{x'} & \hat{e}_{y'} & \hat{e}_{z'} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ I_{x'}\omega_{x'} & I_{y'}\omega_{y'} & I_{z'}\omega_{z'} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} \\ \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} \\ \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} \end{pmatrix}$$

cd.

Ostatecznie dostajemy następujące równania ruchu w układzie U′:

$$I_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} = M_{x'}$$

$$I_{y'}\dot{\omega}_{y'} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} = M_{y'}$$

$$I_{z'}\dot{\omega}_{z'} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} = M_{z'}$$

Są to równania Eulera