

Zadania z Mechaniki Kwantowej II A

Seria 1

1. Rozważ 4-wymiarową czasoprzestrzeń, w której zdarzenia mają współrzędne $x = (t, x_1, x_2, x_3)$. Pokaż, że jeśli $x^2 < 0$, to istnieje takie przekształcenie złożone z ciągłych transformacji Lorentza (tzn. transformacji w sposób ciągły deformowalnych do identyczności) oraz z obrotów i translacji, które przekształca punkt P o współrzędnych x na punkt P' o współrzędnych $-x$. Pokaż, że dla $x^2 > 0$ takie przekształcenie nie istnieje.
2. Znajdź częstości własne dyskretnej struny składającej się z $N = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ punktów materialnych o masie m , gdy spełnione są periodyczne warunki brzegowe $q_{j+N}(t) = q_j(t)$. Znajdź częstość graniczną. Znajdź częstości własne ciągłej struny opisanej polem $q(x, t)$ z periodycznymi warunkami brzegowymi $q(x, t) = q(x + R, t)$ dla $R = Na$.
3. Wykonaj dokładne obliczenia amplitudy przejścia cząstki swobodnej o masie m z punktu $\vec{x}_0$ do punktu $\vec{x}$ w czasie t w Schrödingerskiej mechanice kwantowej (uzupełnij rachunek z wykładu).
4. Rozważ strunę składającą się z atomów oddległych o $a = 10^{-8}$ cm. Przyjmij, że długość struny równa jest 1 m, zaś jej napięcie takie, że częstość podstawowa równa jest 100 Hz. Znajdź częstość obcięcia, powyżej której opis struny za pomocą ciągłego pola $q(x, t)$ przestaje być właściwy.
5. Rozważ N -cząstkową funkcję falową zdefiniowaną na wykładzie:

$$\Psi_E(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \psi(\vec{r}_1) \dots \psi(\vec{r}_N) | E, N \rangle, \quad (1)$$

gdzie $|E, N\rangle$ jest N -cząstkowym stanem własnym nierelatywistycznego Hamiltonianu ograniczonego do oddziaływań dwuciałowych. Pokaż, że ta funkcja falowa jest unormowana do jedności. Pokaż też, że istotnie spełnia ona wielociałowe równanie Schrödingera z takim Hamiltonianem:

$$\left(-\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \nabla_i^2 + \sum_{i < j} v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) \Psi_E(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = E \Psi_E(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (2)$$