Zadania z Mechaniki Kwantowej II A
Seria 2

1. Znajdź granicę nierelatywistyczną równania Kleina-Gordona dla cząstki oddziałującej z potencjałem elektrostatycznym (skorzystaj z zasady minimalnego sprzężenia). Znajdź wyrażenia na zachowany prąd w obu przypadkach, relatywistycznym i nierelatywistcznym.

2. Sprawdź, że działanie
$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2), \tag{1}$$
gdzie ϕ jest rzeczywistym polem skalarnym, $\phi(x) = \phi'(x')$, pozostaje niezmiennicze pod działaniem transformacji współrzędnych $x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x)$. Pod działaniem tej transformacji: $g^{\mu\nu\prime}(x') = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta}$, zaś $m' = m$ $(g = det(g_{\mu\nu}))$.

3. Podstawowa relacja komutacyjna dla bozonowych operatorów kreacji i anihilacji wygląda następująco: $[a, a^\dagger] = 1,\ [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$, gdy $[A, B] = AB - BA$. Pokaż, że dla stanów własnych $|n>$ operatora $a^\dagger a,\ a^\dagger a|n>= n|n>$, zachodzą związki: a) $n = 0, 1, 2, ...$, b) $a|n>= \sqrt{n}|n-1>$, c) $a^\dagger|n>= \sqrt{n+1}|n+1>$.

4. Podstawowa relacja komutacyjna dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji wygląda następująco: $\{a, a^\dagger\} = 1,\ \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$, gdzie $\{A, B\} = AB + BA$. Pokaż, że dla stanów własnych $|n>$ operatora $a^\dagger a,\ a^\dagger a|n>= n|n>$, zachodzą związki: a) $n = 0, 1$, b) $a|n>= \sqrt{n}|n-1>$, c) $a^\dagger|n>= \sqrt{1-n}|n+1>$.

5. Rozważ rzeczywiste swobodne pole skalarne $\phi(x)$ i jego rozkład na operatory kreacji i anihilacji:
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}(a_k e^{-ikx} + a^\dagger e^{+ikx}). \tag{2}$$
Pokaż, że: a) $H = \sum_{\vec{k}} E_k(a_k^\dagger a_k + 1/2)$, b) $e^{iHt}a_k e^{-iHt} = a_k e^{-iE_k t}$.

   Przyjmij następującą definicję operatora pędu: $\vec{P} = \sum_{\vec{k}}\vec{k}a_k^\dagger a_k$. Niech $P^\mu|K>= K^\mu|K>$. Pokaż, że
$$< K|\phi(x)\phi(y)|K>=< K|\phi(x-y)\phi(0)|K>, \tag{3}$$
$(P^0 = H)$.