

Zadania domowe nr 6: wysłane 3. kwietnia 2019

Moment pędu

1. Znajdź reprezentację macierzową operatorów momentu pędu $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$ oraz $\hat{J}_z$ dla stanów o liczbie kwantowej $j = 3/2$:
 - (a) Wylicz reprezentację macierzową operatora $\hat{J}_z$. W szczególności podaj:
 - Wszystkie stany własne $|j, m\rangle$ operatora $\hat{J}^2$ oraz $\hat{J}_z$, które mają $j = 3/2$.
 - Działanie $\hat{J}_z$ na każdy z wypisanych powyżej stanów $|j, m\rangle$.
 - Elementy macierzowe $\langle j', m' | \hat{J}_z | j, m \rangle$.
 - Wyliczone elementy macierzowe w postaci macierzy.
 - (b) Kolejno, wylicz reprezentację macierzową operatora $\hat{J}_+$.
 - (c) Na koniec, oblicz reprezentację macierzową operatora $\hat{J}_-$.

2. Dane są dwa operatory $\hat{\sigma}_x$ oraz $\hat{\sigma}_z$ w dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej V . Ich reprezentacja macierzowa (w bazie ortonormalnej) jest następująca:

$$\hat{\sigma}_x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Znajdź wartości jakie można otrzymać w wyniku pomiaru $\hat{\sigma}_x$.
- (b) Znajdź wartości jakie można otrzymać w wyniku pomiaru $\hat{\sigma}_z$.
- (c) Załóżmy, że cząstka jest w stanie własnym $\hat{\sigma}_z$ o wartości własnej $\sigma_z = -1$ – jak wygląda ten konkretny stan własny $\hat{\sigma}_z$ (nazwijmy go $|\phi\rangle$) w reprezentacji macierzowej? Pamiętaj o odpowiedniej normalizacji.
- (d) Następnie wykonajmy pomiary operatorem $\hat{\sigma}_x$ na stanie $|\phi\rangle$. Oblicz: (i) wartość średnią takich pomiarów (tzn. $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$), (ii) jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku takiego pomiaru otrzymamy wartość 1?