

- 1° J. J. Thomson, Zuber, "Quantum Field Theory" [WAG]
- 2° Millard "Quantum Vacuum"
- 3° Lifshitz, Pitaevskii, "Relatywistyczna teoria kwantów"
- 4° Bjorken Drell "..."
- 5° Jauch; Rohrlich "the theory of Photons & Electrons"
- 6° Białynicki - Birula "Elektrodynamika kwantowa"
- 7° Adam Bechler "Kwantowa teoria oddziaływań elektromagnetycznych"
- 8° Cohen Tannoudji "Photons & Atoms"

Równanie Diraca (cząstka o spinie 1/2)

$\hbar = c = 1$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \Psi$$

$$i \partial_t \Psi = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \Psi$$

[,] - komutator

worunki na α i β $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 0$ $i \neq j$ $\alpha^{i^2} = \beta^2 = 1$
 $\{\alpha^i, \beta\} = 0$ $\uparrow$ antykomutator

poze tym wymagany α^i, β były hermitowskie

wprowadzamy macierze γ $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta \alpha^i$

MACIERZE DIRACA

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0$$

$$\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu = \alpha^\mu \partial_\mu = \alpha^\mu \partial_\mu$$

$$(i\not{D} - m) \Psi = 0$$

jak z tego dostać związek między energią a pędem?

$$(i\not{D} + m)(i\not{D} - m) \Psi = 0$$

$$(+i^2 \not{D}^2 - m^2) \Psi = 0$$

$$(-\not{D}^2 - m^2) \Psi = 0$$

$$-(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Psi = 0$$

$$(i\not{D} - m)(i\not{D} + m) \Psi$$

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0$$

~~WYKŁAD~~
~~18 luty 2008~~
~~WYKŁAD~~
~~PACUCH~~
~~PONIEDZIAŁEK~~

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \text{repr. DIRAC} \right.$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu = U \gamma^\mu U^{-1}$$

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

$\partial_\mu j^\mu = 0$ - równieście ciągłości - pokazujemy że jest ono spełnione

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (*) \rightarrow \text{przejrzyj hermitowsko}$$

$$\psi^\dagger (-i \gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - m) = 0$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 (= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0)$$

$$\bar{\psi}^\dagger = (\beta \bar{\alpha})^\dagger = \bar{\alpha}^\dagger \beta^\dagger = \bar{\alpha}^\dagger \beta = -\beta \bar{\alpha} = -\bar{\psi}^\dagger =$$

$$= +\beta (\beta \bar{\alpha}) \beta = \beta \bar{\psi} \beta = \gamma^0 \bar{\psi} \gamma^0$$

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0}$$

$$\bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0 \quad (**)$$

$$\left. \begin{aligned} &(*) \quad \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi = 0 \\ &(**) \quad \bar{\psi} (i \not{\partial} + m) \psi = 0 \end{aligned} \right\} + \text{dodać stronami}$$

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 = \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

W gęstości rel.
operatorek równania
Schrödingera

j^μ mamy

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \left\{ \begin{aligned} j^0 &= \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \\ \vec{j} &= \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi = \psi^\dagger \vec{\sigma} \chi + \chi^\dagger \vec{\sigma} \varphi \end{aligned} \right.$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} &\leftarrow \text{dwa komponenty} \\ &\leftarrow \text{mala komponenta} \end{aligned} \right.$$

σ -macierz Pauliego

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-ikx} u(k)$$

dla dodatniej energii

18.02.08

$$\psi^{(-)}(x) = e^{ikx} v(k)$$

dla ujemnej energii

WYK 1
PACHUCKI
PON

nie jest dowolny: $k^2 = m^2 = E^2 - \vec{k}^2$

$$E = \pm |E|$$

$$(k - m) u(k) = 0$$

$$(k + m) v(k) = 0$$

w układzie spoczynkowym: $(\gamma^0 - 1) u(m, 0) = 0$

$$(\gamma^0 + 1) v(m, 0) = 0$$

u ma dwie półnie składowe

v ma dwie półnie składowe

$$u^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{k + m}{\sqrt{2m(E+m)}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$$

ten mianownik odpowiada tylko za normowanie

$$u^{(\alpha)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E+m)}} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$v^{(\alpha)}(k) = \frac{-k + m}{\sqrt{2m(E+m)}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E+m)}} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) = -\delta_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda_+ (k) = \sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k)$$

↑ ↑
matryca
4x4

$$= \frac{1}{2m(E+m)} (k+m) \frac{1+\gamma^0}{2} (k+m) = \frac{k+m}{2m}$$

$$\Lambda_{-}(u) = - \sum_{\alpha=1,2} \psi^{(\alpha)}(u) \otimes \bar{\psi}^{(\alpha)}(u) = \frac{-k+m}{2m}$$

$$\Lambda_{\pm}^2(u) = \Lambda_{\pm}(u)$$

$$\Lambda_{+} + \Lambda_{-} = \mathbb{I}$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(u) \gamma^0 u^{(\beta)}(u) = \bar{u}^{\alpha} \frac{\{k, \gamma^0\}}{2m} u^{\beta} = \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}$$

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0$$

$$\partial_{\mu} \rightsquigarrow \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \quad \text{wzajemne oddziaływanie zgodne z}$$

ZASADĄ MINIMALNEGO SPRZĘŻENIA

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi = 0$$

równanie współzmiennicze ze względu na bieżące transformacje

$$\psi(x) \rightsquigarrow e^{ie\alpha(x)} \psi(x)$$

$$A_{\mu}(x) \rightsquigarrow A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \alpha(x)$$

symetrii
z $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$
wynika, że bo α
słabie strów
Kierdo momentów temp
pole konstruuje się w oparciu
o symetrię

Współzależne, co to że stródek - postać hamiltonianowa

$$\mathcal{H} = \bar{\alpha} \pi + \beta m + eA^0 + \frac{e\mathcal{L}}{2m} (i\beta \bar{\alpha} \bar{E} - \beta \bar{\Sigma} \bar{B})$$

$$\bar{\pi} = \bar{p} - e\bar{A}$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

18.02.08.
WIKI
PACHUCKI
Pon.

$$\begin{cases} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{\sigma} \vec{\pi} \chi + e A^0 \varphi + m \varphi \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \bar{\sigma} \vec{\pi} \varphi + e A^0 \chi - m \chi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{-imt} \cdot \phi \\ \chi &= e^{-imt} \cdot X \end{aligned}$$

wyłączamy
najmniejszą skalę
od reszty -
- pęd i pole φ
mierz w stosunku do
masy

teraz

$$i \partial_t \phi = \bar{\sigma} \vec{\pi} X + e A^0 \phi$$

$$i \partial_t X = \bar{\sigma} \vec{\pi} \phi + e A^0 X - 2m X$$

zauważ, że $\partial_t X$ jest mierz

$$X = \frac{\bar{\sigma} \vec{\pi}}{2m} \phi \leftarrow \phi$$

$$i \partial_t \phi = \left((\bar{\sigma} \vec{\pi})^2 \cdot \frac{1}{2m} + e A^0 \right) \phi$$

przypomnie trochę
Schrödingera!

$$(\bar{\sigma} \vec{\pi})^2 = \sigma^i \sigma^j \pi_i \pi_j = \pi^2 + \frac{1}{4} [\sigma^i, \sigma^j] [\pi_i, \pi_j] \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$$

$$= \pi^2 - e \vec{\sigma} \vec{B}$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \vec{B} + e A^0 \right] \phi$$

oddz. spinu i pędu magnetycznego

pole $\vec{B}$ $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ a w opole

$$g \vec{S} = \vec{\sigma}$$

w wprowadzeniu dla
doubnej cząstki

// dla cząstki Diraca w
spineniu minimalnym $g = 2$ //

Ochamie się, że elektron ma spin bardzo bliski 2

$$g = 2(1 + \kappa)$$

$\uparrow$ 2 doprowadzić do 10 yf - pomiar z Harvardu

to get precise definition 2 sensitivity

$$\alpha = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

$$b \rightarrow b \frac{1}{137} = \alpha$$

$H = -\frac{\nabla^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r}$ - energie w równiu Schrödingera w atomie 25.02.08
ŁWYKZ
PACHUCKI

$E_n = -\frac{m\alpha^2 Z^2}{2n^2} \Rightarrow$ zakres stos. Schrödingera

$E_n \ll \mu$

μ się niewiele różni od m

70N.

dla $Z \sim 80$ już nie stosujemy Schrödingera, ale Diraca

stacjonarne równanie Diraca: $(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m - \frac{Ze^2}{r}) \psi = H \psi = E \psi$

zakładanie tutaj - że jest punktowe

czy moglibyśmy tutaj wpisać masę zredukowaną, nie? to wprowadzić nie inne miedzy np. dwuciałowe?

~~zobranie~~ zobranie $\rightarrow$ to mech. relatywistyczne

$\rightarrow$ precyzyjny proton się porusza $\rightarrow$ nie do się tego, poprawić w równiu Diraca!

$\rightarrow$ dopiero w ramach pełnej QED można zrobić ułamek dwuciałowy

Zakładanie nie jest

- ① jedno punktowe
- ② jedno ~~nie~~ składowanie ciężkie

$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$

tytuł masa ci. równe 1, $m = 1$

$(-i \vec{\alpha} \vec{\nabla} + \beta - \frac{Ze^2}{r}) \psi = E \psi$

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

repr. Diraca

jeśli symetrie ma to równanie: Obrót (nowe w postaci stanów własnych op. weł. new. gęst.)

$[H, \vec{J}] = 0 \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$

wprowadzamy funkcje $\chi_{\kappa}^m = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{|\kappa|} \sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}-m}{2j+1}} Y_{|j+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}+m}{2j+1}} Y_{|j+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

$J = l + \frac{1}{2}, \quad J = l - \frac{1}{2}$

$\left. \begin{aligned} J = l + \frac{1}{2} &\Rightarrow \kappa = -(j + \frac{1}{2}) = -(l+1) \\ J = l - \frac{1}{2} &\Rightarrow \kappa = (j + \frac{1}{2}) = l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$

$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi_{\kappa}^m = -\chi_{-\kappa}^m$

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{L} \chi_x^m = -(x+1) \chi_x^m$$

ładziemy poszukiwać rozwiązania w postaci

$$\psi = \begin{pmatrix} G(r) \chi_x^m(\theta, \varphi) \\ C F(r) \chi_{-x}^m(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

$$(\bar{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = a^2$$

BYTO

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{p} = (\bar{\sigma} \cdot \hat{r})^2 \bar{\sigma} \cdot \vec{p}$$

↑
r-wersor

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$= \bar{\sigma} \cdot \hat{r} (\bar{\sigma} \cdot \hat{r} \bar{\sigma} \cdot \vec{p}) = \bar{\sigma} \cdot \hat{r} (\vec{r} \cdot \vec{p} + \frac{i \bar{\sigma} \cdot \vec{L}}{r})$$

↑ to więcej
jest dzięki do
spinu

W tym momencie napiszemy równania na G i F

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1+x}{r} \right) G(r) - \left(1+E + \frac{2x}{r} \right) F(r) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1-x}{r} \right) F(r) - \left(1-E - \frac{2x}{r} \right) G(r) = 0$$

stwierdzamy standardowe metody rozwiązywania r-równań różniczkowych

można podać ogólne rozwiązanie tego równania, przy standardowych metodach równań różniczkowych

$$\begin{cases} G(r) = r^\gamma e^{-\lambda r} \sqrt{1+E} (A(f_2 + f_1) + B(f_4 + f_3)) \\ F(r) = r^\gamma e^{-\lambda r} \sqrt{1-E} (A(f_2 - f_1) + B(f_4 - f_3)) \end{cases}$$

$$f_1 = \left(\frac{2x}{a} - x \right) {}_1F_1(x, C, 2\lambda r)$$

↑ funkcja hipergeometryczna konfluentna

$$f_2 = {}_2F_1(a+1, C, 2\lambda r)$$

$$f_3 = U(a; C, 2\lambda r)$$

$$f_4 = \left(\frac{2x}{a} + x \right) U(a+1, C, 2\lambda r)$$

$$\lambda = \sqrt{1+E} \sqrt{1-E}$$

$$\gamma = -1 + \sqrt{x^2 - 2x^2}$$

$$a = 1 + \gamma = \frac{E2x}{\lambda}$$

$$C = 3 + 2\gamma$$

40 DOKŁAD
SPRAWDZIĆ TO
SOME

str. 2

$${}_1F_1(q, c, x) = 1 + \frac{q}{c} x + \frac{q(q+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

25.02.08

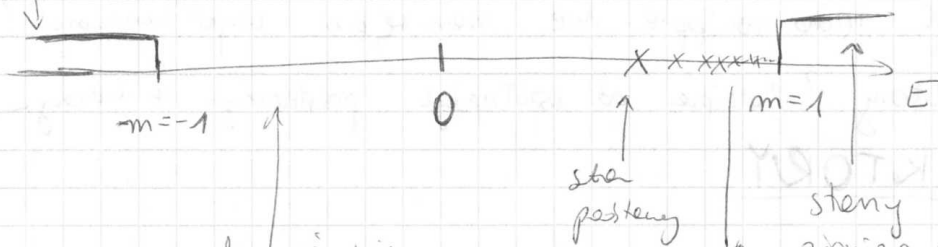
PACHUCKI

PON
WYK 2

$$V(q, c, z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+q-c)} {}_1F_1(q, c, z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(q)} z^{1-c} {}_1F_1(1+q-c, 2-c, z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty dt e^{-zt} t^{q-1} (1+t)^{c-q-1}$$

widno uppie



symetrycznie nie
nie ma - w
odpychanie potencjału
nie ma stanów
związanych

sta
postawy

stony
związane

warunki petri - sta, nie ma

the jehil
wartości $E \neq$
rozwiązane
→ nie leży
widno uppie
→ poryk w
potężne
odpychanie

$$E_{n,k} = \frac{z}{|z|} \left(1 + \frac{z^2 \alpha^2}{(n+1+\gamma)} \right)^{-1/2}$$

↑ war opóły, n nie z jest dodatnie

stan podstawowy

$$n=0, k=-1$$

$$E_{0,-1} = \sqrt{1-2^2 \alpha^2}$$

$$\rho = 2\alpha\pi$$

$$G_{0,-1}(r) = \sqrt{\frac{4z^3 \alpha^3 (1+E_{0,-1})}{\sqrt{1+2E_{0,-1}}}} (2\rho)^{E_{0,-1}-1} e^{-\rho}$$

$$F_{0,-1}(r) = -\sqrt{\frac{4z^3 \alpha^3 (1-E_{0,-1})}{\sqrt{1+2E_{0,-1}}}} (2\rho)^{E_{0,-1}-1} e^{-\rho}$$

w pyklu

$$E_{0,-1} \sim 1 - \frac{2^2 \alpha^2}{2}$$

dla $z > 137$ (np. $z = 138$)

wtedy $(2\rho)^{E_{0,-1}-1}$ osobne w zene! powiększ. rozwiązanie
o punktowu ipde rozwiązy problem

nie ma
problem 137

interp. → ja się tak robi, to się potrzeba być o
interpretacji - zmiana się stem przeni

→ uśredniając ^{ciężkie} jądre ^{ciężkie} się nie par electron - poryta - bity
elektrycznie ^{nie} me!
↓
emisja podobna
ze stonim uładowym
→ wartości ujemne

PROBLEM

do się robić jedno rozprę nie możemy wypręnić? !?
-- form faktory? zależa od współrzędnych przestrzennych + czasu?

FAKTORY

→ $E\left(\frac{me}{MN}, Z\alpha\right) = E(0, Z\alpha) + \frac{me}{MN} \mathcal{E}(0, Z\alpha)$
małe udeś z
ad stosunku dla
mających $Z\alpha$
lub nie osłab
rozprę
↑
uśrednia się udeś pierwszy cyfer rozprę
te udeś nie są dobre more
→ udeś

$$= E_0 + E^{(2)} + E^{(4)} + E^{(5)} + E^{(6)} + E^{(7)}$$

↑
elektryczność

↑
później

można bez założenie punktowego jądra

• nie udeścać pełnym $E^{(4)}$ i $E^{(5)}$

• będą granice nierelatywistycznego równanie Diraca

i $\partial_t \psi = H \psi$ możemy dokonać $\psi = e^{-is} \psi'$
i $\partial_t \psi' = \left[e^{is} (H - i \frac{\partial}{\partial t}) e^{-is} \right] \psi'$
↑
tylko udeś e^{is} nowy hamiltonian H'

$$H = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m$$

możemy tylko pisać $H = i \frac{\partial}{\partial t}$ me tylko elementy
dużo więcej

Przeistatnienie FOLDY - Wout house

przy pociągach swobodny:

$$S = -i\beta \frac{\bar{\alpha}\bar{p}}{|\bar{p}|} \theta = \frac{-i\bar{\alpha}\bar{p}}{|\bar{p}|} \theta$$

$$e^{is} = e^{i\frac{\bar{\alpha}\bar{p}}{|\bar{p}|}\theta} = \cos\theta + \beta \frac{\bar{\alpha}\bar{p}}{|\bar{p}|} \sin\theta$$

$$U = e^{is} U e^{-is} = U' = \alpha\bar{p} (\cos 2\theta - \frac{m}{|\bar{p}|} \sin 2\theta) + \beta (m \cos 2\theta + |\bar{p}| \sin 2\theta)$$

chcemy żeby współrz. $\bar{\alpha}\bar{p} = 0$

$$\cos 2\theta = \frac{m}{|\bar{p}|} \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{|\bar{p}|}{E} \leftarrow \text{now.} \\ \cos 2\theta &= \frac{m}{E} \end{aligned}$$

$$U' = \beta \sqrt{m^2 + p^2} = \beta \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + p^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2 + p^2} \end{pmatrix}$$

to nie stało się
w przekształceniu
- niedobrze

z tej postaci widać widno dla cząstek swobodnych

zob. to wygląda w rzeczywistym polu - prowadzi do nieciągłości w funkcjach

zob. że pole nie jest, $|p|$ nie jest to koniecznie $\frac{|p|}{m}$
 $\frac{B}{m^2}, \frac{E}{m^2} \leftarrow$ pole elektryczne
 $\leftarrow$ inne por. normalizacji

Rachunki bardziej uciążliwe $\rightarrow$ bez punktów

$$\pi = \bar{\alpha}\bar{\pi} + \dots, \bar{\pi} = \bar{p} - e\bar{A}$$

$$H = \bar{\alpha}\bar{\pi} + p\pi - eA \cdot + \frac{ek}{2m} (i\beta\bar{\alpha}\bar{E} - \beta\bar{\sigma}\bar{B})$$

$$\begin{aligned} &\text{ten wzór postępuje z} \\ &\beta(F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) \\ &\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{aligned}$$

chcemy nowy hamiltonian H'

podobny ze zmiennymi odpowiadającymi operatorom $\hat{S} \leftarrow$ podobny

$$S = \frac{-i}{2m} \left\{ \beta\bar{\alpha}\bar{\pi} - \frac{1}{3m} \beta(\bar{\alpha}\pi)^2 + \frac{1}{2m} [\bar{\alpha}\bar{\pi}, eA^0 - i\bar{\alpha}\bar{E}] \right\} - \frac{i}{2m} \left\{ \frac{ek}{2m} i\bar{\alpha}\bar{E} - \frac{ek}{4m^2} [\bar{\alpha}\bar{\pi}, \beta\bar{\Sigma}\bar{B}] \right\}$$

przekształćmy do tej postaci

now Campbell's Beten Hestovpa ?

$$H_{eff} = H + [iS, H - i\partial_t] + \frac{1}{2!} [iS, [iS, H - i\partial_t]] + \dots$$

$$H_{eff} = \frac{H^2}{2m} + eA^0 + \frac{e}{2m} (1+k) \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \frac{\pi^4}{8m^3} +$$

↑ 2 energii kinetycznej

$$+ \frac{e}{8m^2} (1+2k) \left[\text{div } \vec{E} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}) \right] +$$

↑ z poprawkami

(dla pola Coulomba proporcjonalnego do $\vec{r}$)

$$+ \frac{e}{8m^3} \left\{ \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \pi^2 + \pi^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \hbar [\vec{\pi} \cdot \vec{B} \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \vec{\pi} \cdot \vec{B}] \right\}$$

dla E pola Coulomba to jest spin-orbita

$$A^0 = - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = -\nabla A^0 = - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{e}{8m^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{E}) = - \frac{e}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) =$$

$$= - \frac{e}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \left(- \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{p} \right) = \frac{Ze}{4m^2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r^3}$$

dla elektron $\hbar \approx \frac{h}{2\pi} + \dots$

to poprawka
magnetyczna
jedynie w
niektórych
zobacz

ten hamiltonian można napisać jako

$$H = H_{NR} + H_R$$

↑ ↑
nie-relat. relat.

$$E_R^{(1)} = \langle \Phi_{NR} | H_R | \Phi_{NR} \rangle$$

czy można nie relatywizować? I to jest pytanie!

$$E_R^{(2)} = \langle \Phi_{NR} | H_R \frac{1}{(E - H)^2} H_R | \Phi_{NR} \rangle$$

ile chcieliśmy wyrazić!

$$H = H_{NR} + H_R^{(1)} + H_R^{(2)}$$

↑ obdłowi się
dodaje korekty!

w literaturze → pisane, że nie ma w II porządku, ale ma!

→ kwantowanie pola E-M

2. 02.08.

WYR

PACHUCI

PON

Kwantowanie pola elektromagnetycznego

PACHUCKI
QED
3.03.08
WYK
PON

Równania Maxwella

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (*) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \partial_t \vec{E} + \vec{j} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & (**)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= 1 \\ \epsilon_0 &= 1 \\ \mu_0 &= 1\end{aligned}$$

wielkości $\vec{E}$ i $\vec{j}$ tworzą czterowektor $(\vec{E}, \vec{j})$

pole $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A}$

można do pot. dodać $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$ wtedy pole $\vec{E}$ i $\vec{B}$ nie zmienia się
 $A^0 \rightarrow A^0 - \partial_t \lambda$

→ kanoniczne kwantowanie

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ - cechowanie kulombowskie // spełnione tylko w jednym układzie odniesienia

~~Wzrosty i spadki~~

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t A^0 = 0$ - cechowanie lorentza

↓ dla oddz. mikroelektrodynamiki

↓ tam gdzie uch. sym. lorentza jest istotne - np. rozpraszanie, ugięcie itp. cechowanie

POLA $\vec{E}$ i $\vec{B}$ tworzą tensor antysymetryczny

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Wtedy drugie równanie

Maxwella zapisuje się jako

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \Leftarrow (**)$$

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

↓ zwężony

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$$

2 Iwój parę równań Maxwella

$$(*) \Rightarrow \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\tilde{F}_{0i} = B_i$$

$$\tilde{F}_{ij} = \epsilon^{ijk} E_k$$

→ zajmują się kwant. swobodnego pola → brach i ródet

POLE SWOBODNE:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E}$$

można utworzyć 2 pol $F^{\mu\nu}$ due shaley

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$(\equiv \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2))$$

$$\text{lub } -\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$\text{lub } \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \text{ — dostany p\u0119m\u0119}$$

dywergencja nie wp\u0142ywa na element separacji

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\int d^4x \mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\int \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \partial^\nu A^\mu$$

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}(A^\mu, A^\mu_{,\nu}) = \int d^4x \left(\delta A^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} + \underbrace{\delta A^\mu_{,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_{,\nu}}}_{\partial_\nu \delta A^\mu} \right) =$$

$$\boxed{A^\mu_{,\nu} = \partial_\nu A^\mu}$$

↑ NAZNE
OZNACZENIE!

CAŁKUJEMY PRZED WEŚCI

$$= \int d^4x \delta A^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_{,\nu}} \right) = 0$$

ty\u0142o to w pol w\u0142\u0105p me sp n\u00f3wek zero, czyli

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} + \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu_{,\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = 0$$

! ty\u0142o widz\u0105c je to jest dobre postr\u0119nienie g\u0119sto\u015bci separacji
wyrazimy je w\u0142\u0105c p\u0142er potencja\u0142\u0105

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad \leftarrow \text{nie jest to wsp\u00f3ln. dynamiczne}$$

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = -\dot{A}^k - \frac{\partial A_0}{\partial x^k} = E^k$$

$$\text{W\u0142\u0105czymy } A^0 = 0$$

w przypadku pola swob. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ } $\Rightarrow$ relacja do warunk\u0119 w przypadku pola swob. swob.

gęstość hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

$$[A^i(x,t), A^j(x,t)] = 0$$

$$[\pi^i(x,t), \pi^j(x,t)] = 0$$

$$[\pi^i(x,t), A_j(x',t)] = -[E^i(x,t), A^j(x',t)] = -i\delta_{ij}\delta^3(x-x')$$

↑ ten wzorek nie zgody z zachowaniem!

→ nie możemy automatycznie tego też stosować → trzeba to trochę zmodyfikować - w tym celu wprowadzamy nową funkcję $\delta^\perp$ - delta prostopadła

$$\delta^\perp_{ij}(\vec{x}-\vec{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$$

$$\delta_{ij}\delta^3(x-x') \rightsquigarrow \delta^\perp_{ij}(x-x')$$

delta + ← najnowy 2 tensor składowy h

tenor pismy

$$[\pi^i_{(A)} A_{j(B)}] = -i\delta^\perp_{ij}(x-x')$$

$$[E^i(\vec{x},t), A^j(\vec{x}',t)] = i\delta^\perp_{ij}(\vec{x}-\vec{x}')$$

teraz używamy operatorów A i E przez operatorów kreacji i anihilacji

$$\vec{A}(x,t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} = \sum_{\lambda=1}^2 \vec{E}(k,\lambda) \left[a(k,\lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(k,\lambda) e^{ikx} \right]$$

$$\omega = k^0 = |\vec{k}|$$

$$k^2 = k_\mu k^\mu = 0$$

poszukamy A w tej postaci

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

transformacje odwrotne

$$a(k,\lambda) = \int d^3x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \vec{E}(k,\lambda) [\omega \vec{A}(x) + i \dot{\vec{A}}(x)]$$

$$a^\dagger(k,\lambda) = \int d^3x \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \vec{E}(k,\lambda) [\omega \vec{A}(x) - i \dot{\vec{A}}(x)]$$

te dwie wartości są zerem! (to wynika z tego, że $\text{div} A = 0$)

wypis: a i $a^\dagger$ wstawić i zobaczyć co wyjdzie $\rightarrow$ ew. do domu

możemy spojrzeć na a i $a^\dagger$ i pokazać, że odpowiadają
operatorom na E i A

$$[a(k, \lambda), a(k', \lambda')] = 0$$

$$[a^\dagger(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] = 0$$

$$[a(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] = \frac{\int d^3x d^3x' e^{i(kx - k'x')}}{2\sqrt{\omega\omega'} (2\pi)^3} (\omega + \omega') \cdot \epsilon_i(k, \lambda) \epsilon_j(k', \lambda') \delta_{ij}^+(\vec{x} - \vec{x}') \quad \boxed{t=t'}$$

położony war na def. δ^+ $\rightarrow$ dostany i wyjście na koniec

$$[a(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

ponieważ słabo widzi do napiszemy

$$\rightarrow \int d^3x d^3x' \frac{e^{i(\vec{k}\vec{x} - \vec{k}'\vec{x}')}}{\sqrt{\omega\omega'} (2\pi)^3} \left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) \epsilon_i(k, \lambda) \epsilon_j(k', \lambda') \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}\right) e^{i\vec{q}(\vec{x} - \vec{x}')} =$$

bo $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$
i możemy to ująć.

prawie
ale tutaj $\rightarrow$
niepotrzebne

$$\left(\sum_{\lambda} \epsilon_i(k, \lambda) \epsilon_j(k, \lambda) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right)$$

$$\vec{\epsilon}(k, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(k', \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{// bo ortogonalne wektory polaryzacji}$$

podsumowanie:

$$[a(k, \lambda), a^\dagger(k, \lambda)] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

hamiltonian

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} = (\vec{x}, t) = \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon(k, \lambda) [a(k, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(k, \lambda) e^{ikx}]$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon(k, \lambda) [a(k, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(k, \lambda) e^{ikx}]$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda} \left[i\vec{k} \times \vec{E}(k, \lambda) a(k, \lambda) e^{-ikx} + i\vec{k} \times \vec{E}(k, \lambda) a^\dagger(k, \lambda) e^{ikx} \right]$$

QED
PACHUCKI
WYKŁAD 3
3.03.08
PON

$$H = \int d^3k \omega \left(\sum_{\lambda=1}^2 a^\dagger(k, \lambda) a(k, \lambda) + \frac{1}{2} \right) \leftarrow \text{ten wyraz po podstawieniu}$$

to całe
nie istnieje $\rightarrow$ 2 + skł. po całości
przebieg

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{E} \times \vec{B} = \int d^3k \vec{k} \sum_{\lambda=1}^2 a^\dagger(k, \lambda) a(k, \lambda)$$

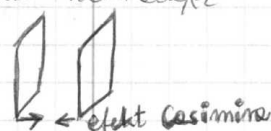
def. stan próżni w ten sposób, że nie ma a to $a|0\rangle = 0$

sta. jedno fotony 2 definiujemy $|k, \lambda\rangle = a^\dagger(k, \lambda)|0\rangle$

P^μ - interakcja pędu $P^\mu |k, \lambda\rangle = k^\mu |k, \lambda\rangle$

// jeżeli spróbujemy odpowiedzieć to już po operacjach kreacji - anihilacji
 $\rightarrow$ jeżeli chodzi o H , to może być ciekawie wyglądać na $a^\dagger a \rightarrow$ mógłoby być inne

to $\frac{1}{2}$ było się ułamek $\rightarrow$ interpretacja energii próżni, można ją uważać za nieskończoną
wsk. błędne $\rightarrow$ kwantowanie z uwzględnieniem $\rightarrow$ np. przeniesienie w próżni



Poprawa / postać PROPAGATORA

PROPAGATORY

najprostszy propagator

$$G^{ij}(x-x') = \langle 0 | A^i(x') A^j(x) | 0 \rangle$$

$\rightarrow$ w p. x mamy fotony, w punkcie x' go anihilujemy
anihilacja tworze foton

i mamy amplitudę takiego zdarzenia

$$G^{ij}(x-x') = \langle 0 | A^i(x') A^j(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{E}^i(k, \lambda) a(k, \lambda) e^{-ikx'} \cdot$$

$$\int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'(2\pi)^3}} \sum_{\lambda'=1}^2 \vec{E}^j(k', \lambda') a^\dagger(k', \lambda') e^{ik'x} | 0 \rangle$$

wynik wyliczenia przed elementem macierzy

$$= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{E}^i(k, \lambda) e^{-ikx'} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'(2\pi)^3}} \sum_{\lambda'=1}^2 \vec{E}^j(k', \lambda') e^{ik'x'} \langle 0 | a(k, \lambda) a^\dagger(k', \lambda') | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | [a(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] | 0 \rangle = \delta^3(k-k') \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$= \int \frac{d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \underbrace{\epsilon^i(k, \lambda) \epsilon^j(k, \lambda)}_{\text{to one upins jels } \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}} e^{-ik(x'-x)}$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x'-x)} \frac{1}{2k} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) = G^{ij}(x'-x)$$

// op. nie mlie na odl. weso przestrennych

→ nie trzele wlezy, rel. sweto ghes deteno

→ metat dla $t=t'$ nie mlie → w tej interpretacji jest to mierzalne amplituda

→ to co mlie na odl. weso przestrennych to komutator pol

milie
pore
storne
swietly

$$\Delta^{ij}(x-x') = [A^i(x'), A^j(x)] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \left[e^{-ik(x'-x)} - e^{ik(x'-x)} \right]$$

$$\text{gdyzys polozu } t'=t \rightarrow \text{to my } 2i \sin(k(x'-x))$$

$$\int \dots = 0 \text{ bo nieparzyste!}$$

$$= -2i \sin k(x'-x)$$

→ przy pomocy teorii zwisane jest z komutatorami pol

konstatac 2 bez propagatora mone walei $[E, B]$ -

$$[E^i(x', t'), B^j(x, t)] = \int y=x'-x = \frac{\partial}{\partial y^0} \frac{\partial}{\partial y^j} E^{ij} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} (e^{-iky} - e^{iky}) =$$

$$\rho(x) = \text{Im} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k} e^{ikx} = \frac{1}{4\pi x} (\delta(x-t) - \delta(x+t))$$

$$= -i \frac{\partial}{\partial y^0} \frac{\partial}{\partial y^j} E^{ij} D(y)$$

PROPAGATOR FEYNMANNA:

$$i G_F^{ij}(x-x') = \langle 0 | T A^i(x) A^j(x') | 0 \rangle$$

↑
jeeli $t' > t$ to wstecz. jeeli $t' < t$ to
przetwarz $A' \leadsto A$

↳ uporządkowanie chronologiczne

$$= \theta(t'-t) \langle 0 | A^i(x) A^j(x') | 0 \rangle + \theta(t-t') \langle 0 | A^j(x') A^i(x) | 0 \rangle =$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\theta(t'-t) e^{-ik(x'-x)} + \theta(t-t') e^{ik(x'-x)} \right] \cdot \frac{1}{2k} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) =$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{-ik(x'-x)}$$

$A^0 = 0 \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$

Unakowanie kanowe Giepty-Bleulera

$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^2 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial A)^2$

zmatyżowanie równie Maxwella (równie pola 2 temp $\mathcal{L}$)

$\nabla A_\mu - (1-\lambda) \partial_\mu (\partial A) = 0 \quad (*)$

W szczególności
 $\pi^0 \neq 0$

$\pi_\mu^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^0} = F^{0\mu} - \lambda g^{\mu 0} (\partial A)$

jeśli ~~z~~ wypiszemy $\mu = 0$ to z (*) wynika, że

$(*) \Rightarrow \square (\partial A) = 0$

standardowe reguły komutacji

$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{y})] = i \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$

/współczynniki wiel. fizy. będą mierzalne w λ

$\lambda = 1$ dla utwierdzenia (wsam mówią że to jest ustalenie ustalone - jednoznaczne (feynmanowski))

wtedy w równiu (*) temp. się odwołują się zero

$\square A_\mu = 0 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu$

$\pi_\mu^0 = -\dot{A}^\mu$

niezależne kanoniczne reguły komutacyjne:

$[A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] = 0 = [\dot{A}_\mu(t, \vec{x}), \dot{A}_\nu(t, \vec{y})]$

$[\dot{A}_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$

$\lambda = 4$ wartości

jakie utrzymywane symetrie Lorentzowskie

$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\epsilon^{(1)}_\mu(k) E^{(1)}_\mu(k) e^{-ikx} + \epsilon^{(2)}_\mu(k) E^{(2)}_\mu(k) e^{ikx} \right]$

$\epsilon^{(1)}_\mu \in \text{set normowany}$
 $\epsilon^{(1)}_\mu = (1, 0, 0, 0)$

two trzy $\vec{\epsilon}^{(1)}, \vec{\epsilon}^{(2)}$ - ortogonalne do nich - których polaryzacje

$\vec{\epsilon}^{(3)} \parallel \vec{k}$ oraz $\vec{\epsilon}^{(3)} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

one $\vec{\epsilon}^{(0)} = \vec{n}$

4 ortogonalne wzajemnie polaryzacje

w szczególności jeśli $\vec{k} \parallel \hat{z}$ to $k = (0, 0, k)$ mamy

$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

normalizacja
można zapisać $\rightarrow \boxed{E^{(\lambda)}(u) E^{(\lambda')}(u) = \delta^{\lambda\lambda'}}$

komutacja prądu i tenzora operatorów kreacji i anihilacji:

$$[a^{(\lambda)}(u), a^{(\lambda')\dagger}(u')] = -\delta^{\lambda\lambda'} \delta^3(u-u')$$

prócz tego $[a^{(\lambda)}(u), a^{(\lambda')}(u')] = 0$

ale $\lambda = \lambda' = 0$ mamy $-\delta^3(u-u')$ jak interpretujemy minus?

ciężka sprawa $\rightarrow$ zero do bezu znaczenia

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -i g_{\mu\nu} \Delta(x-y)$$

gdzie $\Delta(x) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k^2) \overbrace{E(k^0)}^{\text{funkcja znaku}} e^{-ikx}$

wynik obliczeń
których
nie
prezentujemy
(tychś temu
było)

stan próżni $a^{(\lambda)}(u)|0\rangle = 0$

stan jednoczątkowy: $|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle$

poliny normy tego stanu $\rightarrow$ norma charakterystycznie ujemna

$$\langle 1|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f^*(k) f(k') \cdot \underbrace{\langle 0| a^{(0)}(k) a^{(0)\dagger}(k') |0\rangle}_{-\delta^3(k-k')} \neq 0$$

(neg.) < 0

mamy więc w el. dyn. klasycznej $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 = \text{div } \vec{A}$

UWA6A

teraz nie możemy więc nie operatorów pola, tylko nie stany! $\rightarrow$

$\rightarrow \langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0$ ale, jeżeli tak. definiujemy stany

fizyczne, to te definiuje nas jedyna metoda $\rightarrow$

$\rightarrow$ te stany nie tworzą przestrzeni Hilberta!

$\rightarrow$ ok, to nie robimy tak tylko inaczej

∂A spełnia swobodne równanie Maxwella

~~stany~~ stany fizyczne $\rightarrow$ stany takie, że $\boxed{\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\psi\rangle = 0}$

$\rightarrow$ ten warunek nie narusza struktury pr. względnej

(używamy faktu, że ∂A_μ jest polem swobodnym

całe przestrzeń kłóciła naturalnie się rozkłada

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle \oplus |\psi_-\rangle$$

↑ symetryczne
↑ antysymetryczne

$$i \partial A^{(\lambda)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0,3} \alpha^{(\lambda)}(k) \varepsilon^{(\lambda)} \cdot k$$

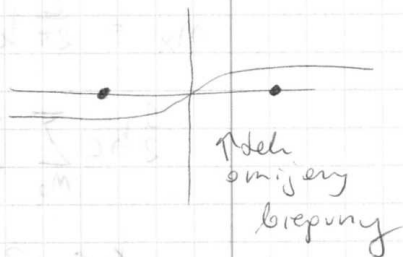
ale nie możemy dobrać takiego $\alpha^{(0)}(k)$ i $\alpha^{(3)}(k)$ aby było $[\alpha^{(0)}(k) - \alpha^{(3)}(k)] |\psi_+\rangle = 0$
 dla każdego k (nie ma takiego $\alpha^{(0)}$ i $\alpha^{(3)}$), więc norma ujemna

$$H = \int d^3k \omega_k \left[\sum_{\lambda=1}^3 \alpha^{(\lambda)\dagger}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) - \alpha^{(0)\dagger}(k) \alpha^{(0)}(k) \right]$$

$$T A_\mu(x) A_\nu(y) = \theta(x^0 - y^0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A_\nu(y) A_\mu(x)$$

$$\langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = i g_{\mu\nu} G_F(x-y)$$

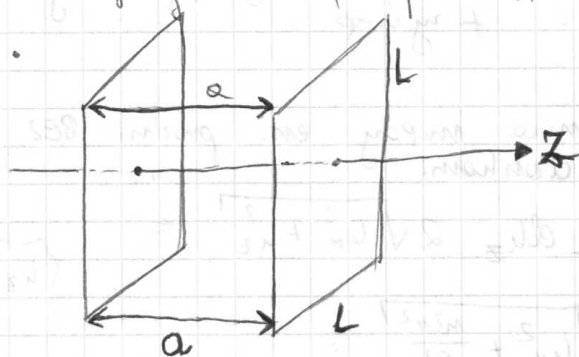
$$G_F(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon}$$



• EFEKT CASIMIRA

Wzrostyśmy idealny próżnię, żadnych fotonów, więc $T=0$

dwie nieskończone płytki



natężymy periodyczne warunki brzegowe

dla oscyl. harm. $H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$

reguły komut. $[q, p] = i\hbar$

po przekształceniu kanonicznym:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q + i p)$$

$$q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q - i p)$$

$$[q, q^\dagger] = 1$$

$$H = \hbar \omega \left(q^\dagger q + \frac{1}{2} \right)$$

• co oznacza to pusty przewód? pole E stygnie do pow. = 0

$$E_{||} = 0$$

możemy mody numerować wektorem falowym

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{1}{2} \pi n_z$$

$$E = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega \right) = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \hbar c |\vec{k}_n| =$$

półprzewodnik

$$= \frac{1}{2} \hbar c \sum_{n_z} \sum_{\lambda} \left(\sum_{n_x} \sum_{n_y} |\vec{k}_n| \right)$$

przechodzimy do
mieszkanicowego uśrednienia pól

$$n_x = \frac{L}{2\pi} k_x, \quad \Delta n_x = \frac{L}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{L}{2\pi} \Delta k_y$$

$$\frac{1}{2} \hbar c \sum_{n_z} \sum_{\lambda} L^2 \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} |\vec{k}| = \left\{ n_z = n \right\}$$

$$= \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \left(|k_{||}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{||}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \right)$$

(Jaka wartość średnia
→ tylko pole prądu
stygne proporcjonalnie
do średniej)

↑ to całe robienie do ∞ - dopiero uśrednimy z
miej wielkości fizyczne

Nas będzie interesowało różnica między en. próżni BEZ
ścianek a energią próżni ze ściankami

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} dk_z 2 \sqrt{k_{||}^2 + k_z^2} = \left\{ k_z = \frac{n\pi}{L} \right\}$$

$$= \frac{\hbar c}{2} \int L^2 \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn 2 \sqrt{k_{||}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} =$$

$$= \frac{\hbar c}{2} \int$$

$$E = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \left(|k_{||}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{||}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} - 2 \int_0^{\infty} dn \sqrt{k_{||}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \right)$$

→ odległość energii próżni

→ niefizyczne uśrednienie → dla doświadczeń L pow. pól jest
dobrym przewidywaniem → NIEPRAWDA.

przewodnik przestaje być dobrym przew. gdy pojemność L

wprowadzamy pewną funkcję $f(k)$

mnożymy obie strony $f(k_n)$ lub $f(\sqrt{k_n^2 + \frac{\pi^2 n^2}{Q^2}})$

$$u = Q^2 k_n^2 \cdot \frac{1}{\pi^2}$$

~~gęstość energii~~

całkowite po hooke'ach tymczasem

$$\epsilon = \hbar c \frac{\pi^2}{4Q^3}$$

małe u $f(u) = 1$

duże u , $f(u) \rightarrow 0$
(nie spełniający

PALUCHI
QED
10.03.08
wn 4
POM

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi}{Q} \sqrt{u+n^2}\right) - \int_0^{\infty} dm \sqrt{u+m^2} f\left(\frac{\pi}{Q} \sqrt{u+m^2}\right)$$

$$= \hbar c \frac{\pi}{4Q^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + F(3) + \dots - \int_0^{\infty} dm F(m) \right]$$

$$F(m) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u+m^2} f\left(\frac{\pi}{Q} \sqrt{u+m^2}\right)$$

wzór Eulera - MacLaurina

$$\frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) - \int_0^{\infty} dm F(m) = -\frac{1}{2!} B_2 F'(0) + \left(-\frac{1}{4!}\right) B_4 F'''(0) + \dots$$

zaniedbamy wyższe pochodne

Bernoulliego 2

↓

$$F(m) = \int_{m^2}^{\infty} du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi \sqrt{u}}{Q}\right)$$

$$F'(m) = -2m^2 f\left(\frac{\pi m}{Q}\right) \leftarrow \text{DOBRIE} \quad F'(0) = 0$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \quad B_4 = \frac{1}{30} \quad F'''(0) = -4$$

$$\epsilon = \hbar c \pi^2 \frac{1}{Q^3} B_4 \cdot \frac{1}{4!} (-4) = \frac{-\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{Q^3}$$

siła na jednostkę powierzchni

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{Q^4}$$

(potwierdzono eksperymentalnie)

piękny
(niezwykle) obójstne
wynisze

KWANTOWE POLE E-M ODDZIAŁUJĄCE Z KLASYCZNYM PRĄDEM

QED
PACHUCKI
17.03.08
WTK 5

○ $\partial_\mu j^\mu = 0$ (zachowawczość ładunku)

$$I = - \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \underbrace{j_\mu A^\mu}_{j_\mu \rightarrow \text{klas. prąd}} \right) - \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A^\mu)^2$$

↑ powinno być λ
nie zależy od pochodnych
czasowych $\rightarrow$ pędy i reguły komutacji
też są takie same jak bez oddziaływania

$$[A_\mu(t, x), \dot{A}_\nu(t, x)] = -g_{\mu\nu} \delta^3(x-y) \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu \quad \square A^\mu = j^\mu$$

w terminach f-ukcji Greena

$$A^\mu(x) = \int d^4y G(x-y) j^\mu(y) + A_{\text{hom}}^{(0)}(x)$$

$$\square_x G(x-y) = \delta^4(x-y)$$

w zależności od warunków brzegowych $\rightarrow$ retarded

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{(p^0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{p}^2} = \frac{1}{2\pi} \Theta(+x_0) \delta^3(\mathbf{x}) \rightarrow \text{advansowane}$$

$$A^\mu(x) = A_{\text{in}}^\mu(x) + \int d^4y G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y) = A_{\text{out}}^\mu(x) = \int d^4y G_{\text{adv}}(x-y) j^\mu(y)$$

~ zach. nast. granice:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} A^\mu(x) &= A_{\text{in}}^\mu(x) \\ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} A^\mu(x) &= A_{\text{out}}^\mu(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{SEABA} \\ \text{GRANICA,} \\ \text{nie kładym} \\ \text{X osobno} \end{array}$$

$$A_{\text{out}}^\mu(x) = A_{\text{in}}^\mu(x) + \int d^4y \underbrace{[G_{\text{ret}}(x-y) - G_{\text{adv}}(x-y)]}_{\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta^3(\mathbf{x})} j^\mu(y)$$

$$\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta^3(\mathbf{x}) = -\Delta(x) = G_-(x-y)$$

↑ funkcje znaku ± 1

$$H = H_0 + H_I \text{ (swobodny + oddziaływanie)}$$

$$(*) \quad \partial_t A^\mu(t, x) = i [H(t), A^\mu(t, x)] \quad \text{pole spełniające r-nie hamiltona}$$

A_{in}^μ spełniające r-nie Maxwella

$$\partial_t A_{in}^\mu(t, x) = i [H_0^{in}(t), A_{in}^\mu(t, x)]$$

$$A^\mu(t, x) = U^{-1}(t)^\dagger A_{in}^\mu U(t)$$

$$(u) \quad i \frac{d}{dt} U(t) = H_I^{in}(t) U(t) \quad \text{ewolucja}$$

$$\partial_t A(t, x) = \partial_t (U^{-1}(t) A_{in}(t, x) U(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} U^{-1} \right) A_{in} U + U^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_{in} \right) U + U^{-1} A_{in} \partial_t U$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} U^{-1} \cdot U \right] [U^{-1} A_{in} U] + U^{-1} (i [H_0^{in}, A_{in}]) U \\ &+ [U^{-1} A_{in} U] [U^{-1} \partial_t U] = [U^{-1} \cancel{\partial_t U} A] + i [H_0, A] + \\ &+ A [U^{-1} \partial_t U] = -U^{-1} H_I^{in} U A + i [H_0, A] + A U^{-1} (-i) H_I^{in} U = \\ &= i [H_I, A] + i [H_0, A] = i [H, A] \end{aligned}$$

// Odtworzyliśmy wzór (*)

równanie różniczkowe 1 z war. brzegowym

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = I \quad (\text{może być } I e^{i\varphi})$$

możemy scałkować $\int_{-\infty}^t$ i zapisać w postaci całkowej

$$U(t) = I - i \int_{-\infty}^t H_I(t') U(t')$$

zrobić z tego nieskończony szereg:

$$U(t) = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right)$$

↑
ilozyn chronologiczny

$$T(H_I(t), H_I(t')) = \theta(t-t') H_I(t) H_I(t') + \theta(t'-t) H_I(t') H_I(t)$$

// po lewej późniejszy, po prawej
wcześniejszy

jak pokażesz, że to jest faktycznie rozwiązanie?

dzielimy na małe kawałeczki, gdzie hamilt.

• mi zależy od czasu

$$u(t) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^t dt' H_I^{in}(t') \right] = e^{-i \int_{-\infty}^t dt H_I(t)}$$

$$= e^{i \Delta t H_I(t-\Delta t)} \cdot e^{-i \Delta t H_I(t-\Delta t)} = e^{-i(t-t_1) H_I(t_1)} \cdot \dots \cdot e^{-i(t_k-t_{k-1}) H_I(t_{k-1})} \cdot \dots$$

// nie zawsze daje się wyznaczyć ściśle T , ale on nas nie interesuje, raczej jego granice w $t \rightarrow \infty$

// iloczyn chronologiczny ma własność separelności

$$T \left(\exp \int_{t_1}^{t_3} dt Q(t) \right) = T \exp \left(\int_{t_1}^{t_2} dt Q(t) \right) + T \exp \left(\int_{t_2}^{t_3} dt Q(t) \right)$$

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right)$$

$$\text{W naszym przypadku } \Rightarrow \int d^3x j(x) A^\mu(x) = - \int d^3x \mathcal{L}_I(x)$$

$$S = T \exp i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_I(x)$$

$$e^A e^B = e^{A+B + [A,B]/2}$$

$$\left(\text{dla } [A, [A,B]] = [B, [A,B]] = 0 \right)$$

// będziemy go stosować tutaj

$\rightarrow$ połączymy exponensy w jeden T

PACHOLSKI

QED

WYK 5

17.03.08

$$S_0 = \exp \left[-i \int d^4x A_\mu(x) j(x) \right] =$$

Рачуни:
wz. 5
17.03.08
PON

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A^- + A^+ \\ \uparrow \text{ op. krepi} \quad \uparrow \text{ op. liney} \\ \text{annihilacy} \end{array} \right.$$

$$= \exp \left[-i \int d^4x A_{in}^{(-)}(x) j(x) \right] \exp \left[-i \int d^4y A_{in}^{(+)}(y) j(y) \right] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \cdot [A_{in}^{(-)}(x) j(x), A_{in}^{(+)}(y) j(y)] \right\}$$

$$\Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [A_{in}^\mu(x), A_{in}^\nu(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | [A_{in}^{\mu(-)}(x), A_{in}^{\nu(+)}(y)] | 0 \rangle \\ = \underbrace{(-\langle 0 | A_{in}^{\nu(+)}(x) A_{in}^{\mu(-)}(x) | 0 \rangle)}_{\substack{\uparrow \text{ zmaleziemy} \\ \text{komutator, lbo} \\ \text{drugi skladnik daje 0}}} \cdot (\underbrace{\Theta(x^0 - y^0) + \Theta(y^0 - x^0)}_{\text{(jedylnka)}}$$

$$\cancel{\dots} = T \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle \quad // \text{sprowadze sie do} \\ \text{iloczynu chronologicznego}$$

(ten czynnik przesunie lęz. porządku $\rightarrow$ ma być normalizowany)

$\rightarrow$ przewidywano, że fakt nie zostanie normalizowany

$$J^\mu(y) = \int d^4x j^\mu(x) e^{-i k x}$$

$$J^\mu(-y) = J^{\mu*}(y)$$

$$k + J^\mu = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y [A_{in}^{(-)} j(x) ; A_{in}^{(+)} j(y)] =$$

$$J^\mu(k) = k^\mu J_{||}^\mu(k) + J_\perp^\mu(k)$$

$$J_\perp^\mu(k) = - \sum_{i=1}^n J_i \epsilon^\mu_i(k)$$

$$J^* J = J_\perp^* J_\perp = \\ = - [J_1^2 + J_2^2]$$

$$S_0 = \exp[-i \int d^4x A^{(-)}_{in}(x) i(x)] \exp[-i \int d^4x A^{(+)}_{in}(x) j(x)] \\ \exp\left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^4u}{2u(2\pi)^3} [J_1(u)^2 + J_2(u)^2]\right]$$

$$P_0 = |\langle 0_{out} | S_0 | 0_{in} \rangle|^2 = \exp\left\{-\int \frac{d^3u}{2u(2\pi)^3} [J_1(u)^2 + J_2(u)^2]\right\}$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int \frac{d^3u}{2u(2\pi)^3} [J_1(u)^2 + J_2(u)^2] \right\}^n \exp\left\{-\int \frac{d^3u}{2u(2\pi)^3} [J_1(u)^2 + J_2(u)^2]\right\}$$

number Poisson (strongly coherent state maps related Poisson)

→ strong resonance

$$\bar{n} = \int \frac{d^3u}{2u(2\pi)^3} [J_1^2 + J_2^2]$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \bar{n}^n e^{-\bar{n}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$P_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

QED
PACHUCKI
31.03.08
WTKG

↑ prawdopodobieństwo wyemitowanie n fotonów

$$\bar{n} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [J_1^2 + J_2^2]$$

↑ ↑ prędy odpowiadające dwóm polaryzycjom

mamy ustalić:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{p_i}{m} t & t < 0 \\ \frac{p_f}{m} t & t > 0 \end{cases}$$

$$J^\mu(k) = ie \left(\frac{p_f^\mu}{p_f \cdot k} - \frac{p_i^\mu}{p_i \cdot k} \right)$$

$$j^\mu(x) = e \int dt \frac{dx}{dt} \delta^4(x - x(t))$$

całkę $\frac{d^3k}{k^3}$ rozbieżnie podnerwono
 $\bar{n} = +\infty$

ale energie skończona

$$\bar{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k [J_1^2 + J_2^2] < \infty$$

- jak to interpretować? (? odbieranie promieniowania przez nieskończony odwrócony czas?)

- zawsze jeśli $p_i \neq p_f \rightarrow$ zawsze amplituda elastycznego rozpraszania ma rozbieżność podnerwono

→ usuwamy rozbieżność poprzez rozpatrywanie dwóch procesów

↓
rozpraszanie z emisją fotonu niskoenerg.

↓
rozpraszanie bez emisji

połączenie tego pozwoli usunąć rozbieżność

Mierzelely wistyczne elektrodynemike kwantowe

Hamiltonian czystki mierzelely wistycznej

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

cygniki symplectety cny

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

zanieobujemy to

$$e \rightarrow 2$$

$$p \rightarrow 3$$

ne potneby dusiejszego wywiedu

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + V(\vec{r}) + \sum_{\vec{k}} \int d^3k \hbar \omega_k Q_{k\lambda}^+ Q_{k\lambda}$$

hamiltonian pole E-M

$$[Q_{k\lambda}, Q_{k'\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k} \right)^{1/2} \vec{E}_{k\lambda} \left\{ Q_{k\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + Q_{k\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right\}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \vec{E}_{k\lambda} \left\{ Q_{k\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + Q_{k\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right\}$$

Wade - teorie silnie nierennormalizowalne

→ będziemy w procesach fizycznych wprowadzić obcięcie - wprowadzimy granice w cętkach

→ często ZBYT skomplikowany hamiltonian

→ przybliżenie elektrodynamo - dipolowe

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(0))^2}{2m}$$

(sg jeszcze kwektropole ...)

→ WTEdy równownienie

$$H' = \frac{p^2}{2m} - e\vec{r} \cdot \vec{E}(0) + V'(\vec{r}) + \sum_{\vec{k}} \int d^3k \hbar \omega_k Q_{k\lambda}^+ Q_{k\lambda}$$

reg komutacyjne:

$$[\epsilon_0 E_i(\vec{r}), A_j(\vec{r}')] = i\hbar \delta_{ij}^{\perp}(\vec{r} - \vec{r}')$$

jestli $U^{-1} H U = H'$ to sg równownienie

$$U = e^{\frac{ie}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(0)}$$

(elektronone i fotonone stopnie swobody)

$$U^{-1} \bar{\pi} U = \bar{\pi} \quad (\text{bo } \pi \text{ komutuje})$$

PACHOSKI
8.03.08
WYK 6.
PON

$$U^{-1} (\bar{p} - e \bar{A}) U = \bar{p}$$

↑
w domyśle A jest w rane! (jeżeli nie pisać jakiegoś argumentu)

$$e^{-\frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}} (\bar{p} - e \bar{A}) e^{\frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}} = (\bar{p} - e \bar{A}) + [\bar{p} - e \bar{A}, \frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}] + 0$$

$$= \bar{p} - e \bar{A} + \frac{ie}{\hbar} \bar{A}_i [\bar{p}, \bar{\pi}^i] = \bar{p} - e \bar{A} + \frac{ie}{\hbar} \bar{A}_i (-i \hbar) = \bar{p}$$

↑
znika bo
się kładzie
pojemności -
bo e^{iA} kładzie
z A

$$U^{-1} \left(\frac{1}{2m} (\bar{p} - e \bar{A})^2 + V(r) + H_{em} \right) U =$$

$$= \frac{1}{2m} U^{-1} (\bar{p} - e \bar{A}) U \cdot U^{-1} (\bar{p} - e \bar{A}) U + U^{-1} V(r) U + U^{-1} H_{em} U =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V(r) + U^{-1} H_{em} U$$

$$H'_{em} = U^{-1} H_{em} U \rightarrow \text{mamy } H_{em} \text{ zapisać równie wykorzystując operatory } E \text{ i } H$$

$$H'_{em} = U^{-1} \int d^3x \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2(x) + \mu_0 \vec{H}^2(x)) U =$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 U^{-1} E^i(x) U U^{-1} E_i(x) U + \mu_0 \vec{H}^2(x) \right)$$

$$[A^i(r), A^j(r')] = 0$$

$$[A^i(r), H^j(r')] = 0$$

$$U^{-1} E^i(x) U = e^{-\frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}(0)} E^i(x) e^{\frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}(0)} =$$

$$= E^i(x) + [E^i(x), \frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}(0)] + 0 = E^i(x) + [E^i(x), \frac{ie}{\hbar} \bar{\pi} \bar{A}(0)] =$$

$$= E^i(x) + \frac{ie}{\hbar} \frac{1}{\epsilon_0} \delta^{\perp}_{ij}(x) r^j = E^i(x) - \frac{e}{\epsilon_0} r^j \delta^{\perp}_{ij}(x)$$

↳ wstawiam do H'_{em}

$$H'_{em} = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \left(E^i(x) - \frac{e}{\epsilon_0} r^j \delta^{\perp}_{ij}(x) \right)^2 + \mu_0 \vec{H}^2(x) \right) =$$

$$= H_{em} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \left(-2 E^i(x) \frac{e}{\epsilon_0} r^j \delta^{\perp}_{ij}(x) + \frac{e^2}{\epsilon_0^2} (r^j \delta^{\perp}_{ij}(x))^2 \right)$$

$$= H_{em} + \underbrace{r^j \int d^3x E^i(x) \delta^{\perp}_{ij}(x)}_{E^j(0)} + \frac{e^2}{2\epsilon_0} (r^j)^2 \int d^3x (\delta^{\perp}_{ij}(x))^2$$

$$= H_{em} - \bar{\pi} \bar{E}(0) + \frac{e^2}{2\epsilon_0} \int d^3x (r^j \delta^{\perp}_{ij}(x))^2$$

← nie zależy od położenia
w ogólności
osobliwie

↑ sprzężenie el.-dipolowe (zmiana i elektromagnetyczna)

Wprowadzamy operator obrotu

→ składowej w $V'(r)$

$$V'(r) = V(r) + \frac{e^2}{2\epsilon_0} r^i r^j \underbrace{\int d^3x \delta_{ij}^+(x) \delta_{ij}^-(x)}_*$$

~~W~~

$$H_{em} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{d} \cdot \vec{E}(0) + V'(r) + \sum_{\vec{k}} \int d^3u \hbar \omega_u \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$$

Zapisujemy δ w reprezentacji pólowej

$$\begin{aligned} * &= \int d^3x \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3u'}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij}^+ - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) e^{i\vec{u} \cdot \vec{x}} \left(\delta_{ij}^- - \frac{u'_i u'_j}{u'^2} \right) e^{-i\vec{u}' \cdot \vec{x}} \\ &= \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta V = \frac{e^2}{2\epsilon_0} \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \left(\vec{r}^2 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u})^2}{u^2} \right) = \frac{e^2}{2\epsilon_0} r^i r^j \delta_{ij}^-(0)$$

(zapomnij o δ_{ij}^+)

→ pokazujemy, że hamiltonian się przekształca

- przybliżenie atomu dwupoziomowego (zakładamy, że składowa $\vec{d}$ jest stała, co prowadzi do tego, że jest to dobre)

$$\begin{bmatrix} |u\rangle & |+\rangle \\ |d\rangle & |-\rangle \end{bmatrix} \text{ przybliżenie anizotropii}$$

→ możemy hamiltonian na dwupoziomach po prostu

$$b^\dagger |-\rangle = |+\rangle$$

$$b^\dagger |+\rangle = 0$$

$$b |+\rangle = |-\rangle$$

$$b |-\rangle = 0$$

$$\{b, b^\dagger\} = 1 \quad (\text{reguły antykomytacyjne - fermionowe})$$

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(0))^2}{2m} + V(r) + H_{em}$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e\vec{A}(0) \cdot \vec{p}}{m} + \frac{e^2 \vec{A}(0)^2}{2m} + V(r) + H_{em}$$

jest to $\hbar \omega_0$ ponieważ $\hbar \omega_0$ jest stałą (choć inna to stała, ale nie jest to stała, więc nie jest to stała)

$\langle + |$ - stan uziowy H
2 energie $E_\pm$

$$\langle + | \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) | + \rangle = E_+$$

$$\langle - | \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) | - \rangle = E_-$$

$$E_+ - E_- = \omega_0 \quad (\text{różnica poziomów})$$

str 4

$$\langle + | \frac{e\vec{p}}{m} | - \rangle = \frac{1}{\hbar} \langle + | [H_A, e\vec{r}] | - \rangle = i\omega_0 \vec{d}$$

$\uparrow$ obng $\rightarrow \frac{(e^2 eA)^2}{m^2} \frac{1}{v}$

PACHUCHI
31.03.08
WNU 6
PON

gani $\vec{d} = \langle + | e\vec{r} | - \rangle \leftarrow$ elektryczny moment dipolowy przejścia

$$\frac{e\vec{p}}{m} = i\omega_0 \vec{d} (b^\dagger - b)$$

$$H = \hbar\omega_0 \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) - \underbrace{i\omega_0 \vec{d} (b^\dagger - b) \vec{A}(\omega)}_{H_I} + \sum_k \int d^3u \, \bar{n}_k a_k^\dagger a_k$$

H_I (hamiltonian oddziaływania)

/jedynie jeśli uśrednimy $\vec{A}$ jest to zero, ω_0 to wtedy $\rightarrow$ inercja to dla hamiltonianu daje inne oddziaływanie w przybliżeniu dwuparametrowym

1° mamy się ograniczyć do tego uśrednienia $\vec{A}$ w reperiach $a_k^\dagger a_k$ - czy to bierze?

~~Wtedy~~ $H \approx \hbar\omega_0 b^\dagger b + \hbar\omega a^\dagger a + i\lambda (b^\dagger - b)(a + a^\dagger) \leftarrow$ mierzyc energię tego hamiltonianu.
 $\rightarrow$ kolejne przybliżenie - pominąć $b^\dagger a^\dagger$, ba
 $\rightarrow$ po tym przybliżeniu da się już zrobić myślenie normalne (stony które nie dają prosto mierzyc, a które nie są mierzalne)

$$\langle f | S | u \rangle = \langle f | -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{H_I(t)}{\hbar} | u \rangle =$$

$$S = T \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right) = -\frac{i}{\hbar} \langle f | H_I | u \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(\omega_f - \omega_u)t} =$$

$$S = 1 + T \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} \right\}$$

$$\langle f | S | u \rangle = \langle f | T | u \rangle = 2\pi \delta(\omega_f - \omega_u) \tilde{J}_{fu}$$

$$= 2\pi \delta(\omega_f - \omega_u) \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \langle f | -H_I | u \rangle \tilde{J}_{fu}$$

$$\frac{1}{\hbar} = \sum_f |\tilde{J}_{fu}|^2 2\pi \delta(\omega_f - \omega_u)$$

podstawy do uśrednienia przybliżenia

$$\frac{1}{\hbar} = \sum_f |\tilde{J}_{fu}|^2 2\pi \delta(\omega_f - \omega_u) \approx \frac{1}{\hbar^2} |\langle f | H_I | u \rangle|^2 2\pi \delta(\omega_f - \omega_u)$$

co się ma więcej to poligoni mając H

str 5

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int dV_f |\langle f | H_I | u \rangle|^2 \delta(\omega_f - \omega_u) = \frac{\Gamma}{\hbar}$$

$$\Gamma = 2\pi \int dV_f |\langle f | H_I | u \rangle|^2 \delta(E_f - E_u)$$

↑ interpretacja: $E = E_0 - i \frac{\Gamma}{2}$

↑ energia degen. poziomu

Wtedy $e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} t}$

~~Wtedy~~

~~Wtedy~~ $\frac{e \bar{p} \bar{A}}{m}$ $\downarrow$ $\begin{matrix} \text{pobudzenie} \\ \text{sta + pobudzenie} \end{matrix}$

$\downarrow$ $\begin{matrix} \text{próba} \\ \text{pobudzenie} \end{matrix}$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\hbar^2} \int d^3u \sum_{\lambda} |\langle k_{\lambda} f | -\frac{e \bar{p} \bar{A}(0)}{m} | u, 0 \rangle|^2 2\pi \delta(u_f - u_u)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} |\omega_0 \bar{d} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}\right)^{1/2} \bar{E}_{u\lambda}|^2 \cdot 2\pi \underbrace{\delta(\omega_f - \omega_u)}_{\delta(\omega_0 - \omega_u)}$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\hbar \omega_0}{2\epsilon_0} \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \underbrace{\sum_{\lambda} |\bar{d} E_{u\lambda}|^2}_{= d^i d^j \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{u^2} \right) \approx \frac{2}{3} \bar{d}^2} 2\pi \delta(\omega_0 - \omega_u) =$$

$$= \frac{\omega_0^3 |\bar{d}_{fu}|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} = \frac{1}{\tau}$$

Zad domowe $\rightarrow$ policzyć ω domu τ dla
2p atomu wodoru

$10^{-9} s$

Prezencje Lamba dla niwel. at wodon

//wynik podaj chociaz nie bpsie komplety -> komplety dla atomu relatywistycznego

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + V(r) + \sum_{\lambda} \int d^3k \omega_k a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

$$V(r) = -\frac{Ze}{r} \quad (\text{wezmijmy } Z=1)$$

$$\vec{A}(r) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \vec{E}_k \left\{ a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}$$

1° przyblzenie dipolowe $\vec{A}(r) \Rightarrow \vec{A}(0)$ (obstnp odp. obggnup fabony, ktorych atypoci jest mniej wiphe niz nymier atomu -> mozna to debne mowadnic we ktore relatywistycznym sciste)

wplyw znieedbyjemy $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

2°) pomijemy wyraz $A^2(0)$, bo w mech. kwantowej jest

$\langle n,0 | A^2(0) | m,0 \rangle$ miedzi relaty do n (pewnie wyzstie powny energetyczne o tyle samo)

zgodnie z ruzn. Dne stey 2s, 2p^{1/2} mejp k sey merbiu - sp miedzi sciepleto, ale wasepienie wy 1641, wylosimienie -> chacie efektu debi jest stowore rony ipde cy stowore nne -> se meje, piony efekt - sensowne wyznenie e -> obdetyeni e⁻ z polu

hamilt. smobshaps pole E-H

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \sum_{\lambda} \int d^3k \omega_k a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

$$H_I = -\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(0)$$

relaty polzyi wplyw oddi na atom wodon stowicy nethnes rebuni (miej z mech. kwantowej)

$$\Delta E^1 = \langle \phi | -\frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}(0)}{m} | \phi \rangle = 0 \quad // \quad \text{poprawke w pierwyn!}$$

$$\Delta E^2 = \langle \phi | \left(-\frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}(0)}{m} \right) \frac{1}{E-H} \left(-\frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}(0)}{m} \right) | \phi \rangle$$

↑
drugi pod w mech. kwantowej

~~0+0~~
0+0

Zmiana f. lewnej w I wojnę opóźni

maine interpretation des

$$\left(\frac{1}{E-H} \left(-\frac{e\vec{p}}{m} \vec{A}(\omega) \right) \right) |\phi\rangle$$

poprawa do
f. felix

$DE^{(2)}$ jest rzybiory $\rightarrow$ doigie

$$\Delta E^{(2)} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\lambda} \int_0^{\Lambda} d^3k \cdot \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \langle \phi | \bar{p} \bar{E}_{\omega\lambda} \frac{1}{E - M_A - \omega_k} \bar{p} \bar{E}_{\omega\lambda} | \phi \rangle$$

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda\lambda}^i \epsilon_{\lambda\lambda}^j = \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{u^2} \right)$$

$$\Delta E^{(2)} = \frac{e^2}{m^2} \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega} \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{u^2} \right) \langle \Phi | p^i \frac{1}{E - H_A - k} p^j | \Phi \rangle$$

$$= \frac{4\pi d}{m^2} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int k dk \langle \phi | p^i E - \mathcal{H}_A - \mu p^j | \phi \rangle =$$

$$= \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \cdot \int_0^\infty k dk \langle \phi | p^i \frac{1}{E_H - H_A - k} p^j | \phi \rangle$$

body may write of my (body they're not) election

fero →
Tasha

$$\Delta E^0 = \frac{2d}{3\pi m^2} \int_0^\Lambda k dk \quad \frac{p^2}{(-k)}$$

$$y = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2(m + \delta m)} + \Delta E^{(0)} = \frac{p^2}{2m}$$

$$-\frac{\delta m}{m} \frac{p^2}{2m} = \frac{2\alpha}{3\pi^2} \int_0^{\Lambda} dk p^2 \Rightarrow \delta m = -\frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\Lambda} dk = -\frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \Lambda$$

poprawiony mój na ΔE^2

$$\Delta E^{(2)} = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \int_0^1 u \, du \, \langle \phi | \bar{\rho} \frac{1}{E - H_A - k} \bar{\rho} | \phi \rangle - \frac{\delta m}{m} \langle \phi | \bar{\rho}^2 | \phi \rangle$$

What is semiotic genre

(lunes antes sup. noche,

upiya ob
mody filhay may

$$\Delta E^{(2)} = \frac{2d}{3\pi m^2} \int_0^1 k dk \langle \phi | \bar{p} \left(\frac{1}{E - \gamma - u} + \frac{1}{K} \right) \bar{p} | \phi \rangle =$$

$$\Delta E^{(2)} = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \int dk \langle \phi | \bar{p} \left(\frac{H-E}{H-E+k} \right) \bar{p} | \phi \rangle$$

PACHUŁA
7.03.08
WUZF
PON.

Λ nie może być większe niż masa e^- - inaczej nie ma sensu
wymiarowość

dla $\Lambda = m_e$ bóg jest trochę super mądry

$$\ln \frac{H-E+\Lambda}{H-E}$$

en. własne et. poziom

$$\begin{aligned} H-E &\sim m\alpha^2 \\ \Lambda &\sim m \end{aligned}$$

zatem powiemy $(H-E)^{-1}$

$$\frac{1}{H-E} = \frac{1}{m\alpha^2} \quad \alpha^2 \sim 10^{-4}$$

normalizacja

$$\Delta E^{(2)} = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \langle \phi | \bar{p} \left(\ln \frac{\Lambda}{H-E} \right) \bar{p} | \phi \rangle =$$

$\approx$

$$\ln \frac{\Lambda}{\langle E \rangle}$$

$\uparrow$ średnia energia uwiązania

(dobrze dla stanu o $l=0$
→ orbitale s
kwantowej = 0)

$$\approx \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda}{\langle E \rangle} \langle \phi | \bar{p} (H-E) \bar{p} | \phi \rangle$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ln \frac{\Lambda}{\langle E \rangle} &= \ln \frac{\Lambda}{k_0 R} \\ R &= \frac{m\alpha^2}{2} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &\text{energia stanu} \\ &\text{podstawowy} \\ &\text{et. poziom} \end{aligned}$$

$$\langle \phi | \bar{p} (H-E) \bar{p} | \phi \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi | [\bar{p}, [H-E, \bar{p}]] | \phi \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{bo } (H-E)|\phi\rangle &= 0 \\ \langle \phi | (H-E) &= 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle \phi | [\bar{p}, [V, \bar{p}]] | \phi \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} \langle \phi | [\bar{p}, [\bar{p}, V]] | \phi \rangle$$

dla V kulombowskiego

Δ ! wyjdzie nam
logarytm

$$= +\frac{1}{2m^2} 4\pi\alpha \langle \phi | \delta^3(r) | \phi \rangle$$

funkcja delta w zero jest nieskończona!

$$= \frac{1}{2m^2} 4\pi\alpha \frac{m\alpha^3}{\pi\hbar^3} = \frac{2m\alpha^4}{m^3}$$

$$\Delta E = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{m\alpha^4}{m^3} \ln \frac{\Lambda}{k_0 R} \quad \text{dla } l=0 \quad \text{"ścisły wzór"}$$

$$k_0 = k_0(n)$$

$$\Delta E = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{m\alpha^4}{n^3} \ln \frac{1}{k_0(n) R}$$

$$\langle \phi | \frac{1}{m} (H-E) \ln \left(\frac{H-E}{R} \right) \frac{1}{m} | \phi \rangle = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{m\alpha^4}{n^3} \ln \left(\frac{1}{k_0(n) R} \right)$$

$$\ln k_0(1s) = 2.38412$$

$$\ln k_0(2s) = 2.811$$

$$\ln k_0(2p) = -0.03001$$

$$\Delta E_{nr} = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{m\alpha^4}{n^3} \left[\ln \frac{1}{R} - \ln k_0(n, l) \right]$$

$1 \sim m_e$

wtedy $R = \frac{1}{2} m\alpha^2$
to $\ln \frac{1}{R} \sim 10$

uwzględnijemy efekty relatywistyczne



(poprawka nadbieżna potrenowania)

$-\frac{4}{15}$ - wartość od poprawy prądu

3-4 lata temu napisała Noble że technika b. precyzyjny i pomiarów na atomie wodora

jak policzyć logarytm od hamiltonianu?

definiujemy reducent

$$G(R) = \frac{1}{H-R}$$

Wzrost potęg Schurera na reducent dla atomu wodoru

$$G(\bar{p}, \bar{p}', R) = 4\pi m X^3 \int_0^1 d\tau \int d\Omega \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\left[X^2 (\bar{p}-\bar{p}')^2 + (\bar{p}^2 + X^2) \times \right.}$$

$$X = \sqrt{-2mR}$$

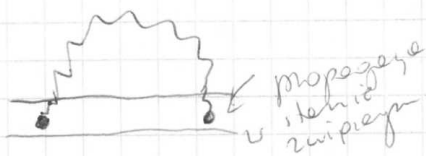
$$\tau = \frac{m\alpha}{X}$$

$$S = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^2$$

$$\int \langle 1s | \bar{p} \frac{1}{H-R} \bar{p} | 1s \rangle = 178 \frac{\tau^5}{(1+\tau)^3 (1-\tau)} {}_1F_1(1, 2-\tau, 3-\tau, S)$$

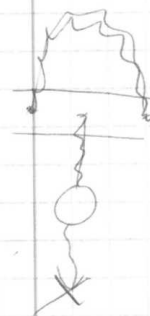
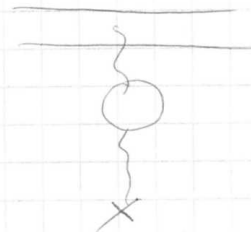
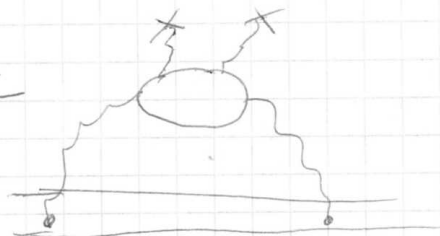
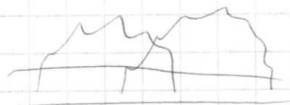
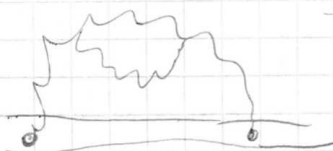
$$\Delta E = \frac{2\alpha}{\pi m} \int_0^1 u dk \left[\frac{1}{3m} \langle \bar{p} \frac{1}{H-(E-u)} \bar{p} \rangle \right]$$

opraczenie now? → dla wodopodobnego unow → nie raby
bo dla ugiel jonów stobo dwie przydzienie mierzetyjstye



Wskazy myślenie np. wpływ na powag energetyczne?

• dypny dyppt boe



← (b. trude dypny
wychodzą
rnie dypna)

⇒ ze tych odda dypny obgplył obnów na dypny obgplył

• potencjał przyciągania się dwóch metodami zmiennych atomów

PACHUCKI
14.04.08

WTK 8
PON

/sily van der Waalse/

/oddziaływanie

(esimie - Foldes)

→ molekularne złożone z dwóch atomów He

(wymiar 100 promieni Bohra → bardzo słabo związane)

dla helu 4, helu 4 ale dla helu 3 już nie

Złożenie

$1e^-$

$\sim 1e^-$

(wzajemnie nie chcą wiele od siebie oddzielić)

ODDZIAŁYWANIE ATOMÓW PRZY DUŻYM WZAJEMNYM ODLEGŁOŚCIACH

oddziaływanie

$$H = \left[\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + V(r_1) \right] + \left[\frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} + V(r_2) \right] + (-e\bar{r}_1 \cdot \bar{E}(\bar{R}_1) - e\bar{r}_2 \cdot \bar{E}(\bar{R}_2))$$

$$+ \sum_k \int d^3k \hbar \omega_k a_{\lambda k}^\dagger a_{\lambda k}$$

hamiltonian pola swobodnego

$\bar{r}_i$ - wychylenie elektronu od siatki
 $\bar{R}_i$ - położenie jądra

$$H = H_1 + H_2 + H_{EH} + H_I$$

$$H_I = -e\bar{r}_1 \cdot \bar{E}(\bar{R}_1) - e\bar{r}_2 \cdot \bar{E}(\bar{R}_2)$$

jeśli oddz. dipolowe wpłynie na pot. oddziaływanie → możemy zobaczyć

$$\Delta E^{(1)}(R) = \langle \phi | H_I | \phi \rangle$$

odległości między atomami

$$\bar{R} = \bar{R}_1 - \bar{R}_2$$

twierdzimy, że $\Delta E^{(1)}(R) = 0$

{ bo każde z tych E albo ma być albo anihilować? }
Jedno, i tak dla $|\phi\rangle$ - powinno być 0

$$\Delta E^{(2)}(R) = \langle \phi | H_I \frac{1}{E - H_0} H_I | \phi \rangle$$

↓ mamy tylko wyłączenie energii od odległości między atomami

zatem tylko te stwardnie
ze jeden elektron emituje
i drugi absorbuje

dalej będzie zero,

$$\langle \phi_1 | -e\bar{r}_1 | \phi_1 \rangle = 0$$

$$\Delta E^{(2)}(R) = 0$$

(pomijamy więc gdy jeden emituje, drugi absorbuje ten sam elektron)

$$\Delta E^{(3)} = \langle \phi | H_I \frac{1}{E - H_0} H_I \frac{1}{E - H_0} H_I | \phi \rangle = 0$$

bo nieparzysta ilosc ~~raz~~ E !

↳ nieparzysta ilosc operatorow H_I i anihilacji

DOPIERO

$$\Delta E^{(4)} \neq 0$$

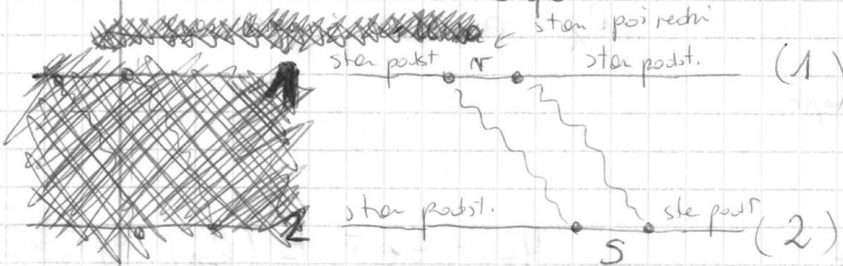
$$\Delta E^{(4)} = \langle \phi | H_I \frac{1}{E - H_0} H_I \frac{1}{E - H_0} H_I \frac{1}{E - H_0} H_I | \phi \rangle$$

↳ interpretacja (

wypadek $\hbar = c = 1$

E kwant foton
↓
ten foton może
być pochłonięty dalej
np. tutaj

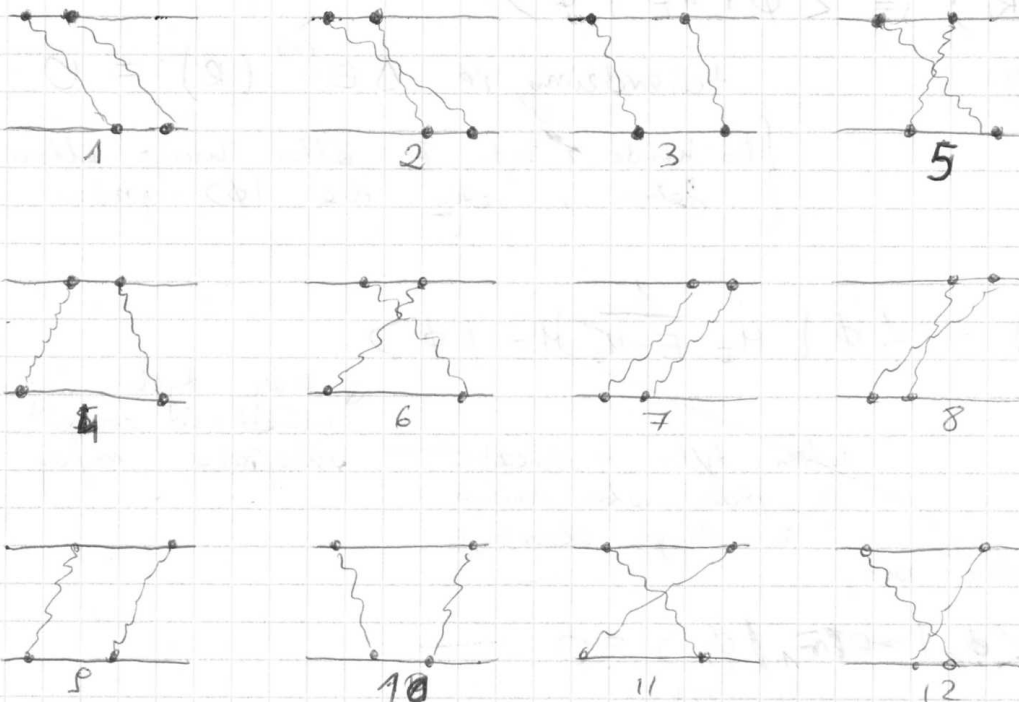
• multiple kombinacje



1 diagram

KOLEJNOŚĆ
WROPEW SIĘ
LICZY

w sumie 12 się diagramów



7, 8, 9, 10, 11, 12 → symetryczne do 1, 2, 3, 4, 5, 6 tylko
obrotowy zamieniony z obrotu drugiego

$$\bar{E}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} \bar{E}_{k\lambda} \left\{ a_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{k\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}$$

PACHUĆ
14.04.08
WYK 8
PON

$$\langle \Phi | (-\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{R}_1)) | n, k_1 \rangle \langle n, k_1 | (-\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{R}_2)) | \phi, k_1, k_2 \rangle$$

dla drogiego atomu to samo, tylko 2 operatory kreacji

↑ stało 2 nowe fotony!

$E^{(1)}$ - energia 1. diagramu (1)

$$E^{(1)} = \int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \times$$

$$\left(\begin{aligned} & \times \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_1}{2\epsilon_0}} \bar{d}_{or} \bar{E}_{k_1 \lambda_1} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_1} \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_2}{2\epsilon_0}} \bar{E}_{k_2 \lambda_2} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_2} \\ & \times \frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_2}{2\epsilon_0}} \bar{d}_{os} \bar{E}_{k_1 \lambda_1} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_1} \frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_2}{2\epsilon_0}} \bar{E}_{k_2 \lambda_2} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_2} \end{aligned} \right) \times$$

ten czynnik nie zależy od diagramu, tylko mianowniki zależą od diagramów

każdy z mianowników jest ujemny

→ mch opisy poprawki to "-" ∈ dotyczy wszystkich diagramów

$$E^{(1)} = - \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega_{k_1}}{2\epsilon_0} \frac{\hbar \omega_{k_2}}{2\epsilon_0} \left(\delta^{ik} - \frac{k_1^i k_1^k}{k_1^2} \right) \left(\delta^{jl} - \frac{k_2^j k_2^l}{k_2^2} \right) \times$$

$$\times \bar{d}_{or}^i \bar{d}_{ro}^j \bar{d}_{os}^k \bar{d}_{so}^l e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{R}} \frac{1}{(E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(\hbar \omega_{k_1} \hbar \omega_{k_2})(E_{r0} + \hbar \omega_{k_2})}$$

wystają mianowniki dla kolejnych diagramów

$$(1) \rightarrow (E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(\hbar \omega_{k_1} + \hbar \omega_{k_2})(E_{r0} + \hbar \omega_{k_2})$$

$$(2) \rightarrow (E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(\hbar \omega_{k_1} + \hbar \omega_{k_2})(E_{r0} + \hbar \omega_{k_1})$$

$$(3) \rightarrow (E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(E_{s0} + E_{r0})(E_{r0} + \hbar \omega_{k_2})$$

$$(4) \rightarrow (E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(E_{r0} + E_{s0})(E_{s0} + \hbar \omega_{k_2})$$

$$(5) \rightarrow (E_{s0} + \hbar \omega_{k_1})(E_{r0} + E_{s0} + \hbar \omega_{k_1} + \hbar \omega_{k_2})(E_{r0} + \hbar \omega_{k_2})$$

$$(6) \rightarrow (E_{s0} + \hbar c k_1) (E_{s0} + E_{r0} + \hbar c k_1 + \hbar c k_2) (E_{s0} + \hbar c k_1)$$

$$(7) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (\hbar c k_1 + \hbar c k_2) (E_{s0} + \hbar c k_2)$$

$$(8) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (\hbar c k_1 + \hbar c k_2) (E_{s0} + \hbar c k_1)$$

$$(9) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (E_{r0} + E_{s0}) (E_{s0} + \hbar c k_2)$$

$$(10) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (E_{r0} + E_{s0}) (E_{r0} + \hbar c k_2)$$

$$(11) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (E_{r0} + E_{s0} + \hbar c k_1 + \hbar c k_2) (E_{s0} + \hbar c k_1)$$

$$(12) \rightarrow (E_{r0} + \hbar c k_1) (E_{r0} + E_{s0} + \hbar c k_1 + \hbar c k_2) (E_{r0} + \hbar c k_2)$$

$$\Delta E = - \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar c k_1}{2\varepsilon_0} \frac{\hbar c k_2}{2\varepsilon_0} \left(\delta^{ik} - \frac{k_1^i k_1^k}{k_1^2} \right) \left(\delta^{jl} - \frac{k_2^j k_2^l}{k_2^2} \right) \times$$

$$\times \sum_r \sum_s d\alpha_r^i d\alpha_r^j d\alpha_s^k d\alpha_s^l e^{i(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \bar{R}} \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{\mathcal{P}_n}$$

→ najwzyszy uwzględnić ^{metody} ~~całkowite~~ oddziaływanie p.d.y. no rozdzielony etapie nie ma fotonów (numery 3, 4, 9, 10)

→ badamy принцип metody odd. ale tylko tych interakcji (niep. pomijamy)

$$\Delta E = - \hbar \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar c k_1}{2\varepsilon_0} \frac{\hbar c k_2}{2\varepsilon_0} \left(\delta^{ik} - \frac{k_1^i k_1^k}{k_1^2} \right) \left(\delta^{jl} - \frac{k_2^j k_2^l}{k_2^2} \right) \times$$

$$\times \sum_r \sum_s d\alpha_r^i d\alpha_r^k d\alpha_s^j d\alpha_s^l \frac{e^{i(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \bar{R}}}{\hbar c k_1 \hbar c k_2 (E_{r0} + E_{s0})}$$

$$\Delta E = - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{r,s} \sum_{i,k,j,l} d\alpha_r^i d\alpha_r^k d\alpha_s^j d\alpha_s^l \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} e^{i \bar{u}_1 \bar{R}} \left(\delta^{ik} - \frac{k_1^i k_1^k}{k_1^2} \right) \times$$

$$\times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} e^{i \bar{u}_2 \bar{R}} \left(\delta^{jl} - \frac{k_2^j k_2^l}{k_2^2} \right)$$

$$\left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i k R} = - \frac{1}{4\pi R^3} \left(\delta^{ij} - 3 \hat{R}^i \hat{R}^j \right) \right\}$$

wersja $\hat{R}^i, \hat{R}^j$

zale

$$\Delta E = - \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{1}{16\pi^2 R^6} \sum_{r,s} \frac{d_{or} d_{ro} d_{os} d_{so}}{E_{ro} + E_{so}} (\delta^{ik} - 3 \hat{r}^i \hat{r}^k) (\delta^{jl} - 3 \hat{r}^j \hat{r}^l)$$

$$V_{AB} = \frac{d^i(r) d^j(r)}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\delta^{ij} - 3 \hat{r}^i \hat{r}^j)$$

PACUUCH.
17.04.08 WYU
8 PON

$$\Delta E = \langle \phi | V_{AB} \frac{1}{E - H_0} V_{AB} | \phi \rangle$$

(nie uśredniał)
odd. → odd. uśredniał
electronem dominuje

Granice drugich odległości.

$$(1) + (2) + (7) + (8)$$

$$\Delta E = -4 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \sum_r \sum_s \frac{\hbar k_1}{2\epsilon_0} \frac{\hbar k_2}{2\epsilon_0} (\delta^{ik} - \frac{k_1^i k_1^k}{k_1^2}) (\delta^{jl} - \frac{k_2^j k_2^l}{k_2^2}) \times$$

$$\times \frac{d_{or}^i d_{ro}^k d_{os}^j d_{so}^l}{E_{ro} E_{so} (\hbar k_1 + \hbar k_2)} e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{R}}$$

ale stano podstawowepp sterzenie symetryczne mamy:

$$\Delta E = -\frac{4}{9} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k_1}{2\epsilon_0} \frac{\hbar k_2}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\right) \times$$

$$\times \sum_r \frac{|\vec{d}_{or}|^2}{E_{ro}} \times \sum_s \frac{|\vec{d}_{os}|^2}{E_{so}} \frac{e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{R}}}{\hbar k_1 + \hbar k_2}$$

potencjałowości $\alpha(A) = \frac{2}{3} \sum_r \frac{|\vec{d}_{or}|^2}{E_{ro}}$

$$E = -\frac{\alpha \bar{E}^2}{2}$$

$$\Delta E = -\alpha(A) \alpha(B) \left[\int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k_1}{2\epsilon_0} \frac{\hbar k_2}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\right) \right] \frac{e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{R}}}{(\hbar k_1 + \hbar k_2)}$$

↑ funkcje tylko R po wywołaniu cenn me k
(nie pawa ~ R⁷)

2 chęty symetrii

sd.5

$$\frac{1}{u_1 + u_2} = R \int_0^{\infty} e^{-(u_1 + u_2) R \eta} d\eta$$

/ cała nieprzerw po hstach
po module

$$DE = - \frac{\hbar c}{\pi^4 \epsilon_0^2} \frac{\alpha(A) \alpha(B)}{R^7} \int_0^1 d\eta \frac{1}{(\eta^2 + 1)^6} (3\eta^4 - 2\eta^2 + 3) =$$

$$= - \frac{23}{64} \frac{\hbar c}{\pi^3 \epsilon_0^2} \frac{\alpha(A) \alpha(B)}{R^7}$$

jest więcej do dowodu słabości? → dodaj do
wspólnego mianownika pamiętając, że $u_1 \leftrightarrow u_2$ są
symetryczne

$$\hbar^3 c^3 \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{D_i} = \frac{u(u_{10} + u_{50} + u_1)}{(u_{10} + u_{50})(u_{10} + u_1)(u_{50} + u_2)} \left(\frac{1}{u_1 + u_2} - \frac{1}{u_1 - u_2} \right)$$

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad \psi - \text{będziemy kwantować}$$

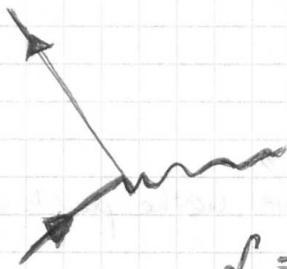
PACHUCKI

21.04.08

WTK

PON

8



$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - m) \psi(x)$$

$$\pi_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha}} = i \psi_{\alpha}^{\dagger}$$

$$\mathcal{H}(x) = \pi_{\alpha} \dot{\psi}^{\alpha} - \mathcal{L} = \psi^{\dagger} (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi \quad \leftarrow \text{gęstość hamiltonianu}$$

→ przechodzimy do reprezentacji pędowej; impulsy w reprezentacji pędowej

$$\psi(x, t) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left[b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} + d^{\dagger}(p, s) v(p, s) e^{ipx} \right]$$

nowy sposób zapisu masy Diraca

$$\bar{\psi}(x, t) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left[b^{\dagger}(p, s) \bar{u}(p, s) e^{ipx} + d(p, s) \bar{v}(p, s) e^{-ipx} \right]$$

$$E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$$

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p, s) &= 0 \\ (\not{p} + m) v(p, s) &= 0 \end{aligned}$$

u, v spełniają relacje ortogonalności

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s) u(p, s') &= \delta_{ss'} = \\ &= -\bar{v}(p, s) v(p, s') \end{aligned}$$

komutacja

$$\sum_s \left[u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) - v_{\alpha}(p, s) \bar{v}_{\beta}(p, s) \right] = \delta_{\alpha\beta}$$

op. popelnia
nie d. statyst.
energii

$$\left. \begin{aligned} u^{\dagger}(p, s) u(p, s) &= \frac{E_p}{m} \delta_{ss'} \in \text{pojemność} \\ &\text{było by} \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{v}(p, s) u(p, s') = 0 = \bar{u}(p, s) v(p, s')$$

$$\sum_s u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

$$-\sum_s v_{\alpha}(p, s) \bar{v}_{\beta}(p, s) = \left(\frac{m - \not{p}}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

dokonyjemy kwantowanie przy użyciu komutacji
b i d. uprzedzić o spnie 1/2 spełniają reguły Pauliego,
w terminach operatorów mamy to że mamy
wzrost antykomutacji zamiast komutacji:

$$\{b(p, s), b^{\dagger}(p', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(p - p')$$

str. 11

$$\{d(p,s), d^\dagger(p',s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(p-p')$$

$$\{b^\dagger(p,s), d^\dagger(p',s')\} = 0$$

// w mierznie mie ma upatrz elementarny o spinie $\frac{3}{2}$ //
 (czyli, ze jedno, ale to nie jest punktowe)
 $0, \frac{1}{2}, 1, 2$

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x,t), \psi_\beta^\dagger(x',t)\} &= \sum_{ss'} \iint \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \times \\ &\times \delta^3(p-p') \delta_{ss'} \left(\begin{aligned} &\left[u_\alpha(p,s) \bar{u}_\beta(p',s') \right] \gamma^0_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} + \\ &+ \left[u_\alpha(p,s) \bar{v}_\beta(p',s') \right] \gamma^0_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} \end{aligned} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left((p+m) \gamma^0_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} - (m-p) \gamma^0_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} \right) \end{aligned}$$

zamiennie w miejsce $p \sim -p$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-x')} \left[(p+m) \gamma^0_{\alpha\beta} - (m-\tilde{p}) \gamma^0_{\alpha\beta} \right] \alpha_\beta$$

$$p = (E_p, +\vec{p})$$

$$\tilde{p} = (E_p, -\vec{p})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-x')} \gamma^0_{\alpha\beta}$$

$$= \delta^3(x-x') \gamma^0_{\alpha\beta}$$

zostaje mi odnowa zero

$$\{\psi_\alpha(x,t), \psi_\beta^\dagger(x',t)\} = \delta^3(x-x') \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\psi_\alpha(x,t), \psi_\beta(x',t)\} = 0 = \{\psi_\alpha^\dagger(x,t), \psi_\beta^\dagger(x',t)\}$$

$$\int \mathcal{H} = \int \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi d^3x$$

$$\int \bar{\mathcal{P}} = \int \psi^\dagger (-i \nabla) \psi d^3x$$

polimny $\mathcal{H}$, psp bodzie analogiczny

$$H = \int d^3x \sum_{s,s'} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m^2}{E_p E_{p'}}} E_{p'} \left[b^\dagger(p,s) \bar{u}(p,s) \gamma^0 e^{ipx} + d(p,s) \bar{v}(p,s) e^{-ipx} \right]$$

PAUKU
21.04.08
WYK 9
DON

$$\left[b(p,s) \bar{u}(p',s') \gamma^0 e^{-ip'x} + d^\dagger(p',s') \bar{v}(p',s') \gamma^0 e^{ip'x} \right]$$

$$= \sum_{s,s'} \int d^3p m \left[b^\dagger(p,s) b(p,s) u^\dagger(p,s) u(p,s) + d(p,s) d^\dagger(p,s) v^\dagger(p,s) v(p,s) \right]$$

$$= \sum_s \int d^3p E_p \left[b^\dagger(p,s) b(p,s) - d(p,s) d^\dagger(p,s) \right] =$$

$$\bar{P} = \sum_s \int d^3p \bar{P} \left[b^\dagger(p,s) b(p,s) - d(p,s) d^\dagger(p,s) \right]$$

chey aby hamiltonian był operacją od dołu (pojemności stan o

najniższej energii)

↓
energia elektronu

↓
energia elektronu

↓
energia fotonu

↓
energia fotonu

$$P^\mu = \sum_s \int d^3p p^\mu \left[b^\dagger(p,s) b(p,s) + d^\dagger(p,s) d(p,s) \right] = \{d(p,s), d^\dagger(p,s)\}$$

// unieś $d \rightarrow d^\dagger$? // hamiltonian na $d^\dagger$ jest $-a^\dagger a$ +a^\dagger a

// reinterpretujemy!

**

*

wprowadzamy iloczyn normalny oznaczamy przez ":"

: $a^\dagger a$: = $a^\dagger a$ (na stanie próżni = 0)

: $a a^\dagger$: = $-a^\dagger a$

$$Q = \int d^3x : \psi^\dagger \psi : = \sum_s \int d^3p : b^\dagger(p,s) b(p,s) + d(p,s) d^\dagger(p,s) : =$$

$$= \sum_s \int d^3p \left[\underbrace{N^+(p,s)}_{\text{op. ilość elektronów}} - N^-(p,s) \right]$$

op. ilość elektronów

<0|...|0>

$$N^+(p,s) = b^\dagger(p,s) b(p,s)$$

$$N^-(p,s) = d^\dagger(p,s) d(p,s)$$

many stan próżni i więcej elektronów x, pole ewoluują

$$\langle 0 | \psi_\beta(x') \psi_\alpha^\dagger(x) | 0 \rangle \cdot \theta(t-t') \quad (t > t' \text{ najpierw kreacja!})$$

$$\langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\beta(x') | 0 \rangle \theta(t' - t)$$

/ image pozytonu w x' ,
anihilacja w x

propagator Feynmana:

$$S_F(x' - x) \gamma^0_{\beta\alpha} \equiv -i \langle 0 | \psi_\beta(x') \psi_\alpha^\dagger(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) + \\ + i \langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\beta(x') | 0 \rangle \theta(t - t')$$

iloczyn
chronologiczny

↳ było
zdefiniowane

$$= i \langle 0 | T \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\beta(x') | 0 \rangle$$

$$(i \not{\partial}_{x'} - m)_{\tau\beta} (S_F(x' - x) \gamma^0)_{\beta\alpha} =$$

$$= \gamma^0_{\tau\beta} \langle 0 | \{ \psi_\beta(x'), \psi_\alpha^\dagger(x) \} | 0 \rangle \cdot \delta(t' - t) =$$

$$= \gamma^0_{\tau\alpha} \delta^4(x - x') \quad // \text{skracając przez } \gamma^0$$

$$(i \not{\partial}_{x'} - m) S_F(x' - x) = \delta^4(x' - x)$$

jeszcze propagator Diraca: $\left[S_F(x' - x) \right]_{\beta\alpha} = -i \langle 0 | T \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x') | 0 \rangle$

wyjdzie on
z reprezentacji
do kwadratu

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi} (i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e \bar{\psi} \not{A} \psi$$

~~zobacz, że mamy
pole i to jest pole~~

zobacz potencjał $eA^0 = -\frac{Z\alpha}{r}$

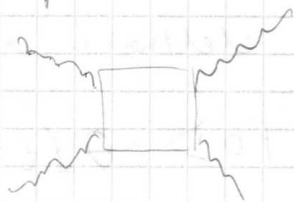
? stan próżni w tym potencjale: $|0\rangle$

ile wynosi gęstość? Takim, że stan próżni

$$\langle 0 | \mathcal{L}(x) | 0 \rangle \quad (\text{czy istnieje gęstość w stanie
z polem od siebie bez pola})$$

~~zobacz~~

diagram rozpręczenia fotonu na fotonic:



(rozpręczenie fotonu na fotonie Coulomba
było zabronione!)



$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - e \not{A} - m) \Psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots$$

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e \bar{\Psi} A \Psi$$

Przepisujemy, że mamy potencjał

$$e A^0 = - \frac{\vec{E} \cdot \vec{x}}{r}$$

Konstrukcję stanów próżni

$$\langle 0 | g(x) | 0 \rangle = ?$$

Lagrangian Eulera-Heisenberga

28.04.2008

$$S = T \exp \left[-ie \int d^4x \bar{\Psi}_{in}(x) \gamma^\mu \Psi_{in}(x) A_\mu(x) \right]$$

$$S_0 = \langle 0_{in} | S | 0_{in} \rangle = e^{i \int d^4x \underbrace{\mathcal{L}_0}_{\text{poprawka do lagrangianu Maxwella}}}$$

$$S_0(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \langle 0 | T [\bar{\Psi}(x_1) \not{A} \Psi(x_1) \dots \bar{\Psi}(x_n) \not{A} \Psi(x_n)] | 0 \rangle$$

Tw. Wicka - Dixon, Suber

$$C(\alpha_k, x_k, \alpha_l, x_l) = -ie \sum_{\alpha} \langle 0 | T [A_{\alpha_k, \alpha}(x_k) \Psi_{\alpha}(x_k) \bar{\Psi}_{\alpha_l}(x_l)] | 0 \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} C(\alpha_1, x_1; \alpha_2, x_2) \dots C(\alpha_n, x_n; \alpha_{n+1}, x_{n+1})$$

$$= \left\{ \langle 0 | T [\Psi(x) \bar{\Psi}(x')] | 0 \rangle = i S_F(x-x') \right\} = i \langle x | \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} | x' \rangle =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= i \langle x | S_F | x' \rangle \Rightarrow C = e A \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \\ &= \langle \alpha_k, x_k | e A \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} | \alpha_l, x_l \rangle \end{aligned} \right.$$

$$= \det(1 - C) = \exp \text{Tr} \log(1 - C) =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= 1 - \sum_a C_{aa} + \frac{(-1)^2}{2} \sum_{a,b} (C_{aa} C_{bb} - C_{ab} C_{ba}) \dots \end{aligned} \right.$$

$$= \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int dx_1 \dots dx_n C(\alpha_1, x_1; \alpha_n, x_n) \dots C(\alpha_n, x_n; \alpha_1, x_1) \right]$$

$$\frac{1}{2} \text{diagram 1} + \frac{1}{4} \text{diagram 2}$$

$$(niepamięta liczbę niemierzalną $\Rightarrow$ diagonal = 0)$$

$$\det(1 - C) = \det \left(I - e A \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) = \det \left(\frac{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]}{[\not{p} - m + i\epsilon]} \right) = \exp \left\{ \text{Tr} \log \left(\frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right) \right\} =$$

$$\text{Tr} \log = i \langle x | \text{Tr} \log \left\{ \frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right\} | x \rangle$$

$$\text{Tr} \log = i \langle x | \text{Tr} \log \left\{ \frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right\} | x \rangle$$

$$\text{Tr} \log = i \langle x | \text{Tr} \log \left\{ \frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right\} | x \rangle$$

$$\text{Tr} \log = i \langle x | \text{Tr} \log \left\{ \frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right\} | x \rangle$$

$$\text{Tr} \log = i \langle x | \text{Tr} \log \left\{ \frac{[\not{p} - m + i\epsilon]}{[\not{p} - e A - m + i\epsilon]} \right\} | x \rangle$$

$$= -i \langle x | \text{tr} \log \{ [p - eA - m + i\varepsilon][p - m + i\varepsilon]^{-1} \} | x \rangle$$

$$\log \frac{a}{b} = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{ias} - e^{ibs}) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{i(at+i\varepsilon)s} - e^{i(bt+i\varepsilon)s})$$

$$= - \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-as} - e^{-bs}) \quad \{ \text{many wior} \}$$

$$\delta \mathcal{L} = i \int_0^\infty \frac{ds}{s} [\langle x | \text{tr} e^{iHs} | x \rangle - \langle x | \text{tr} e^{iH_0 s} | x \rangle]$$

$\rightarrow$ możemy interpretować jako ewolucję nastąpi z czasem atomowym

$$H = \pi^2 - m^2 = p^2 - eA^2 - m^2 \quad H_0 = p^2 - m^2$$

$$\frac{\partial}{\partial m} i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} e^{iHs} = \text{tr} \int_0^\infty ds e^{iHs} = i \text{tr} \frac{1}{H} = i \text{tr} \frac{1}{\pi^2 - m^2} =$$

$$= i \text{tr} (\pi^2 + m^2) \frac{1}{(\pi^2 - m^2)(\pi^2 + m^2)} = i \text{tr} [(\pi^2 + m^2)(\pi^2 - m^2)^{-1}]$$

$$= i m \text{tr} [(\pi^2 - m^2)^{-1}]$$

$$i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} e^{iHs} = i \int dm m \text{tr} [(\pi^2 - m^2)^{-1}] =$$

$$= \int dm m \int_0^\infty ds \text{tr} e^{-i(\pi^2 - m^2)s} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} e^{-i(\pi^2 - m^2)s}$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-i(m^2 - i\varepsilon)s} \cdot [\langle x | e^{-iHs} | x \rangle - \langle x | e^{-iH_0 s} | x \rangle]$$

$$H = -\pi^2$$

$$H_0 = -p^2$$

$$K(x, x'; s) = \langle x | e^{-iHs} | x' \rangle \quad (\text{matematyczna analogia}$$

z propagatorem w równaniu Schrödingera)

Zakładamy, że pole elektromagnetyczne jest stałe

związane (wzgl. długości Comptonowskiej) elektronu

$$A_\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu$$

$$H = -(\gamma \cdot \pi) / (\gamma \cdot \pi) = -\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \pi_\mu \pi_\nu - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \pi_\mu \pi_\nu = -\pi^2$$

$$- \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\pi^\mu, \pi^\nu] = -\pi^2 + \frac{ie}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} = -\pi^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$= -ie F_{\mu\nu} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$i \frac{\partial}{\partial s} K(x, x'; s) = H K(x, x'; s)$$

$$\text{Dla } s=0 \quad K(x, x'; 0) = \delta^4(x - x')$$

$$K(x, x'; s) = \langle x(s) | x' \rangle$$

$$x^\mu | x \rangle = x^\mu | x \rangle$$

$$x^\mu(s) = e^{iHs} x^\mu e^{-iHs}$$

$$\frac{dx^\mu}{ds} = -i [x^\mu, H] = 2\pi^\mu$$

$$\frac{d\pi^\mu}{ds} = -i [\pi^\mu, H] = 2e F^{\mu\nu} \pi_\nu$$

$$\pi(s) = \exp(2eFs) \pi$$

$$X(s) = X + \frac{1}{eF} [\exp(2eFs) - 1] \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = eF \frac{1}{\exp(2eFs) - 1} [X(s) - X] = \frac{1}{2} eFs \exp(eFs)$$

$$(\sinh(eFs))^{-1} [X(s) - X] = C(s) [X(s) - X] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{2} eF \exp(-eFs) \sinh^{-1}(eFs)$$

$$\pi^2 = [X(s) - X] M(s) [X(s) - X]$$

$$M(s) = \frac{1}{2} (eF)^2 \sinh^{-2}(eFs)$$

$$H = - [X(s) - X] M(s) [X(s) - X] + \frac{1}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$(*) \Rightarrow i \frac{d}{ds} \langle X(s) | x' \rangle = \langle X(s) | H | x' \rangle$$

$$[X^\mu, X^\nu(s)] = [X^\mu, \frac{1}{eF} [\exp(2eFs) - 1]^{\mu\lambda} \pi_\lambda] = -\frac{i}{eF} (\exp(2eFs) - 1)^{\mu\lambda}$$

$$H = -X(s) M(s) X(s) + 2 X(s) M(s) X - X M(s) X + \frac{1}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$- \text{tr} \frac{1}{2} \left[\frac{i}{eF} (\exp 2eFs - 1) M(s) \right]$$

$$\text{slat po indeksh} = -\frac{i}{2} \text{tr} [eF \text{dgh}(eFs)]$$

$$i \frac{d}{ds} \langle X(s) | x' \rangle = \left\{ \frac{1}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \text{tr} [eF \text{dgh}(eFs)] - (x-x') M(s) (x-x') \right\} \langle X(s) | x' \rangle$$

$$\langle X(s) | x' \rangle = N(x, x') \exp \left\{ -\frac{i}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} s - \frac{1}{2} \text{tr} [\log(\sinh(eFs))] - \frac{i}{4} (x-x') [eF \text{dgh}(eFs)] (x-x') \right\}$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^s \frac{ds}{s} e^{-i(m^2 - i\epsilon)s} [\langle x | e^{-iHs} | x \rangle - \langle x | e^{-iH_0 s} | x \rangle] \quad \text{OS. OS. 2000}$$

$$H = -\pi^2 \quad K(x, x', s) = \langle x | e^{-iHs} | x' \rangle = \langle X(s) | x' \rangle$$

$$H_0 = -\pi^2 \quad i \frac{d}{ds} \langle X(s) | x' \rangle = \langle X(s) | H | x' \rangle$$

$$H = -X(s) M(s) X(s) + M(s) = \frac{1}{4} (eF)^2 \sinh^{-2}(eFs)$$

$$+ 2 X(s) M(s) X - X M(s) X +$$

$$+ \frac{1}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \text{tr}^{(4)} [eF \text{dgh}(eFs)]$$

asobli cosic
s=0

$$\langle X(s) | x' \rangle = N(x, x') \exp \left\{ -\frac{i}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} s - \frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} [\log \sinh(eFs)] + \right.$$

$$\left. - \frac{i}{4} (x-x') [eF \text{dgh}(eFs)] (x-x') \right\} - \frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} [\log \sinh(eFs)] = -\frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} \left[\log \frac{\sinh(eFs)}{eFs} \right] - \frac{1}{2} \log^{(4)} \text{tr}^{(4)}$$

$$= -\frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} \left[\log \frac{\sinh(eFs)}{eFs} \right] - \frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} \log(eF) - \log \frac{1}{s}$$

$$\langle x(s) | x' \rangle = N(x, x') \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{i}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} s\right) \exp(-L(s)) \cdot \exp\left\{-\frac{i}{4} (x-x') [e F \text{dgh} (e F s)] (x-x')\right\}$$

$$L(s) = \frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} \left[\log \frac{\sinh(e F s)}{e F s} \right]$$

Dla $s \rightarrow 0$ $\langle x(s) | x' \rangle = N(x, x') \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{i}{4s} (x-x')^2\right)$
zwiększamy sensie
ciągła *logarytmu funkcji*

$$N(x, x') = -\frac{i}{(4\pi)^2} f(x, x') \quad : \quad f(x, x) = 1 \quad = -\frac{(4\pi)^2}{i} J^{(4)}(x-x')$$

$$f(x, x') = \exp\left[-ie \int_x^{x'} A^\mu(x_1) dx_\mu\right] \quad \text{tę dowodu}$$

$$K(x, x', s) = -\frac{i}{(4\pi)^2} f(x, x') \frac{1}{s^2} e^{-L(s)} \exp\left(-\frac{i}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} s\right) \cdot \exp\left[-\frac{i}{4} (x-x') e F \text{dgh} (e F s) (x-x')\right]$$

$$K_0(x, x', s) = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{i}{4} \frac{(x-x')^2}{s}\right)$$

$$\delta \mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-i(m^2 - i\epsilon)s} [K(x, x', s) - K_0(x, x', s)] =$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-i(m^2 - i\epsilon)s} \left\{ \exp\left[-L(s) - \frac{i}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} s\right] - 1 \right\} =$$

$$= \left\{ s = -i\tau \right\} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} \left\{ \exp\left[-L(\tau) - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau\right] - 1 \right\}$$

$$L(\tau) = \frac{1}{2} \text{tr}^{(4)} \left[\log \left[\frac{\sinh(e F \tau)}{e F \tau} \right] \right]$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 s - p^2 = 0 \quad s = \frac{E^2 - B^2}{2} \quad p = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\lambda_1 = \left((s^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} + s \right)^{\frac{1}{2}} = i \text{Im} Y$$

$$\lambda_2 = i \left((s^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} - s \right)^{\frac{1}{2}} = -i \text{Im} Y$$

$$\lambda_3 = -\left[(s^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} + s \right]^{\frac{1}{2}} = i \text{Re} Y$$

$$\lambda_4 = -i \left[(s^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} - s \right]^{\frac{1}{2}} = -i \text{Re} Y$$

$$Y^2 = -2(s - i p)$$

$$L(\tau) = \log \left[\frac{\sinh(e\tau \text{Re} Y) \sinh(e\tau \text{Im} Y)}{e^2 \tau^2 p} \right]$$

$$\exp(-L(\tau)) = \frac{e^2 \tau^2 p}{\text{Im} \cosh(e\tau Y)}$$

$$\text{tr} \exp\left[-\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tau\right] = 4 \text{Re} \cosh(e\tau Y)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{B} & -i\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \\ -i\vec{\sigma} \cdot \vec{E} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{bmatrix} \quad \pm Y, \pm Y^*$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L} = S - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-m^2 \tau} \left[(e\tau)^2 \frac{\text{Re} \cosh(e\tau Y)}{\text{Im} \cosh(e\tau Y)} p - 1 \right]$$

$\mathcal{L}_{eff} \approx [1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-m^2\tau}] S$ granica słabego pola
 Rozbieżności są zawsze tej postaci, że dają się schować
 w wyrazie niższego rzędu.

$$\mathcal{L}_{eff} = (S - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-m^2\tau} [(e\tau)^2 \frac{\text{Re} \cosh(e\tau\gamma)}{\text{Im} \cosh(e\tau\gamma)} - 1 + \frac{2}{3}(e\tau)^2 S])$$

$$C = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-m^2\tau} \quad F_{\mu\nu}^{ren} = [C] F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{eff} = S - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-m^2\tau} [(e\tau)^2 \frac{\text{Re} \cosh(e\tau\gamma)}{\text{Im} \cosh(e\tau\gamma)} - 1 + \frac{2}{3}(e\tau)^2 S]$$

$$F_{\mu\nu}^{ren} = [C] F_{\mu\nu}$$

można stąd do opisu zjawisk przy podłożach nieliniowych kwantowej

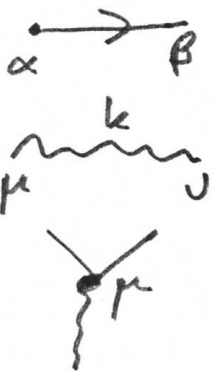
Słabe pola E-M

$$\mathcal{L}_{eff} \approx S + \frac{2\alpha^2}{360\pi^2 m^4} (4S^2 + 7P^2) + \frac{32\pi\alpha^3}{315 m^8} (8S^3 + 13SP^2)$$

Rozpraszanie światła na świetle; Propagacja światła
 zmienia się w polu magnetycznym.

ryść urojona kłamliwym - szybkość rozpadu

Perturbacyjne sformułowanie elektrodynamiki kwantowej.



$$i S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \left\{ i S_F(x-x) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \right.$$

$$i D_F = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ i D_F(x'-x) = \langle 0 | T A^\mu(x') A^\nu(x) | 0 \rangle \right.$$

$$-ie\gamma^\mu$$

(-1)

kaidej dla zamkniętej pętli fermionowej



$$i D_F^{(1)} = i D_F^{(0)} + i D_F^{(0)} \frac{\omega}{\omega} \alpha i D_F^{(0)} + \dots$$

$$\omega_{SM}^S = (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma^S \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^S \right)$$

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \Big|_{\text{robienia}}$$

$$p^2 = p^2$$

poprawki radiacyjne

propagator fotonu

$$i D_F(k) + i D_F(k) \bar{\omega} i D_F(k)$$

(nie ten)

PACHUCKI
12.05.08
WYK
70N

$$\bar{\omega}^{\mu\nu} = (-1)(-ie)^2 \cdot \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - k - m + i\epsilon} \right]$$

(zaczynamy liczyć, niezależne $\rightarrow$ należy dokonać regularyzacji)

$$k_\mu \bar{\omega}^{\mu\nu} = 0 \text{ (należy też zregularyzować)}$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu}$$

kiedy mianownik zapisujemy w postaci $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty dz e^{iz(p^2 - m^2 + i\epsilon)}$

$$\bar{\omega}^{\mu\nu} = (-i) (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \bar{\omega}$$

wynika z ortogonalności do k_μ

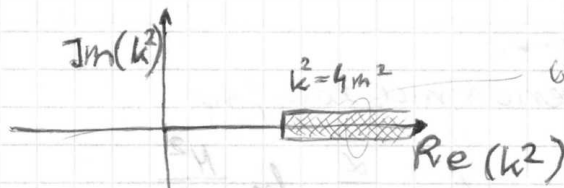
$$\bar{\omega}^{\mu\nu} = A k^\mu k^\nu + B g^{\mu\nu}$$

(bo nie zależy od innego wektora niż k)

$$\bar{\omega}(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \left\{ -\ln \frac{\mu^2}{m^2} + \ln \left[1 - \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m^2} \right] \right\} =$$

(z drżym μ przechodzimy do nieskończoności - wysłanie na bieżąco po $\mu \rightarrow 0$ się jako logarytm)

$$= -\frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \arctg \left(\frac{4m^2}{k^2 - 4m^2} - 1 \right) \right] \right\}$$



cięcie (wartości rzeczywiste, gdy dochodzą z półny czy z dołu)

$$\text{Im}(\bar{\omega}(k^2)) = \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right)$$

$$\bar{\omega}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \int_{4m^2}^\infty \frac{d(k'^2)}{k'^2} \frac{1}{k'^2 - k^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k'^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{k'^2} \right)$$

$$[i D_F]_{\mu\nu}^{-1} - \bar{\omega}_{\mu\nu} = i \left[(k^2 - m^2) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \bar{\omega} \right]$$

$$D_{\mu\nu}^{(1)} = - \left\{ \frac{g_{\mu\nu} - [1 + \bar{\omega}(k^2)] \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 [1 + \bar{\omega}(k^2)] - \mu^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \right\} (\mu \rightarrow 0)$$

$$D_{\mu\nu}^{(1)} = - \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 (1 + \bar{\omega}(k^2))} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \frac{\bar{\omega}(k^2)}{1 + \bar{\omega}(k^2)} \right\}$$

zachowanie dla małych k - będzie miało o prawie Coulomba - zachowanie nie będzie odległości $\sim \frac{1}{r}$

→ Symmetrie trotz Zeleinschiebung! wegen prädefinierten Nullwert (da $u=0$ $\bar{\omega}(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{h^2}{m^2}$)

prosto calone modifikowane? Inne predefiniowane

$$|_{K=0} \quad \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2(1+\omega^2(k))}$$

symetrie cechowania $D_{\mu\nu} + k_\mu f_\nu + k_\nu f_\mu$ ↓ double funkcie po dwie

$(f_v = \lambda k_v \in \text{byro lamberdelu do propogatore})$

Do Domu

znajdnie funkcję f prejsia z U do V

2 (männlich) D_{00} wie viele es hat? $(D_{00} \rightarrow \frac{1}{k^2})$ 2

w verh. kulombeswärtigen Potho neijé de reletivistizy - preniy

Wprowadzamy stałą renormalizacyjną

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \bar{\omega}(\nu)} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2}$$

$$e^2 = e_0^2 Z_3$$

$$D_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 (1 + \underbrace{\bar{\omega}(k^2) - \bar{\omega}(0)})} + k_{\mu} k_{\nu} (\dots)$$

$\Gamma(k^2) \leftarrow$ energia zrenormalizowane

$$\overline{u_R(k^2)} = \frac{2}{3\pi} k^2 \int_{4k^2}^{W_R(k^2)} \frac{dk'^2}{k'^2} \frac{1}{k'^2 - k^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k'^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{k'^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{4m^2}{k^2} - 1} - 1 \right] \right\}$$

$$\overline{W}_R(k^2) = \begin{cases} \frac{\alpha}{15} \frac{k^2}{m^2} & ; k^2 \rightarrow 0 \\ -\frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right) + \frac{5\alpha}{3\pi} & ; k^2 \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\frac{e^2}{\bar{u}^2} \rightarrow \frac{e^2}{\bar{u}^2(1 + \bar{\omega}_d(1 - \bar{u}^2))} = \frac{e^2}{K^2} \left(1 + \frac{2}{15\pi}\right)$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{Ze^2}{4\pi r} =$$

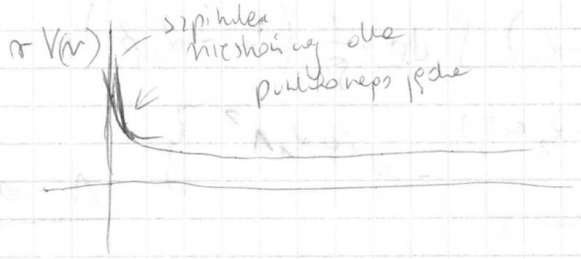
$$= \frac{Ze^2}{4\pi r} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{Ze^2 \delta^3(r)}{m^2}$$

wór
mydżony

// transformacja Borna liczy numerycznie
// dla małych odh. potęg α nie jest możliwe odwołanie

do poprawy ~~***~~

przewidywanie energii w atomie wodoru

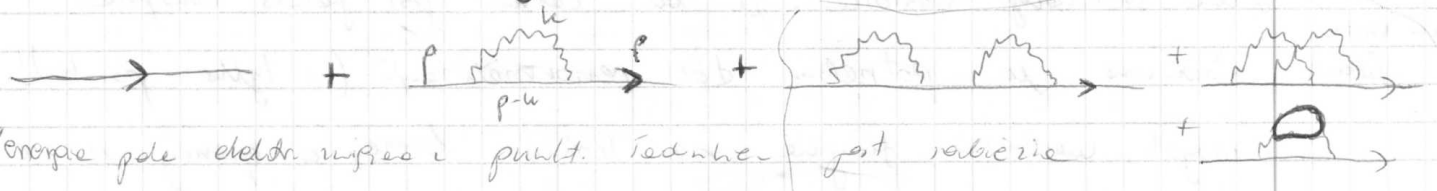


wór na poprawkę do energii:

$$\Delta E = -\frac{4}{15\pi} \frac{\alpha^4}{n^3} m c^2$$

(dla dużych n nie działa - pole pędzi istotnie, bo 2^4)

Energia własna elektronu



// energia pola elektronu wprze i punkt. ładunku jest niezerowa

// przypisywanie ładunku promieni, $\rightarrow$ jaki jest wpływ prom. na ten ładunek

dwupętlowe poprawki nie nowie

$$iS_F^{(1)} = iS_F^{(0)} + iS_F^{(0)} (-i\Sigma(p)) iS_F^{(0)} + \dots$$

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu$$

{ usuwamy γ
z mian. iel
do polig.

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \left(2m - \frac{x_1}{x_1 + x_2} \not{p} \right) \exp \left[i \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} p^2 - x_1 p^2 - x_2 p^2 \right]$$

zobowiązuje sym. lorentzowskiej, więc $\Sigma(p)$ tylko może $\not{p}$ lub p^2

$$iS_F^{(0)} = \frac{i}{p-m}$$

$$iS_F^{(1)} = \frac{i}{p-m} + \frac{i}{p-m} (-iZ(p)) \frac{i}{p-m} + \dots = \frac{i}{p-m-Z(p)}$$

$$1 = \int_0^\infty ds \delta(s - \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\delta(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) \quad \int_0^\infty p_0 \text{ przesłano nam}$$

$$Z(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \int_0^\infty ds \frac{1}{s} (2m - \alpha_1 p)$$

repulacyjne
bo całka
jest mieszana

$$\left\{ e^{is(\alpha_1 \alpha_2 p^2 - \alpha_1 m^2 - \alpha_2 m^2)} - e^{is\alpha_1 \Lambda^2} \right\} \quad \Lambda - \text{długość}$$

Wzór

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{is(z_1 + i\epsilon)} - e^{is(z_2 + i\epsilon)}) = \ln \frac{z_2}{z_1}$$

$$Z(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\beta (2m - \beta p) \ln \left[\frac{\beta \Lambda^2}{m^2(1-\beta) + \beta p^2 - \beta(1-\beta)p^2 - i\epsilon} \right]$$

μ - more
skala
skala μ potrzebna do renormalizacji (i tylko po to)
wzrost wartości funkcji na końcach brzozy i góry $\mu \rightarrow 0$
nowej $Z(p)$ dla p w pobliżu m

$$\frac{i}{p-m-Z(p)} \quad (Z(p) = Z(p)) \leftarrow \text{tyło tak do dip. nymarii}$$

← mierzony m_0 (poire more) ~~nie~~ $\mu \neq 0$ wpr. szeregi Taylora istnieją

$$Z(p) = \delta m - [Z_2^{-1} - 1](p-m) + Z_2^{-1} \sum_R(p)$$

$$\delta m = Z(p) \big|_{p=m} - [Z_2^{-1} - 1] = \frac{\partial Z}{\partial p} \big|_{p=m} \quad \text{renormalizacja}$$

$$p-m-Z_R(p) = Z_2 (p-m_0 - Z(p))$$

2 postaci całki - pierwszy wyraz rozwinięcia:

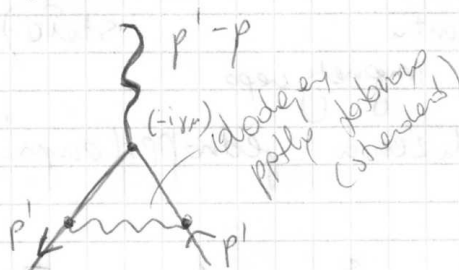
$$\delta m = m \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(Z_2^{-1} - 1) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{m^2}{m^2} + \frac{d}{4} + O\left(\frac{m}{\Lambda}\right) \right)$$

PA 000000
12.05.08.
WTK
PON

$$\Sigma_R(p) = \left\{ 2m \left[\frac{5}{8} + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{p}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - p^4}{p^4} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + (p - m) \left(\frac{9}{4} + \ln \frac{m^2}{m^2} \right) \right\}$$

FUNKCJA WIERCHOŁKOWA



$$p^2 = p'^2 = m^2$$

o p i p' relatywnie, że są nie równe

$$-ie \Gamma_\mu(p', p) = (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{p^2 - k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \times \\ \times \frac{i}{p^2 - k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_5$$

// interesuje nas zależność od masy p i p'

// spełnione jest tożsamość Warda

(ogólniejsze postać)

$$\Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} Z(p)$$

$$(p' - p)^\mu \Lambda_\mu(p', p) = [p' - m - Z(p')] - [p - m - Z(p)]$$

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu (Z_1^{-1} - 1) + Z_1^{-1} \Gamma_\mu^R(p', p)$$

$$\Rightarrow Z_1 = Z_2$$

(skorzystajmy z tego, że
choć zależy jeszcze od
masy fotonu)

help strukturę może mieć taka funkcja

$$q = p' - p \quad \text{wewnętrzne linie}$$

$$\Gamma_\mu^R(p', p) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \gamma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad \text{FAKTORY}$$

• bardziej ogólnie postać + wienholtz str. 5

~~torisonosi~~ Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [(p+p')_\mu + i \sigma_{\mu\nu} (p'-p)_\nu] u(p)$$

~~torisonosi~~

$F_1 \sim$ transformata Fouriera dla certych rozuppiet

$F_2 \sim$ rozklad momentu magnetycznego (dla punktowego)

$\neq 0$ $\rightarrow F_2(0)$ mówi o wartości momentu magnetycznego (stała)

normalne
moment
magnetyczny

$$F_2(0) = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (\text{w przybliżeniu jednopunktowym})$$

tenor:

$$F_2(0) = \frac{\kappa}{2\pi} + \dots + \frac{\kappa^5}{\dots}$$

↑
mamy
obcięcie

mając dane κ można sprawdzić dobre przewidzenie

teoretyczne (dla stałego κ)

↓ obcięcie i tego szeregu wstawiać wyznaczymy κ

↓ dla małych q

$$F_1(q^2) \approx \frac{\kappa q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{M}{\mu} - \frac{3}{8} \right)$$

(nabliżenie)

podtrzymane ... stałe itp.
Tędnie i wyłodzi z podjęz
elipsymerter upmij

Presonigwe danbe w atomie wodna

PACHUCKI
19.05.08
WTK
PON
QED

presonigwe danbe

$2p_{1/2}$

mniejsza od atomu wodna!

$2p_{1/2}$

$$E_0(2s_{1/2}) = E_0(2p_{1/2})$$

doświad. $\rightarrow \Delta E(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = L_{exp} = 1057.845(9) \text{ MHz}$

teoretycz. $\rightarrow \Delta E(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = L_{th} = 1057.842(5) \text{ MHz}$

// dodatkowaś
obliczeń nie ma
mniejszości
ten błąd

$1S_{1/2}$

// stony niestabilne mają naturalny szerokość linii (ok. 100 MHz)

($\rightarrow$ my mierzymy środek linii)

metoda szerokości linii - nie około symetrycznej $\rightarrow$ trochę błędów!

$\rightarrow$ proton nie jest punktem $\rightarrow$ lokalne źródło błędów

$\rightarrow$ sposób na wyeliminowanie różnic w gęstości

• spory wpływ proton $\rightarrow$ jednowymiarowe równanie Diraca wprowadzony propagator w polu coulombowskim

$$\left(E \gamma^0 + \frac{\vec{\alpha}}{r} \gamma^0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_r - m \right) S_F(\vec{r}, \vec{r}', E) = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\downarrow$ minimalizacja $p = r$

• bez pola coulombowskiego $p = m$

• nie da się ściśle wyznaczyć postaci S_F (takie porównanie!)

$$S_F(\vec{r}, \vec{r}', E) = \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{r}) \bar{\Psi}_n(\vec{r}')}{E - E_n(1 - i\epsilon)}$$

$\int d^3x \Psi_n^\dagger \Psi_m = 1$

"współczynnik kwantowy pole $E = m$ (propagator elektronu fermionowy, z poprawkami radiacyjnymi, w polu coulombowskim)

$$= \text{diagramy Feynmana}$$

// mamy wprowadzić kąt i poprawki - fermionowy wzór

$$S_F + S_F \tilde{Z} + S_F \tilde{Z} S_F \tilde{Z} S_F + \dots$$

// sumuje się do szeregu geometrycznego (znowu)

$$= \frac{1}{\not{p} + \frac{2\alpha}{r} \gamma^0 - m} = \left(\frac{1}{\not{p} + \frac{2\alpha}{r} \gamma^0 - m} + \frac{1}{\not{p} + \frac{2\alpha}{r} \gamma^0 - m} \tilde{Z} \frac{1}{\not{p} + \frac{2\alpha}{r} \gamma^0 - m} + \dots \right)$$

str. 1

$\tilde{Z}$ - bardziej skomplikowane niż ostatnio
 Wracamy do poprzedniego swobodnego

// szukamy biegun S_F (będzie odpowiedź energii stanu
 związanego)

// reguła: bieżący wykładnik przytóry element macierzy

$|\psi_n\rangle$ - n-ty stan
 $|n\rangle$

$\sim \langle n | \frac{1}{x + \frac{2\kappa}{\pi} x^2 - n - \tilde{Z}} | n \rangle$ ← tej chwili nowe pojęcie energii, ale skorzystamy z wartości z poprzedniego

↓ swobodny lub sensowny

1°) $\langle \bar{m} | x^0 S_F x^0 | n \rangle = \frac{1}{E - E_n}$

2°) $\langle \bar{m} | x^0 S_F \tilde{Z} S_F x^0 | n \rangle = \frac{\langle n | \tilde{Z} | n \rangle}{(E - E_n)^2}$

3°) $\frac{1}{(E - E_n)^2} \sum_m \frac{\langle \bar{m} | \tilde{Z} | m \rangle \langle \bar{m} | \tilde{Z} | n \rangle}{(E - E_m)}$

1° + 2° + 3° + ... itd

$= \frac{1}{E - E_n - \sigma(E)}$

znajdźmy postać $\sigma(E)$ ze znajomości
 pierwszego średniego szeregu

$\tilde{Z} = \tilde{Z}(E)$

reguła: wystąpił 2° → $\sigma_n(E) = \langle \bar{n} | \tilde{Z} | n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \tilde{Z} | m \rangle \langle \bar{n} | \tilde{Z}(E) | m \rangle}{E - E_m} + \dots$

(signe zależy od stanu)
 więc indeks n

czy $\frac{1}{E - E_n - \sigma(E)}$

$m \neq n$ bo jest potęga nym
 $(\langle \bar{n} | \tilde{Z} | n \rangle)^2$ i on
 dzieje się wron

podstawiamy $\sigma(E_m) \sim \sigma(E_n)$

$E^{(0)} \rightsquigarrow E_n$

$E^{(1)} \rightsquigarrow E_n + \sigma_n(E_n) - i.t.d.$

$E = E_n + \sigma_n(E_n) + \sigma_n(E_n) \frac{\partial \sigma_n(E_n)}{\partial E_n} + \dots$

// jedyna metoda wyznaczenia stanu związanego -

- poprzez bieżący poprzedników (poprzednie
 metoda rachunku rekurencyjnego prowadzi przez niemożliwość)

$$\Delta E = \langle \bar{n} | \Sigma (E_n) | n \rangle = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k^2} \times$$

$$\times \langle \bar{\psi} | \gamma^\mu e^{i k r} S_F(E - \omega^0) e^{-i k r} \gamma_\mu | \psi \rangle$$

reprezentacji położeniowej
w reprezentacji położeniowej

// to jest wibr. siły, mus. różnic-
tu średniej poprzeczno polowy
wzrost niskoenergetyczny

↳ reprezent. propagatoru fotonu w
innym ujęciu, żeby było
"wygłuszanie"

$$- (\delta m) \langle \bar{n} | n \rangle$$

(renormalizacja masy) →

→ takie same jak dla
teorii swobodnej spręż.
typodnie

$$G_F^{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} g^{\mu\nu} + [k^\mu f^\nu + k^\nu f^\mu]$$

→ ~~nie~~ było zabranie do momentu żeby
polu było f

$$G_C^{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{1}{k^2} & \mu = \nu = 0 \\ -\frac{1}{\omega^2 - k^2} (\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}) & \mu = i, \nu = j \\ 0 & \mu = i, \nu = 0 \end{cases}$$

w p. p. p.

[sprawdź, że tutaj
wielkość fizyczne nie
zależą od ujemnego
przyspieszenia]

$-\frac{1}{k_0^2 - k^2}$ // może wywnioskować
z reszki

$$E = e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \langle \bar{\psi} | \gamma^i \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \frac{2\alpha}{\pi} \not{\partial} - m} \gamma^j | \psi \rangle$$

promień niel.
2 min. białe
 $\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\phi}{2h} \end{pmatrix}$
 $r^i \sim \dots$

wprowadzamy nielatywistyczny to wysłuchaj
zbiere do:

$$= \langle \phi | \frac{p^i}{m} \frac{1}{E - k - H_0} \frac{p^j}{m} | \phi \rangle$$

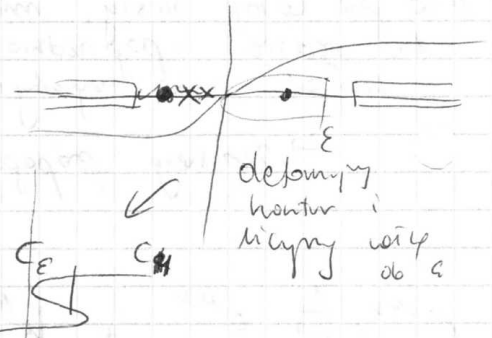
// to samo co już było

po uśrednieniu po kątach

$$E_n = -\frac{2\alpha}{3\pi\hbar^2} \int_0^\infty \omega d\omega \langle \phi | \bar{\psi} \frac{1}{H-(E-\omega_0)} \bar{\psi} | \phi \rangle =$$

$$= m \frac{\alpha}{\pi} \frac{(2\alpha)^4}{n^3} \frac{n}{5} \ln \frac{2E}{m(2\alpha)^2 \ln(n,1)}$$

//nie jest oczywiste, że możemy zmienić
cełowanie tym w jedną stronę!



Sytuacja $\rightarrow$ E jest mały, zatem mamy zależność od cełowania
py zmienić, cech. nie kulombowskie
odpowiedzi

$$\Delta E = E_L + E_H$$

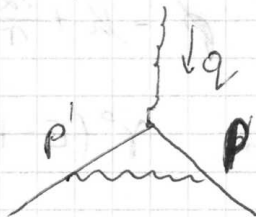
$$E_H = e \int_{c_H} \frac{d\mu}{2\pi\hbar}$$

propagator elektronu - rozciągany

many subokre propagator i mamy sobie wyobrazić ich polaryzacji
uproszczamy sobie życie

$$k^2 - \mu^2$$

mamy sobie przypomnieć, że E w pewnym stopniu



funkcja wienathouse spread typowe

$$\gamma_F \rightarrow \Gamma_F = \gamma_F \left[1 + \alpha q^2 \left(\ln \frac{m}{\epsilon} - \frac{3}{8} \right) \right] + \frac{i}{m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \frac{\alpha}{2\pi}$$

be
hyperboliczne $\ln \frac{m}{2\epsilon} = -\frac{5}{6}$

$$\Gamma_F A^\mu = A^\mu \Gamma_0 = \gamma^\mu \left\{ 1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left[\ln \frac{m}{2\epsilon} + \frac{11}{24} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{i}{2m} \frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \} A^\mu$$

$$E_H = e \langle \bar{\psi} | \Gamma A | \psi \rangle$$

$$E_1 + E_2$$

$$\epsilon_0 \equiv 1$$

// poliny w prawy
nierelatywistycznej

PACIOCKI
19.05.08
WTK
PONIEDZIAŁEK
QED

$$A^0 = -\frac{2e}{4\pi r}$$

konstanta delta Diraca po skróceniu

$$E_{H1}^m = \delta_{l0} \frac{4}{3} \frac{m\alpha}{\hbar^3} (Z\alpha)^4 \left(\ln \frac{m}{2e} + \frac{11}{24} \right)$$

$$\sigma^{0i} = i\alpha^i$$

$$E_H^2 = e \langle \bar{\psi} | \frac{i}{2m} \frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{0i} q^i A^0(q) | \psi \rangle =$$

$$-i\sigma^0 \sigma^i = \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \bar{\psi} | \frac{i}{2m} \sigma^{0i} q_i \frac{2}{2\pi} \left(\frac{-2e^2}{q^2} \right) | \psi \rangle$$

← trzeba przejść do repr. Diraca
przed wejściem poliny!

$$= -4\pi \cancel{2} \frac{1}{2m} \frac{\alpha}{2\hbar} \langle \psi^\dagger | \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{q^2} | \psi \rangle =$$

$$= \frac{2\alpha^2}{8\pi m} \langle \psi | \left[4\pi \delta^3(\vec{r}) + \frac{4\pi \cdot 5}{r^3} \right] | \psi \rangle$$

$$\langle \frac{1}{q^3} \rangle = \frac{2}{l(l+1)(2l+1)\hbar^3} (Zm\alpha)^3$$

$$E_H = E_{H1} + E_H^2 = e \langle \bar{\psi} | \Gamma A | \psi \rangle =$$

$$= m \frac{\alpha}{\hbar} \frac{(Z\alpha)^4}{\hbar^3} \left[\left(\frac{4}{3} \ln \frac{m}{2e} + \frac{11}{18} \right) \delta_{l0} - \frac{1}{24(2l+1)} \right]$$

$$H = \begin{cases} -(l+1) & \text{dla } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{dla } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Delta E = E_l + E_u = m \frac{\alpha}{\hbar} \frac{(Z\alpha)^4}{\hbar^3} \left\{ \left[\frac{4}{3} \ln(Z\alpha)^{-2} + \frac{10}{9} \right] \delta_{l0} - \frac{4}{3} \ln \hbar_0(m) - \right.$$

$$\left. \Delta E_{lp} = \frac{\alpha}{\hbar} \frac{(Z\alpha)^4}{\hbar^3} \left(-\frac{4}{15} \right) - \frac{(1-\delta_{l0})}{24(2l+1)} \right\}$$

↑ "susły" wch na pierwszym kroku (przybliżenie faktu ptho,
dla małego 2α

są też poprawki $(Z\alpha)^5, (Z\alpha)^6, \dots$

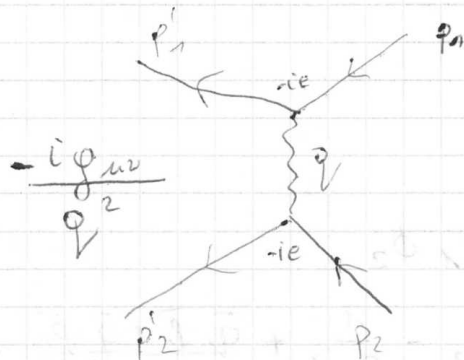
// Zestanie domowe dalej odtworne

Oddziaływanie broto

RACHUCKI
QED
26.05.08
WTK
PONIED.

Hamiltonian mikroteorii

$$H = \sum_a \left(\frac{\vec{p}_a^2}{2m} - \frac{2\alpha}{r} \right) + \sum_{\omega, b} \frac{\omega}{2\epsilon_0 V}$$



$(-i) \rightarrow$ amplituda dostarc energii
// symetria i prędkość

$$u^\dagger u = 1 \quad E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{E+m}}{2E} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E(E+m)}} \phi \end{pmatrix}$$

$$u \sim \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{p^2}{2m^2}\right) \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \phi \end{pmatrix}$$

$$M = e^2 (\bar{u}_1 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu} (\bar{u}_2 \gamma^\nu u_2)$$

$$D_{00} = \frac{1}{q^2}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{\omega^2 - q^2} \left(\delta^{ij} - \frac{q^i q^j}{q^2} \right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{w rachunku} \\ \text{Wolobrowskim} \end{array} \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{\omega^2 - q^2} \left(\delta^{ij} - \frac{q^i q^j}{q^2} \right)$$

$$M = e^2 \left\{ \bar{u}_1 \gamma^0 u_1 \cdot \bar{u}_2 \gamma^0 u_2 D_{00} + \bar{u}_1 \gamma^i u_1 \bar{u}_2 \gamma^j u_2 D_{ij} \right\}$$

$$\Gamma_{\text{mier}} = \frac{e^2}{q^2} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}$$

$$\bar{u}_1 \gamma^0 u_1 =$$

$$\begin{pmatrix} \left(1 - \frac{p_1^2}{2m^2}\right) \phi_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{2m} \phi_1 \end{pmatrix}^\dagger \cdot \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{p_1^2}{2m^2}\right) \phi_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{2m} \phi_1 \end{pmatrix} = \phi_1^\dagger \left\{ 1 - \frac{p_1^2}{2m^2} - \frac{p_1^2}{2m^2} + \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1}{2m} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1}{2m} \right\} \phi_1$$

$$= \phi_1^\dagger \left\{ 1 - \frac{\vec{q}^2}{2m^2} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_1}{4m^2} \right\} \phi_1$$

// to jest id. wektorowy, więc mamy $\vec{p}_1' \times \vec{p}_1 = (\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \times \vec{p}_1 = \vec{q} \times \vec{p}_1$

$$\bar{u}_1' \bar{\gamma} u_1 = \left(\frac{\phi_1}{\frac{\sigma_1 \cdot \vec{p}_1}{2m_1}} \phi_1' \right)^\dagger \bar{\alpha} \left(\frac{\phi_1}{\frac{\sigma_1 \cdot \vec{p}_1}{2m_1}} \phi_1 \right) = \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \phi_1'^* \left(i \bar{\sigma} \times \vec{q} + \underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_1'}_{2\vec{p}_1 + \vec{q}} \right) \phi_1$$

czyli:

$$M = \phi_1'^* \phi_2'^* U(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}) \phi_1 \phi_2$$

$$U(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}) = e^2 \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{8m_1^2} - \frac{1}{8m_2^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_1 + \vec{q} \cdot \vec{p}_2}{m_1 m_2 q^4} - \right. \\ \left. - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_1 m_2 q^2} + i \frac{\bar{\sigma}_1 \vec{q} \times \vec{p}_1}{4m_1^2 q^2} - i \frac{\bar{\sigma}_1 \vec{q} \times \vec{p}_2}{2m_1 m_2 q^2} - i \frac{\bar{\sigma}_2 \vec{q} \times \vec{p}_2}{4q^2 m_2^2} + \right. \\ \left. + i \frac{\bar{\sigma}_2 \vec{q} \times \vec{p}_1}{2m_1 m_2 q^2} + \frac{(\bar{\sigma}_1 \vec{q})(\bar{\sigma}_2 \vec{q})}{4m_1 m_2 q^4} - \frac{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2}{4m_1 m_2} \right\}$$

σ_1 działane ϕ_1

σ_2 działane na ϕ_2

$$U(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{r}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\pi\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(r)$$

$$\int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{q^2} = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \frac{i}{q^2} \left(\delta^{ij} - \frac{r^i r^j}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi r} \left(\delta^{ij} + \frac{r^i r^j}{r^2} \right)$$

do domu $\left[\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^3}, p^j \right] = 0$

$$U(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{r}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\pi\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \delta^3(r) +$$

$$- \frac{\alpha}{2m_1 m_2} p_1^i \left(\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^2} \right) p_2^j +$$

$$- \frac{\alpha}{4\pi m_1^2 r^3} \vec{r} \times \vec{p}_1 \cdot \vec{\sigma}_1 + \frac{\alpha}{4\pi m_2^2 r^3} \vec{r} \times \vec{p}_2 \cdot \vec{\sigma}_2 +$$

$$- \frac{\alpha}{2m_1 m_2 r^3} \left\{ \vec{r} \times \vec{p}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \vec{r} \times \vec{p}_2 \cdot \vec{\sigma}_1 \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha}{4m_1 m_2} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3}{r^3} (\bar{\sigma}_1 \vec{r})(\bar{\sigma}_2 \vec{r}) - \frac{8\pi}{3} \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \delta^3(r) \right\}$$

$$V = U + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_1^4}{8m_1^3} - \frac{p_2^4}{8m_2^3}$$

$m \rightarrow$ interpretacja (rozpręczenie modułowe, Fermi)

PACHUCKI
QED
26.05-08
C44
PON

jeśli $m_2 \rightarrow \infty$ pierwszy doświadek jest wtedy po transformacji Foldy-Hoylewskiej 2. momentu D. nie

Hamiltonian atomu helu

$$H_B = \sum_a H_a + \sum_{a > b} H_{ab}$$

$$H_a = \frac{p_a^2}{2m} - \frac{2\alpha}{r_a} - \frac{p_a^4}{8m^3} + \frac{\pi 2\alpha}{2m^2} \delta^3(r_a)$$

$$H_{ab} = \frac{1}{r_{ab}} - \frac{\pi\alpha}{m^2} \delta^3(r_{ab}) - \frac{\alpha}{2m^2} p_a^i \left(\frac{\delta^{ij}}{r_{ab}} + \frac{r_{ab}^i r_{ab}^j}{r_{ab}^3} \right) p_b^j +$$

$$- \frac{2}{3} \frac{\pi\alpha}{m^2} \bar{\sigma}_a \bar{\sigma}_b \delta^3(r_{ab}) + \frac{\alpha}{4m^2} \frac{\sigma_a^i \sigma_b^j}{r_{ab}^3} \left(\delta^{ij} - \frac{3r_{ab}^i r_{ab}^j}{r_{ab}^2} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha}{4m^2 r_{ab}} \left[2 (\bar{\sigma}_a r_{ab} \times \bar{p}_b - \bar{\sigma}_b r_{ab} \times \bar{p}_a) + \right.$$

$$\left. + (\bar{\sigma}_b r_{ab} \times \bar{p}_b - \bar{\sigma}_a r_{ab} \times \bar{p}_a) \right]$$

// uogólnienie na wielo doświadek spinu

// uogólnienie do wyższych rzędów

$\rightarrow$ nie ma sensu znajdować siatek w wartościach H , tylko perturbacyjnie

te operatory nie są obserwabli, ze nie traktujemy tego jako całego hamiltonianu, bo przekierowujemy obserwacje

$$\delta^{(2)} E = \langle \Phi | \delta H (E_0 - H_0)^{-1} \delta H | \Phi \rangle = \infty (!)$$

mechaniczne uogólnienie nie ma sensu

$$E = m \cdot \overset{\substack{\uparrow \text{stała sprężystości}}}{\epsilon(\vec{x})} = m (\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(6)} + \dots)$$

$\downarrow$ skąd się bierze $\epsilon^{(5)}$?

$\varepsilon^{(5)}$ - ~~prze~~ uogólnienie pierwszego członu ← most przy wyliczeniach

$$\delta^{(1)} E = \langle \phi | \delta H \frac{1}{(E_0 - H_0)} \delta H | \phi \rangle + \langle \phi | \delta^{(2)} H | \phi \rangle$$

// to są wyniki z ostatnich 10 lat!

uprzedzenie

$$H_Q = \frac{\vec{p}_Q^2}{2m} - \frac{Z\alpha}{Na} + eA^0_Q - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - \frac{\pi_Q^4}{8m^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2m^2} \delta^3(r_Q)$$

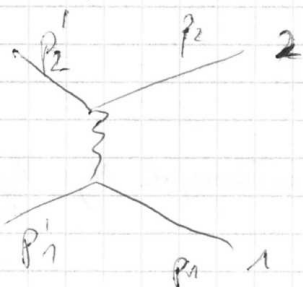
$$\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$$

$$+ \frac{Z\alpha}{4m^2} \vec{\nabla}_Q \cdot \frac{\vec{p}_Q}{Na} \times \vec{p}_Q - \frac{e}{8m^2} [\vec{\nabla} \vec{E} + \vec{\sigma}_Q (\vec{E}_Q \times \vec{\pi}_Q - \vec{\pi}_Q \times \vec{E}_Q)] + \frac{e}{8m^3} \{ \vec{\pi}_Q \cdot \vec{B} \vec{\pi}_Q^2 + \vec{\pi}_Q^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \}$$

Nab - takie są przybliżenia tylko $p \rightarrow \pi$

↳ uogólnienie struktury odpowiednio do przejść singlet - triplet

// przypisujemy 2e mamy elektron i pozyton



ale e⁺e⁻ dają mały dipol!



one istotny wkład, który w obrotach spór, choć niekiedy bardziej skomplikowane

$$M = -e^2 [\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)] D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) [\bar{v}(p_+) \gamma^\nu v(p'_+)] + e^2 [\bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p)] D_{\mu\nu}(p_- + p_+) [\bar{u}(p') \gamma^\nu v(p'_+)]$$

odpowiedni potencjał efektywny:

$$U = \frac{\pi \alpha}{2m^2} [3 + \vec{\sigma}_+ \cdot \vec{\sigma}_-] \delta^3(r)$$

podkreślić strukturę niedokładną $\leftarrow$ dobre r.w. do domu

" $-\frac{2}{3} \frac{\pi \alpha}{m^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \delta^3(r_{\text{rel}})$ " , oraz U sp. ważnymi
ile odnosić

$$\delta E_{\text{HFS}} = \frac{7}{12} \alpha^4 \quad (\text{zgod. na poziomie})$$

// dla porytronium znaleźć pop. energii rel. w dowolnym stanie

Pacholcu!
QED.

26.05.08
WTK.
Pon.

Wzrost dwucząsteczkowy m_1, e, m_2, e^* , obic o spinach $1/2$,

chcemy policzyć jakie są poprawki energetyczne w ramach

pełnej QED

• μ - masa zredukowana, • $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, • n - pierwsze kilka kwantów

$$E(m_1, m_2, \alpha) = -\mu \cdot \frac{\alpha^2}{2n^2} + \dots$$

$$= E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + \dots$$

$$E^{(2)} = -\frac{\mu \alpha^2}{2n^2}$$

$E^{(4)}$

- hamilt. Breit - Pauli

$$E^{(n)} = \langle \phi | H_{BP} | \phi \rangle$$

mikrorelatywistyczne funkcje falowe

$E^{(6)}$

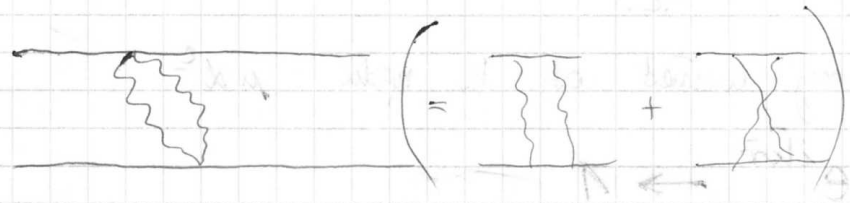
= ...

$$\sim \alpha^4 \cdot f(m_1, m_2)$$

nie zadanie egzystencyjne...
ale b. nietrywialne



Igo które doprowadzi:



$$\left(\frac{p - eA}{2m} \right)^2$$

(1952)

$$\frac{\mu^3}{m_1 m_2} \frac{\alpha^5}{\pi n^3} = \left\{ \frac{2}{3} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \frac{8}{3} \ln \left(\kappa_0(m_1, 1) \right) - \frac{1}{9} \delta_{\kappa_0} - \frac{1}{3} a_n \right.$$

$$\left. - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \delta_{\kappa_0} \left[m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} - m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} \right] \right\} =$$

$$Q_n = -2 \left[\ln \frac{2}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \right] \delta_{\kappa_0} +$$

$$+ \left[\frac{1 - \delta_{\kappa_0}}{2(1+n)(1+2n)} \right]$$

$$\Delta E = E_L + E_M + E_S + E_N$$

$$H = \frac{(\bar{p}_1 - e\bar{A}(x))^2}{2m_1} + \frac{(\bar{p}_2 - e\bar{A}(x))^2}{2m_2} - \frac{\alpha}{\pi} - \frac{e}{m_2} \bar{\psi}_1 \bar{B}(\bar{A}_1)$$

$$- \frac{e}{m_2} \bar{\psi}_2 \bar{B}(\bar{A}_2) + \sum_A \int d^3x \alpha^+_{A\lambda} \alpha_{A\lambda}$$

SN.1

$$\bar{A}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \bar{E}_{\lambda} (a_{k\lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad \bar{\nabla} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

chcely me uzi mrazoviny + oddelky prazniny

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{\alpha}{r} + \sum_{\lambda} d_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda}$$

$$H_I = -\frac{e}{m_1} \vec{p}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) + \frac{e}{m_2} \vec{p}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_2) + \frac{e^2}{2m_1} \vec{A}(\vec{r}_1)^2 + \frac{e^2}{2m_2} \vec{A}(\vec{r}_2)^2 - \frac{e}{m_1} \vec{S}_1 \cdot \vec{B}(\vec{r}_1) - \frac{e}{m_2} \vec{S}_2 \cdot \vec{B}(\vec{r}_2)$$

whitod od symy folow paperepa
whitod moloerety
 $E_0 = \hbar\omega = k$

ten hamiltonian jone me whitod ~~symy~~ pole eld

$$\Delta E_{EL} = -\frac{e^2}{m_1 m_2} \langle \phi | (\vec{p}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) - \vec{S}_1 \cdot \vec{B}(\vec{r}_1)) \frac{1}{E - H_0} (\vec{p}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_2) - \vec{S}_2 \cdot \vec{B}(\vec{r}_2)) | \phi \rangle + h.c.$$

liapny whitod od k neda $\mu\alpha^2$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \rightarrow 1$$

$$\langle \phi | \vec{S} \times \vec{u} | \phi' \rangle = 0$$

$$E_L = -\frac{2e^2}{3m_1 m_2} \int_0^{\epsilon_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \langle \phi | \vec{p}_1 \cdot \frac{1}{E_0 - k - H_0} \vec{p}_2 | \phi \rangle + h.c.$$

$\uparrow$
kinetic energy
folow

perch whitod 2 us theory $\rightarrow$

whitod w Weyn $p_1 = -p_2 = p$

antis single moy

$$E_L = \frac{\hbar\alpha}{3\pi m_1 m_2} \int_0^{\epsilon_{max}} dk \langle \phi | \vec{p} \cdot \frac{\hbar}{E - \hbar\omega - \mu} \vec{p} | \phi \rangle$$

$$= \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \cdot \frac{\alpha^5}{\pi \hbar^3} \left[\frac{8}{3} \ln\left(\frac{2\epsilon}{\alpha}\right) \delta_{\hbar\omega} - \frac{3}{8} \ln k_0(m, \epsilon) \right]$$

$$\ln h_0(m, l) = \frac{m^3}{2\mu^3 \alpha^4} \langle \phi | \bar{p} (H_5 \bar{C}_0) \ln \frac{2(\mu_0 - \epsilon_0)}{\mu \alpha^2} \bar{p} | \phi \rangle$$

2.06.08

czw.

W4h

$$\omega > \mu > \epsilon_{\mu\alpha} \quad E_{\mu}$$

$$E_{\mu} = \frac{-e^2}{m_1 m_2} \int \frac{d^3 u}{(2\pi)^3 2u^3} \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{u^2} \right) \langle \phi | (p_1^i - \bar{S}_1 \times \bar{u}^i) e^{i\bar{u}\bar{r}_1}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 - \mu - H_0} (p_2^j - \bar{S}_2 \times \bar{u}^j) e^{-i\bar{u}\bar{r}_2} | \phi \rangle + h.c.$$

↓
(H_0 - \epsilon_0)

$$A(H-E)B + B(H-E)A = [A, [H-E, B]] + (H-E)BA +$$

↑
+ AB(H-E)

tyko potencjał kulombowski
przejdzie do hamiltonianu

$$\langle \phi | [A, [H-E, B]] | \phi \rangle = \langle \phi | e^{i\bar{u}\bar{r}} \left[\bar{p}_1^i \left[\frac{x}{r}, p_2^j \right] \right] | \phi \rangle$$

$$r = r_1 - r_2$$

$$E_{\mu} = \frac{e^2}{m_1 m_2} \int \frac{d^3 u}{(2\pi)^3 2u^3} \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{u^2} \right) \langle \phi | e^{i\bar{u}\bar{r}} \left[p_1^i, [p_2^j, \frac{x}{r}] \right] | \phi \rangle$$

nie tak. Toż samo to poliny miejscy...

$$\langle \phi | P\left(\frac{1}{r^3}\right) | \psi \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d^3 r \phi^*(r) \left[\frac{1}{r^3} \Theta(r-\alpha) + 4\pi \delta^3(r) (\alpha + \epsilon_0) \right]$$

(r)

$$\int d^3 r P\left(\frac{1}{r^3}\right) e^{-r} = 0$$

$$E_{\mu} = -\frac{2\alpha^2}{3\pi m_1 m_2} \langle \phi | P\left(\frac{1}{r^3}\right) + (\dots) \delta^3(r) | \phi \rangle$$



r-gonne Eulers



jak wielki słoń wodonoś

$$\langle \phi_{nL} | P\left(\frac{1}{(\mu r)^3}\right) | \phi_{nL} \rangle = \frac{4}{n^3} \left(\ln \frac{n}{2} + \gamma(n) - \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) \delta_0 +$$

+ \frac{2}{n^3} \frac{1 - \delta_{00}}{2(2+n)(n+2)}

\sqrt{8\pi^3}

$$E_M(1s) = \frac{8}{3\pi} \alpha^5 \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left(\frac{4}{3} - \ln \frac{\epsilon}{2} \right)$$

otrzymuje współczynniki przy delta:

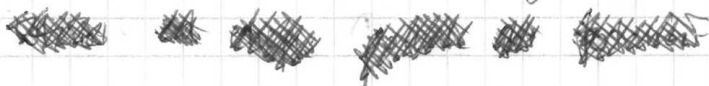
$$E_M = \frac{8}{3\pi} \alpha^5 \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left[-\frac{1}{4} \langle p \left(\frac{1}{r^3} \right) \rangle_{ne} + \left(\frac{4}{3} - \ln \epsilon \right) \frac{\delta \omega}{m^3} \right]$$

E_S pochodzi od moment $A_1^2 A_2^2$

$$E_S = \frac{e^4}{4m_1 m_2} \langle \phi | \bar{A}(\vec{r}_1)^2 \frac{1}{E_0 - H_0} \bar{A}(\vec{r}_2)^2 | \phi \rangle + H.C.$$

↑
dwukrotnie 2
dotygu

↓
dwukrotnie 2
dotygu



hamiltonian atomowy jest pomijalny

$$= -\frac{e^4}{4m_1 m_2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \phi^\dagger(\vec{p} - \vec{q}_1) \phi(\vec{p} - \vec{q}_1) \frac{1}{q_1 q_2} \frac{1}{q_1 + q_2} \left(\delta^{ij} - \frac{q_1^i q_2^j}{q_1^2} \right) \left(\delta^{ij} - \frac{q_2^i q_1^j}{q_2^2} \right)$$

I ignorujemy kierowności wekt. wstawiamy $q_1, q_2 \int_0^\infty$

$$\hat{\Lambda} = \frac{\alpha^2}{2\pi m_1 m_2} \langle \phi | \frac{1}{r^3} | \phi \rangle$$

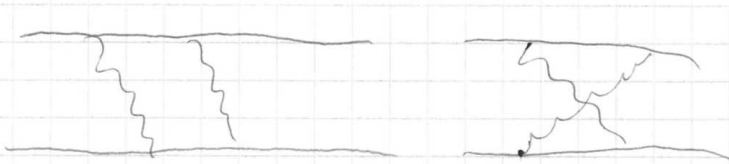
regulujemy mnożąc przez $\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q_1^2} \cdot \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q_2^2} \rightarrow$ wtedy wekt. u q staje się znikającym

$\Lambda = \mu \alpha \lambda$ bierzemy, bierzemy $\lambda \rightarrow \infty$

$$E_S(1s) = -\frac{2}{\pi} \alpha^5 \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left(\ln \lambda + \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{17}{6} \right)$$

stąd otrzymujemy ostateczny wynik

$$E_S = -\frac{2}{\pi} \alpha^5 \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left[\frac{1}{4} P \left(\frac{1}{(\mu \alpha r)^3} \right)_{nk} + \left(\ln \lambda + \frac{7}{3} \ln 2 - \frac{17}{6} \right) \frac{\delta \omega}{n^2} \right]$$



$$t = (m, 0, 0, 0)$$

$$E_H = -e^4 \phi^2(0) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{k} - m_1} \gamma^\nu \frac{\gamma^0 + I}{4} \right]$$

$$\left\{ \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}_2 + \not{k} - m_2} \gamma^\nu \frac{\gamma^0 + I}{4} \right] + \text{Tr} \left[\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}_2 - \not{k} - m_2} \gamma^\mu \frac{\gamma^0 + I}{4} \right] \right\}$$

poprawka jedno pętlowe do anal. rozpraszania

$$E_H = -\frac{4\pi \alpha^5}{n^3} \frac{m_1 m_2 \mu^3}{n^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{k^3 m_1 m_2} + \left\{ \frac{k^4 + 6k^2 m^2 + 8m^4}{k^6 m_1 \sqrt{k^2 + m_1^2} (m_1^2 - m_2^2)} + (1 \rightarrow 2) \right\} \frac{(2)1}{k^3} \left(\frac{1^2}{1^2 + k^2} \right)^2 \right]$$

re współczynnik taki,
re obrotów
zawij

$$= -\frac{\mu^3}{m_1 m_2} \frac{\alpha^5}{\pi n^3} \delta_{10} \left\{ \frac{7}{3} - 2 \ln(2\lambda \alpha) + \frac{2}{m_1^2 - m_2^2} \left[m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} - m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} \right] \right\}$$

$$\Delta E = E_L + E_H + E_S + E_H =$$

$$= \frac{\alpha^5}{\pi n^3} \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left[\frac{2}{3} \delta_{10} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{8}{3} \ln \ln(m, \ell) - \frac{7}{6} n^3 \left\langle P \left(\frac{1}{(n \alpha r)^3} \right)_{nk} \right\rangle + \frac{6^2}{9} \delta_{10} - \frac{2 \delta_{10}}{m_1^2 m_2^2} \left[m_1 \ln \frac{m_2}{\mu} - m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} \right] \right]$$

// pominiętych jedna rzecz → odd. spin, spin!

$$E_H^1 = - \frac{2\alpha^5}{\pi m^3} \int d\Omega \langle \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \rangle \frac{\mu^3}{m_2^2 - m_1^2} \ln \left(\frac{m_2}{m_1} \right)$$

$$\lim_{m_2 \rightarrow m_1} \frac{\ln \frac{m_2}{m_1}}{m_2^2 - m_1^2} = \frac{\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}}{2m_2} = \frac{1}{2}$$

$$(0,0,0,m) = 1$$

Computer log ob ...