

# Zadania domowe nr 5: wysłane 29. marca 2019

## Moment pedu

1. Udowodnij następujące relacje:

(a) Wiedząc, że

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar\hat{L}_k, \quad (1)$$

oraz, że

$$\hat{L}_{\pm} \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y, \quad (2)$$

udowodnij następujące relacje komutacji:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z, \quad (3)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm\hbar\hat{L}_{\pm}. \quad (4)$$

(b) Wiedząc, że

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar\hat{L}_k, \quad (5)$$

oraz, że

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \quad (6)$$

udowodnij następujące relacje komutacji:

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0, \quad (7)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0. \quad (8)$$

(c) Na podstawie powyższych związków udowodnij poniższe relacje

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z. \quad (11)$$

2. Operatory momentu pedu we współrzędnych kartezjańskich w reprezentacji położeniowej wyrażają się następującymi wzorami:  $\hat{L}_x \rightarrow -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$ ,  $\hat{L}_y \rightarrow -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$  oraz  $\hat{L}_z \rightarrow -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$ .

(a) Pokazać, że we współrzędnych sferycznych powyższe operatory wyrażają się wzorami:

$$\hat{L}_x \rightarrow i\hbar(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}), \quad (12)$$

$$\hat{L}_y \rightarrow i\hbar(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}), \quad (13)$$

$$\hat{L}_z \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. \quad (14)$$

(b) Korzystając z powyższego wyniku pokazać, że

$$\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \rightarrow -\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (15)$$

(Wskazówka: wiele członów w wyrażeniu  $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$  będzie miało przeciwne znaki; poza tym należy użyć tzw. jedynki trygonometrycznej).

(c) Pokazać, że

$$-\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (16)$$