

MECHANIKA KLASYCZNA B

rok akademicki 2005/2006

1. Wstęp

Dwojakie znaczenie przymiotnika „klasyczna” w określeniu mechaniki: niekwantowa i nierelatywistyczna. Tylko pierwsze znaczenie stosuje się do tematyki wykładu.

Prekursorzy i twórcy mechaniki klasycznej, XV-XVIII wiek: Mikołaj Kopernik – *De revolutionibus orbium coelestium*; Johannes Kepler – ruchy planet; Galileo Galilei – klasyczna zasada względności; Isaac Newton – *Philosophiae naturalis principia mathematica*: zasady i podstawy matematyczne mechaniki, prawo powszechnego ciążenia. Twórcy mechaniki analitycznej w XVIII i XIX wieku: L. Euler, J.d’Alembert, J.L. Lagrange, A.M. Legendre, S. Poisson, C.G. Jacobi, W.R. Hamilton. Ch. Coulomb – prawo sił elektrostatycznych. Siła Lorentza. Albert Einstein, rok 1905 – *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*: względność czasu i jednoczesności zjawisk, $E=mc^2$. Herman Minkowski – czteroprzestrzeń, zasady dynamiki relatywistycznej. Mechanika kwantowa. Klasyczna i kwantowa teoria pola jako teorie oddziaływań. Współczesny pogląd na naturę oddziaływań: wymiana kwantów pól.

2. Kinematyka

2.1. Podstawowe pojęcia mechaniki

- 2.1.1. Położenie. Założenia o przestrzeni położenia: niezależność od wypełnienia materią, jednorodność i izotropowość. Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa – wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych, z iloczynem skalarnym, metryczna. Układy odniesienia w przestrzeni położenia. Baza ortonormalna. Wektor położenia względem układu odniesienia. Zmiana układu odniesienia – przesunięcie środka układu, zmiana kierunków osi. Macierz cosinusów kierunkowych. Kąty Eulera.
- 2.1.2. Materia. Ziarnistość materii. Punkt materialny – położenie określone przez jeden wektor położenia. Przypisanie własności fizycznych punktowi materialnemu – bezwładność, podatność na oddziaływanie.
- 2.1.3. Czas. Wielkość służąca do opisu zmian położenia. Zegar. Synchronizacja zegarów. Ciągłość, jednostajność i jednorodność czasu. Oś czasu. Czasoprzestrzeń. Czas absolutny.

2.2. Ruch

- 2.2.1. Ruch punktu materialnego. Zależność wektora położenia od czasu. Tor ruchu. Droga (długość łuku). Linia świata. Równania parametryczne, naturalne i uwikłane toru. Prędkość i przyspieszenie względem układu odniesienia. Wektory Freneta – styczny, normalny i binormalny. Wzory Freneta. Płaszczyzna ściśle styczna. Krzywizna i torsja. Składowe prędkości i przyspieszenia w bazie wektorów Freneta. Prędkość polowa.
- 2.2.2. Rachunek wektorowy. Składowe kartezjańskie wektorów i tensorów. Tworzenie wektorów przez różniczkowanie po parametrze (czasie) i przez różniczkowanie po składowych wektora położenia. Wektor-operator nabla. Pseudotensory. Symbole Kroneckera i Levi-Civity. Iloczyny skalarny i wektorowy. Współrzędne krzywoliniowe.

Tensor metryczny i współczynniki Lamego. Nabla w współrzędnych krzywoliniowych.

- 2.2.3. Ruch względny układów odniesienia. Ruch postępowy i obrotowy. Twierdzenie o istnieniu chwilowej osi obrotu. Kąt obrotu. Prędkość kątowna. Składowe prędkości kątownej w układach nieruchomym i ruchomym. Związki pomiędzy położeniami, prędkościami i przyspieszeniami względem układów poruszających się przy założeniu absolutności czasu. Prędkość i przyspieszenie unoszenia w układzie. Przyspieszenie obrotowe, odśrodkowe i Coriolisa.

3. Zasady dynamiki

3.1. Zasady bezwładności i względności

- 3.1.1. Zasada bezwładności. Izolowany (nieoddziałujący) punkt materialny – odległy od innych. Ruch jednostajny punktów izolowanych. Układy inercjalne.
- 3.1.2. Zasada względności. Zegary w układach inercjalnych. Linie świata zegarów. Równoważność układów inercjalnych i jej konsekwencje. Szczególna transformacja Lorentza. Prędkość maksymalna. Dodawanie prędkości. Ruch z małymi prędkościami. Transformacja Galileusza.

3.2. Dynamika ruchów z małymi prędkościami (klasyczna)

- 3.2.1. Klasyczna zasada przyczynowości. Ruch dwóch punktów oddziałujących. Przeciwny kierunek przyspieszeń. Masa (bezwładna) względna. Wzorzec masy. Pęd. Zasada zachowania sumy pędów (pędu całkowitego). Siły wzajemnego oddziaływania. Zasada równej akcji i reakcji. Równania ruchu układu dwóch punktów.
- 3.2.2. Zasady dynamiki klasycznej układu punktów. Ruch trzech i większej liczby punktów. Siły wielociałowe. Zasada niezależności sił (brak sił wielociałowych). Siły zewnętrzne. Układ równań ruchu układu N punktów materialnych.
- 3.2.3. Prawa sił. Ładunek elektryczny. Prawo Coulomba. Przenikalność elektryczna próżni. Trudność w opisie oddziaływania ładunków w ruchu – siły magnetyczne. Zewnętrzna siła Lorentza. Masa grawitacyjna. Prawo powszechnego ciężenia. Równość mas grawitacyjnej i bezwładnej. Stała grawitacji. Stosunek sił elektrostatycznych do grawitacyjnych. Zewnętrzne siły żyroskopowe i siły oporu.

3.3. Dynamika relatywistyczna

- 3.3.1. Przestrzeń zdarzeń Minkowskiego. Współrzędne zdarzeń. Metryka Minkowskiego. Przedział czasoprzestrzenny. Czas własny. Transformacje Poincaré i Lorentza. Czerowektory i czterotensory. Iloczyn skalarny. Stożek zerowy (światłny). Wektory czasowe, przestrzenne i zerowe.
- 3.3.2. Ruch w czteroprzestrzeni. Równanie naturalne linii świata. Czeroprędkość i czteropęd. Przeszłość, przyszłość i terażniejszość.
- 3.3.3. Dynamika pojedynczego punktu materialnego. Przesłanki do konstrukcji równania ruchu: niezmienniczość lorentzowska, zasada korespondencji, zasada zachowania pędu. Czerosiła Minkowskiego. Ortogonalność czerosiły do czteroprędkości. Związek czerosiły z (trój)siłą Newtona. Energia kinetyczna. Czerosiła elektromagnetyczna. Czerotensor pola elektromagnetycznego.

3.4. Całkowanie równań ruchu i zasady zachowania

- 3.4.1. Rozwiązania układu równań ruchu. Przestrzeń konfiguracyjna. Równanie ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej. Warunki początkowe. Istnienie jednoznacznych rozwiązań równań ruchu przy zadanych

warunkach początkowych. Całki pierwsze równań ruchu. Układy całkowne. Całki drugie. Możliwa niestabilność rozwiązań ze względu na warunki początkowe. Chaos deterministyczny.

- 3.4.2. Zasada zachowania pędu. Całkowity pęd układu. Masa całkowita. Środek masy. Położenie, prędkość, pęd i przyspieszenie środka masy. Zachowanie pędu w układach izolowanych.
- 3.4.3. Zasada zachowania momentu pędu. Moment pędu punktu materialnego względem układu odniesienia. Całkowity moment pędu układu punktów. Moment pędu środka masy. Moment pędu względem środka masy. Moment siły. Centralność sił wewnętrznych. Równanie ruchu dla momentu pędu. Przypadki zachowania momentu pędu.
- 3.4.4. Zasada zachowania energii. Energia kinetyczna. Twierdzenie Koeniga. Siły potencjalne i konserwatywne (zachowawcze). Potencjał siły i energia potencjalna. Moc siły. Równanie ruchu dla energii kinetycznej układu z siłami potencjalnymi, żyroskopowymi i oporu.

3.5. Zagadnienie dwóch ciał

- 3.5.1. Redukcja zagadnienia dwóch ciał. Współrzędne Jacobiego. Położenie środka masy i położenie względne dwóch ciał. Równania ruchu środka masy i ruchu względnego izolowanego układu dwóch ciał. Masa zredukowana. Energia kinetyczna i moment pędu ruchu względnego.
- 3.5.2. Ruch pod wpływem siły centralnej. Centralność a potencjalność siły. Współrzędne biegunowe. Składowe radialne i transwersalne prędkości i przyspieszenia. Równania ruchu we współrzędnych biegunowych. Całka momentu pędu i całka energii. Wzór Bineta.
- 3.5.3. Zagadnienie Keplera (Coulomba). Biegunowe równanie toru keplerowskiego (stożkowej). Mimośród i parametr stożkowej. Wektor Rungego-Lenza. Trzy prawa Keplera. Dyskusja kształtu torów w zależności wartości, momentu pędu, wektora Rungego-Lenza i energii. Rozpraszanie cząstki w polu coulombowskim przyciągającym i odpychającym. Parametr zderzenia i kąt rozproszenia. Przekrój czynny na rozpraszanie. Zależność czasowa ruchu. Anomalia mimośrodowa. Równanie (typu) Keplera.

4. Ruchy związane

4.1. Warunki więzów

- 4.1.1. Klasyfikacja warunków więzów. Więzy holonomiczne i nieholonomiczne. Więzy katastatyczne i akatastatyczne. Więzy skleronomiczne i reonomiczne. Więzy jednostronne i dwustronne.
- 4.1.2. Całkowalność więzów nieholonomicznych. Mnożnik całkujący. Warunki konieczne na całkowalność więzów.

4.2. Równania Lagrange'a I rodzaju

- 4.2.1. Ruch związany pojedynczego punktu materialnego. Warunki nakładane przez więzy dwustronne na prędkość i przyspieszenie. Siła reakcji więzów. Więzy doskonałe (gładkie). Składowa normalna siły reakcji wyznaczona przez więzy. Składowa styczna siły reakcji – siła tarcia. Więzy chropowate. Prawo tarcia.
- 4.2.2. Ruch po więzach jednostronnych. Ruch swobodny przy więzach nienapiętych. Siły reakcji napinające więzy. Punkt oderwania od powierzchni więzów. Uderzenie w powierzchnię więzów. Nieciągłość prędkości przy uderzeniu. Uderzenie sprężyste.
- 4.2.3. Ruch związany układu punktów w przestrzeni konfiguracyjnej. Wiele warunków więzów. Hiperpowierzchnia więzów holonomicznych

(rozmaitość konfiguracyjna). Liczba stopni swobody. Układ równań Lagrange'a I rodzaju. Mnożniki Lagrange'a.

4.3. Eliminacja sił reakcji więzów

- 4.3.1. Równania Lagrange'a II rodzaju. Parametryzacja hiperpowierzchni więzów holonomicznych. Współrzędne uogólnione zgodne z więzami. Wektory styczne do hiperpowierzchni więzów. Składowe styczne równań ruchu. Wyrażenie składowych stycznych przyspieszenia przez pochodne energii kinetycznej. Prędkości uogólnione. Siły uogólnione – potencjalne, żyroskopowe, wirowe, oporu. Potencjał uogólniony. Potencjał wektorowy. Funkcja Lagrange'a (lagrangian). Potencjał uogólniony siły Lorentza.
- 4.3.2. Równania Appella. Więzy nieholonomiczne na rozmaitości konfiguracyjnej. Styczne pola wektorowe określające więzy nieholonomiczne – kierunki uogólnionych sił reakcji więzów. Dobór pól wektorowych ortogonalnych do sił reakcji. Kwaziprędkości. Wyrażenie prędkości uogólnionych przez kwaziprędkości. Kwazisiły – składowe siły uogólnionych ortogonalne do sił reakcji. Rzutowanie równań Lagrange'a II rodzaju na kierunki ortogonalne do sił reakcji. Funkcja przyspieszeń Appella. Równania ruchu Appella na współrzędne uogólnione i kwaziprędkości.

5. Ciała sztywne i ośrodki ciągłe

5.1. Ciała sztywne

- 5.1.1. Określenie ciała sztywnego. Pręty, płyty i bryły sztywne. Liczba warunków więzów. Liczba stopni swobody. Twierdzenie o układzie wewnętrznym bryły (płyty) sztywnej.
- 5.1.2. Kinematyka ciała sztywnego. Położenia, prędkości i przyspieszenia punktów materialnych w ciele sztywnym. Ruch ciała sztywnego, czyli ruch układu wewnętrznego. Masa i środek masy ciała sztywnego. Moment pędu ciała sztywnego. Tensor (momentów) bezwładności. Momenty bezwładności względem osi i momenty zboczenia w płaszczyznach osi. Tensor bezwładności względem środka masy. Osie główne i główne momenty bezwładności. Twierdzenie Steinera. Energia kinetyczna i funkcja przyspieszeń ciała sztywnego.
- 5.1.3. Równania ruchu ciała sztywnego. Współrzędne i prędkości uogólnione ciała sztywnego. Wektory prędkości ruchu postępowego i prędkości kątowej ruchu obrotowego jako kwaziprędkości. Równania Appella dla ciała sztywnego – równania ruchu postępowego i obrotowego. Równanie Newtona na ruch środka masy. Równania Eulera na moment pędu.

5.2. Ośrodki ciągłe

- 5.2.1. Pojęcie substancji. Opisy ruchu Lagrange'a (śledzenie punktów materialnych) i Eulera (polowy). Mikroskopowe gęstości masy i pędu układu punktów materialnych. Funkcja delta Diraca. Skale mikroskopowa i makroskopowa. Średniowanie po obszarze makroskopowym (rozmywanie funkcji delta). Makroskopowe gęstości masy i pędu. Punkty substancjalne. Pole prędkości. Ruch substancjalny. Pochodne lokalne i substancjalne.
- 5.2.2. Zasady zachowania. Zasada zachowania masy – równanie ciągłości. Zmienność w czasie makroskopowej gęstości pędu. Założenie o mikroskopowym zasięgu i centralności sił wzajemnego oddziaływania punktów materialnych. Tensor ciśnień. Tensor napięć. Dywergencja tensora napięć. Wektor napięć. Gęstość sił zewnętrznych. Równanie Newtona dla ośrodka ciągłego. Makroskopowa gęstość energii

kinetycznej. Temperatura kinetyczna. Gęstość energii potencjalnej oddziaływania. Energia wewnętrzna. Zmienność w czasie gęstości energii kinetycznej. Założenie o makroskopowym zasięgu sił zewnętrznych. Prąd ciepła. Równanie energii wewnętrznej (I zasada termodynamiki).

5.2.3. Równania materiałowe (konstrytywne). Równanie stanu (na tensor napięć). Prawo przewodnictwa cieplnego (np. prawo Fouriera). Prawo energii wewnętrznej.

5.2.4. Ciecze i gazy. Prawo Pascala. Równanie stanu gazu (Clapeyrona). Tensor prędkości względnej. Tensor prędkości odkształceń. Pole wirów. Prawo lepkości Newtona. Współczynniki lepkości. Równanie Naviera-Stokesa.

5.2.5. Ciała stałe. Tensor odkształceń. Wektor przemieszczeń. Stan naturalny ciała stałego. Prawo sprężystości Hooke'a dla ciał izotropowych i anizotropowych. Liniowe równanie ruchu na pole przemieszczeń (klasyczna teoria sprężystości).

6. Równowaga i małe drgania układów mechanicznych

6.1. Warunki równowagi

6.1.1. Pojęcie równowagi. Położenie równowagi: położenie początkowe takie, że przy zerowych prędkościach początkowych układ pozostanie w spoczynku. Trwałość równowagi. Asymptotyczna trwałość. Czy stan naturalny stałego ośrodka ciągłego jest stanem równowagi?

6.1.2. Warunki równowagi – dla układów swobodnych, dla układów z więzami holonomicznymi, dla układów z więzami nieholonomicznymi. Rozmaitość równowagi przy katastroficznych więzach nieholonomicznych. Równowaga w przypadku sił potencjalnych przy różnych rodzajach więzów. Równowaga na hiperpowierzchni więzów (także reonomicznych). Zależność energii kinetycznej od prędkości uogólnionych w przypadku więzów reonomicznych. Warunki równowagi wynikające z równań Lagrange'a II rodzaju. Warunki równowagi wynikające z równań Appella.

6.2. Małe drgania wokół położenia równowagi

6.2.1. Ruch w pobliżu położenia równowagi. Odchylenia od położenia równowagi. Postać sił uogólnionych potencjalnych, żyroskopowych i oporu. Funkcja dysypacji Rayleigha. Przybliżony lagrangian i równania Lagrange'a dla małych odchyłeń i małych prędkości. Ogólne rozwiązanie układu (liniowych) równań ruchu. Wielomian charakterystyczny i jego pierwiastki. Przypadki równowagi trwałej, asymptotycznie trwałej, chwiejnej i obojętnej.

6.2.2. Małe drgania układów konserwatywnych przy więzach skleronomicznych. Dodatnia określoność formy kwadratowej energii kinetycznej. Sprowadzenie energii kinetycznej do sumy kwadratów prędkości przez liniowe przekształcenie odchyłeń od położenia równowagi. Diagonalizacja formy kwadratowej energii potencjalnej przez ortogonalne przekształcenie odchyłeń. Twierdzenie Dirichleta o równowadze trwałej. Współrzędne normalne. Częstości własne i drgania normalne. Uogólnione zagadnienie własne dla dwóch macierzy symetrycznych (energii kinetycznej i potencjalnej), z których jedna jest określona dodatnio. Wpływ sił oporu i żyroskopowych na małe drgania.

6.2.3. Drgania nieholonomicznych układów katastroficznych. Zlinearyzowany układ równań na odchylenia od położenia równowagi i siły reakcji więzów. Macierz układu równań. Wielomian charakterystyczny. Pierwiastki zerowe i ich interpretacja.

7. Dynamika lagrangowska w przestrzeni konfiguracyjnej

7.1. Równania Lagrange'a, Routha i Hamiltona

- 7.1.1. Całki pierwsze równań Lagrange'a. Ogólna postać lagrangianu. Cechowanie lagrangianu. Ogólna postać energii kinetycznej w współrzędnych i prędkościach uogólnionych. Wzór Eulera dla funkcji jednorodnych i jego zastosowanie do energii kinetycznej. Układy autonomiczne. Pędy uogólnione. Całki cykliczne. Funkcja Hamiltona. Całka Hamiltona. Funkcja Hamiltona a energia. Zasada zachowania energii.
- 7.1.2. Równania Routha i Hamiltona. Twierdzenie Donkina. Transformacja Legendre'a. Zamiana części prędkości uogólnionych na pędy uogólnione. Funkcja Routha (routhian). Równania Routha. Hamiltonian. Równania Hamiltona. Przestrzeń fazowa. Hamiltonian a energia.
- 7.1.3. Przekształcenia punktowe. Odwracalność przekształceń punktowych. Przeliczanie lagrangianu do nowych zmiennych. Niezmienniczość równań Lagrange'a przy przekształceniach punktowych.

7.2. Zasady wariacyjne

- 7.2.1. Elementy rachunku wariacyjnego. Zmienna niezależna. Zmienna zależna: funkcja od zmiennej niezależnej. Wariacja zmiennej, wariacja funkcji, wariacja pochodnej funkcji. Otoczenie funkcji. Rząd i promień otoczenia. Funkcjonał. Ciągłość funkcjonału. Rząd ciągłości. Funkcjonały liniowe i kwadratowe. Funkcjonały od wielu funkcji. Wariacja funkcjonału (I i II rzędu). Pochodne funkcjonalne (wariacyjne) funkcjonału po funkcji. Funkcjonał i funkcja delta Diraca.
- 7.2.2. Ekstrema funkcjonałów. Ekstremum absolutne. Ekstrema względne słabe i silne. Ekstremala. Warunek konieczny na słabe ekstremum funkcjonału. Warunek konieczny Legendre'a na minimum funkcjonału. Zagadnienie Eulera – postać funkcjonału. Ustalone końce funkcji próbnych. Lemat Lagrange'a. Równania Eulera-Lagrange'a. Uogólnienia równań na wiele zmiennych niezależnych i zmiennych zależnych. Warunek konieczny na minimum funkcjonału Eulera. Ekstrema warunkowe – ekstrema związane, ekstrema izoperymetryczne. Metoda mnożników Lagrange'a.
- 7.2.3. Zasada Hamiltona najmniejszego działania. Działanie. Ruchy próbne i ruch rzeczywisty. Warunek konieczny i wystarczający na ruch rzeczywisty – minimalizacja działania. Równania Eulera-Lagrange'a = równania Lagrange'a II rodzaju. Zagadnienie początkowe a zagadnienie o ustalonych końcach. Zasada Hamiltona w przestrzeni fazowej prowadząca do równań Hamiltona. Całkowanie po wszystkich drogach przy obliczaniu propagatorów (amplitud prawdopodobieństwa) w mechanice kwantowej.

7.3. Symetrie układów mechanicznych

- 7.3.1. Przekształcenia symetrii. Punktowe przekształcenia symetrii – zachowujące lagrangian. Grupy ciągle przekształceń symetrii. Parametry przekształcenia. Symetrie z transformacją czasu – zachowujące działanie.
- 7.3.2. Twierdzenie Noether. Warunek na niezależność lagrangianu od parametrów punktowego przekształcenia symetrii. Warunek na niezależność działania od parametrów przekształcenia symetrii z transformacją czasu. Całki Noether.

- 7.3.3. Konstrukcja lagrangianu relatywistycznego. Założenie niezmienniczości działania względem transformacji Lorentza. Całkowanie po czasie własnym. Zasada korespondencji z mechaniką nierelatywistyczną. Minimalne sprzężenie ładunku elektrycznego z polem elektromagnetycznym. Wydedukowana postać lagrangianu dla ładunku punktowego w polu elektromagnetycznym. Wykorzystywanie symetrii przy konstrukcji teorii pola (np. elektrodynamiki klasycznej).

8. Przestrzeń fazowa i formalizm kanoniczny

8.1. Równania ruchu w przestrzeni fazowej

- 8.1.1. Metoda Hamiltona –Jacobiego. Równania kanoniczne Hamiltona. Równanie różniczkowe cząstkowe Hamiltona-Jacobiego na funkcję od zmiennych konfiguracyjnych i czasu. Całka zupełna równania Hamiltona-Jacobiego. Twierdzenie Jacobiego o uwikłanych rozwiązaniach równań Hamiltona. Układy całkwalne. Poszukiwanie całki zupełnej równania Hamiltona-Jacobiego metodą separacji zmiennych. Separacja czasu. Separacja zmiennej cyklicznej. Układy separowane.
- 8.1.2. Nawiasy Poissona. Uniwersalne równanie ruchu. Nawias Poissona. Własności nawiasów Poissona. Tożsamość Jacobiego. Nawiasy Poissona dla zmiennych kanonicznych. Nawiasy Poissona w równaniach ruchu. Zależność Hamiltonianu od czasu. Twierdzenie Poissona-Jacobiego o zachowaniu nawiasu Poissona. Kwantowanie przez zastąpienie nawiasów Poissona komutatorami operatorów liniowych. Operatory położenia i pędu. Równanie ruchu dla obserwabli (obserwowanych wielkości fizycznych) w mechanice kwantowej.

8.2. Przekształcenia kanoniczne

- 8.2.1. Dowolne przekształcenia zmiennych w przestrzeni fazowej. Macierz przekształcenia. Równania ruchu w nowych zmiennych. Niezachowanie formy równań Hamiltona.
- 8.2.2. Przekształcenia kanoniczne – zachowujące nawiasy Poissona. Warunki kanoniczności przekształcenia. Symplektyczność macierzy przekształcenia. Związki pomiędzy elementami macierzy przekształcenia i macierzy odwrotnej. Pole wektorowe związane z przekształceniem kanonicznym. Potencjalność pola wektorowego. Funkcja tworząca przekształcenia kanonicznego.
- 8.2.3. Równania Hamiltona po przekształceniu kanonicznym. Uniwersalne równanie ruchu na nowe zmienne fazowe. Wyrażenie pochodnych czasowych nowych zmiennych w formie nawiasów Poissona. Hamiltonian w nowych równaniach Hamiltona.
- 8.2.4. Przekształcenia kanoniczne swobodne. Uogólniona transformacja punktowa. Funkcja tworząca transformacji. Nowy Hamiltonian. Równanie Hamiltona-Jacobiego. Ruch jako swobodna transformacja kanoniczna. Działanie jako funkcja tworząca.

8.3. Ciecz fazowa

- 8.3.1. Pole prędkości fazowej. Ruch fazowy jako ruch substancjalny cieczy fazowej. Dywergencja pola prędkości. Twierdzenie Liouville'a o zachowaniu objętości w przestrzeni fazowej. Uniwersalne niezmienniki całkowite równań Hamiltona.
- 8.3.2. Stabilność ruchu fazowego. Możliwa niestabilność rozwiązań równań Hamiltona ze względu na warunki początkowe. Chaos deterministyczny.

Literatura

Podstawowe podręczniki

- G. Białkowski, *Mechanika klasyczna*.
- L. D. Landau , E. M. Lifszyc, *Mechanika*.
- W. Rubinowicz , W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*.
- E. T. Whittaker, *Dynamika analityczna*.
- I. Olchowski, *Mechanika teoretyczna*.
- G. K. Susłow, *Mechanika teoretyczna*.

Literatura pomocnicza

- W.I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*
- J. I. Nejmark, N. A. Fufajew, *Dynamika układów nieholonomicznych*.
- H. G. Schuster, *Chaos deterministyczny, Wprowadzenie*.
- I. M. Gelfand, S. W. Fomin, *Rachunek wariacyjny*.
- M. M. Ławrentiew, L. A. Lusternik, *Rachunek wariacyjny*.
- L. D. Landau, E. M. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*.
- Cz. Rymarz, *Mechanika ośrodków ciągłych*.
- J. V. José, E. J. Saletan, *Classical dynamics, A contemporary approach*.
- A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*.
- P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle, vol. I, II, (Teoreticzeskaja mechanika)*.
- G. Goldstein, *Klasiczeskaja mechanika*.
- T. W. B. Kibble, F. H. Berkshire, *Classical mechanics*.