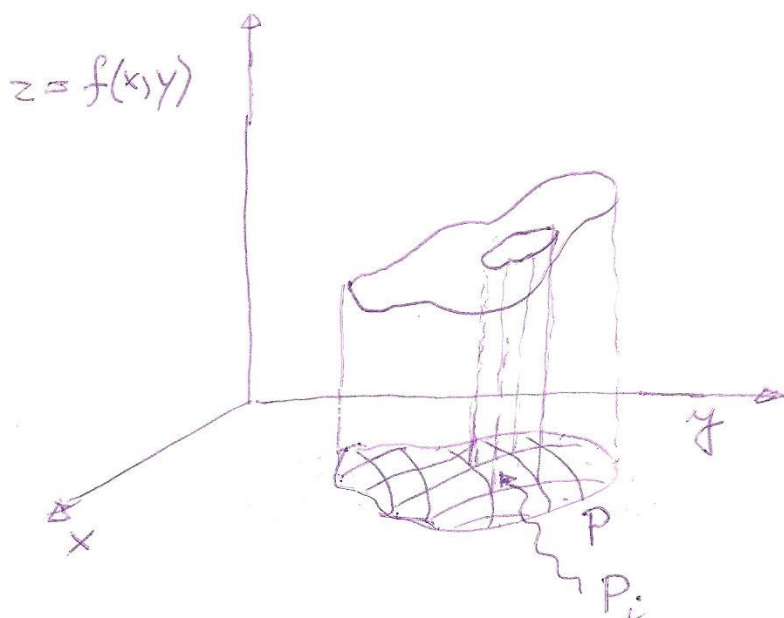


- 1 -

XII Całki wielokrotne

Dla łatwiejszego zrozumienia rozważymy przypadek dwuwymiarowy.



Podzieliłiśmy obszar na części P_i o powierzchniach $|P_i|$ odpowiednio. Weźmy jakiś punkt $(\xi_i, y_i) \in P_i$. Odpowiada mu wartość funkcji $f(\xi_i, y_i)$. Objętość małego, zaznaczonego na rysunku walca jest równa w przybliżeniu

$$f(\xi_i, y_i) |P_i|$$

Przybliżona objętość całej bryły równa

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |P_i|$$

— * —

Rozważmy podział obszaru P na n obszarów P_i ($i=1, \dots, n$) o powierzchniach $|P_i|$. Oznaczmy ten podział przez Π . Średnicę podziału, oznaczmy ją przez $\delta(\Pi)$, nazywamy największą ze średnic zbiorów P_i . Z kolei średnicę zbioru P_i nazywamy krótką odległością między punktami dowolnymi P_i .*) W dalszych rozważaniach interesować nas będą ciągi podziałów $\{\Pi_n\}$, takie że $\delta(\Pi_n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Ciągi te nazywamy normalnymi. Tworzący sumę całkowy (Riemanna)

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |P_i|$$

Mówimy, że suma S ma granicę I , gdy ciąg wartości sumy S odpowiadający dowolnemu ciągowi podziałów normalnych rozważanego obszaru jest zawsze zbierany do granicy I niezależnie od wyboru punktów (ξ_i, η_i) .

*) Jeśli funkcja jest ograniczona z góry (z dołu) to wszakże dla M (m) odpowiednich zadość równości $f \leq M$ ($m \leq f$) dla każdego argumentu funkcji f istnieje najmniejsza (największa) liczbę tę nazywamy krótkim górnym (dolnym) funkcji na zbiorze A i oznaczamy symbolem

$$\sup_{x \in A} f(x) \text{ (supremum) } \\ \left[\inf_{x \in A} f(x) \text{ (infimum)} \right]$$

CW-3

Skonczony granicę sum σ przy $\delta(\Pi_n) \rightarrow 0$ uziywaną całką podwójną funkcji $f(x,y)$ po obszarze P i oznaczamy symbolem

$$I = \iint_P f(x,y) dP$$

Kiedy całka istnieje? Z jakimi słowami, kiedy funkcja $f(x,y)$ jest całkowna? Mówi o tym twierdzenie:

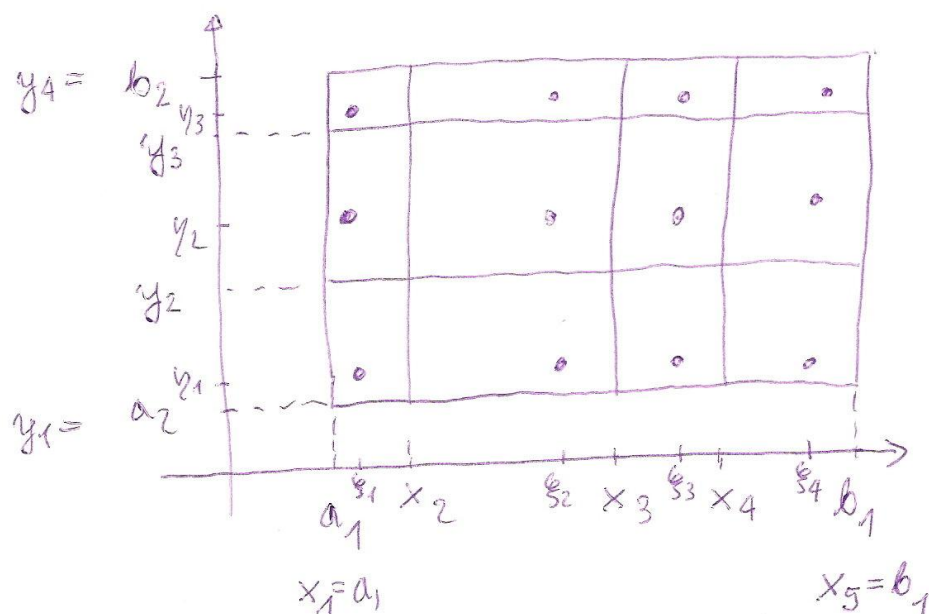
Twierdzenie. Jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze domkniętym P , to ma całkę w tym obszarze.

Założenia tego twierdzenia, które podajemy bez dowodu, można osłabić, wymagając jedynie, żeby $f(x,y)$ była ciągła w podoblastach na które można podzielić P za pomocą krzywych ciągłych (w przypadku $f = f(x,y,z)$ mówimy o całce potrójnej i obszar P jest trójwymiarowy. Wtedy wspomniane krzywe należy zastąpić powierzchniami dwiemaściami P na podoblasty itd.).

Porostaje problem obliczenia całki I . Przedstawimy tu szkielet postępowania.

CW-4.

Niech dla prostokątny obszar P będzie prostokątem



Then the sum

$$S = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} f(\xi_i, \eta_j) |x_{i+1} - x_i| |y_{j+1} - y_j|$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1-1} \left(\sum_{j=1}^{n_2-1} f(\xi_i, \eta_j) |y_{j+1} - y_j| \right) |x_{i+1} - x_i|$$

Wyrażenie w nawiasie jest dobrym przybliżeniem całki

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y) dy$$

o ile dostatecznie jest drobny jest podział $[a_2, b_2]$ punktami $y_1, \dots, y_{n_2}$.

CW-5

Drugą stronę też można w podobny sposób uważyć za przybliżenie całki. Ostatecznie w granicy

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y) dy \right) dx$$

Co będzie, gdy obszar P nie jest prostokątem?
Wprowadza się wtedy funkcję charakterystyczną χ_P zbioru P :

$$\chi_P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x,y) \in P \\ 0, & \text{gdy } (x,y) \notin P \end{cases}$$

Następnie znajdujemy taki prostokąt K , że

$$P \subset K$$

i całkę po zbiorze P z funkcji f rozumiemy jako

$$\int_P f = \int_K f \cdot \chi_P$$

wyili sprowadzamy problem do całkowania po prostokącie,

Uogólnienie na przypadku więcej niż 2 zmiennych wymaga zastąpienia prostokąta tzw. kostką (prostokąt jest jej szczególnym przybliżeniem) który w przypadku całki n -krotnej definiujemy jako

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, n\}$$

EW-6

teraz $f = f(x_1, \dots, x_n)$

$$\int_P f dP = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1.$$

Stosujemy inny zapis prawej strony:
w praktyce

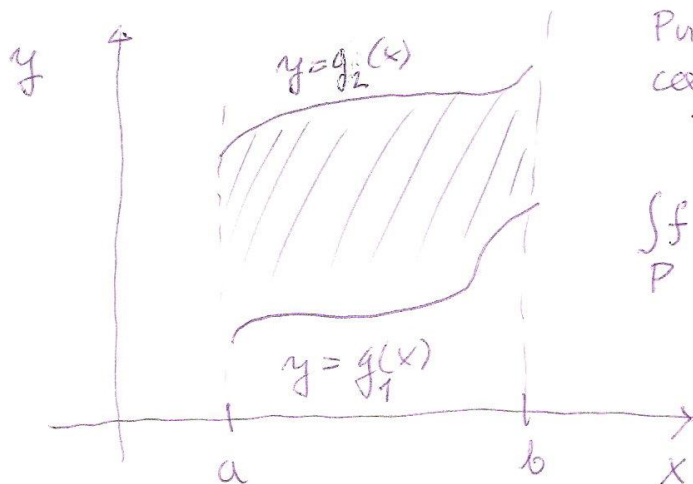
$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Zauważmy, że możemy zmieniać kolejność całkowania, np.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1.$$

— * —

Ustalanie granic całkowania. Nie zawsze P jest prostokątem w $\mathbb{R}^2$ (lub kostką w $\mathbb{R}^n$).
Może się zdarzyć sytuacja jak na rysunku!



Przykład obszaru całkowania w $\mathbb{R}^2$.

Teraz

$$\int_P f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

EW-7

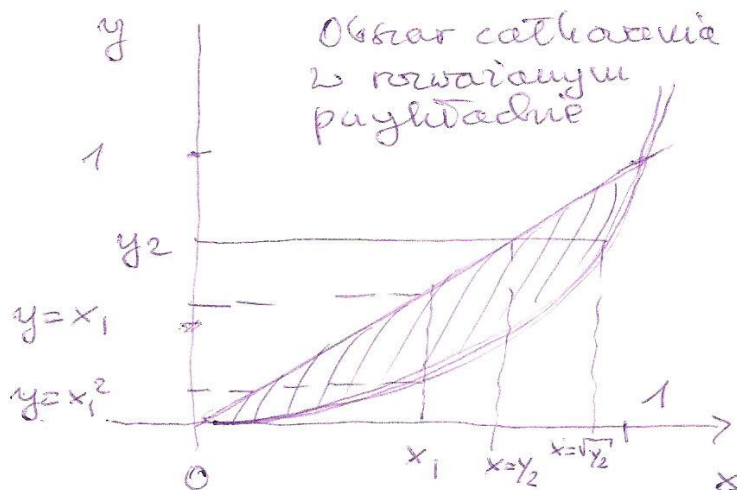
Przykład. Zamienić porządek całkowania w całości

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$$

Zakładamy, że f jest ciągła.

Całkowanie odbywa się po obszarze określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq 1 \quad i \quad x^2 \leq y \leq x$$



Widac, że $0 \leq y \leq 1$ i stąd, dla danego y , przedziały (rys.) y_2 mamy, że

$$y \leq x \leq \sqrt{y}$$

Teraz

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

CW-8

W ogólności można napisać: jeśli obszar całkowania P określony jest nierównościami

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

co jest równoważne określeniu

$\delta_1(y) \leq x \leq \delta_2(y), \quad \alpha \leq y \leq \beta,$
gdzie funkcje $g_1, g_2, \delta_1, \delta_2$ są całkami ciągłymi, to

$$\int_P f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \int_\alpha^\beta \int_{\delta_1(y)}^{\delta_2(y)} f(x, y) dx.$$

Z określenia całki wynikają jej podstawowe własności:

1. Gdy obszar P podzielimy na dwa podoblastki P' i P'' za pomocą krzywej, to

$$\int_P f = \int_{P'} f + \int_{P''} f.$$

2. Gdy α i β są stałymi, to

$$\int_P \alpha f + \beta g = \alpha \int_P f + \beta \int_P g.$$

CW-9

Zamiana zmiennych

Chcąc, aby policzyć całkę, wygodnie jest zamienić zmienną. Przyjmujemy sobie, jak to było w przypadku pojedynczej całki. Mielimy wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(g(t)) g'(t) dt,$$

gdzie $a = g(a')$, $b = g(b')$.

Podamy teraz uogólnienie tego wzoru na przypadku n zmiennych. Dowód pomijamy.

Jeśli za pomocą różnowartościowego, różniakowego i sposób ciągły odwzorowania zamieniamy zmienną $x = (x_1, \dots, x_n)$ na ~~z~~ $y = (y_1, \dots, y_n)$, t_j .

$$x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = x_n(y_1, \dots, y_n),$$

to

$$\int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_P f[x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)] \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n,$$

CW-10

gdzie

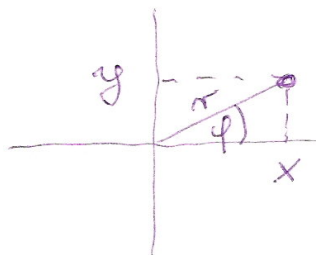
$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

jest jacobianem odwrotnej funkcji $x = x(y)$
tj. wyznacznikiem macierzy Jacobiego, czyli

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \det x'$$

Przykłady

1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

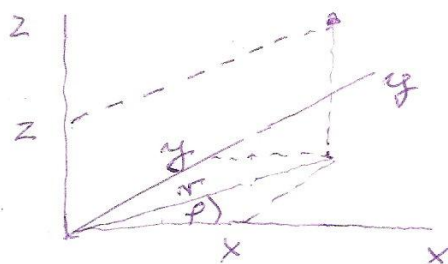
Jakobian rowny jest

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r$$

Teraz

$$\int_P f(x,y) dx dy = \int_P f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

2. Współrzędne walcowe (cylindryczne) w $\mathbb{R}^3$



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$-\infty < x, y, z < \infty$$

r, φ jak poprzednio

teraz

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= r,$$

Teraz

$$\int_P f(x,y,z) dx dy dz = \int_P f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

3. Współrzędne sferyczne r, θ, φ w $\mathbb{R}^3$

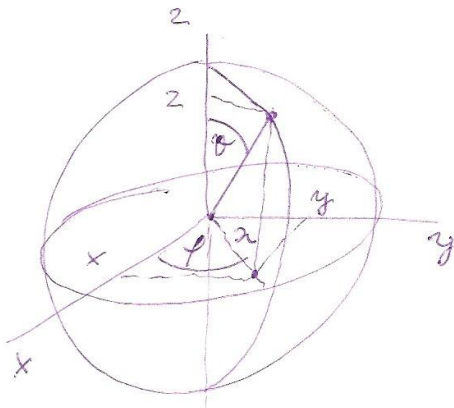
$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$-\infty < x, y, z < \infty$$

CW-12



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = r^2 \sin \theta$$

Ternar

$$\int_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_P f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

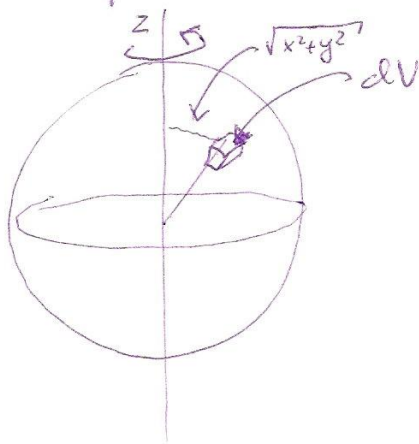
CW-13

Przykłady.

zad. 1. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu R , zakładając, że oś z jest jej osią obrotu.

$$I = \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz,$$

gdzie ρ jest gęstością masy, $\rho \, dV = \rho \, dx \, dy \, dz$ jest masą w objętości dV , której do masy odległości od osi obrotu jest $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Wygodnie jest przejść do współrzędnych walcowych

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi, z$$

$$\int_V (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \int_V r^2 \rho \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

Ustalenie granic: $-R \leq z \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$$0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2}$$

CW-14

$$\begin{aligned}
 \text{Teraz} \quad I &= \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^3 \rho = 2\pi \rho \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \, r^3 = \\
 &= \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\
 &= \frac{\pi}{2} \rho \left[R^4 z - \frac{1}{3} 2R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{-R}^R = \\
 &= \pi \rho \left[R^4 z - \frac{1}{3} 2R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_0^R = \\
 &= \pi \rho \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \pi \rho R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \\
 &= \pi \rho R^5 \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15} \pi \rho R^5.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ale } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3}, \text{ więc}$$

$$I = \frac{8}{15} \pi \cdot \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

zad. 2, Obliczyć całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

CW-15

Obliczamy I^2

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du =$$

$\uparrow$
 $u=r^2$

$$= \pi e^{-u} (-1) \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$