Rachunek różniczkowy i całkowy: Seria VII

1 Granica funkcji wielu zmiennych.

Zadanie 1.1
Wykazać, że choć dla funkcji

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

granice iterowane są równe

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=0$$

to mimo tego funkcja nie jest ciągła w zerze.

Zadanie 1.2
Wykazać, że dla funkcji

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

granice iterowane nie istnieją, ale mimo to funkcja jest ciągła w zerze.

Zadanie 1.3
Wyznaczyć granice iterowane

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)), \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

jeśli

1. $$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \quad a=\infty, \quad b=\infty;$$

2. $$f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}, \quad a=\infty, \quad b=\infty;$$

3. $$f(x,y)=\frac{x^y}{1+x^y}, \quad a=+\infty, \quad b=+0;$$

4. $$f(x,y)=\frac{1}{xy}\mathrm{tg}\frac{xy}{1+xy}, \quad a=0, \quad b=\infty;$$

5.
$$f(x,y) = \log_x(x+y), \quad a=1, \quad b=0.$$

Zadanie 1.4
Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$
dowodząc nierówności
$$0 \leqslant \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$$

Zadanie 1.5
Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$
dowodząc nierówności
$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Zadanie 1.6
Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$
dowodząc nierówności
$$0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

2 Pochodne cząstkowe

Zadanie 2.1
Wyznaczyć wszystkie pierwsze i drugie pochodne funkcji:

1. $f(x,y) = x\mathrm{e}^y + y$;
2. $f(x,y) = y\sin x + x^2$;
3. $f(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$;
4. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$;

5. $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{-y^2}$;

6. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y}\cos(xy)$;

i sprawdzić równość pochodnych mieszanych.

Zadanie 2.2
Sprawdzić równości trzecich pochodnych mieszanych $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ dla funkcji:

1. $f(x,y) = x^4y^2 + xy$;
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$.

Zadanie 2.3
Wykazać, że

1. jeżeli $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ (dla $(x,y) \neq (0,0)$), to $f_{xx} + f_{yy} = 0$;
2. jeżeli $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$ (dla $(x,y,z) \neq (0,0,0)$), to $xf_{yz} = yf_{zx} = zf_{xy}$;
3. jeżeli $f(x,y) = xy\mathrm{tg}(y/x)$ (dla $x \neq 0$), to $xf_x + yf_y = 2f$.

Zadanie 2.4
Wykazać, że funkcja

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4Dt}\Big)$$

spełnia tzw. równanie dyfuzji

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}.$$

Zadanie 2.5
Wykazać, że funkcja $Y(\theta,\varphi) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi}\sin\theta\cos\theta$ spełnia równanie

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + 6\sin^2(\theta)Y = 0.$$

Zadanie 2.6
Wykazać, że dla dostatecznie wiele razy różniczkowalnych funkcji zachodzi

1.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - 2\alpha\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u, \quad \text{dla} \quad u = \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x-y)$$

2.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -2f'', \quad \text{dla} \quad u = f(y-x) - xf'(y-x)$$

3.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{dla} \quad u = xf(y/x)$$

3 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Zadanie 3.1
Wyznaczyć punkty stacjonarne i określić ich charakter dla funkcji

1.
$$f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$$

2.
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

3.
$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x, y > 0$$

4.
$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

5.
$$f(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad a^2+b^2+c^2 \neq 0$$

6.
$$f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y$$

7.
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$$

8.
$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

4 Ekstrema związane funkcji wielu zmiennych

Zadanie 4.1
Stosując metodę czynników Lagrange'a znaleźć punkt na płaszczyźnie $x + y + z = 1$ leżący najbliżej początku układu współrzędnych. W tym celu określić punkty stacjonarne funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ z więzem zadanym przez równanie płaszczyzny. Jak sformułować ten problem (a następnie rozwiązać go), gdy szukamy punktu na płaszczyźnie najbliższego punktowi $(2, 1, 1)$?

Zadanie 4.2
Wśród trójkątów o obwodzie ℓ znaleźć ten o maksymalnym polu. W tym celu skorzystać ze wzoru Herona na pole trójkąta o bokach a, b i c,

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdzie $s = (a+b+c)/2$. Tym trójkątem jest oczywiście trójkąt równoboczny. Zastosować metodę czynników Lagrange'a.

Zadanie 4.3
Na sferze $x^2+y^2+z^2 = 1$ wyznaczyć punkty najbliższy i najdalszy punktowi $(1, 3, 4)$. Zastosować metodę czynników Lagrange'a.

Zadanie 4.4
Powierzchnia zadana jest równaniem $x^3 + yz - 2xyz^2 = 0$. Wykazać, że równanie płaszczyzny stycznej do niej w punkcie $(1, 1, 1)$ ma postać $x - y - 3z = -3$, a jej odległość od początku układu współrzędnych wynosi $3/\sqrt{11}$. Wykazać, że punkt $(-3/11, 3/11, 9/11)$ jest punktem płaszczyzny stycznej najbliższym początkowi układu współrzędnych. W tym celu, posługując się metodą czynników Lagrange'a, wyznaczyć minimum funkcji $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ z więzem zadanym przez równanie płaszczyzny stycznej.

5 Całki wielokrotne

Zadanie 5.1
Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie OXY i ograniczony prostymi $x = 1$, $y = 2$, $x = -1$ i $y = -2$, został ścięty od góry powierzchnią $z = 6 - x^2 - y^2$. Obliczyć objętość powstałej bryły.

Zadanie 5.2
Znaleźć objętość bryły ograniczonej paraboloidą $2az = x^2 + y^2$ i sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. Bierzemy pod uwagę tę część bryły, która leży wewnątrz paraboloidy.

Zadanie 5.3
Obliczyć całkę

$$\iiint \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3}$$

po obszarze zawartym pomiędzy płaszczyznami współrzędnych i płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 5.4

Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

po obszarze ograniczonym powierzchniami $x^2 + y^2 = z^2$ i $z = 1$.